



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS  
AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD ZACATENCO  
DEPARTAMENTO DE CONTROL AUTOMÁTICO

“Diseño de un Arreglo Reconfigurable de  
Ruedas de Reacción basado en la Banda de Möbius  
para el Control de Actitud de Satélites CubeSat”

T E S I S

QUE PRESENTA

ING. VÍCTOR MANUEL LECHUGA GERÓNIMO

PARA OBTENER EL GRADO DE  
MAESTRO EN CIENCIAS

EN LA ESPECIALIDAD DE  
CONTROL AUTOMÁTICO

DIRECTOR DE LA TESIS

DR. WEN YU LIU

CIUDAD DE MÉXICO

ABRIL, 2023



A la memoria de mi hermano.

A todos aquellos que no pudieron acceder a una preparación académica.

A la sociedad mexicana.



## Agradecimientos

A Dios ante todo porque, en su divina sabiduría, me brindó la oportunidad de realizar este proyecto y me guió durante él.

A mis padres, porque procuraron en mí la formación académica que ellos sólo pudieron soñar.

A mis hermanos, Mauricio y Monserrat, porque en su momento me impulsaron a retomar los estudios en aras de superarme y llegar a la frontera del conocimiento.

A Rogelio, por su ferviente camaradería y haber sido pilar fundamental en la solución de los obstáculos.

A Abraham, por las entrañables conversaciones y porque sus donaciones de café fueron cruciales.

A Pedro Chiapas, por recordarme que somos humanos y que la religión no es ajena a la vida de un científico.

A mis colegas estudiantes, Óscar, Daniela, Miranda y Cruz, porque son la prueba viviente de que el trabajo en equipo es la mejor manera para llegar a la meta.

A mi director de tesis, el Dr. Wen Yu Liu, por aceptar dirigir un tema de investigación como este, por su apoyo incondicional y su eminente dirección en este trabajo.

A mis sinodales, la Dra. Martha Belem Saldivar Márquez, por la exhaustiva revisión y sus apreciables comentarios; y el Dr. Moisés Bonilla Estrada, por su destacada participación.

A la Ing. Sheila Rubí Montiel Sainz, cuya oficina siempre permaneció abierta para cualquier ocasión.

A la coordinación académica, a cargo del Dr. Rubén Alejandro Garrido Moctezuma, y a su personal por la atención, seguimiento y consejo; pero sobretodo, paciencia.

Al colegio de profesores por los múltiples votos de confianza.

Al CONACyT por el apoyo económico brindado durante mis estudios de posgrado y la elaboración de esta obra.

A la sociedad mexicana, porque sólo con sus contribuciones fue posible esta investigación.

A los Juanitos, Ariadna y Pish, todos por ser aquel soporte emocional imprescindible durante el posgrado.

Al M. en C. Jorge Javier Hernández Gómez.

... En algún momento, en alguna tesis, leí acerca de lo curiosamente sencillo que resulta escribir los agradecimientos una vez que se ha concluido con la escritura. Permanecí escéptico por mucho tiempo, pues siempre creí que era la parte más complicada. Hoy me doy cuenta que no sólo estaba equivocado; sino que en realidad he sido privilegiado, porque haber recibido tanto de ustedes lo hizo verdaderamente fácil.

El espacio que contiene esta hoja nunca será suficiente para plasmar el grado agradecimiento y la gratitud que guardo para con cada uno de ustedes. A todos...

*Gracias.*



## Resumen

Se presenta el diseño de una versión novedosa, mejorada y más potente de los Arreglos de Ruedas de Reacción (RWA, por sus siglas en inglés), con características tales que le permiten reubicar a los actuadores que lo conforman en diferentes direcciones. Convencionalmente, las ruedas de reacción están fijos dentro de la estructura satelital, lo que implica que el momento angular generado sólo pueda ser transferido en una única dirección. Esto limita severamente el potencial de los actuadores, ya que en caso de fallar uno, existe el riesgo de perder un grado de libertad.

En ese sentido, el objetivo de este trabajo es diseñar un RWA tal que sea capaz de reubicar los actuadores que lo conforman en diferentes partes de la estructura; y con ello, asegurar la supervivencia del satélite y la continuidad de la misión. Este cometido se logra gracias al estudio de la Banda de Möbius que, tras algunas modificaciones, se da con una superficie capaz de permitir la reubicación necesaria. También se propone un actuador secundario encargado de realizar el desplazamiento, ya que las ruedas de reacción no son capaces de reubicarse por si mismas.

En consecuencia, gran parte de lo plasmado gira en torno al análisis de los RWA y sus propiedades, el modelado de los actuadores y la realización los ajustes topológicos necesarios para la Banda de Möbius. Por último, se ofrece la simulación de todos los elementos bajo una arquitectura de control en cascada, cuyos controladores son propuestos de la familia PID y son sintonizados mediante el método de Evans. La simulación conjunta ofrece cuatro escenarios principales en los que se desean diferentes referencias de actitud para un satélite CubeSat de 3U a través de diferentes RWA seleccionados.

Las simulaciones demuestran que el diseño es efectivo, ya que en todos los escenarios se logra la correcta regulación de la actitud en un tiempo finito satisfactorio.

## Abstract

The design of a new, improved and more powerful version of the Reaction Wheel Array (RWA) is presented, with features such it allows to relocate the actuators in different directions. Conventionally, the reaction wheels are fixed inside the satellite structure, which implies that the generated angular momentum can only be transferred in a single direction. This severely limits the potential of the actuators, because there is a risk of losing one degree of freedom in case one fails.

In this sense, the objective of this work is to design an RWA that it is capable of relocating the actuators in different sections of the structure; and with it, ensure the survival of the satellite and the continuity of the mission. This is achieved thanks to the study of the Möbius Strip which, after some modifications, a surface capable of allowing the necessary relocation is found. A secondary actuator in charge of the displacement is also proposed, since the wheels are not able to relocate by themselves.

Consequently, the content of this work focuses on the analysis of the RWA and its properties, the modeling of the actuators and the realization of the necessary topological adjustments for the Möbius Strip. Finally, the simulation of all the components is offered under a cascade control architecture, whose controllers are proposed from the PID family and are tuned by using the Evans method. The overall simulation offers four main cases where different attitude references are desired for a 3U CubeSat satellite based on divers RWAs.

The simulations show that the design is effective, since in all the cases the correct regulation of the attitude is achieved in a satisfactory finite time.





# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>I</b>
<b>Índice general</b>	<b>II</b>
<b>Índice de Figuras</b>	<b>VII</b>
<b>Índice de Tablas</b>	<b>VIII</b>
<b>Listas de Abreviaturas, Notación y Tipografía</b>	<b>IX</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Alcances . . . . .	3
1.2. Objetivos . . . . .	3
1.3. Estructura del contenido . . . . .	4
<b>2. Estado del Arte</b>	<b>5</b>
2.1. El estándar CubeSat . . . . .	5
2.2. Sistemas del CubeSat . . . . .	10
<b>3. Diseño de Arreglo Reconfigurable de Ruedas de Reacción</b>	<b>19</b>
3.1. Elementos Orbitales . . . . .	19
3.2. Perturbaciones ambientales . . . . .	20
3.3. Marco de Referencia . . . . .	22
3.4. Representación de Actitud y Rotación . . . . .	23
3.5. Actitud por Cuaterniones . . . . .	25

3.6. Dinámica Satelital . . . . .	28
3.7. Arreglo de Ruedas de Reacción . . . . .	32
3.8. Tipos de Arreglo de Rueda de Reacción . . . . .	34
3.9. Arreglo Reconfigurable de Ruedas de Reacción . . . . .	38
<b>4. Modelado de Actuadores y Satélite</b>	<b>41</b>
4.1. Rueda de Reacción . . . . .	41
4.1.1. Disco Inercial . . . . .	42
4.1.2. Modelo del Motor . . . . .	45
4.1.3. Modelo en Espacio de Estados y Función de Transferencia . . . . .	47
4.2. Banda de Möbius . . . . .	49
4.2.1. Ajustes Topológicos . . . . .	50
4.2.2. Puntos de Intersección y Vectores Normales . . . . .	55
4.2.3. Vector Normal a la Banda de Möbius modificada . . . . .	56
4.2.4. Arreglo de Bandas de Möbius modificadas . . . . .	58
4.3. Desplazador . . . . .	61
4.4. Modelo de la Dinámica Satelital . . . . .	63
4.5. Modelo de Arreglo Reconfigurable de Rueda de Reacción . . . . .	64
4.6. Propuesta de Control Multilazo para la Dinámica Satelital . . . . .	67
<b>5. Simulación del Control Multilazo</b>	<b>69</b>
5.1. Control de Rueda de Reacción . . . . .	69
5.2. Control de Desplazador . . . . .	73
5.3. Control de Dinámica Satelital . . . . .	77
5.4. Reconfiguración de RWA . . . . .	79
<b>6. Conclusiones y Trabajos a Futuro</b>	<b>85</b>
<b>A. Documentación Técnica</b>	<b>87</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>90</b>

# Índice de figuras

2.1. CubeSat de 1U. [1] . . . . .	5
2.2. Dimensiones de CubeSat de acuerdo con las Unidades. . . . .	6
2.3. Lanzamientos de CubeSat por Unidades. [2] . . . . .	7
2.4. Histórico y predicción de números lanzamientos de CubeSats por año. [2] . . . . .	7
2.5. Número acumulado de CubeSat lanzados para enero de 2022 por país. [2] . . . . .	8
2.6. Descripción gráfica de la precesión. . . . .	13
2.7. Dos Ruedas de Reacción del CubeSat Goliat.[3] . . . . .	14
2.8. Giroscopio de Control de Momento modelo <i>CMG 15-45 S</i> fabricado por Airbus. [4] . . . . .	16
2.9. Marco estructural (MECH) del CubeSat de una Unidad. . . . .	17
2.10. Sistemas de un CubeSat. . . . .	18
3.1. Diagrama a bloques de la ecuación a) (3.13) y b) (3.14). . . . .	25
3.2. Diagrama a bloques para la obtención del cuaternión de error. . . . .	26
3.3. Diagrama a bloques de la ecuación a) (3.21) y b) (3.20). . . . .	27
3.4. Dibujo simplificado de una rueda de reacción colineal con un eje y centrada en el origen de un marco de referencia. . . . .	31
3.5. Dos ruedas de reacción perpendiculares (2-P) . . . . .	34
3.6. Tres ruedas de reacción ortogonales (3-O) . . . . .	35
3.7. Cuatro ruedas de reacción en arreglo tetraédrico regular (4-TR). . . . .	35
3.8. Cuatro ruedas de reacción en arreglo tetraédrico inclinado (4-TI). . . . .	36
3.9. Cuatro ruedas de reacción en piramide (4-PYR). . . . .	37

4.1. Diagrama a bloques de la dinámica interna y externa de la rueda de reacción. . . . .	41
4.2. Dibujo de propuesta de disco inercial . . . . .	42
4.3. Diagrama a bloques de la dinámica interna de la rueda de reacción. . . . .	45
4.4. Diagrama a bloques de la dinámica externa de la rueda de reacción. . . . .	48
4.5. Banda de Möbius original . . . . .	49
4.6. Banda de Möbius con ejes alineados con $S$ . . . . .	50
4.7. Banda de Möbius con ejes alineados y puntos de intersección. . . . .	51
4.8. Banda de Möbius con torsión aumentada. . . . .	52
4.9. Banda de Möbius con torsión aumentada y recortada. . . . .	52
4.10. Superficie de cilindro sin tapas, con ancho y radio unitarios. . . . .	53
4.11. Superficie recortada de cilindro sin tapas. . . . .	54
4.12. Banda de Möbius modificada. . . . .	54
4.13. Banda de Möbius modificada y transparente. . . . .	55
4.14. Banda de Möbius modificada con $\eta = 3/2\pi$ . . . . .	58
4.15. Arreglo de Bandas modificadas de Möbius. . . . .	60
4.16. Diagrama a bloques de la dinámica completa del desplazador. . . . .	61
4.17. Diagrama a bloques de la dinámica de actitud satelital con entrada $\tau_s(t)$ y salida $\mathbf{q}_s(t)$ . . . . .	63
4.18. Diagrama a bloques de la generación de par a partir de los vectores unitario y normalizado de velocidad angular de una rueda de reacción. . . . .	64
4.19. Diagrama a bloques para la obtención de a) $\tau_T(t)$ y b) $\tau_R(t)$ . . . . .	66
5.1. Lugar de las raíces de la función de transferencia $R_c(s)$ . . . . .	72
5.2. Respuesta de a) $R_c(s)$ ante el escalón unitario, y b) $e(t)$ si $k_p$ igual 0.1, 1 y 10. . . . .	72
5.3. Lugar de las raíces de la función de transferencia $D_c(s)$ si $C_d(s) = 1$ . . . . .	75
5.4. Lugar de las raíces de la función de transferencia $D_c(s)$ si $C_d(s) = 0.00001$ . . . . .	75
5.5. Respuesta de $D_c(s)$ ante el escalón si $C_d(s) = 0.00001 + 0.1\frac{1}{s}$ . . . . .	75
5.6. Respuesta de $\Delta_c(s)$ ante el escalón de $4\pi$ si $C_D(s)$ bajo diferentes ganancias. . . . .	76
5.7. Valores de a) $T(u)$ si $\eta = 1/2\pi$ , b) $u(t)$ . . . . .	76
5.8. Actitud satelital y cuaternión de error. . . . .	77

---

5.9. Simulación de las perturbaciones $\tau_p(t)$ . . . . .	78
5.10. Caso 1: Actitud y error satelitales . . . . .	80
5.11. Caso 1: Tensión aplicada a las ruedas de reacción y par generado. . . . .	80
5.12. Caso 1: Tensión aplicada a los desplazadores y vectores unitarios obtenidos. . . . .	80
5.13. Caso 2: Actitud y error satelitales . . . . .	81
5.14. Caso 2: Tensión aplicada a las ruedas de reacción y par generado. . . . .	81
5.15. Caso 2: Tensión aplicada a los desplazadores y vectores unitarios obtenidos. . . . .	82
5.16. Caso 3: Actitud y error satelitales . . . . .	82
5.17. Caso 3: Tensión aplicada a las ruedas de reacción y par generado. . . . .	83
5.18. Caso 3: Tensión aplicada a los desplazadores y vectores unitarios obtenidos. . . . .	83
5.19. Caso 4: Actitud y error satelitales . . . . .	84
5.20. Caso 4: Tensión aplicada a las ruedas de reacción y par generado. . . . .	84
5.21. Caso 4: Tensión aplicada a los desplazadores y vectores unitarios obtenidos. . . . .	84

# Índice de tablas

2.1. Relaciones de masas y dimensiones para principales unidades de CubeSat. . . . .	6
2.2. Aplicaciones de los satélites CubeSat. . . . .	9
3.1. Arreglos de Rueda de Reacción más comunes. . . . .	33
4.1. Parámetros y variables mecánicos y eléctricos de motor de imanes permanentes. . . . .	46
4.2. Puntos de intersección en ejes $\hat{x}_S$ , $\hat{y}_S$ y $\hat{z}_S$ . . . . .	59
5.1. Parámetros mecánicos y eléctricos caracterizados del motor <i>ECX Speed 6 M</i> . . . . .	70
5.2. Dimensiones del disco de inercia de la rueda de reacción. . . . .	70
5.3. Parámetros mecánicos y eléctricos del reductor planetario <i>GPX-6</i> de 3 etapas. . . . .	74
5.4. Acciones y ganancias de control para la dinámica satelital. . . . .	78
5.5. Pares estimados de perturbación. . . . .	78
5.6. Escenarios para validar el desempeño del Arreglo Reconfigurable de las Ruedas de Reacción. . . . .	79

# Listas de Abreviaturas, Notación y Tipografía

## Abreviaturas

ADCS,	Sistema de Determinación y Control de Actitud / <i>Attitude Determination and Control System.</i>
ACS,	Sistema de Control de Actitud / <i>Attitude Control System.</i>
ADS,	Sistema de Determinación de Actitud / <i>Attitude Determination System.</i>
ADCS-HW,	Hardware del Sistema de Determinación y Control de Actitud / <i>ADCS - Hardware.</i>
RW,	Rueda de Reacción / <i>Reaction Wheels.</i>
RWA,	Arreglo de Ruedas de Reacción / <i>Reaction Wheel Array.</i>
MECH,	Sistema Mecánico / <i>Mechanical System.</i>
OBC,	Computadora a Bordo / <i>On-Board Computer.</i>
COMM,	Sistema de Comunicaciones / <i>Communication System.</i>
EPS,	Sistema de Potencia Eléctrica / <i>Electrical Power System.</i>
TCS,	Sistema de Control Térmico / <i>Thermal Control System</i>
PL,	Carga Útil / <i>Pay-Load</i>
TT&C,	Sistema Telemetría, Trazabilidad y Comando / <i>Telemetry, Tracking and Command System.</i>
LEO,	Orbita Baja Terrestre / <i>Low Earth Orbit.</i>
MEO,	Orbita Media Terrestre / <i>Medium Earth Orbit</i>
GEO,	Orbita Terrestre Geosíncrona. / <i>Geostationary Orbit</i>
HEO,	Orbita Terrestre Alta / <i>High Earth Orbit.</i>
IMU,	Unidad de Medición Inercial / <i>Inertial Measurement Unit</i>
SCO,	Marco Basado en la Aeronave. / <i>SpaceCraft Orbit Frame</i>
ORC,	Marco con Referencia en la Órbita. / <i>Orbital Reference Coordinate.</i>
ECI,	Marco Inercial Centrado en la Tierra. / <i>Earth-Centered Inertial frame.</i>

## Notación

$\omega_r(t)$ ,	Velocidad angular de la rueda de reacción.	$\phi$ ,	Alabeo / <i>Roll.</i>
$\omega_R(t)$ ,	Velocidad angular de las ruedas de reacción.	$\theta$ ,	Cabeceo / <i>Pitch.</i>
$\omega_s(t)$ ,	Velocidad angular del satélite.	$\psi$ ,	Guiñada / <i>Yaw.</i>
$\omega_d(t)$ ,	Velocidad angular del desplazador.	$s$ ,	Variable compleja 's'.
$\alpha_R(t)$ ,	Aceleración angular de la rueda de reacción.	$R(s)$ ,	Función de transferencia.
$\alpha_s(t)$ ,	Aceleración angular del satélite.	$C_r$ ,	Matriz de controlabilidad de la rueda de reacción.
$\tau_m(t)$ ,	Par motor.	$C_d$ ,	Matriz de controlabilidad del desplazador.
$\tau_s(t)$ ,	Par ejercido sobre el satélite.	$O_r$ ,	Matriz de observabilidad de la rueda de reacción.
$\tau_p(t)$ ,	Par de perturbaciones.	$O_d$ ,	Matriz de observabilidad del desplazador.
$H_r(t)$ ,	Momento angular de la rueda de reacción.	$\mathbf{A}$ ,	Matriz de estados.
$H_{Rmax}$ ,	Momento angular máximo de la RW.	$\mathbf{B}$ ,	Matriz de entradas.
$H_s(t)$ ,	Momento angular del satélite.	$\mathbf{C}$ ,	Matriz de salidas.
$\beta$ ,	Ángulo de inclinación.	$\mathbf{D}$ ,	Matriz de transmisión directa.
$\mathbf{I}_s$ ,	Tensor de inercia del satélite.	$\mathbf{x}(t)$ ,	Vector de estados.
$I_R$ ,	Momento de inercia de la rueda de reacción.	$\mathbf{u}(t)$ ,	Vector de entradas.
$I_d$ ,	Momento de inercia del disco inercial.	$\mathbf{y}(t)$ ,	Vector de salidas.
$I_r$ ,	Momento de inercia del rotor del motor.	$\mathbf{q}$ ,	Cuaternión.
$k_m$ ,	Constante de par del motor.	$\mathbf{W}(\mathbf{q})$ ,	Matriz de cambio de cuaterniones del satélite.
$k_b$ ,	Constante de fuerza contra-electromotriz.	$\otimes$ ,	Producto de cuaternión.
$R_a$ ,	Resistencia eléctrica de la armadura.	$\bar{\mathbf{q}}$ ,	Conjugado de cuaternión.
$i_a(t)$ ,	Corriente eléctrica de armadura.	$\ \mathbf{q}\ $ ,	Norma de cuaternión.
$e(t)$ ,	Tensión eléctrica de alimentación.	$\hat{\mathbf{q}}$ ,	Cuaternión unitario.
$e_a(t)$ ,	Fuerza contra-electromotriz.	$m$ ,	Masa.
$b$ ,	Constante de fricción viscosa.	$\rho$ ,	Densidad.
$\theta_r(t)$ ,	Posición angular del rotor.	$t_r$ ,	Tiempo de rotación.
		$t_d$ ,	Tiempo muerto.

## Tipografía

Redonda, Constantes y ganancias  
Negritas, Matrices y vectores





# Capítulo 1

## Introducción

*“Todo principio tiene varios finales.” – Ekko*

---

En la actualidad, la industria aeroespacial crece a pasos agigantados. Han quedado atrás aquellos tiempos en los que colocar un satélite en órbita representaba una gran hazaña. Desde el inicio del siglo XXI, la tecnología se ha abaratado más allá de lo imaginable y se ha hecho más accesible para la comunidad científica internacional; e igual que la tecnología, la ciencia también se consolida. Han pasado cerca de cien años desde que se obtuvieron los primeros cálculos necesarios para colocar un cuerpo en órbita mediante la determinación de la velocidad de escape, y poco más de sesenta desde que se orbitó el primer satélite: el Sputnik I.

En el ámbito literario, los estudios plasmados en [5] son considerados el pilar fundamental en el ámbito cosmonáutico y el control de orientación – en adelante, actitud –, pues cimentaron las bases para análisis más profundos sobre la dinámica y el control de posición y actitud de objetos espaciales. El control de actitud es un tema de sumo interés a la hora de orbitar un satélite, y que por tanto ha sido ampliamente estudiado, pudiéndose hallar así infinidad de recursos bibliográficos. La importancia de esta variable es tal, que se ha formalizado como una parte esencial del satélite con el transcurso del tiempo [6], [7] y [8], [9]. Por esta razón, contar con un sistema apropiado de control de actitud se traduce en el cumplimiento y supervivencia de la misión del satélite.

En virtud del punto anterior, uno de los factores clave que permitieron que la industria aeroespacial se volviera tan accesible fue la creación de una iniciativa, la cual unificara bajo un mismo diseño y concepto a la enorme diversidad de satélites que se pueden manufacturar. De esta manera, surgió el estándar *CubeSat* y otros proyectos hermanos como el *CanSat* [10].

Este hito revolucionó la forma en la que se generaba el conocimiento sobre el tema, ya que anteriormente el estudio de la dinámica y cinemática de los satélites era algo inaccesible y exclusivo de la iniciativa privada, industria militar o gubernamental. Así, a partir de la creación del *CubeSat* y tras algunos lanzamientos, súbitamente el desarrollo de satélites miniaturizados se encontraba al alcance de universidades, sus investigadores y estudiantes. Uno de los más claros ejemplos de esto es la Universidad de Aalborg, en Dinamarca, en la cual se han diseñado y construido diversos satélites *CubeSat* desde el año 2002 y cuyos logros han contribuido al desarrollo de esta ciencia [11] [12].

Muchos de dichos estudios se enfocan sobre el uso de unos actuadores denominados «rueda de reacción» para implementar un control completo de actitud. Convencionalmente, estos actuadores se emplean para aplicaciones lejanas a lo espacial, tales como péndulos invertidos. No obstante, se ha demostrado que son un éxito para la operación de actitud de satélites; especialmente los CubeSat, en donde las dimensiones son reducidas.

Por esta razón, las ruedas de reacción se han convertido en los actuadores preferidos por los diseñadores. No sólo eso; son compactos, eficaces, livianos, duraderos, consumen únicamente energía eléctrica, limpios y proveen un alto grado de exactitud [13]. Estas propiedades las convierten en actuadores de actitud casi perfectos.

En consecuencia, se han explorado más capacidades al ser tan buenos actuadores; por ejemplo,

1. Su interacción y sinergia con otros actuadores.
2. Colocarlos en diferentes ubicaciones dentro del satélite.
3. Aumentar el número de actuadores.
4. Colocarlos a ciertos ángulos de inclinación para optimizar el consumo energético [14].
5. Colocarlos en ubicaciones estratégicas para optimizar el efecto generado [15].

Si bien cada vez son menores las áreas de oportunidad, es probable que aún exista algo más que descubrir. La respuesta a esta interrogante yace quizás en uno de los problemas no resueltos: la falla fatal.

El inconveniente de las ruedas – y su mayor y más infame desventaja –, es que se vuelven completamente inservibles una vez que entran en modo de falla. Este modo se presenta por razones tales como un calentamiento excesivo que derivan en el deterioro de sus aislamientos, un cortocircuito, el desgaste de los rodamientos, etcétera. Lo verdaderamente preocupante no es perder un actuador, sino la pérdida de un grado de libertad del satélite, ya que si el propósito para el cual fue enviado a órbita requiere de todos, entonces la misión se considera como terminada.

Se han hecho algunas propuestas para evitar este escenario a toda costa, como montar dos o más ruedas apuntando en una misma dirección; es decir, que sean colineales a un eje del satélite. Sin embargo, esto representa una disminución en el peso y el volumen disponibles para los otros sistemas, y en contraparte, un aumento en la complejidad del algoritmo de control de actitud. También se han aplicado intrincados mecanismos que tienen como fin ofrecer versatilidad en la ubicación de las ruedas, pero en cuyo caso están limitadas en su movimiento; o bien, exceden las dimensiones del CubeSat [16].

Es así que surge la motivación de este trabajo, que no es otra sino explorar una manera más sencilla, versátil y capaz de reubicar una rueda de reacción en cualquier dirección dentro del cuerpo del satélite para suplir a otra que haya caído en modo de falla, y con ello, continuar ofreciendo un control completo de actitud.

## 1.1. Alcances

Entre los alcances para este trabajo se encuentran:

- La exploración del estado del arte relacionado con el Sistema de Determinación de Control de Actitud (ADCS) para satélites tipo CubeSat. Esto incluye sensores, algoritmos y criterios para la selección y diseño del control, subsistemas satelitales, actuadores y ruedas de reacción y sus arreglos.
- El estudio de los elementos orbitales, marcos de referencia inerciales y métodos para la descripción de la rotación y orientación, perturbaciones ambientales, dinámica de actitud y de actuadores.
- Diseño de un método para el control de actitud de un satélite CubeSat de 3U mediante ruedas de reacción y basado en una banda de Möbius bajo ciertas modificaciones.
- Simulación numérica a manera de comprobación del diseño elaborado.
- Análisis de los resultados, recomendaciones y trabajos a futuro.

## 1.2. Objetivos

### Objetivo General.

Diseñar un Arreglo Reconfigurable de Ruedas de Reacción para el control completo de actitud de un satélite CubeSat de 3U.

### Objetivos Específicos.

1. Reconocer el estado del arte en materia del control de actitud satelital con enfoque en la tecnología CubeSat y las ruedas de reacción.
2. Establecer los fundamentos físicos y matemáticos relacionados con la actitud satelital.
3. Determinar cuáles son los arreglos de ruedas de reacción más populares, sus propiedades y características.
4. Generar una propuesta técnica para la reubicación de las ruedas de reacción.
5. Modelar la dinámica de la rueda de reacción, los elementos y actuadores relacionados en la propuesta.
6. Proponer un algoritmo de control para la regulación de la actitud satelital.
7. Simular la dinámica de un satélite CubeSat de 3U con base en el algoritmo de control seleccionado y la propuesta generada.
8. Evaluar los resultados de la simulación obtenida.

### 1.3. Estructura del contenido

Este trabajo se estructura bajo el capitulado que se presenta a continuación.

1. **Introducción.**

2. **Estado del Arte.** Se presenta el estándar CubeSat junto con algunas aplicaciones, conceptos de importancia y propiedades. En segundo término, se establecen los subsistemas que integran el satélite y sus funciones.

3. **Desarrollo.** En este capítulo se asientan los fundamentos físicos y matemáticos con el fin de conjeturar una propuesta técnica de solución.

4. **Modelado.** En este capítulo se lleva a cabo el razonamiento necesario para dar con la representación matemática de los procesos involucrados en la propuesta de solución.

5. **Simulación.** Se establecen o determinan los valores numéricos para obtener la dinámica del sistema con respecto del tiempo; de acuerdo con lo visto en el capítulo anterior.

6. **Conclusiones y trabajo a futuro.** Por último, se presentan las conclusiones del trabajo al igual que algunas recomendaciones para futuras aportaciones en la misma línea de investigación.

## Capítulo 2

# Estado del Arte

*“La ciencia avanza un funeral a la vez.” – Max Planck*

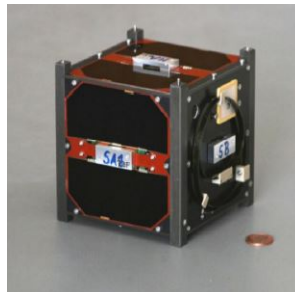
---

### 2.1. El estándar CubeSat

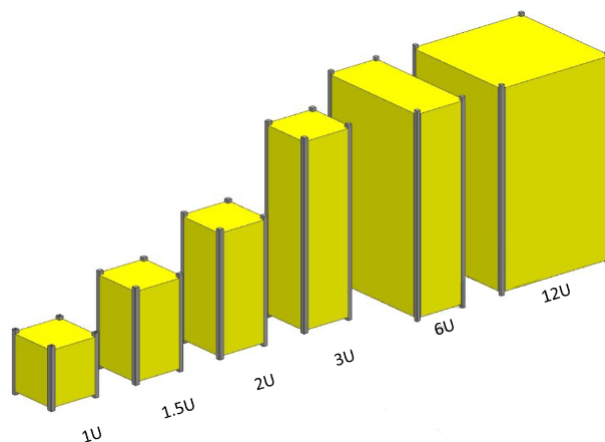
A finales de la década de 1990, un grupo de investigadores de la Universidad Politécnica del Estado de California (*Cal-Poly*) y de la Universidad de Stanford dieron inicio a un proyecto denominado *CubeSat* [17], cuyo fin era facilitar la puesta en órbita de satélites miniatura para la comunidad científica internacional – en especial la académica –, esto gracias al abaratamiento de los lanzamientos gracias al uso de una única geometría modular para los satélites de este tipo [18].

Este proyecto partió de un principio de homogeneización, ya que el costo de poner un satélite en órbita se reduce enormemente si se dispone de una misma geometría para varios satélites. Así, se elimina la necesidad de rediseñar y construir dispositivos y componentes hechos a cada medida [19].

De esta forma, se propuso que la estructura de estos satélites fuera cúbica para optimizar el volumen ocupable, y que características como sus dimensiones y pesos estarían basados en un sistema modular denominado *Unidades (U)*, en donde 1 Unidad equivale a aproximadamente un cubo de 10 centímetros por lado, y con una masa máxima permisible de 2 kilogramos [17]. En la figura 2.1 se ejemplifica un CubeSat de 1U, y en la figura 2.2 se ofrece una ilustración de su tamaño en comparación con otras Unidades. Por otra parte, en la tabla 2.1 se concentran las medidas y masa permitidas para cada una.



**Figura 2.1:** CubeSat de 1U. [1]



**Figura 2.2:** Dimensiones de CubeSat de acuerdo con las Unidades.

**Tabla 2.1:** Relaciones de masas y dimensiones para principales unidades de CubeSat.

Unidades [U]	Ancho [mm]	Alto [mm]	Largo [mm]	Masa máxima [kg]
1	100	100	113.5	2.00
1.5	100	100	170.2	3.00
2	100	100	227	4.00
3	100	100	340.5	6.00
6	226.3	100	366	12.00
12	226.3	226.3	366	24.00

La gamma de Unidades disponibles no se limita a las ilustradas en la figura 2.2 ni en la tabla 2.1, a pesar de que son las más populares. Es un hecho que son factibles los modelos desde 0.25U y hasta 27U; a pesar de que el más grande lanzado históricamente es de 16U [2].

Con el transcurso del tiempo, el diseño de satélites en apego al proyecto CubeSat ha propiciado que se convierta en un estándar internacional, cuya popularidad generó que los componentes se comercialicen ampliamente de manera prefabricada en el mercado aeroespacial. Tal es así, que existen diversas tiendas para la compra de dichos artículos – denominados *Commercial off-the-shelf* (COTS) –, a un costo muchas veces menor que fabricados de manera propia o independiente [20].

A medida que crece la popularidad del CubeSat, también el número de lanzamientos y con ello el número de Unidades. En la figura 2.3, se ilustra el número de lanzamientos de CubeSats en función del tipo.

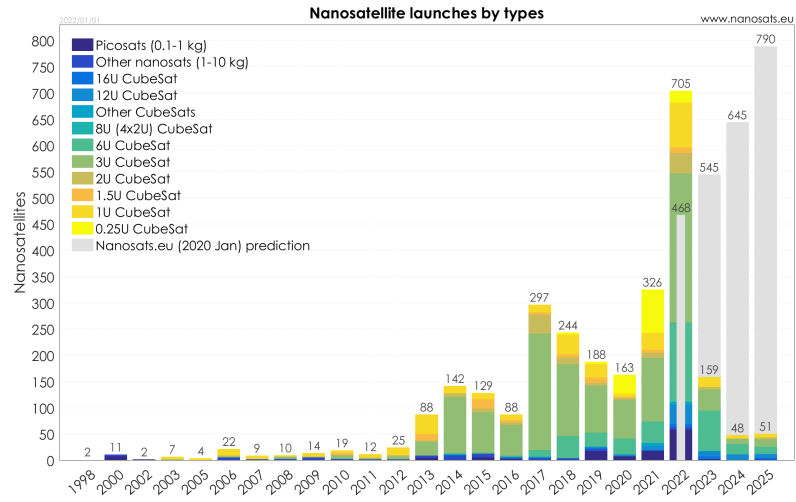


Figura 2.3: Lanzamientos de CubeSat por Unidades. [2]

Por otra parte, el número de lanzamientos de CubeSats se ha incrementado dramáticamente a lo largo de los años [2]. Por ejemplo, desde la creación del estándar en el año 2001, y hasta el año 2015, el número global de lanzamientos de CubeSats ascendió a poco más de 496 unidades. Para enero del año 2022, la cifra ha estado cerca de triplicarse, llegando a 1,306 unidades únicamente en el periodo comprendido entre los años 2016 y 2021. De acuerdo con las tendencias, las predicciones apuntan un severo incremento para los próximos años, haciendo que los pronósticos indiquen cuando menos 2,685 lanzamientos entre 2022 y 2025. En la figura 2.4 se visualiza lo anterior.

Respecto a la distribución de lanzamientos por país (véase la figura 2.5), México cuenta únicamente con cinco para la fecha de enero 2022, en contraste con su vecino del norte con 1,218 [2]. Este dato es de suma importancia para notar el rezago científico, tecnológico y de infraestructura en el ramo.

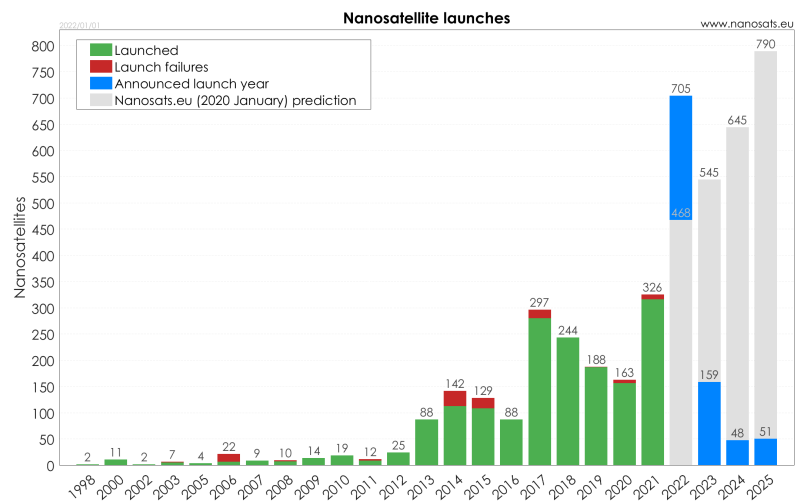


Figura 2.4: Histórico y predicción de números lanzamientos de CubeSats por año. [2]





Tabla 2.2: Aplicaciones de los satélites CubeSat.

Campo	Aplicación	Actividad	Objetivo
Terrestre	Observación de fenómenos	Monitoreo, rastreo y detección temprana	Incendios
			Tsunamis
			Sargazo
			Tornados
			Calentamiento global
	Estudio de condiciones atmosféricas	Medición y monitoreo de variables atmosféricas	Campo magnético
			Presión
			Temperatura
			Densidad
			Altitud
	Estudio de condiciones terrestres	Medición y monitoreo de variables terrestres	Viento
			Topografía
			Oceanografía
			Recursos naturales
			Clima
Espacial	Observación astronómica	Monitoreo y observación	Cultivos
			Desastres naturales
			Astros
Científico	Desarrollo tecnológico	Pruebas, revisión de desempeño y rendimiento de nuevos dispositivos y tecnologías	Planetas
			Satélites naturales
			Cargas útiles
			Sensores y actuadores
	Comunicaciones	Transmitir o retransmitir información desde o hacia una estación terrena	Antenas y radios
			Materiales
			Señales de radio
			Señal de GPS
			Señales de otros satélites

Como es notable por las aplicaciones, los CubeSat son dispositivos tecnológicos sumamente complicados en donde convergen diversas ramas de la ciencia. Para cumplir su propósito, los satélites y los CubeSat se descomponen en subsistemas bien definidos y que se abordan a continuación.

## 2.2. Sistemas del CubeSat

Un satélite CubeSat se conforma por los mismos subsistemas (a partir de este punto, *sistemas*) que uno moderno convencional, los cuales son independientes uno del otro pero guardan una estrecha relación entre sí. Cada uno posee una función específica y recibe por tal una denominación propia. El objetivo conjunto de dichos sistemas son diversos, sin embargo, el primordial siempre será la correcta ejecución de la misión y garantizar la supervivencia del CubeSat hasta el límite de sus capacidades; considerando al satélite como el sistema mayor o macrosistema. Los sistemas son:

- **Sistema de Potencia Eléctrica** / *Electric Power System (EPS)*.

Es el sistema responsable de ofrecer un suministro continuo y regulado de energía eléctrica. Está conformado por el medio de energía entrante – típicamente celdas solares –, baterías, reguladores y convertidores eléctricos.

Este sistema cuantifica el consumo de todos los sistemas y posee los algoritmos necesarios para dosificar la energía disponible mediante criterios establecidos. En caso contrario, es posible que se comprometa el éxito de la misión o la vida útil del CubeSat [29].

Este sistema se relaciona estrechamente con el Sistema de Determinación y Control de Actitud, ya que este puede optimizar la carga de las baterías si orienta correctamente las caras de las celdas solares cuando la luz del astro se encuentre disponible [30].

- **Sistema de Comunicaciones** / *Communication System (COMM)*.

Es el sistema encargado de sostener las comunicaciones con la Estación Terrena. El intercambio de datos es esencial para el cumplimiento de las tareas de un CubeSat, los cuales incluyen desde la posición del satélite, el envío de fotografías terrestres e incluso si el Satélite yace en una situación crítica.

El sistema COMM es un serio dependiente del Sistema de Determinación y Control de Actitud porque para ejecutar las labores de comunicación necesita orientarse apropiadamente a la Estación Terrena. En caso contrario, el intercambio de información puede resultar deficiente [30].

Es importante tomar en cuenta que, sin una orientación apropiada, COMM no podrá enviar ni recibir la información de manera correcta, por lo que en ese caso, el CubeSat se convertirá en un dispositivo tecnológico altamente sofisticado incomunicado. Si la incapacidad para comunicarse permanece, es posible que la misión se declare como terminada.

- **Sistema de Control Térmico** / *Thermal Control System (TCS)*.

El Sistema de Control Térmico, como su nombre indica, es el indicado para la regulación de la temperatura en el satélite. Sus actividades consisten en sensar la temperatura del CubeSat y, con base en ello, ofrecer un rango apropiado para mantener la correcta operación de los componentes a bordo y preservar su integridad.

La importancia del control térmico no es para menos, ya que si llega a fallar, la electrónica puede dañarse severamente o verse inutilizada, lo cual supone el final para la misión.

La regulación de la temperatura en el espacio no es una tarea sencilla debido a que el calor no se disipa en el vacío. Algunas técnicas para la regulación de la temperatura incluyen aislamientos térmicos, chaquetas, resistencias, radiadores y termopares; sin embargo, otras toman en cuenta la orientación que puede proveer el Sistema de Determinación y Control de Actitud, ya que la radiación solar juega un papel importante en la temperatura del satélite según el ángulo de incidencia sobre las caras.

■ **Sistema de Determinación y Control de Actitud** / *Attitude Determination and Control System* (ADCS).

Es el sistema responsable de dos tareas principales: orientar al satélite en un vector de orientación deseado y ofrecer estabilidad ante perturbaciones exógenas [31]. Dichos cometidos se logran mediante un esfuerzo conjunto de sensores, algoritmos y actuadores.

La relación entre el ADCS y otros sistemas es sumamente íntima, como se ha mencionado en los sistemas anteriores. Esto se debe a que muchas de las tareas dependen directamente de la actitud y, en caso de no poder controlarse, en muchas de las ocasiones no será posible continuar con la misión para la que el CubeSat fue construido [29].

El ADCS se subdivide en a su vez en otros tres subsistemas, los cuales son:

1. **Subsistema de Determinación de Actitud** / *Attitude Determination System* (ADS).

En un sentido más general, consiste de los sensores y sus respectivas etapas de acondicionamiento necesarios para determinar la actitud del satélite. Existen diferentes tipos de instrumentos de medición en el mercado, pero todos toman de referencia algún objeto o punto ya sea estático o móvil dentro de un determinado marco de referencia; o bien, alguna variable física como el campo magnético terrestre. Otros se basan en la posición de astros o la Tierra [32]. A continuación se presentan los principales sensores de actitud.

● **Acelerómetro.**

Consta de una diminuta placa de material piezoeléctrico o arreglo capacitivo que se comprime o expande según se desplace una masa en su interior. La variación en la posición se traduce en una diferencia de potencial que puede ser positiva o negativa. Este efecto es capaz de indicar el sentido, dirección y magnitud de la aceleración.

Naturalmente, un acelerómetro solo puede medir la aceleración en una dirección, así que generalmente se les encuentra en arreglos de dos o más en un mismo integrado. Por lo general, los acelerómetros no son empleados de manera independiente, sino que se les encuentra en combinación con otros sensores, como giroscopios o magnetómetros para ofrecer una determinación completa de actitud.

● **Giroscopio** / *Gyroscope*.

Son dispositivos que miden la orientación de un objeto. Su principio de operación se basa en una masa cilíndrica rotatoria en una suspensión de Cardán. Cuando el giroscopio se somete a un par tal que rote, la masa sufre un desplazamiento angular perpendicular, lo que indica el sentido y dirección de la rotación. Al igual que el acelerómetro, es ampliamente utilizado en la aviación y aeronaves no tripuladas.

● **Sensor de horizonte.**

El sensor de horizonte es una cámara con un aditamento que le permite filtrar el espectro de luz en la órbita y obtener la longitud de onda infrarroja característica del horizonte en la Tierra para posteriormente rastrearlo [33].

● **Sensor de Sol** / *Sun tracker*.

Similar al anterior – y como su nombre sugiere –, es un sensor que filtra la luz y busca únicamente la originada desde el Sol, usándola para orientarse en el espacio. Este instrumento brinda la facilidad de optimizar la posición y dirección de los paneles solares.

● **Rastreador de estrellas** / *Star tracker*.

Es el sensor probablemente más sofisticado de todos. Consta de una cámara mediante la cual localiza las estrellas, y que determina su ubicación y actitud en órbita mediante la comparación de un mapa estelar previamente cargado. Sin embargo, el costo energético es alto y la implementación a menudo representa un inconveniente.

- **Magnetómetro** / *Magnetometer*.

Este componente es capaz de determinar la actitud mediante la interacción del campo de la Tierra con un embobinado de cobre en su interior. Gracias a esto, los magnetómetros son capaces de sensar un campo magnético estático o dinámico. Los magnetómetros son sumamente versátiles, duraderos al no tener partes móviles o frágiles y sencillos en composición. Usualmente son empleados junto con otros sensores, principalmente acelerómetros y giroscopios, cuya combinación constituye a la Unidad de Medición Inercial.

- **Unidad de Medición Inercial** / *Inertial Measurement Unit* (IMU).

Es el conjunto de acelerómetros, giroscopios y magnetómetros que juntos conforman un sensor de nueve grados libertad. Estos ofrecen una descripción completa de la actitud y con una excelente precisión. Los tres sensores aprovechan la sinergia para cubrir las deficiencias o puntos muertos del otro. Por ejemplo, el acelerómetro es excelente para determinar los cambios en la actitud, pero su defecto es que carece de la capacidad de determinar su orientación inicial a menos que se le indique mediante condiciones iniciales. Esto representa un enorme problema, y para ello, el magnetómetro se encarga de cubrir la necesidad mediante la medición del campo magnético. Lo anterior sugiere que la IMU sea la mejor opción a la hora de determinar la actitud.

## 2. Subsistema de Control de Actitud / *Attitude Control System* (ACS).

Se conforma por el algoritmo de control de actitud, cuya tarea es procesar las variables medidas por el ADS y dar lugar a las respuestas necesarias para otorgar la actitud deseada. Existen muchas técnicas y enfoques para controlar la actitud de un CubeSat, desde acciones del control clásico como el PID y sus variantes [34], hasta técnicas y enfoques del control óptimo, difuso [35], robusto y basado en redes neuronales.

- **Energético.**

El enfoque más común que adoptan los diseñadores recae sobre la disponibilidad energética, es decir, el nivel y capacidad de carga de las baterías del EPS [7], ya que se cuentan con recursos limitados.

Por esta razón, el control seleccionado procede generalmente de una técnica del control óptimo con el fin de dar lugar a una acción de control cuya trayectoria sea la de menor costo, y por ende, el consumo energético [7]. Así, el controlador óptimo preferido por los diseñadores es el Regulador Cuadrático Lineal (LQR), siendo usado en múltiples proyectos [13] [35].

Estos controladores presentan un buen desempeño a la hora de controlar la actitud. Sin embargo, su diseño es complicado en contraste con otros ya que requiere de un modelo matemático muy acertado de los actuadores, la dinámica satelital y las perturbaciones ambientales.

- **Robusto.**

Las técnicas que ofrece el control robusto buscan principalmente mitigar el impacto de las perturbaciones ambientales.

Un primer método se basa en el estudio de las Funciones de Sensibilidad, a través de las cuales se determina qué tan vulnerable es la dinámica del sistema. Una vez hecho, se asignan criterios a manera de pesos con el fin de mitigar la influencia de las perturbaciones, lo que tras algunos pasos posteriores constituye el control conocido como  $H_\infty$ , cuya aplicación más notable en un sistema aeroespacial sea la Estación Espacial Internacional [36].

Una segunda técnica de control hallada en la literatura contempla el Control por Modos Deslizantes (SMC, por sus siglas en inglés), el cual ofrece una metodología de control robusta con retroalimentación no lineal que cuenta con ventajas tales como una implementación sencilla, costos computacionales bajos y poca sensibilidad ante perturbaciones externas [13] [37].

- **Adaptable.**

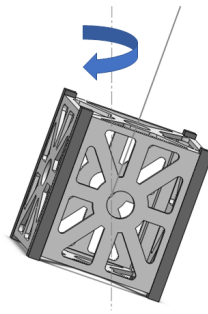
Se trata de un enfoque distinto pero ampliamente relacionado con el anterior, cuya característica principal es la capacidad de adaptar la señal de control según se presenten pequeñas diferencias entre los parámetros del sistema.

La ventaja se traduce como una respuesta de control lo suficientemente apropiada para la dinámica del sistema ante un modelo con carencias o incertidumbres en sus parámetros físicos. Por el contrario, el riesgo de caer en inestabilidad es una seria amenaza en caso de que se realice una estimación incorrecta de los parámetros.

- **Convencional.**

Un enfoque alternativo en desuso para la regulación de actitud reside en técnicas propias del control clásico [1]. Es un hecho ampliamente demostrado que, por sí solos, el PID y sus variantes generan efectos como la precesión [8], la cual consiste en una rotación defectuosa en el que el satélite gira en un vecindad cercana al vector de actitud deseado, pero que jamás converge.

La precesión se ejemplifica en la figura 2.6, donde la línea punteada es el eje de rotación deseado, y la línea continua representa el eje de rotación real, lo que genera una trayectoria indeseada. No obstante, se ha demostrado que la familia PID puede mejorar drásticamente su desempeño si se complementa con otras acciones de control o bajo ciertas modificaciones; por ejemplo, el control en cascada o en conjunto con redes neuronales.



**Figura 2.6:** Descripción gráfica de la precesión.

Por lo anterior, es fácil notar que los distintos enfoques buscan aportar en algo al cumplimiento de los objetivos de control. Aunque bien, hay unos que se aproximan más que otros, la determinación del mejor controlador sigue siendo un tema abierto. Bajo esta premisa, queda al diseñador la oportunidad de elegir una técnica de control para el ACS basada en lo que considere de prioridad para el CubeSat.

### 3. **Hardware de Control de Actitud** / *Attitude Control Hardware* (ADCS-HW).

Es la denominación que recibe el conjunto de actuadores que son necesarios para la regulación de la actitud. Aunque existen diversos tipos, todos aprovechan un fenómeno físico para alcanzar la misma meta.

En general, se dividen en dos categorías por el tipo de funcionamiento: en activos y pasivos. Los primeros son aquellos que requieren de energía suministrada por el EPS u otra fuente; mientras que los segundos no consumen energía, combustible ni otros insumos, ni tampoco existe otro tipo de actuador subyacente. No es fuera de lo común hallar CubeSats con ambas clases de actuadores trabajando en conjunto, ya que de esta manera se aprovechan determinadas sinergias. A continuación se discuten las propiedades de los diferentes actuadores en el estado del arte.

- **Propulsor** / *Thrusters*.

Este actuador activo es de gran utilidad para cambios direccionales rápidos y de gran magnitud. Consiste en una tobera, inyectores y un contenedor con propelente [38]. Su funcionamiento radica en liberar el consumible mediante los inyectores y a través de la tobera a una presión tal que se produzca una fuerza en sentido contrario, generando un desplazamiento.

Los propulsores no son realmente precisos para aplicaciones tales como la toma de imágenes terrestres o telemetría; sin embargo, la desventaja más notable es que el actuador se inutiliza una vez se agota el propelente. En un intento por prolongar su vida útil se han hecho avances tecnológicos en la materia, como un par de fabricantes que ofrecen sistemas basados en propulsión ionizada de propelente [39] [40]. De igual manera, se ha desarrollado propulsores de plasma que reducen el consumo [41].

- **Estabilizador por espín** / *Spin-stabilization*.

Es un actuador activo cuyo fin es rotar el satélite a una gran velocidad angular, lo que se logra mediante un motor eléctrico. Al estar en el vacío, la rotación del satélite se conserva y se mantiene orientado en la dirección deseada.

Este actuador destaca por su simplicidad y robustez ante perturbaciones exógenas en la actitud del satélite. Sin embargo, el mayor inconveniente es que no es posible rotar el satélite en una dirección diferente a la actual sin antes deshacerse de la inercia de rotación, lo que resulta difícil de implementar para el caso de CubeSat ya que a menudo se requiere un cambio rápido en la actitud.

- **Ruedas de Reacción** / *Reaction Wheels*.

Las ruedas de reacción son un actuador activo constituido en dos partes: un cuerpo cilíndrico metálico ensamblado al eje de un motor eléctrico. Convencionalmente se optan por motores de tipo sin escobillas – también llamados *brushless* –, por su baja fricción, alto desempeño y rendimiento.

Su operación se basa en el Principio de la Conservación del Momento Angular (PC-MA), que permite que el satélite rote en sentido contrario a la rotación del disco del actuador [33]. A la fecha, las ruedas de reacción se posicionan indiscutiblemente como el actuador activo más popular por los diseñadores de CubeSat [42] gracias a sus numerosas virtudes: permite un posicionamiento excepcionalmente preciso con hasta  $0.01^\circ$  de precisión [7], su alimentación es exclusivamente eléctrica y son compactos [30]. En la figura 2.7 se muestran dos Ruedas de Reacción diseñadas para un proyecto CubeSat denominado *Goliat* [3]. Por otra parte, la influencia de este actuador se reduce a rotación exclusivamente, lo que le coloca en una seria desventaja en comparación con otros.



Figura 2.7: Dos Ruedas de Reacción del CubeSat Goliat.[3]

A menudo también se recomienda agregar unos actuadores secundarios denominados Magnetorquers para descargar el momento angular acumulado [7]. La sinergia entre estos dos actuadores es muy alta y ha permitido el cumplimiento satisfactorio de numerosas misiones CubeSat [42].

Las ruedas de reacción también son conocidas por ser actuadores muy versátiles fuera del control de actitud. Algunas aplicaciones incluyen la supresión de vibraciones en estructuras flexibles, tales como antenas de satélites o velas solares [43], o como elemento constitutivo de otros actuadores [44].

- **Velas solares / *Solar sail*.**

Las velas soladoras son actuadores pasivos que aprovechan la radiación proveniente del Sol u otra fuente, como láseres, misma que impacta directamente sobre una superficie amplia montada en la estructura [45].

De momento, las velas no se consideran útiles para el control de actitud de satélites, aunque este hecho podría cambiar pronto. También se está buscando la manera de emplearlo como método de propulsión para viajes interplanetarios hacia Marte [46] [47].

- **Estabilización por Gradiente Gravitatorio / Gradiente Gravitacional.**

Es un actuador pasivo con el que se aprovecha el gradiente gravitacional generado por la Tierra, que junto con una pronunciada forma geométrica del satélite, se genera un par lo suficientemente grande para orientarlo en sentido al centro de la Tierra.

Este método es poco preciso, carece de robustez ante perturbaciones exógenas y roza en la estabilidad marginal. Su uso sólo es oportuno cuando se requiere que el satélite apunte en dirección a la Tierra, lo que le limita para aplicaciones terrestres.

En CubeSats no se sugiere su uso debido a la forma cúbica característica. A pesar de que existen técnicas para incrementar su robustez [48], no se le recomienda como único actuador de actitud [49].

- **Torque magnético / *Magnetorquer*.**

Su etimología proviene de una abreviatura del inglés al comprimir *magnetic torque rod*. Es un actuador activo consistente por una bobina de cobre cuyo propósito es inducir un campo electromagnético que interactúe con el de la Tierra, produciendo un par. Esto deriva en que la bobina – y por tanto, el CubeSat – se oriente perpendicularmente al campo de acción y se mantenga en esta posición mientras el dispositivo esté energizado [50]. Este actuador suele dividirse en dos subclasificaciones: con o sin núcleo. Los primeros tienen mayor generación de campo magnético pero implican un mayor peso por su núcleo ferroso; caso opuesto al segundo, cuyo interior suele estar vacío. Un magnetorquer con ambos tipos de integrados de clase COTS se halla en [51]. Los diseñadores no suelen elegir a los Magnetorquer como únicos o principales actuadores debido a su falta de robustez y precisión en el control de actitud, por lo que a menudo se les incluye como actuadores secundarios o complementarios con el fin de generar una sinergia; o bien, a manera de respaldo.

- **Giroscopio de Control de Momento / *Control Moment Gyroscope (CMG)*.**

A diferencia del resto de los actuadores vistos hasta el momento, el CMG se compone a partir de la integración de diferentes instrumentos de medición como giroscopios, acelerómetros, sensores inerciales y ruedas de reacción, por lo que pueden interpretarse como la mejora tecnológica de éstas.

En la actualidad, representan la mejor opción para el control de actitud activo, siendo utilizados en la Estación Espacial Internacional [36]. Sin embargo, su diseño y construcción son mucho más costosos y complejos [52].

Un CMG se muestra en la figura 2.8, en donde se aprecia una versión fabricada por Airbus y la cantidad de instrumentos necesarios para su operación.



Figura 2.8: Giroscopio de Control de Momento modelo *CMG 15-45 S* fabricado por Airbus. [4]

- **Omnimagneto / *Omnimagnet***

Son los dispositivos más novedosos de la lista. Los omnimagnet aprovechan el mismo principio magnético que los magnetorquer, pero actúan en torno a un núcleo ferromagnético de forma esférica. La ventaja de usar una esfera es que posee propiedades magnéticas que son útiles para la manipular la actitud con base en la interacción con el campo magnético terrestre. Por ejemplo: una esfera no tiene una dirección preferente de magnetización, pero sí produce un dipolo puro cuando se coloca en un campo uniforme; y por último, el campo magnético aplicado promedio es igual al campo magnético aplicado en el centro de la esfera [53].

Es evidente que, debido al papel estratégico del ADCS, los diseñadores de CubeSats destinan una buena parte de recursos para el desarrollo de este sistema [29].

- **Telemetría, Trazabilidad y Sistema de Comando / *Telemetry, Tracking and Command System (TT&C)***.

A este sistema se le conoce como el software que reside dentro de la Computadora a Bordo. Su función es recabar los datos procedentes de todos los sistemas y convertirla en información útil para la toma de decisiones, o bien, prepararla para su transmisión mediante COMM a la Estación Terrena. Algunas de las variables que puede manejar son la ubicación en órbita, altitud, actitud, tiempo de vuelo, nivel de carga y condición de las baterías, datos de la Carga Útil; entre muchos otros.

Este sistema juega un papel protagónico y está estrechamente relacionado con COMM, EPS, PL, ADCS y TCS, principalmente por la cantidad de variables que manejan; pero sobre todo con la Computadora a Bordo, ya que es un elemento carente de forma física. El TT&C puede ser clase autónoma, pero en lo que respecta a CubeSats, a menudo son reprogramables o reconfigurables una vez en órbita, lo cual resulta muy útil para propósitos educativos o experimentales.

- **Computadora a Bordo / *On-Board Computer (OBC)***.

La Computadora a Bordo es el hardware del sistema de TT&C, es decir que éste yace en su interior. Es imprescindible que la OBC cuente con capacidad suficiente en características tales como procesamientos de datos, memoria RAM, número y tipo de puertos [18]. En la literatura, la OBC a menudo es considerada como una misma en fusión con el sistema anterior para simplificar la composición de los sistemas [54]. Sin embargo, una definición más precisa toma en cuenta que se trata de un sistema dual.

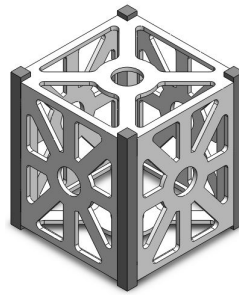
La falla fatal de la OBC representa la muerte del sistema satelital, ya que aunque otros elementos se mantengan operativos y la estructura se mantenga íntegra, no se podrá interactuar con la Estación Terrena, llevando al final de la misión.



- **Sistema de Estructura Mecánica / *Mechanical Structure* (MECH).**

Este sistema es un hardware al igual que OBC, pero la diferencia es que está compuesto por la estructura que aloja a todos los otros en su interior. Su importancia es tal que es considerado como un sistema a pesar de que no lo es ya que no realiza una actividad y no supone un consumo energético en lo absoluto. En la figura 2.9 se aprecia un ejemplo de MECH para un CubeSat de 1 Unidad.

El diseño de MECH debe hacerse con la capacidad de conservar las mismas dimensiones en cualquiera de las etapas de vuelo y resistir las fuerzas incidentes, al igual que las vibraciones durante el lanzamiento y despliegue. Las dimensiones permitidas para MECH están establecidas en el estándar CubeSat, disponibles en [17].



**Figura 2.9:** Marco estructural (MECH) del CubeSat de una Unidad.

- **Carga Útil / *Payload* (PL).**

Hasta el momento, los sistemas vistos conservan en mayor medida la misma apariencia o características, ya que son muy semejantes de un CubeSat a otro. Sin embargo, la Carga Útil es un poco diferente porque es el sistema que más cambia de un CubeSat a otro, y esto se debe ya que depende según la aplicación para la cual fue construido el satélite (véase la tabla 2.2). De esta forma, la PL es el instrumento mediante el cual se cumplirá la misión principal del CubeSat, misma que puede ser, por ejemplo, una cámara para la toma fotografías terrestres desde el espacio o un sensor de gases para evaluar la composición química de la atmósfera [28].

Sin la carga útil, el satélite quedaría reducido a un dispositivo sofisticado y costoso orbitando a cientos de kilómetros de altura con el que uno podría comunicarse, pero no del cual obtener provecho práctico.

Adicional a los sistemas enlistados, existen otros dos considerados como excepciones ya que no forman parte del satélite pero en la literatura se les toma como tales debido a la estrecha colaboración. Estos son los casos de la Estación Terrena y el Centro de Mando.

- **Estación Terrena / *Ground Station* (GND).**

Es la instalación estratégica donde se encuentran las antenas e instrumentos necesarios para sostener la comunicación con el satélite. Está ubicada en algún sitio en la superficie terrestre, por lo general cerca del Centro de Mando ya que la información intercambiada es enviada o recibida en este sitio.

- **Centro de Mando / *Command Center* (CMD).**

El Centro de Mando es la instalación donde se realiza la lectura, interpretación y análisis de la información enviada desde el CubeSat. Es allí mismo donde también se lleva el seguimiento a la misión y se ejecuta la toma de decisiones.

En la figura 2.10 se ofrece una representación simplificada de todos los sistemas anteriores y sus interacciones. Dentro de la línea punteada se aprecian los propios del CubeSat, excluyendo a GND y CMD.

Si bien todos los sistemas son valiosos, está claro que existen sistemas más importantes que otros – y por tanto, con mayor jerarquía –, debido a una ponderación sobre la capacidad de continuar la misión al prescindir de ellos. Por ejemplo, el CubeSat podría seguir operando sin la Carga Útil aunque sin un propósito, pero por otra parte, la misión puede considerarse como potencialmente terminada ante un caso tal en el que COMM o ADCS fallen, y definitivamente terminada ante la destrucción de MECH u OBC.

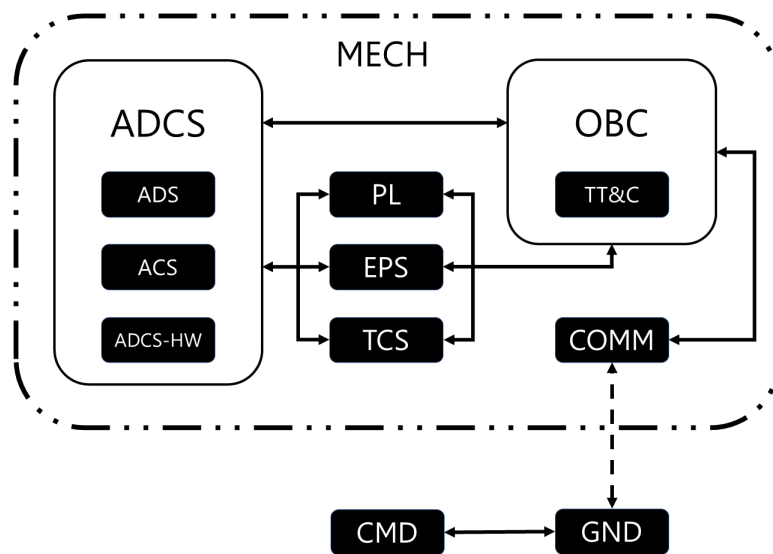


Figura 2.10: Sistemas de un CubeSat.

En el siguiente capítulo, se estudiarán los diferentes procesos y fenómenos físicos que intervienen en el ADCS, al igual que la matemática necesaria para describir la rotación y el control de actitud.

## Capítulo 3

# Diseño de Arreglo Reconfigurable de Ruedas de Reacción

*“La ignorancia completamente consciente es el preludio de todo avance real en la ciencia.” – James Clerk Maxwell*

---

En este capítulo se introducen los fundamentos teóricos, físicos y matemáticos necesarios para representar la rotación y actitud de un satélite en órbita; con base en lo visto en las secciones anteriores.

El contenido se divide en tres partes. La primera aborda algunos elementos orbitales tales como la clasificación de órbitas, los marcos de referencia, métodos para representar la actitud y la rotación. La segunda parte trata sobre las ecuaciones que rigen la dinámica de actitud y de los actuadores. Y por último, se presenta una discusión sobre el diseño de la propuesta del control y elementos relacionados.

### 3.1. Elementos Orbitales

Las órbitas reciben una nomenclatura según sus propiedades tales como la altura, la inclinación, el grado de excentricidad, el cuerpo astronómico en su origen, etcétera. En el estudio de las clasificaciones de este trabajo únicamente se considerarán las relativas a la Tierra, en virtud de que los CubeSat – hasta el momento [23] –, están confinados a órbitas terrestres [18]. La clasificación por altura para las órbitas terrestres es:

- **Órbita Baja Terrestre / *Low Earth Orbit* (LEO).**

Es la órbita de menor altura y está comprendida en un rango de 160 *km* a 2,000 *km* por encima de la superficie terrestre. Es de gran importancia para el ámbito científico al ser la órbita de menor altitud, ya que no es posible orbitar un objeto por debajo del rango mínimo señalado [55].

El periodo orbital de LEO oscila entre los 88 y 127 minutos; esto quiere decir que, el objeto volverá a transitar por el mismo punto en la órbita una vez transcurrido este tiempo. Esto es atractivo para el estudio de la superficie terrestre, ya que se puede obtener una nueva vista sobre un área específica cada 107.5 minutos en promedio.

No sólo los satélites aprovechan esta altitud, ya que también la Estación Espacial Internacional (ISS) [36] y el Telescopio Espacial Hubble se encuentran a esta altura.

- **Órbita Media Terrestre** / *Medium Earth Orbit* (MEO).

Abarca la región entre 2,000 km y 35,785 km, justo entre LEO y la Órbita Geosíncrona Terrestre. Presenta varias utilidades, una de ellas es que justo a los 20,200 km se presenta un periodo orbital de 12 horas. Este punto es aprovechado por los satélites de Sistemas de Posicionamiento Global (GPS) de origen estadounidense y con el equivalente ruso mediante constelaciones, denominado *Global'naya Navigatsionnaya Sputnikovaya Sistema* (GLONASS) a los 19,100 km, y finalmente a los 23,222 km para la constelación Galileo de origen europeo mediante la Agencia Espacial Europea (ESA) [55].

- **Órbita Geoestacionaria Terrestre** / *Geostationary Orbit* (GEO).

Posee una altura exactamente igual a 35,786 km y se caracteriza por tener un periodo orbital idéntico a la rotación terrestre en una trayectoria no inclinada y sobre el ecuador.

La altitud de GEO hace que sea particularmente útil para los sistemas de observación que requieran un monitoreo continuo sobre un área específica sobre la superficie de la Tierra.

- **Órbita Alta Terrestre** / *High Earth Orbit* (HEO).

La órbita GEO se encuentra por encima de los 35,786 km y su periodo orbital es mayor a 24 horas. En contraste con las anteriores, ésta órbita posee una geometría más excéntrica. Algunas aplicaciones son el monitoreo del clima y la observación del espacio profundo [55].

De acuerdo con las especificaciones, los CubeSat se ubican en la órbita LEO [17]. Pueden haber muchos motivos, pero el factor primordial es el costo económico relacionado con el consumo energético que representa elevar la masa del satélite hacia una órbita superior.

## 3.2. Perturbaciones ambientales

Las perturbaciones ambientales son pares producidos a partir de fuerzas exógenas que influyen en la dinámica de actitud del satélite, por lo que uno de los objetivos del ADCS es mitigar su influencia. Esta labor no es trivial porque el sentido, magnitud y dirección de las perturbaciones cambian constantemente con el paso del tiempo, y en su mayoría son impredecibles a pesar de que han sido ampliamente estudiadas. Actualmente, las principales perturbaciones ya han sido estimadas con suficiente exactitud para los CubeSat [56]. A continuación, se presentan las de mayor impacto.

- **Arrastre aerodinámico** / *Aerodynamical drag*

El arrastre aerodinámico es el par resultante dada la fricción entre el CubeSat en la órbita y el medio en el que se encuentra. Esta perturbación es más intensa cuánto más baja es la órbita, lo que la coloca sin lugar a dudas como la de mayor influencia en la actitud. El arrastre depende de factores como la no homogeneidad en la densidad del medio, la orientación del CubeSat, la forma y el tamaño [57]. La expresión matemática que la describe es altamente no lineal, aunque se ha obtenido una aproximación lineal suficientemente útil en la ecuación (3.1) [54] [57].

$$\mathbf{F}_d = \frac{1}{2} \rho \boldsymbol{\nu}^2 C_d A \quad (3.1)$$

donde  $\mathbf{F}_d \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$  es la fuerza de arrastre generada,  $\rho \in \mathbb{R}$  es la densidad del medio, que se propone como homogénea bajo condiciones estándar de temperatura y por lo tanto es constante.  $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$  corresponde con el vector de velocidad orbital del satélite, y  $A \in \mathbb{R}$  es el área transversal del CubeSat [56].

El parámetro restante de (3.1) es el coeficiente de arrastre,  $C_d \in \mathbb{R}$ . Es un número adimensional difícil de determinar con exactitud ya que depende de factores del fluido y del satélite. Entre ellos, la viscosidad, el número de Reynolds del medio, la morfología y propiedades elásticas del satélite, la textura, y muchos otros. Estudios recientes han permitido dar con un valor estimado para CubeSats de 1U que ronda entre 0.8 y 1.5 [56].

El par de arrastre,  $\boldsymbol{\tau}_d \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ , se define como el producto entre  $\mathbf{F}_d$  y un vector de posición,  $\mathbf{P}_d \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ , a su vez compuesto por el producto vectorial entre el vector unitario de la velocidad,  $\hat{\boldsymbol{\nu}} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ , y el vector de distancia entre el centro de presión aerodinámico y el centro geométrico del satélite, marcado por  $\mathbf{P}_{cp} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ . Lo anterior se refleja en la ecuación (3.2).

$$\boldsymbol{\tau}_d = \mathbf{F}_d \mathbf{P}_d = \mathbf{F}_d (\hat{\boldsymbol{\nu}} \times \mathbf{P}_{cp}) \quad (3.2)$$

■ **Par producido por la Presión Solar / Solar Pressure**

Se define como el efecto producido por las partículas ionizadas procedentes del Sol que impactan contra una o más caras del CubeSat [57]. El grado de influencia depende en buena medida de la actitud [54]. El par producido,  $\boldsymbol{\tau}_s \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ , se expresa como en la ecuación (3.3) [18].

$$\boldsymbol{\tau}_s = \mathbf{F}_s (C_p - C_g) \quad (3.3)$$

donde  $C_p \in \mathbb{R}$  es el centro de presión y  $C_g \in \mathbb{R}$  es el centro de gravedad, mientras que  $\mathbf{F}_s \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$  es la fuerza incidente y que depende de otros factores. La relación está dada en la ecuación (3.4).

$$F_s = F_{sun} \left( \frac{1}{c} \right) A_s (1 + Q) \cos(i) \quad (3.4)$$

donde  $F_{sun} \in \mathbb{N} = 1,367W/m^2$  es la constante de radiación solar, mientras que  $c \in \mathbb{N}$  es la constante de la velocidad de la luz en el vacío. Por otro lado,  $A_s \in \mathbb{R}$  es la superficie total expuesta a la radiación solar,  $i \in [0, \pi]$  es el ángulo de incidencia y, por último,  $Q \in [0, 1]$  es el factor de reflectancia promedio de las caras del CubeSat.

■ **Gradiente Gravitacional**

También conocido como *gradiente gravitatorio*, es el par producido por el efecto de la gravedad sobre un satélite que posee una geometría no simétrica. Se define en (3.5).

$$\boldsymbol{\tau}_g = (I_{max} - I_{min}) 3\omega_E^2 \quad (3.5)$$

donde  $I_{max} \in \mathbb{R}$  e  $I_{min} \in \mathbb{R}$  son el momento de inercia mayor y menor del satélite, respectivamente, mientras que  $\omega_E \in \mathbb{R}$  equivale a la velocidad de rotación de la Tierra.

■ **Par de Perturbación Magnética**

Es un producto de la interacción del campo magnético terrestre con algún dipolo magnético residual en MECH. El par de esta perturbación se calcula a partir de lo establecido en (3.6).

$$\boldsymbol{\tau}_m = \mathbf{D} \times \mathbf{B}_E \quad (3.6)$$

donde  $\boldsymbol{\tau}_m \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$  es el par de perturbación magnética,  $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$  es el dipolo magnético residual del satélite y  $\mathbf{B}_E \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$  es el campo magnético terrestre, que para este caso se estima a partir de factores como la altitud del satélite, la permeabilidad magnética del vacío y la latitud magnética de la Tierra.

### 3.3. Marco de Referencia

Los marcos de referencia son herramientas de gran utilidad a la hora de representar la orientación y posición de un cuerpo, lo que les convierte en elementos esenciales para el análisis mecánico. Los marcos de referencia están dotados de sistemas ortogonales, los cuales se constituyen por tres vectores unitarios,  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  y  $\hat{z}$ , que parten de un origen  $o$ . Con frecuencia se propone una alineación para los vectores y el origen que sea de conveniencia para el estudio de la dinámica del cuerpo.

Existen un cierto número de marcos de referencia en materia aeroespacial que son aplicables para el estudio de la dinámica satelital. A continuación se enlistan aquellos de mayor importancia.

- **Inercial Centrado en la Tierra** / *Earth Centered Inertial frame*. (ECI)

Es un marco de referencia no rotativo y fijo en el espacio. Su propósito es definir a otros marcos mediante un sistema coordinado en relación con la Tierra. Se denota por el subíndice  $i$ . El origen se ubica en el centro de masas de la tierra,  $o_i$ , y cuenta con ejes  $\hat{x}_i$ ,  $\hat{y}_i$  y  $\hat{z}_i$ . El eje  $\hat{z}_i$  apunta hacia el polo norte geográfico, mientras que el eje  $\hat{x}_i$  señala al equinoccio de verano del hemisferio norte. Por último, el eje  $\hat{y}_i$  completa el sistema ortogonal de acuerdo con la regla de la mano derecha [55]. Una peculiaridad de este marco es que el plano conformado por  $\hat{x}_i - \hat{y}_i$  es coincidente con la línea ecuatorial.

- **Marco Centrado en el Cuerpo** / *Body-Fixed Frame* (BFF)

Es uno de los más útiles y populares para describir la actitud de un satélite. Se destaca porque este marco rota junto con él y a menudo recibe el subíndice  $b$  su distinción.

El origen,  $o_b$ , yace en el centro de masas del satélite y por lo general sus ejes se seleccionan para coincidir con los ejes principales de inercia. En consecuencia, el eje  $\hat{z}_b$  se alinea con el eje menor de inercia, mientras que  $\hat{y}_b$  para con el mayor, al que también suele elegirse para apuntar al cénit. Por último,  $\hat{x}_b$  coincide con el vector de velocidad tangencial orbital, indicando la dirección y sentido de traslación del satélite.

- **Marco Basado en la Aeronave** / *SpaceCraft Orbit Frame* (SCO)

Este marco es similar con el anterior, ya que ambos se emplean para representar la actitud del satélite. Sin embargo, existe una marcada diferencia dada por las coordenadas que – aunque encuentran origen en el cuerpo del satélite –, se despliegan en sentidos y direcciones notablemente distintas.

Así, el SCO tiene origen  $o_o$  en el centro de masas del satélite. El eje  $\hat{z}_o$  apunta en dirección al nadir y el eje  $\hat{x}_o$  es coincidente con el vector de velocidad y es perpendicular al vector  $\hat{z}_o$ . Al último, el eje  $\hat{y}_o$  completa el sistema coordinado de acuerdo con la regla de la mano derecha. Por lo general, se espera que el eje  $\hat{y}_o$  apunte al nadir [58].

- **Coordenadas con Referencia en la Órbita** / *Orbital Reference Coordinate* (ORC)

El ORC se denota por el subíndice  $o$ , y se particulariza por ser un marco un poco distinto a los otros. Anteriormente, el origen se estableció en un punto en concreto, que puede ser el centro de la Tierra o el centro de masas del satélite. Sin embargo, en este caso el origen,  $o_o$ , yace en el punto coincidente entre la órbita y el centro de masas del satélite, lo quiere decir que el marco se mueve en el espacio conforme el satélite se traslada, pero que no rota con él.

En el ORC, el vector  $\hat{z}_o$  apunta hacia el nadir,  $\hat{x}_o$  coincide con el vector de velocidad tangencial orbital y el eje  $\hat{y}_o$  completa el marco ortogonal. Bajo esta definición, el SCO se alinea con el ORC cuando ambos alcanzan una diferencia nula de actitud.

### 3.4. Representación de Actitud y Rotación

Los métodos de representación de actitud y rotación intervienen cuando un marco de referencia rota y/o se desea comparar su orientación con otros. Naturalmente, se han desarrollado varios métodos con el paso del tiempo, aunque los siguientes tres son los más empleados en el ámbito aeroespacial.

- **Ángulos de Euler / Euler Angles**

Los ángulos de Euler son el método más sencillo e intuitivo para describir la rotación y actitud. Su procedimiento consiste en identificar los vectores  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  y  $\hat{z}$  de un marco inercial y otro fijo en el espacio, cuyas diferencias de posición angular de cada par de ejes reciben un nombre particular: *Roll* ( $\phi$ ), *Pitch* ( $\theta$ ) y *Yaw* ( $\psi$ ); respectivamente.

En la actualidad, los ángulos de Euler están en desuso debido a la cantidad de inconvenientes en la implementación. Uno de ellos – y el más popular –, es el fenómeno conocido como Bloqueo de Cardán, o *Gimbal Lock*, el cual consiste en la pérdida de uno de los grados de libertad al alcanzar los extremos máximos de la rotación cerca de  $\pm\pi$  radianes. Una segunda consecuencia bien documentada consiste en que la trayectoria de rotación no es óptima, lo que aumenta el consumo energético de los actuadores. La única ventaja de los Ángulos de Euler es la facilidad con la que se pueden visualizar los cambios en la actitud.

- **Matriz Direccional de Cosenos / Directional Cosines Matrix (DCM)**

Este método es un derivado de los ángulos de Euler, en donde las rotaciones se realizan mediante expresiones matriciales para facilitar el cómputo numérico, y se basa en la tasa de cambio de las trayectorias que describen la rotación de los vectores unitarios a través de senos o cosenos [59].

La implementación de DCM implica un mayor número de operaciones por la cantidad de datos introducidos. Esto hace que no sea atractivo para aplicaciones con capacidad de procesamiento limitada.

- **Cuaterniones / Quaternions**

Los cuaterniones, o *cuaternios*, son un conjunto de extensiones de los números complejos cuya aplicación más notable es la representación de cambios en la actitud. Por mucho, son el método más confiable, eficiente y eficaz para representar la actitud ya que no da lugar a ambigüedades de sentido o dirección [60], son computacionalmente eficientes por su reducida cantidad de operaciones en comparación con otros métodos y no presentan el bloqueo de Cardán.

Como desventaja se tiene la dificultad para visualizar la actitud resultante si no se cuenta con un entorno gráfico, al igual que exigen un sólido dominio de cálculo vectorial. A pesar de ello, los cuaterniones siempre son recomendables para aplicaciones aeroespaciales.

Matemáticamente, los cuaterniones se definen como un vector columna  $\mathbf{q}$  compuesto de cuatro elementos:  $q_0$ ,  $q_1$ ,  $q_2$  y  $q_3$ ; donde el primero es considerado un escalar y el resto son asignados a componentes vectoriales  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  y  $\hat{k}$ . Una definición más rigurosa considera a los cuaterniones como  $\mathbf{q} \in \mathbb{H}$ , donde  $\mathbb{H} = \{q_0 + q_1\hat{i} + q_2\hat{j} + q_3\hat{k} : q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}^2$ . La forma más habitual para representar a los cuaterniones yace en (3.7).

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} q_0 \\ \mathbf{q}_{1:3} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

La actitud y sus cambios se calculan con base en operaciones de uno o más cuaterniones. A continuación, se presentan la adición, el producto, la norma, la conjugación y la normalización.

**Adición.**

Se realiza mediante la suma de cada elemento, o en otras palabras, componente por componente.

Sean  $\mathbf{q} = q_0 + q_1\hat{i} + q_2\hat{j} + q_3\hat{k}$ , y  $\mathbf{p} = p_0 + p_1\hat{i} + p_2\hat{j} + p_3\hat{k}$ , la suma se calcula como en la ecuación (3.8).

$$\mathbf{q} + \mathbf{p} = (q_0 + p_0) + (q_1 + p_1)\hat{i} + (q_2 + p_2)\hat{j} + (q_3 + p_3)\hat{k} \quad (3.8)$$

**Producto.**

Esta operación se denota mediante el operador especial de producto de cuaterniones, indicado por el símbolo « $\otimes$ ». La operación se realiza componente por componente. El producto de cuaterniones es de carácter asociativo y no conmutativo.

Sean  $\mathbf{q}$  y  $\mathbf{p}$  dos cuaterniones, el producto de ambos se ilustra en la ecuación (3.9).

$$\begin{aligned} \mathbf{q} \otimes \mathbf{p} = & (q_0p_0 - q_1p_1 - q_2p_2 - q_3p_3) + (q_0p_1 + q_1p_0 + q_2p_3 - q_3p_2)\hat{i} + \\ & (q_0p_2 - q_1p_3 + q_2p_0 + q_3p_1)\hat{j} + (q_0p_3 + q_1p_2 - q_2p_1 + q_3p_0)\hat{k} \end{aligned} \quad (3.9)$$

**Conjugado.**

El conjugado de un cuaternión arroja un segundo cuaternión cuya dirección en el espacio será contraria a la original. En la literatura, para indicar esta operación se suele emplear el símbolo barra « $-$ », y menos comúnmente un asterisco « $*$ » en el superíndice. En este trabajo se adoptará el uso del primera notación.

Sea  $\mathbf{q}$  un cuaternión, su conjugado se calcula como en (3.10).

$$\bar{\mathbf{q}} = q_0 - q_1\hat{i} - q_2\hat{j} - q_3\hat{k} \quad (3.10)$$

**Norma.**

La norma de cuaternión se calcula de forma similar a la de un vector; es decir, mediante la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de cada argumento del cuaternión, con exclusión de sus componentes vectoriales.

Sea  $\mathbf{q}$  un cuaternión, su norma se calcula como en (3.11).

$$\|\mathbf{q}\| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} \quad (3.11)$$

**Normalización.**

En consecuencia, también es posible calcular el cuaternión unitario a partir de la norma. La operación se realiza mediante el cociente entre el cuaternión y su norma.

Sea  $\mathbf{q}$  un cuaternión, su normalización se calcula como en (3.12).

$$\hat{\mathbf{q}} = \frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|} = \frac{q_0 + q_1\hat{i} + q_2\hat{j} + q_3\hat{k}}{\sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}} \quad (3.12)$$

En resumen, los cuaterniones son la mejor opción para los cálculos de actitud, mientras que los ángulos de Euler son idóneos para ilustrar la actitud. Con base en ello, en seguida se presentará el método para la representación de actitud mediante cuaterniones.



### 3.5. Actitud por Cuaterniones

El cálculo de la actitud del satélite procede del análisis cinemático del sólido rígido [60]. Las ecuaciones son del tipo *cuasi*-lineal, y pueden estimarse a partir del velocidad angular del satélite,  $\boldsymbol{\omega}_s(t) \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ , o su derivada,  $\dot{\boldsymbol{\omega}}_s(t) \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ ; según sea de interés. En la próxima sección se profundizará más sobre estas variables y cómo influyen precisamente sobre la dinámica del satélite, aunque por ahora el análisis será sobre el uso de cuaterniones para la estimación la actitud.

La ecuación para tal propósito se describe en (3.13) empleando como entrada a  $\boldsymbol{\omega}_s(t)$ , mientras que lo propio en (3.14) para  $\dot{\boldsymbol{\omega}}_s(t)$ .

$$\dot{\mathbf{q}}_s(\mathbf{q}_s, \boldsymbol{\omega}_s) = \frac{1}{2} \mathbf{W}(\mathbf{q}_s)^T \boldsymbol{\omega}_s \quad (3.13)$$

$$\ddot{\mathbf{q}}_s(\mathbf{q}_s, \dot{\boldsymbol{\omega}}_s) = \frac{1}{2} \mathbf{W}(\mathbf{q}_s)^T \dot{\boldsymbol{\omega}}_s \quad (3.14)$$

donde  $\mathbf{q}_s(t) \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$  es el cuaternión de actitud del satélite,  $\mathbf{W}(\mathbf{q}_s) \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$  es la matriz de cambio de cuaterniones del satélite, es de tipo anti-simétrica, y se forma a partir de los elementos de  $\mathbf{q}_s(t)$  cómo se ilustra en (3.15). De igual manera, en la figura 3.1 se muestra el diagrama a bloques de las ecuaciones (3.13) y (3.14). Mediante cualquiera de ambas maneras, es posible hallar la evolución en el tiempo de la actitud representada por el cuaternión  $\mathbf{q}_s(t)$  mediante la integración numérica de  $\dot{\mathbf{q}}_s(t)$  o  $\ddot{\mathbf{q}}_s(t)$ ; según el caso. El único requisito es contar con una condición inicial  $\mathbf{q}_s(0)$  a partir de la cual estimar la actitud [61].

$$\mathbf{W}(\mathbf{q}_s) = \begin{bmatrix} -q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ -q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

La obtención de la actitud del satélite a través de cualquiera de los dos métodos permite estimar el error de actitud,  $\mathbf{q}_e(t) \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ , y en consecuencia alcanzar la actitud deseada.

Es importante señalar que el error de actitud se calcula mediante el producto del cuaternión de referencia,  $\mathbf{q}_c(t) \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$ , y el conjugado del cuaternión de actitud  $\mathbf{q}_s(t)$ ; y no la diferencia entre ambas variables, como habitualmente se realiza para los lazos de control [1]. La ecuación para el error se encuentra en (3.16), se expande en (3.17), y se ilustra en la figura 3.2.

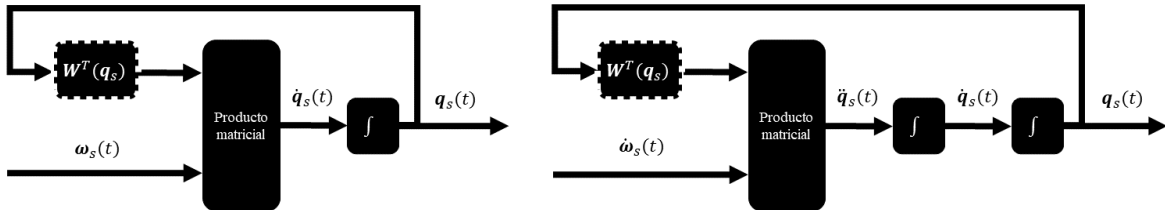
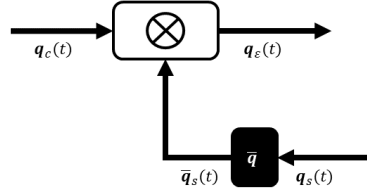


Figura 3.1: Diagrama a bloques de la ecuación a) (3.13) y b) (3.14).



**Figura 3.2:** Diagrama a bloques para la obtención del cuaternión de error.

$$\mathbf{q}_\varepsilon(t) = \mathbf{q}_c(t) \otimes \bar{\mathbf{q}}_s(t) \quad (3.16)$$

$$\begin{bmatrix} q_{\varepsilon_0} \\ q_{\varepsilon_1} \\ q_{\varepsilon_2} \\ q_{\varepsilon_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{c_0} \\ q_{c_1} \\ q_{c_2} \\ q_{c_3} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} q_{s_0} \\ -q_{s_1} \\ -q_{s_2} \\ -q_{s_3} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Durante la implementación, una vez obtenido el error de actitud es posible proponer un algoritmo de control de actitud basado en cuaterniones. Sin embargo, esta actividad se realizará en los próximos capítulos.

Es importante aclarar que todos los cuaterniones en esta sección son convertibles a ángulos de Euler, lo que ofrece la capacidad de visualizar la actitud, el error y la referencia. Una equivalencia yace en la ecuación (3.18) [14], aunque hay distintas formas de implementación; por ejemplo, algunas fuentes sugieren la función *atan2* en lugar de *arctan* para evitar singularidades en las fronteras de  $\pm\pi$ .

$$\begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \arctan\left(\frac{2(q_0q_1 + q_2q_3)}{1 - 2(q_1^2 + q_2^2)}\right) \\ \arcsin(2(q_0q_2 - q_1q_3)) \\ \arctan\left(\frac{2(q_0q_3 + q_1q_2)}{1 - 2(q_2^2 + q_3^2)}\right) \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

En cambio, para pasar de ángulos de Euler a cuaterniones se hace como en (3.19).

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \cos(\phi/2) \cos(\theta/2) \cos(\psi/2) + \sin(\phi/2) \sin(\theta/2) \sin(\psi/2) \\ \sin(\phi/2) \cos(\theta/2) \cos(\psi/2) - \cos(\phi/2) \sin(\theta/2) \sin(\psi/2) \\ \cos(\phi/2) \sin(\theta/2) \cos(\psi/2) + \sin(\phi/2) \cos(\theta/2) \sin(\psi/2) \\ \cos(\phi/2) \cos(\theta/2) \sin(\psi/2) - \sin(\phi/2) \sin(\theta/2) \cos(\psi/2) \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Por el contrario, si se desea regresar del cuaternión de actitud  $\mathbf{q}_s(t)$  a la velocidad angular  $\boldsymbol{\omega}_s(t)$  o su derivada, se pueden emplear las ecuaciones (3.20) y (3.21), respectivamente. En la figura 3.3 se ofrece un diagrama a bloques que ilustra ambos procesos.

$$\boldsymbol{\omega}_s(t) = 2\mathbf{W}(\mathbf{q}_s)\dot{\mathbf{q}}_s(t) \quad (3.20)$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_s(t) = 2\mathbf{W}(\mathbf{q}_s)\ddot{\mathbf{q}}_s(t) \quad (3.21)$$

Una última propiedad por estudiar acerca de la descripción de actitud por cuaterniones es el vector de error. En algunas aplicaciones – especialmente drones –, se ha hecho uso del cuaternión y de sus componentes para conformar un vector de error, cuyo procedimiento es el siguiente.

Bajo el supuesto de que el cuaternión de actitud sea unitario, se toma de  $\mathbf{q}_s(t)$  a los tres últimos números del cuaternión:  $q_{s1}$ ,  $q_{s2}$  y  $q_{s3}$ , y se aprovecha su relación vectorial para conformar el vector de error  $\mathbf{v}_{err}(t) \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ . Lo anterior se expresa matemáticamente en (3.22).

$$\mathbf{v}_{err}(t) = [q_{s1} \quad q_{s2} \quad q_{s3}]^T \quad (3.22)$$

La lógica detrás de lo enunciado es que, mientras el cuaternión de actitud  $\mathbf{q}_s(t)$  permanezca en la referencia, entonces el cuaternión de error será como en la ecuación (3.23), y por lo tanto, el vector de error  $\mathbf{v}_{err}(t)$  será nulo, tal y como se muestra en (3.24). El vector de error tiene algunas aplicaciones como auxiliar en el diseño del algoritmo de control.

$$\mathbf{q}_\varepsilon(t) \equiv [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \quad (3.23)$$

$$\mathbf{v}_{err}(t) = [q_{s1} \quad q_{s2} \quad q_{s3}]^T = [0 \quad 0 \quad 0]^T \quad (3.24)$$

De esta forma, se da por concluido el estudio de las herramientas matemáticas relacionadas para describir la actitud a través de la cinemática. Es evidente que hace falta adentrarse en la dinámica del satélite para comprender cuál es la auténtica fuente de los cambios de actitud.

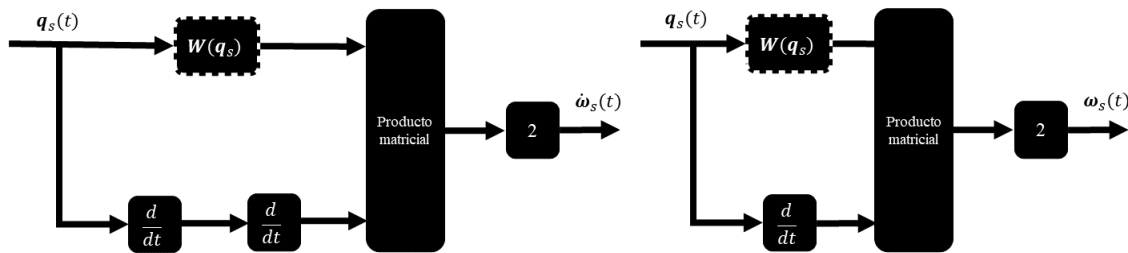


Figura 3.3: Diagrama a bloques de la ecuación a) (3.21) y b) (3.20).

### 3.6. Dinámica Satelital

Formalmente, el estudio de la dinámica del satélite es divisible bajo dos perspectivas distintas de la mecánica. La primera es la actitud, que para cuyo análisis se recurre a la mecánica del sólido. La segunda consiste en la traslación del satélite sobre la órbita, y que para ello se analiza desde la mecánica de la partícula. Al tener clara esta separación, es evidente que la traslación es un tema ajeno al ADCS, por lo que no forma parte de los objetivos de control y en el resto de este trabajo no se profundizará en el análisis de la traslación, y por el contrario, el enfoque se dará sobre la actitud.

La ecuación gobernante para la dinámica de actitud se define en la identidad (3.25) [62].

$$\boldsymbol{\tau}_s(t) \equiv \dot{\mathbf{H}}_s(t) \quad (3.25)$$

donde  $\boldsymbol{\tau}_s(t) \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$  describe el par total ejercido sobre el satélite cuya procedencia sea tanto por fuerzas endógenas o exógenas; por ejemplo, producto del funcionamiento de actuadores o tras la incidencia de perturbaciones. En cambio,  $\mathbf{H}_s(t) \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$  se identifica como el momento angular del satélite [1] y que se expande en (3.26).

$$\mathbf{H}_s(t) = \mathbf{I}_s \boldsymbol{\omega}_s(t) \quad (3.26)$$

donde  $\mathbf{I}_s \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  corresponde al tensor de inercia, el cual se retomará más adelante. Por otro lado,  $\boldsymbol{\omega}_s(t) \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$  representa el vector de velocidad angular del satélite [63] y que se expande con sus respectivas componentes en (3.27)[64].

$$\boldsymbol{\omega}_s(t) = \begin{bmatrix} \omega_x(t) & \omega_y(t) & \omega_z(t) \end{bmatrix}^T \quad (3.27)$$

La tasa de cambio de  $\boldsymbol{\omega}_s(t)$  corresponde con su derivada temporal,  $\dot{\boldsymbol{\omega}}_s(t)$ , que no es otra cosa sino la aceleración angular del satélite y se abrevia bajo la notación  $\boldsymbol{\alpha}_s(t)$ . Es claro entonces que  $\boldsymbol{\alpha}_s(t) = \dot{\boldsymbol{\omega}}_s(t)$ . Al sustituir esta equivalencia en (3.25) se obtiene la ecuación (3.28). La nueva igualdad es crucial porque muestra con claridad la relación entre las variables que intervienen en la actitud del satélite. En ese sentido, nótese que el par que actúa sobre el satélite depende del producto entre el tensor de inercia – el cual es constante –, y la variación de su velocidad angular.

$$\boldsymbol{\tau}_s(t) = \dot{\mathbf{H}}_s(t) = \mathbf{I}_s \dot{\boldsymbol{\omega}}_s(t) = \mathbf{I}_s \boldsymbol{\alpha}_s(t) \quad (3.28)$$

A propósito, el tensor de inercia  $\mathbf{I}_s$  se compone de los momentos de inercia del satélite, que se definen como la propiedad inherente de la medida en que el sólido se opone a ser rotado; o bien, la tendencia a mantenerse en ese estado, y que a su vez depende de la cantidad y distribución de la materia en su estructura. Matemáticamente, se expresa en (3.29) y se identifica como un tensor simétrico, en cuya diagonal yacen los momentos de inercia de los ejes principales del satélite [65].

$$\mathbf{I}_s = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

En este punto resulta claro que – descartando las perturbaciones –, la actitud del satélite solamente puede cambiar por acto de la variación de la velocidad angular, ya que el tensor  $\mathbf{I}_s$  y los momentos de inercia  $I_{ij}$  son constantes al ser una propiedad de los sólidos. En la práctica, el satélite no rota por sí mismo cómo se vio en las secciones anteriores, sino por causa de los actuadores que le transfieren fuerzas, pares o momento angular. En el ámbito de la actitud, esto ocurre únicamente gracias al Principio de Conservación de Momento Angular (PCMA).

Este principio físico – basado en las leyes de Newton –, señala que el momento angular generado se conserva siempre y cuando no existan fuerzas externas que alteren su magnitud. En ese caso, el momento angular permanece constante y su derivada permanece exactamente igual a cero.

En otros términos, si  $\mathbf{H}_s(t) = cte.$ , es válido afirmar que,

$$\boldsymbol{\tau}_s(t) = \dot{\mathbf{H}}_s(t) = 0 \quad (3.30)$$

Es evidente que el momento angular del satélite se conserva en el espacio ya que se encuentra sin restricciones ni medios mecánicos que lo sujeten.

En la práctica, el PCMA es aprovechado para transmitir el momento angular generado por actuadores como las ruedas de reacción. La estrategia consiste en utilizar la rotación de las ruedas de reacción que yacen dentro del satélite para generar un momento angular, y mediante el principio en mención, transmitirlo a la estructura del satélite.

La transferencia del momento angular se genera de dos formas: ideal y perturbada.

### 1. Transferencia ideal de momento angular.

En este caso, la transferencia de momento angular se realiza de manera directa y sin interferencia entre la rueda de reacción y el satélite. Sea de una rueda de reacción:  $\mathbf{H}_R(t) \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$  el vector de momento angular generado, y  $\boldsymbol{\tau}_R(t)$  el vector de par producido, entonces, en analogía con la ecuación (3.28), se afirma lo plasmado en (3.31).

$$\boldsymbol{\tau}_R(t) = \dot{\mathbf{H}}_R(t) \quad (3.31)$$

Ya que los momentos angulares se conservan de acuerdo con PCMA, se dice que,

$$\dot{\mathbf{H}}_R(t) + \dot{\mathbf{H}}_s(t) = 0 \quad (3.32)$$

De acuerdo con la definición en (3.25), implica que:

$$\boldsymbol{\tau}_R(t) + \boldsymbol{\tau}_s(t) = 0 \quad (3.33)$$

Alternativamente,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{H}}_R(t) &= -\dot{\mathbf{H}}_s(t) \\ \boldsymbol{\tau}_R(t) &= -\boldsymbol{\tau}_s(t) \end{aligned} \quad (3.34)$$

La expresión (3.34) indica que, en virtud del PCMA, el momento angular es transferido de una rueda de reacción a la estructura del satélite. El signo negativo en la ecuación (3.34) es la razón por la que la rotación de un satélite se manifiesta en sentido opuesto al de la rueda de reacción, de acuerdo con lo visto en el capítulo anterior.

## 2. Transferencia perturbada del momento angular

Desafortunadamente, es un hecho que el momento angular no es el único que ejerce un par sobre el satélite. A la ecuación (3.30) hay que añadirle un tercer término,  $\tau_p(t) \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ , que representa el par producido por las perturbaciones ambientales. En (3.35) yace una representación más acertada de lo que en realidad sucede.

$$\tau_R(t) + \tau_s(t) + \tau_p(t) = 0 \quad (3.35)$$

Así que, análogamente con (3.33), la expresión (3.30) se convierte en (3.36), siendo esta una representación matemática más apropiada.

$$\tau_R(t) = -\tau_s(t) - \tau_p(t) \quad (3.36)$$

En resumen y a grandes rasgos, la generación de momento angular de las ruedas de reacción depende de dos factores: el momento de inercia de la parte rotativa,  $I_R \in \mathbb{R}$ , y el vector de la velocidad angular,  $\omega_R(t) \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ ; siendo ésta variable física la que otorga el actuador como producto de su operación. Bajo dichas consideraciones, una única rueda de reacción otorga un vector de momento angular (3.37), y en consecuencia, el par  $\tau_r(t)$ .

$$\mathbf{H}_r(t) = I_R \omega_r(t) \quad (3.37)$$

No obstante, a diferencia de la dinámica del satélite, la rueda de reacción únicamente es capaz de presentar una rotación de su parte rotativa y en dirección del vector que indique su rotor, por lo que la dirección y sentido de influencia de la rueda en la dinámica del satélite dependerá de donde se encuentre ubicado el actuador.

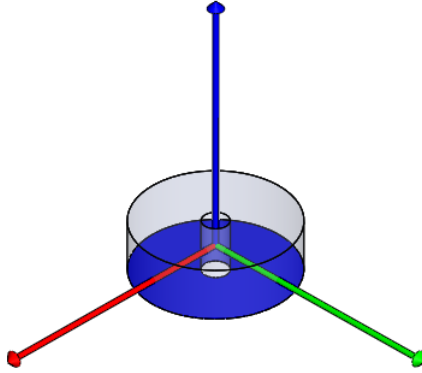
La respuesta yace en el vector unitario de  $\omega_r(t)$ , de donde se desprenden dos factores que son cruciales para el resto de este trabajo: la norma de la velocidad angular,  $\|\omega_r(t)\| \in \mathbb{R}$ , y el **vector unitario**,  $\hat{\omega}_r \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ , los que respectivamente indican la magnitud, dirección y sentido. El producto de ambos conforman la velocidad angular  $\omega_r(t)$ , tal y como se asienta en (3.38).

$$\omega_r(t) = \|\omega_r(t)\| \hat{\omega}_r \quad (3.38)$$

En el capítulo anterior, se explicó que cada rueda de reacción se encuentra fija en la estructura del satélite, por lo que  $\omega_r(t)$  únicamente podría cambiar en magnitud, mas no en sentido y dirección, lo que limita el potencial de este actuador. En la figura 3.4 se ofrece una ilustración simplificada de una rueda de reacción con el fin de ejemplificar lo anterior.

En ese sentido, se considera la existencia de un mejor aprovechamiento en la producción de momento angular y en la rotación del satélite si existiese una forma de alterar el vector unitario de la rueda, y con ello, convertir a  $\hat{\omega}_R$  en una función del tiempo, modificándolo según la necesidad.

En la siguiente sección se profundiza en la representación matemática necesaria para determinar la forma en la que las ruedas y sus componentes vectoriales influyen en el satélite.



**Figura 3.4:** Dibujo simplificado de una rueda de reacción colineal con un eje y centrada en el origen de un marco de referencia.

Un segundo grupo de ecuaciones que complementan la dinámica de actitud dada por (3.25), son las Ecuaciones de Euler [57], que son parte fundamental de la mecánica de sólidos y una extensión de la Segunda Ley de Newton. En ellas, se engloban la influencia de la velocidad angular y pares en un sólido, al igual que permite describir la rotación desde un marco de referencia inercial, y que se expresa en (3.39) [61].

$$\mathbf{I}_s \dot{\boldsymbol{\omega}}_s(t) + \boldsymbol{\omega}_s(t) \times (\mathbf{I}_s \boldsymbol{\omega}_s(t)) = \boldsymbol{\tau}_s(t) \quad (3.39)$$

El propósito de las ecuaciones de Euler no es otro sino el de manifestar la rotación de un cuerpo de una manera más realista que en la ecuación (3.25); que a pesar de ser válida y fundamental para todo movimiento angular, no toma en cuenta las restricciones físicas que implica rotar un sólido sujeto a un marco de referencia. En otras palabras, la ecuación en (3.39) representa mejor la actitud de un satélite cuando se somete a una rotación descrita por un marco de referencia rotativo con él, ya que los ejes del marco no pueden romper con la distribución ortogonal bajo ninguna circunstancia.

Uno de los inconvenientes de las ecuaciones de Euler es la *cuasi*-linealidad de la expresión en (3.39), ya que es difícil de resolver de manera analítica, aunque bien se pueden proponer algunos escenarios para su solución. En la práctica, una alternativa en tendencia es el uso de métodos numéricos para lidiar con ello y que ha demostrado ser confiable.

En resumen, la ecuación en (3.39) simboliza la máxima expresión necesaria y suficiente para describir la rotación real del satélite, que en conjunto con (3.36), engloban la dinámica de actitud satelital. En el próximo capítulo se usarán dichas ecuaciones y las de cinemática con el fin de modelar los cambios en la actitud.

Sin embargo para llegar a ello, antes es necesario establecer cómo interactúan las ruedas de reacción entre sí con el fin de lograr el control completo de actitud y cuales son sus características.

### 3.7. Arreglo de Ruedas de Reacción

Es el nombre que recibe un conjunto de dos o más ruedas de reacción en un mismo satélite, las cuales operan de manera combinada para satisfacer los objetivos de control del ADCS. En la literatura, se emplean denominaciones como *Reaction Wheel Array* (RWA) [66], *Momentum Wheel Array* [61] o Configuración de Ruedas de Reacción; todas en referencia al mismo concepto.

Los RWA son una herramienta potente y de suma importancia para el control de actitud cuando se emplean ruedas, logrando mejoras significantes en el desempeño y rendimiento [13]. Antes de describir los tipos de RWA es necesario definir los conceptos relacionados y que se enlistan a continuación.

- **Linealidad.**

A diferencia de la propiedad de los sistemas dinámicos con el mismo nombre, la linealidad es la característica de un RWA que se refiere a cuando yace una rueda coincidente con un eje principal del satélite.

- **Redundancia.**

Describe la capacidad para que dos o más ruedas puedan cubrirse unas a las otras en caso de falla. A menudo se relaciona la linealidad con la redundancia, ya que un RWA al ser redundante con frecuencia no guarda linealidad [67]. La redundancia también se ve relacionada con el rendimiento energético y con la complejidad del algoritmo de control.

- **Número.**

El número de ruedas también es una propiedad de los RWA. Es un hecho que el número mínimo de ruedas para conformar un RWA es dos, sin embargo, esta cantidad puede crecer sin un límite particular más allá de lo que permita la aplicación.

- **Distribución.**

Es el nombre que recibe de acuerdo con la distribución y orientación que presentan sus ruedas.

- **Optimización.**

Por la naturaleza del RWA, algunos arreglos están en la capacidad de reducir su consumo energético mediante la modificación de cierto ángulo de inclinación (*tilt angle*) de sus ruedas.

A menudo, lo idóneo pertenece a un RWA que cuente con las siguientes características:

1. Lineal, para simplificar la dinámica con respecto al cuerpo del satélite.
2. Redundante, por si una o más ruedas fallan.
3. Con un número reducido de ruedas para simplificar el control y, a su vez, mantener bajas las probabilidades de falla.
4. Optimizable, para asegurar la reducción de consumo energético.

En resumen, la selección de un RWA apropiado también es responsable de ofrecer capacidades suficientes para el ADCS y el CubeSat. A continuación, se presenta la tabla 3.1 con el fin de ofrecer un mejor panorama sobre los atributos de los RWA. Posteriormente, se abordará la representación matemática de los RWA, y finalmente se discuten sus propiedades.



Tabla 3.1: Arreglos de Rueda de Reacción más comunes.

Clave	Nombre	Número	Lineal	Redundante	Optimizable
Control Parcial de Actitud					
2-P	<i>Dos Ruedas de Reacción en Perpendicular</i>	2	Sí	No	No
Control Completo de Actitud					
3-O	<i>Tres Ruedas de Reacción en Ortogonal</i>	3	Sí	No	No
Control Completo y Redundante de Actitud					
4-TR	<i>Cuatro Ruedas de Reacción en Tetraédrico Regular</i>	4	Sí, 2 ejes	Sí, 1 eje	No
4-TI	<i>Cuatro Ruedas de Reacción en Tetraédrico Irregular</i>	4	Sí, 2 ejes	Sí, 1 eje	Sí, 2 ruedas
4-PYR	<i>Cuatro Ruedas de Reacción en Pirámide</i>	4	No	Sí, en 3 ejes	Sí, 2 ruedas

Otro concepto íntimamente relacionado se conoce como la **Matriz de Arreglo de Ruedas de Reacción**, la cual es una representación matemática conveniente y compacta para almacenar información de un RWA [68]. Se da mediante una expresión matricial, dígame  $\mathbf{A}_R \in \mathbb{R}^{3 \times n}$ , donde  $n$  implica el número de ruedas.  $\mathbf{A}_R$  se define así como una matriz compuesta por  $n$  vectores unitarios  $\hat{\omega}_r$ , de las  $n$  ruedas del RWA. Para mejor ilustración, véase la ecuación (3.40) y su expansión en (3.41).

$$\mathbf{A}_R = \begin{bmatrix} \hat{\omega}_1 & \hat{\omega}_2 & \dots & \hat{\omega}_{n-1} & \hat{\omega}_n \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

$$\mathbf{A}_R = \begin{bmatrix} \hat{\omega}_{1_x} & \hat{\omega}_{2_x} & \dots & \hat{\omega}_{n-1_x} & \hat{\omega}_{n_x} \\ \hat{\omega}_{1_y} & \hat{\omega}_{2_y} & \dots & \hat{\omega}_{n-1_y} & \hat{\omega}_{n_y} \\ \hat{\omega}_{1_z} & \hat{\omega}_{2_z} & \dots & \hat{\omega}_{n-1_z} & \hat{\omega}_{n_z} \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

La utilidad más grande de la matriz de RWA es determinar el grado de influencia de cada rueda de reacción para los ejes  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  y  $\hat{z}$  del marco de referencia del satélite. Para ello, se realiza el producto de  $\mathbf{A}_R^T$  con éstos, igual que en la ecuación (3.42).

$$\mathbf{A}_R^T \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\omega}_{1_x} & \hat{\omega}_{1_y} & \hat{\omega}_{1_z} \\ \hat{\omega}_{2_x} & \hat{\omega}_{2_y} & \hat{\omega}_{2_z} \\ \dots & \dots & \dots \\ \hat{\omega}_{(n-1)_x} & \hat{\omega}_{(n-1)_y} & \hat{\omega}_{(n-1)_z} \\ \hat{\omega}_{n_x} & \hat{\omega}_{n_y} & \hat{\omega}_{n_z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

### 3.8. Tipos de Arreglo de Rueda de Reacción

En esta sección, se presentan e ilustran finalmente los RWA de la tabla 3.1.

- **Dos Ruedas de Reacción Perpendiculares (2-P)**

Esta configuración cuenta únicamente con dos ruedas y son coincidentes con dos de los tres ejes principales del satélite. Es incapaz de ofrecer un control completo de actitud. A pesar de esto, el arreglo 2-P resulta particularmente útil para los casos en los que no se cuenta con el espacio suficiente, los recursos para implementar un control completo de actitud o debido a razones de suficiencia, en donde solo se desea tener control parcial como en el caso de los *Cansat*, o cuando ya se cuenta con otro actuador para cubrir el eje restante.

En la figura 3.5 se aprecia una versión simplificada de este RWA con dos ruedas colineales con  $\hat{x}$  y  $\hat{y}$ , respectivamente; y su matriz correspondiente en (3.43).

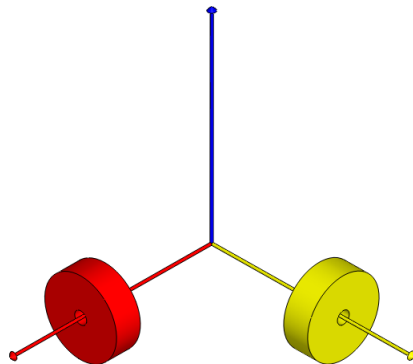
$$\mathbf{A}_R = \mathbf{A}_{2-P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

- **Tres Ruedas de Reacción Ortogonales (3-O)**

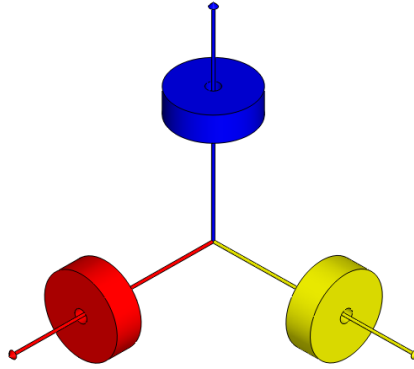
Es el RWA más simple en ofrecer un control completo de actitud. Está comprendido por una rueda de reacción colineal a cada eje. Junto con 2-P, ambos son los únicos arreglos cuyos comportamientos son de tipo lineal, y lamentablemente también implica que carecen de redundancia. Su uso sigue siendo muy útil para CubeSats pequeños cercanos a la 1U, en donde no se cuenta con tanto espacio que destinar para el ADCS.

En la figura 3.6 se aprecia una representación simplificada, junto con su matriz en (3.44).

$$\mathbf{A}_R = \mathbf{A}_{3-O} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.44)$$



**Figura 3.5:** Dos ruedas de reacción perpendiculares (2-P)



**Figura 3.6:** Tres ruedas de reacción ortogonales (3-O)

#### Cuatro Ruedas de Reacción en Tetraédrico

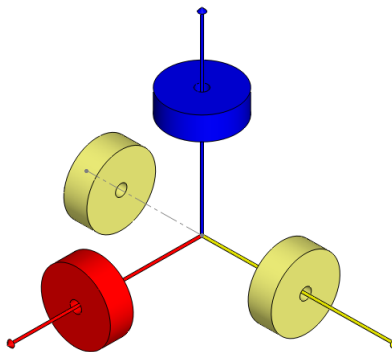
Esta subclasificación de RWA se divide en dos: *tetraédrico regular* (4-TR) y *tetraédrico inclinado* (4-TI), ambas con cuatro ruedas y son las primeras en ser del tipo redundante en esta lista. Reciben su nombre por la semejanza geométrica con el tetraedro.

- **Cuatro Ruedas de Reacción en Tetraédrico Regular (4-TR)**

Es un arreglo semejante al 3-O pero con una rueda adicional y colineal en uno de los ejes, lo que ofrece redundancia y no linealidad sobre sí. También permite la capacidad de generar el doble de momento angular si ambas rotan en sentido contrario y a la misma magnitud [15], lo que es de gran utilidad para aquellos satélites que cuentan con un eje significativamente mayor de inercia, como los CubeSat de 1.5U, 2U y 3U. La redundancia, por otra parte, no aplica para las dos ruedas restantes, por lo que se perderá un grado de libertad en caso de fallar una.

En la figura 3.7 se ofrece una ilustración, al igual que su expresión matricial en (3.45) con una rueda en  $\hat{x}$ , una segunda en  $\hat{y}$ , una tercera en  $\hat{z}$ , y una cuarta en  $-\hat{y}$ .

$$\mathbf{A}_R = \mathbf{A}_{4-TR} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.45)$$



**Figura 3.7:** Cuatro ruedas de reacción en arreglo tetraédrico regular (4-TR).

■ **Cuatro Ruedas de Reacción en Tetraédrico Inclinado (4-TI)**

Similar al caso anterior, pero con la diferencia de que dos ruedas son colineales a un eje y presentan un ángulo de inclinación  $\beta \in \mathbb{R}$  en relación con el plano  $\hat{x} - \hat{y}$ ; lo que hace que el RWA se convierta en parcialmente redundante.

Se ofrece una ilustración en la figura 3.8 y su matriz en (3.46), con algunas equivalencias en (3.48).

$$\mathbf{A}_R = \mathbf{A}_{4-TI} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & \\ 0 & -\hat{\beta}_4 & 0 & -\hat{\beta}_2 \\ 0 & & 1 & \\ & & & \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

■ **Cuatro Ruedas de Reacción en Pirámide (4-PYR)**

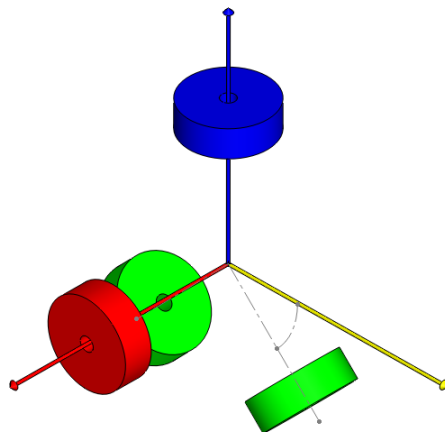
Este arreglo está conformado por cuatro ruedas de reacción inclinadas por  $\beta$ , cuya distribución asemeja a una pirámide (fig. 3.9); de donde toma su nombre. Esta RWA es el arreglo considerado de mayor desafío a la hora de implementar, aunque los beneficios también lo son.

Por una parte, se tiene un mejor rendimiento energético porque las ruedas rotan a una menor velocidad ya que el par a generar se divide entre las cuatro. Por otro lado, también se cuenta con una redundancia superior debido a que se ofrece la capacidad de continuar operando en caso de que falle una de las cuatro ruedas.

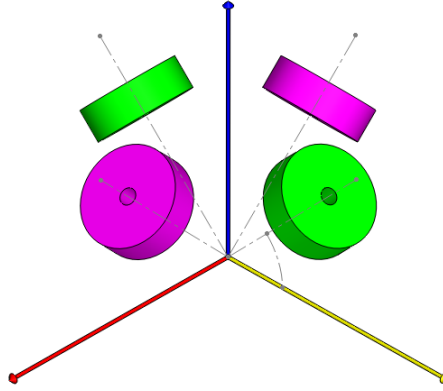
La desventaja de lo anterior es que, aunque es capaz de continuar ofreciendo un control completo de actitud, lo hace a un costo energético mucho mayor, lo que implica a su vez una tasa de desgaste superior para las ruedas debido a que deben compensar la que falla.

A pesar de todo lo anterior, el arreglo 4-PYR sigue siendo de los favoritos para la implementación del ADCS cuando se antepone la continuidad de la misión a costa del posible consumo energético en caso de que una falle.

Su matriz se halla en la ecuación (3.47).



**Figura 3.8:** Cuatro ruedas de reacción en arreglo tetraédrico inclinado (4-TI).



**Figura 3.9:** Cuatro ruedas de reacción en pirámide (4-PYR).

$$\mathbf{A}_R = \mathbf{A}_{4-PYR} = [\hat{\beta}_1 \quad \hat{\beta}_2 \quad \hat{\beta}_3 \quad \hat{\beta}_4] \quad (3.47)$$

donde,

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ \sin(\beta) \\ \cos(\beta) \end{bmatrix}, & \hat{\beta}_2 &= \begin{bmatrix} \sin(\beta) \\ 0 \\ \cos(\beta) \end{bmatrix}, & \hat{\beta}_3 &= \begin{bmatrix} -\sin(\beta) \\ 0 \\ \cos(\beta) \end{bmatrix}, & \hat{\beta}_4 &= \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin(\beta) \\ \cos(\beta) \end{bmatrix}, \\ -\hat{\beta}_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin(\beta) \\ -\cos(\beta) \end{bmatrix}, & -\hat{\beta}_2 &= \begin{bmatrix} -\sin(\beta) \\ 0 \\ -\cos(\beta) \end{bmatrix}, & -\hat{\beta}_3 &= \begin{bmatrix} \sin(\beta) \\ 0 \\ -\cos(\beta) \end{bmatrix}, & -\hat{\beta}_4 &= \begin{bmatrix} 0 \\ \sin(\beta) \\ -\cos(\beta) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.48)$$

### Ángulo de inclinación

Hay varias formas para determinar el ángulo  $\beta$  a partir de métodos analíticos. En este estudio, se optará por la vía del producto punto que se da entre el vector  $\hat{\beta}$  y el vector  $\hat{z}$ , mismo que es normal al plano  $\hat{x} - \hat{y}$  desde donde se estima el ángulo. De esta forma,  $\beta$  se calcula como en (3.49).

$$\beta = \arccos \left( \frac{\hat{\beta} \cdot \hat{z}_S}{\|\hat{\beta}\| \cdot \|\hat{z}_S\|} \right) \quad (3.49)$$

donde  $\beta$  es la misma para todos los vectores  $\pm\hat{\beta}_{1:4}$ , sin importar su sentido o dirección. El ángulo  $\beta$  es de suma importancia para los RWA que lo emplean, ya que se ha demostrado un menor consumo energético con un ángulo  $\beta$  cercano a los  $33^\circ$  [14].

### 3.9. Arreglo Reconfigurable de Ruedas de Reacción

Los contenidos vistos a lo largo de este capítulo han servido para alcanzar la consumación de la idea fundamental y sustancial de este trabajo, ya que al momento se cuenta con los elementos suficientes para generar una propuesta de solución al problema planteado.

A manera de recapitulación, las ruedas de reacción son actuadores eficaces y eficientes en la regulación de la actitud que trabajan en grupos denominados RWA. A través de ello, cada rueda ejerce cierto grado de influencia sobre la dinámica del satélite, que surge gracias a la variación de la velocidad angular, se transmite mediante el PCMA y se aplica según el vector unitario  $\hat{\omega}_r$  de la rueda; que por cierto, está fija en la estructura del satélite.

Ahora bien, como se sugirió anteriormente, la capacidad de poder modificar la ubicación y orientación de las ruedas del RWA se traduce en convertir el vector unitario  $\hat{\omega}_r$  de cada actuador en una función dependiente del tiempo,  $\hat{\omega}_r(t)$ ; y con ello cambiar de un RWA a otro, según se requiera.

Por ejemplo, en el supuesto de que un CubeSat cuente con cuatro ruedas, uno podría sugerir colocarlas en 4-PYR, ya que de esa manera se optimiza el consumo energético, se reduce el desgaste y se puede seguir cumpliendo con los objetivos del ADCS en caso de una falla irremediable en una rueda, aunque a un costo energético mucho mayor que el inicial. La idea de contar con un RWA reconfigurable consiste en, bajo ese escenario y con una rueda en falla, modificar el arreglo de 4-PYR a 3-O mediante la asignación de las tres ruedas sanas restantes a cada eje y descartar el uso de aquella en falla. En este supuesto, el consumo energético es menor que el 4-PYR con una rueda estropeada – pero mayor que una 4-PYR saludable –, sin descuidar los objetivos de control.

Los beneficios de contar con un RWA reconfigurable se resumen a continuación.

1. **Reposicionamiento.** La capacidad de que cierto número de ruedas se ubiquen sobre un mismo vector de orientación con el fin de sumar el momento angular generado individualmente.
2. **Ahorro energético.** Se disminuye el consumo de potencia eléctrica al tener más de una rueda trabajando de manera colineal, ya que la velocidad angular se divide; y por tanto, la potencia mecánica demandada.
3. **Mayor robustez.** El incremento de la robustez frente a las perturbaciones, ya que una mayor capacidad de generación de momento implica también una mayor capacidad de mitigar perturbaciones.
4. **Mayor supervivencia.** Aumenta la posibilidad de continuar la misión en caso de que una de las ruedas caiga en falla fatal, pues las restantes se pueden redistribuir para asegurar el control completo de actitud.

Una RWA reconfigurable sólo es realizable si se resuelve el desafío técnico acerca de cómo cambiar la posición de las ruedas dentro del satélite, ya que claramente no son capaces de lograrlo por sí solas. Entonces, se vuelve evidente que esta acción debe provenir de algún medio mecánico, articulación o mecanismo – a su vez basado en un actuador auxiliar o secundario –, cuya concepción tome en cuenta las limitaciones de volumen, peso y disponibilidad energética.

Ahora bien, todo lo vertido hasta el momento se traduce en los siguientes criterios para la elaboración de la propuesta.

## Propuesta de Solución

Cada uno de los puntos a continuación serán abordados y solucionados en el siguiente capítulo.

### CubeSat

1. El tamaño de CubeSat a considerar será de 3U, en virtud de ser el más popular entre los diseñadores, de acuerdo con lo plasmado en la tabla 2.1. Las propiedades para el modelo tomarán en cuenta factores como las dimensiones y la masa, pero sobretodo el tensor de inercia; según lo visto en las secciones 3.5 y 3.6.

### Marcos de Referencia

2. Se debe definir un marco de referencia para cada elemento a modelar: el CubeSat, las ruedas de reacción, el mecanismo reposicionador y el actuador secundario. El tipo de marco será según la naturaleza de la dinámica o el componente, de acuerdo con lo abordado en la sección 3.3.

### Cinemática y Dinámica Satelital

3. La cinemática se determinará con base en cuaterniones, mientras que se usarán ángulos de Euler para visualizar la actitud; según se abordó en las secciones 3.4 y 3.5.
4. Por otra parte, la dinámica se calculará con base en lo estudiado en la sección 3.6 a partir de las ecuaciones de Euler (3.39), el PCMA (3.35) y el momento angular (3.25).

### Ruedas de Reacción

5. Las ruedas de reacción deben ser capaces de rotar en ambos sentidos y, al igual que los actuadores secundarios, ser compactos, con un consumo energético y dimensiones reducidos.
6. La velocidad angular, el momento angular y el par generados deben ser suficientes para alcanzar los objetivos de control; de conformidad con lo visto en las secciones 3.6 y 3.7.

### Mecanismo de Reposicionamiento

7. El mecanismo debe ser capaz de modificar a  $\hat{\omega}_R$  tal que cualquier rueda pueda asumir la posición de cualquiera otra de los RWA vistos en la tabla 3.1 dentro de la sección 3.8.

### Actuador Secundario

8. El actuador secundario debe operar con independencia de las ruedas de reacción, y viceversa.

### Algoritmo de Control

9. El control deberá satisfacer los objetivos del ADCS y estará basado en una variante no explorada de la familia PID para el control de actitud.

## Metodología de Solución

La metodología de solución es la siguiente.

1. **Obtención de modelo.** Consiste en obtener el modelo matemático que represente de manera aproximada al genuino comportamiento del sistema dinámico, plasmado en ecuaciones diferenciales y espacio de estados. Por ejemplo, está claro que el modelo de un motor ya existe y ha sido ampliamente estudiado en la literatura, por lo que habrá que adecuarlo para una rueda.
2. **Obtención de parámetros.** Este punto va de la mano con el anterior, y trata acerca de establecer los parámetros relacionados con la dinámica a modelar. En otras palabras, se refiere al hecho de determinar los datos de las variables y parámetros de los modelos, tales como la nomenclatura, simbología, unidades; etcétera.
3. **Función de Transferencia.** Hallar la función de transferencia procedente del modelo en espacio de estados. La función de transferencia es útil para saber más acerca del sistema y permite la reducción de modelos; actividad que se explica a continuación.
4. **Controlabilidad y Observabilidad.** Se usa el modelo en espacio de estados para determinar si los modelos son controlables y observables. Es importante que los modelos cumplan con estas propiedades ya que, de lo contrario, no se podrán alcanzar los valores de referencia para proceso ni serán observables. Esto se determina con base en las matrices de controlabilidad y observabilidad que se verán más adelante.
5. **Propuesta de Controladores.** En caso positivo anterior, entonces se propone un controlador para cada planta, expresado en función de transferencia.
6. **Análisis del Lugar de las Raíces y sintonización.** Según el caso, visualizar el lugar de las raíces de la planta o sistema, lo que trae como ventaja determinar si es estable y observar algunas ganancias apropiadas para los controladores.
7. **Reducción de modelos.** Compactar los modelos compuestos por más de una planta, y a su vez, para con sus controladores. Esto sirve para combinar las dinámicas y con ello obtener una expresión más general del modelo, lo que a su vez permite estudiar cómo es que una planta interviene con otra. La reducción se da por medio de la álgebra de bloques.
8. **Conversión a Forma Canónica Controlable (FCC).** En algún punto entre la reducción y las simulaciones será necesario convertir a las plantas a la Forma Canónica de Controlabilidad a partir de la función de transferencia, con el fin de asegurar que todos los modos sean controlables.
9. **Análisis de estabilidad y desempeño.** Determinar mediante herramientas virtuales si el desempeño de los modelos son adecuados, para lo que se apoyará de Matlab y Simulink; ambos versión 2019a.
10. **Simulación con respuesta controlada.** Simular la dinámica controlada de los sistemas bajo ciertos escenarios por definir más adelante para poner a prueba la eficacia de la sintonización.



## Capítulo 4

# Modelado de Actuadores y Satélite

*“Mi carga es portar un ojo de Dios. Mi privilegio, es ver la verdad.” – Illaoi*

En este capítulo se aborda el modelado de las dinámicas de los actuadores y las partes que intervienen en el desarrollo de la propuesta plasmada en la sección 3.9 del capítulo anterior.

Se parte con el modelado de la rueda de reacción, misma que se divide en dos partes esenciales: la dinámica del motor y el modelo de la rueda de reacción. En segunda parte, se modela la superficie que dará pauta a la trayectoria sobre la cual se desplazarán las ruedas de reacción para adoptar el nuevo RWA. Por último, se establecerá el modelo del actuador secundario.

### 4.1. Rueda de Reacción

La rueda de reacción se identifica como un actuador activo conformado por un motor de corriente continua y un disco de inercia acoplado en su flecha; de acuerdo con lo visto en el capítulo uno. Su dinámica se divide en dos: interna y externa. A su vez, la dinámica interna del actuador se subdivide en dos: el disco de inercia responsable de incrementar el momento angular disponible; y el motor, que transforma potencia eléctrica en mecánica. La dinámica externa, en cambio, corresponde con la obtención de momento angular y par. Lo anterior se ilustra en la figura 4.1, al mismo tiempo que se ilustra el objetivo de modelado a perseguir para el final de esta sección.

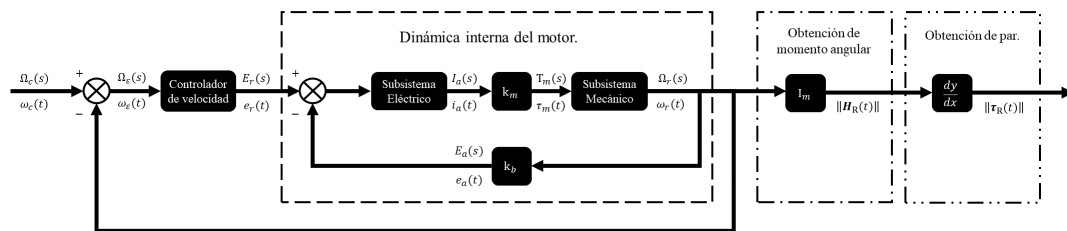


Figura 4.1: Diagrama a bloques de la dinámica interna y externa de la rueda de reacción.

### 4.1.1. Disco Inercial

El disco de inercia es un cuerpo sólido con forma cilíndrica compuesto por un material significativamente denso, comúnmente aleaciones de acero [54], latón o bronce fosforado, con el fin de incrementar la inercia del rotor y el momento angular  $\mathbf{H}_r$  disponible. La inercia del disco es representada con la notación  $I_d \in \mathbb{R}$ , y en adición a la inercia del rotor,  $I_r \in \mathbb{R}$ , conforman el momento de inercia total del motor,  $I_m \in \mathbb{R}$ . Matemáticamente se expresa como en la ecuación (4.1).

$$I_R = I_d + I_r \quad (4.1)$$

La ecuación que describe el momento de inercia de un cuerpo sólido rígido está dada por (4.2), donde  $m$  es la masa de las partículas que componen el sólido y  $r$  la distancia entre ellas y el eje de rotación. En dicha ecuación, se nota que el momento de inercia crece más rápido al aumentar  $r$  que en lugar de la masa, y por tanto, también el momento angular. Lo mejor es seleccionar una distribución lo más lejana posible del eje de rotación para las partículas que componen el disco de inercia [69], lo que se traduce en un disco con mayor radio dados una masa y volumen fijos. Sin embargo, hay que tomar en cuenta las dimensiones y peso que el disco puede disponer, pues son extremadamente limitadas, como se estableció en la tabla 2.1.

$$\sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \quad (4.2)$$

Convencionalmente, los discos de inercia se diseñan de la manera más simple para facilitar su manufactura, la que corresponde con un cilindro sólido alrededor del rotor. Una propuesta de mejora considera como disponible el espacio adyacente al cuerpo del motor, lo que implica un disco de inercia compuesto por dos secciones cilíndricas: una alrededor del rotor y otra del cuerpo del motor. Para una mejor ilustración, véase la figura 4.2. La suma de los momentos de inercia de cada sección da lugar a  $I_d$ , y se asume que el eje de rotación del disco es colineal con el centro del rotor.

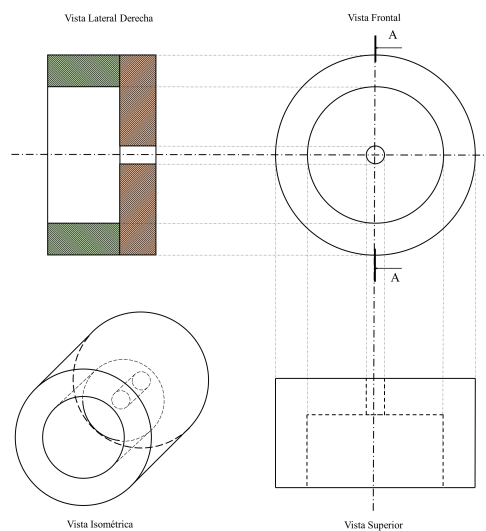


Figura 4.2: Dibujo de propuesta de disco inercial

La ecuación para determinar el momento de inercia para un cilindro con hueco está dada en (4.3) [69].

$$I = \frac{1}{2}m(r_i^2 + r_e^2) \quad (4.3)$$

donde  $r_i \in \mathbb{R}$  y  $r_e \in \mathbb{R}$  son los radios interior y exterior, respectivamente. Entonces, el momento de inercia  $I_d$  está dado por la suma de ambas secciones; llámense,  $d_1$  y  $d_2$ . El desarrollo correspondiente yace en (4.4).

$$\begin{aligned} I_d &= \frac{1}{2}m_{d_1}(r_{i_1}^2 + r_{e_1}^2) + \frac{1}{2}m_{d_2}(r_{i_2}^2 + r_{e_2}^2) \\ &= \frac{1}{2}[m_{d_1}(r_{i_1}^2 + r_{e_1}^2) + m_{d_2}(r_{i_2}^2 + r_{e_2}^2)] \end{aligned} \quad (4.4)$$

Si el radio exterior es idéntico para ambas secciones, entonces (4.4) se reduce en (4.5).

$$I_d = \frac{1}{2}[m_{d_1}(r_{i_1}^2 + r_e^2) + m_{d_2}(r_{i_2}^2 + r_e^2)] \quad (4.5)$$

Ahora bien, la masa es una propiedad física de la materia y se relaciona con el volumen mediante la densidad. Al considerar una temperatura constante, la masa de un material equivale al producto de su densidad por su volumen; es decir,  $m = \rho v$ . Nótese que la densidad es idéntica para ambas secciones ya que se componen del mismo material. Al trasladar estas nociones a (4.5), se obtiene (4.6).

$$\begin{aligned} I_d &= \frac{1}{2}[\rho v_{d_1}(r_{i_1}^2 + r_e^2) + \rho v_{d_2}(r_{i_2}^2 + r_e^2)] \\ &= \frac{1}{2}\rho[v_{d_1}(r_{i_1}^2 + r_e^2) + v_{d_2}(r_{i_2}^2 + r_e^2)] \end{aligned} \quad (4.6)$$

Es necesario recordar que los volúmenes de ambas secciones son deducibles a partir de principios geométricos. El volumen para un cilindro sólido rígido es  $\pi r^2 h$ , donde  $h \in \mathbb{R}$  es su altura. Si se resta el volumen que ocupará el rotor y el cuerpo del motor, entonces el volumen de los cilindros huecos  $d_1$  y  $d_2$  equivale a lo expresado en (4.7).

$$\begin{aligned} v_{d_1} &= \pi h_1(r_e^2 - r_{i_1}^2) \\ v_{d_2} &= \pi h_2(r_e^2 - r_{i_2}^2) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Finalmente, se sustituye (4.7) en (4.6), y tras algunas reducciones se obtiene (4.8), donde la última expresión otorga una expresión compacta y dependiente únicamente de dimensiones y una densidad constante, lo cual es útil para efecto de varias áreas del diseño.

$$\begin{aligned} I_d &= \frac{1}{2}\rho[\pi h_1(r_e^2 - r_{i_1}^2)(r_{i_1}^2 + r_e^2) + \pi h_2(r_e^2 - r_{i_2}^2)(r_{i_2}^2 + r_e^2)] \\ &= \frac{1}{2}\pi\rho[h_1(r_e^2 - r_{i_1}^2)(r_{i_1}^2 + r_e^2) + h_2(r_e^2 - r_{i_2}^2)(r_{i_2}^2 + r_e^2)] \\ &= \frac{1}{2}\pi\rho[h_1(r_e^4 - r_{i_1}^4) + h_2(r_e^4 - r_{i_2}^4)] \end{aligned} \quad (4.8)$$

En otros temas, existen varias preocupaciones a la hora de dimensionar las ruedas: la masa, el tamaño, y la capacidad de generación de momento angular, ya que estos aspectos están estrechamente vinculados. Por ejemplo, no se puede anteponer la capacidad de generación de momento angular porque entonces el disco tendría masa y dimensiones de gran magnitud; y en contraparte, un disco inercial pequeño no sería capaz de realizar ejercer la rotación necesaria. De igual manera se depende de las capacidades del motor, principalmente la velocidad angular máxima, el par y la potencia mecánica, cuyas propiedades se abordan más adelante.

De vuelta con el modelado del disco, existen dos propiedades que son de interés para este propósito:

### 1. Tiempo de rotación.

Es el tiempo finito,  $t_r \in \mathbb{R}$ , que le toma a una rueda de reacción efectuar la rotación del eje del satélite con mayor inercia,  $I_{max} \in \mathbb{R}$ , desplazándolo por un ángulo  $\theta$ . El tiempo de rotación también es una medida para la eficacia del diseño del disco, ya que entre menor sea el tiempo, más rápido podrá efectuar el cambio en la actitud. La ecuación que describe esta constante está dada por (4.9).

$$t_r = 2 \frac{I_{max}\theta}{\|\mathbf{H}_{r_{max}}\|} \quad (4.9)$$

donde  $\|\mathbf{H}_{r_{max}}\|$  equivale a la norma del momento angular máximo.

### 2. Momento angular máximo.

Es la cantidad máxima de momento angular que puede otorgar la rueda de reacción girando la parte rotativa del motor,  $I_m$ , a la velocidad angular máxima establecida por el fabricante,  $\|\boldsymbol{\omega}_{r_{max}}\| \in \mathbb{R}$ . Matemáticamente, el momento angular máximo se expresa en (4.10).

$$\|\mathbf{H}_{r_{max}}\| = I_R \|\boldsymbol{\omega}_{r_{max}}\| \quad (4.10)$$

Al utilizar las ecuaciones de ambos conceptos, (4.9) y (4.10), en conjunto con (4.1), se obtiene una expresión reducida en (4.11). Dicha ecuación permitirá conocer más sobre la dinámica del actuador y determinar si resulta apropiada para la aplicación mediante la cuantificación del momento angular.

$$t_r = 2 \frac{I_{max}\theta}{(I_d + I_r)\|\boldsymbol{\omega}_{R_{max}}\|} \quad (4.11)$$

Con lo anterior se da por concluido el modelado del disco inercial. La sustitución paramétrica se aborda en el siguiente capítulo para hallar una solución numérica. Mientras tanto, en la próxima sección se seguirá con el modelado del motor de la rueda de reacción.

### 4.1.2. Modelo del Motor

La dinámica del motor se compone por dos subsistemas: uno eléctrico y otro mecánico, en donde la dinámica de uno interactúa con la otra [70]. En la figura 4.3 se provee una representación en diagramas de bloques para una mejor interpretación.

A grandes rasgos, se dice que un motor eléctrico es una máquina que transforma energía eléctrica en mecánica, en la que se introduce tensión,  $e_r(t) \in \mathbb{R}$ , y corriente eléctrica,  $i_a(t) \in \mathbb{R}$ ; lo que otorga par,  $\tau_m(t) \in \mathbb{R}$ , y velocidad angular,  $\omega_r(t) \in \mathbb{R}$ . Para mejor referencia, la notación, unidades, símbolos y descripción de cada variable o parámetro se concentran en la tabla 4.1

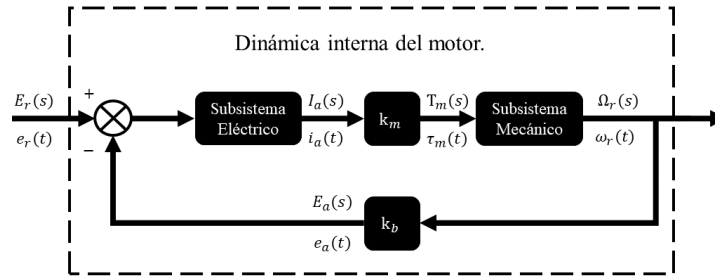


Figura 4.3: Diagrama a bloques de la dinámica interna de la rueda de reacción.

La clase de motor predilecta para las ruedas son motores sin escobillas, también conocidos como *Brush Less Direct Current motor*, o BLDC. Sin embargo, en este trabajo se optará por estudiar y emplear el modelo de un motor de imanes permanentes de corriente directa, en virtud de que ambos modelos son similares tal que pueden ser usados como equivalentes [71]. La dinámica que los describe está dada por el modelo plasmado en la ecuación (4.12) con algunas equivalencias en (4.13) [70].

Cabe aclarar que algunos parámetros en la tabla 4.1, como la resistencia  $R_a$ , dependen de la temperatura en un sentido más analítico, por lo que en estricto sentido debería ser considerada como variable. No obstante, serán abordados como constantes ya que el TCS ofrece la regulación de temperatura del satélite, por lo que se asume que la temperatura es constante y también  $R_a$ .

$$\begin{aligned}\tau_m(t) &= I_R \frac{d^2\theta_r(t)}{dt^2} + b \frac{d\theta_r(t)}{dt} \\ e(t) &= R_a i_a(t) + L_a \frac{di_a(t)}{dt} + e_a(t)\end{aligned}\quad (4.12)$$

$$\begin{aligned}e_a(t) &= k_b \frac{d\theta_m(t)}{dt} \\ e_a(t) &= k_b \omega_r(t) \\ \tau_m(t) &= k_m i_a(t) \\ \omega_r(t) &= \frac{d\theta_r(t)}{dt} \\ \alpha_r(t) &= \frac{d^2\theta_r(t)}{dt^2} \\ I_R &= I_d + I_r\end{aligned}\quad (4.13)$$

**Tabla 4.1:** Parámetros y variables mecánicos y eléctricos de motor de imanes permanentes.

Subsistema	Notación	Unidad [Símbolo]	Descripción
Eléctrico	Parámetros		
	$k_m$	$[\frac{N \cdot m}{A}]$	Constante de construcción del motor.
	$k_b$	$[\frac{V}{rad/s}]$	Constante de fuerza contra-electromotriz.
	$R_a$	Ohm $[\Omega]$	Resistencia eléctrica de la armadura.
	$L_a$	Henry $[H]$	Inductancia de armadura.
	Parámetros máximos		
	$e_{max}(t)$	Volt $[V]$	Tensión máxima de alimentación.
	Variables		
	$i_a(t)$	Ampere $[A]$	Corriente de armadura.
	$e(t)$	Volt $[V]$	Tensión de alimentación.
	$e_a(t)$	Volt $[V]$	Fuerza contra-electromotriz.
	$w_e(t)$	Watt $[W]$	Potencia eléctrica.
Mecánico	Parámetros		
	$I_r$	$[Kg \cdot m^2]$	Momento de inercia del rotor.
	$I_d$	$[Kg \cdot m^2]$	Momento de inercia del disco inercial.
	$I_R$	$[Kg \cdot m^2]$	Momento de inercia total del rotor.
	$b$	$[\frac{N \cdot m}{(rad/s)}]$	Constante de fricción viscosa.
	Parámetros máximos		
	$\omega_{max}$	$[\frac{rad}{s}]$	Velocidad angular máxima del rotor.
	$\tau_{max}$	$[N \cdot m]$	Par motor máximo.
	Variables		
	$\tau_m(t)$	$[N \cdot m]$	Par motor.
	$\theta_r(t)$	Radianes $[rad]$	Posición angular del rotor.
	$\omega_r(t)$	$[\frac{rad}{s}]$	Velocidad angular del rotor.
	$\alpha_r(t)$	$[\frac{rad}{s^2}]$	Aceleración angular del rotor.
$w_m(t)$	Watt $[W]$	Potencia mecánica.	

El objetivo a continuación es generar una representación en espacio de estados con base en el modelo dado por (4.12), su función de transferencia y otras representaciones para conocer más acerca del sistema y su dinámica.

### 4.1.3. Modelo en Espacio de Estados y Función de Transferencia

En las ecuaciones diferenciales que describen la dinámica del motor (4.12), se deja en claro que son cuatro variables las candidatas a estados: la tensión  $e(t)$ , la corriente eléctrica  $i_a(t)$ , y la velocidad y posición angulares,  $\omega_r(t)$  y  $\theta_r(t)$ . No obstante, en la ecuación (4.12) se utiliza con mayor frecuencia la corriente  $i_a(t)$  y su derivada, mismo que ocurre con la velocidad angular  $\omega_r(t)$ , lo que las convierte en mejores prospectos para seleccionarlos como variables de estado.

Por lo tanto, se propone los estados como en (4.14) y (4.15).

$$\begin{aligned}x_1(t) &= \omega_r(t) \\x_2(t) &= i_a(t)\end{aligned}\tag{4.14}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= \dot{\omega}_r(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \dot{i}_a(t)\end{aligned}\tag{4.15}$$

El próximo paso consiste en ajustar el orden y la distribución de los términos en (4.12) para facilitar la conversión a espacio de estados. En segundo lugar, se despejan  $\dot{\omega}_r(t)$  y  $\dot{i}_a(t)$  para obtener (4.16) tras reducir algunos términos.

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_r(t) &= \frac{1}{I_m}\tau_m(t) - \frac{b}{I_m}\omega_r(t) \\ \dot{i}_a(t) &= \frac{1}{L_a}e(t) - \frac{R_a}{L_a}i_a(t) - \frac{1}{L_a}e_a(t)\end{aligned}\tag{4.16}$$

Se aplican las equivalencias para  $\tau_m(t)$  y  $e_a(t)$  establecidas en (4.13), lo que arroja a (4.17).

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_r(t) &= \frac{1}{I_m}(k_m i_a(t)) - \frac{b}{I_m}\omega_r(t) \\ \dot{i}_a(t) &= \frac{1}{L_a}e(t) - \frac{R_a}{L_a}i_a(t) - \frac{1}{L_a}(k_b\omega_r(t))\end{aligned}\tag{4.17}$$

Se sigue en (4.18).

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_r(t) &= \frac{k_m}{I_m}i_a(t) - \frac{b}{I_m}\omega_r(t) \\ \dot{i}_a(t) &= \frac{1}{L_a}e(t) - \frac{R_a}{L_a}i_a(t) - \frac{k_b}{L_a}\omega_r(t)\end{aligned}\tag{4.18}$$

En donde ya es posible sustituir con claridad las variables de estado (4.14) y sus derivadas (4.15), lo que arroja a (4.19).

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -\frac{b}{I_m}x_1(t) + \frac{k_m}{I_m}x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{k_b}{L_a}x_1(t) - \frac{R_a}{L_a}x_2(t) + \frac{1}{L_a}e(t)\end{aligned}\tag{4.19}$$

Finalmente, la representación en espacios de estados para el modelo del motor queda como en la ecuación (4.20), con su conversión en función de transferencia en (4.21) a partir de las matrices que lo conforman, de acuerdo con la teoría de los sistemas lineales [72] [73].

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{b}{I_m} & \frac{k_m}{I_m} \\ -\frac{k_b}{L_a} & -\frac{R_a}{L_a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L_a} \end{bmatrix} e(t) \\ \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} R_{ol}(s) &= \frac{\Omega_r(s)}{E(s)} = \mathbf{C}_r (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_r)^{-1} \mathbf{B}_r \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{b}{I_m} & \frac{k_m}{I_m} \\ -\frac{k_b}{L_a} & -\frac{R_a}{L_a} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L_a} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.21)$$

De donde se reduce en (4.22) y con una equivalencia más adecuada.

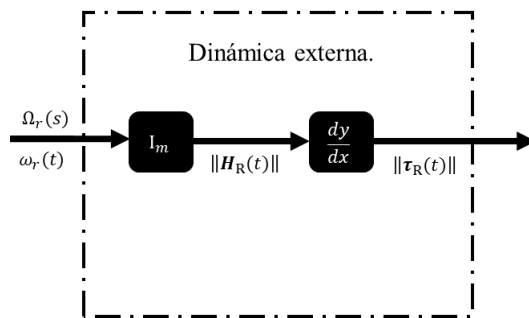
$$R_{ol}(s) = \frac{\frac{k_m}{I_m L_a}}{s^2 + \frac{L_a b + I_m R_a}{I_m L_a} s + \frac{k_b k_m + R_a b}{I_m L_a}} \quad (4.22)$$

## Dinámica Externa

La segunda parte de la dinámica ilustrada de la rueda en la figura 4.3 es la dinámica externa, conformada por el momento angular y par. Ambas no forman parte de la interna ya que son variables que no están disponibles para su medición. En consecuencia, permanecen en lazo abierto inmediatamente después de la obtención de la velocidad angular, tal y como en la figura 4.4.

Otra variable externa es la potencia mecánica, que se define en (4.23) [74].

$$w_m(t) = \tau_m(t) \omega_r(t) \quad (4.23)$$



**Figura 4.4:** Diagrama a bloques de la dinámica externa de la rueda de reacción.



## 4.2. Banda de Möbius

La banda de Möbius se describe topológicamente como una superficie no orientable, cerrada y con bordes definidos, cuya representación surge como un subconjunto de  $\mathbb{R}^3$  mediante la parametrización en (4.24), y que se abrevia como  $S_m$  [75]. En la figura 4.5 se presenta una ilustración.

$$S_m \begin{cases} x_M(u, v) = \left[ r + \frac{v}{2} \cos\left(\frac{u}{2}\right) \right] \cos(u) \\ y_M(u, v) = \left[ r + \frac{v}{2} \cos\left(\frac{u}{2}\right) \right] \sin(u) \\ z_M(u, v) = \frac{v}{2} \sin\left(\frac{u}{2}\right) \end{cases} \quad (4.24)$$

donde  $u = [0 \leq u \leq 2\pi]$  es el valor longitudinal de la banda, mientras que  $v = [-0.5 \leq v \leq 0.5]$  representa el ancho de la misma, el cual se propone como unitario, y con  $r \in \mathbb{R}$  que corresponde con su radio. El subíndice  $M$  en (4.24) hace referencia al marco que define la ubicación de  $S_m$ . El marco  $M$  es del tipo BFF y encuentra origen,  $o_M$ , en el centro de masas del satélite,  $o_S$ .

Bajo la siguiente hipótesis, la banda de Möbius es útil para la solución de la propuesta técnica en (3.9).

Supóngase una función  $T(t)$ , cuya composición se basa en la trayectoria que describe el vector normal a la superficie  $S_m$  para todo valor de  $u$ . En ese supuesto, se puede pensar en una rueda de reacción con un vector  $\hat{\omega}_r$  tal que se desplace de acuerdo con  $T(t)$ , y sea capaz de adoptar cada uno de los valores infinitesimales de dirección y sentido de los vectores normales a  $S_m$ .

En otras palabras, la rueda de reacción sería capaz de reubicarse – mediante el cambio de  $\hat{\omega}_r$  –, en cualquier dirección normal a la superficie  $S_m$ . No obstante, para que eso suceda, es necesario realizar algunos ajustes topológicos en la definición actual de  $S_m$  en (4.24).

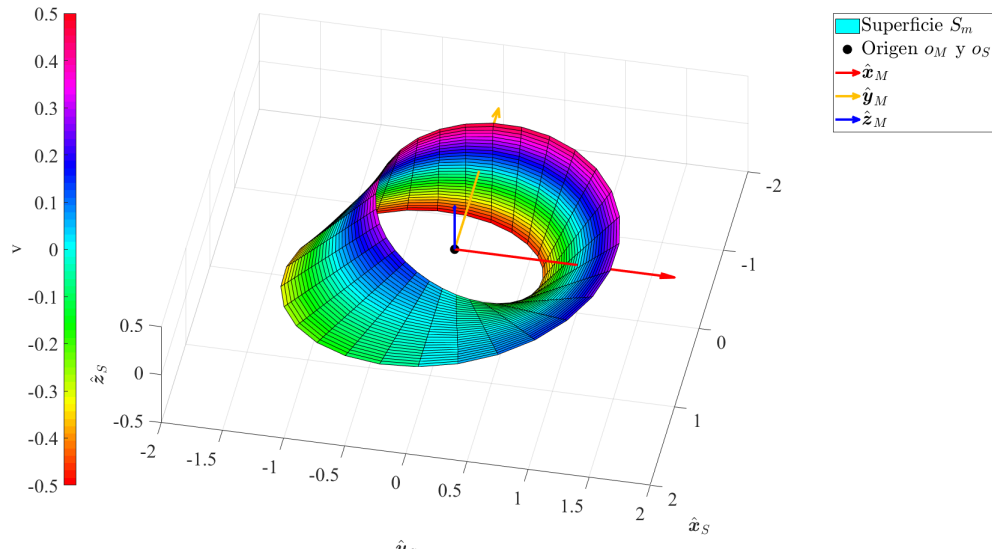


Figura 4.5: Banda de Möbius original

### 4.2.1. Ajustes Topológicos

Las modificaciones requeridas para proponer una  $T(t)$  adecuada son tres: **alineación**, que hace coincidentes el sistema coordenado  $M$  con  $S$ ; **torsión**, que aumenta el grado de esta propiedad; y finalmente **unión**, para cerrar la nueva superficie. A continuación, se desarrolla cada uno de ellos.

#### 1. Alineación.

Este ajuste básicamente consiste en alinear los ejes  $\hat{x}_M$  y  $\hat{y}_M$  con los ejes  $\hat{x}_S$  y  $\hat{y}_S$  del marco del satélite. Para ello, se agrega un factor  $\eta \in \mathbb{R}$  a los argumentos de las funciones trigonométricas de  $S_m$  en (4.24), cuyo valor es de  $\frac{1}{2}\pi$ ; que es lo que lo que hace falta para que aquello ocurra. Así,  $S_m$  se convierte en  $S_{m_1}$ , que se expresa en (4.25) y pasa a ilustrarse en la figura 4.6. Naturalmente, el ajuste en cuestión solamente es posible debido a que el marco  $M$  es de tipo BFF y está fijo con la superficie, por lo que si uno rota con respecto a  $S$ , el otro también.

$$S_{m_1} \begin{cases} x_M(u, v) = \left[ r + \frac{v}{2} \cos\left(\frac{u}{2} + \eta\right) \right] \cos(u + \eta) \\ y_M(u, v) = \left[ r + \frac{v}{2} \cos\left(\frac{u}{2} + \eta\right) \right] \sin(u + \eta) \\ z_M(u, v) = \frac{v}{2} \sin\left(\frac{u}{2} + \eta\right) \end{cases} \quad (4.25)$$

Es de vital importancia señalar que la alineación de los ejes de  $M$  con  $S$  es lo que hace efectiva la operación de los actuadores, ya que en el menester de la reubicación de las ruedas, lo que interesa es que su vector unitario sea paralelo (o colineal) al vector de  $S$  en cuestión. Esto ocurre porque la rotación del satélite siempre sucede con respecto al origen  $o_S$ , que simboliza su centro de masas. Para denotar el vector unitario paralelo o colineal con determinado vector del marco  $S$ , pero normal a la superficie, se usará la notación  $\hat{N}$ , con subíndice en referencia al eje en cuestión.

Con base en lo anterior, se procede al graficado de los vectores que cumplen con esta condición en la figura 4.7, en donde se aprecia que sólo el vector  $\hat{N}_{\hat{y}}$  es colineal con  $\hat{y}_S$ , mientras que  $\hat{N}_{\hat{z}}$  es paralelo con su homónimo en el marco  $S$ ,  $\hat{z}_S$ ; siendo ambos vectores de igual utilidad.

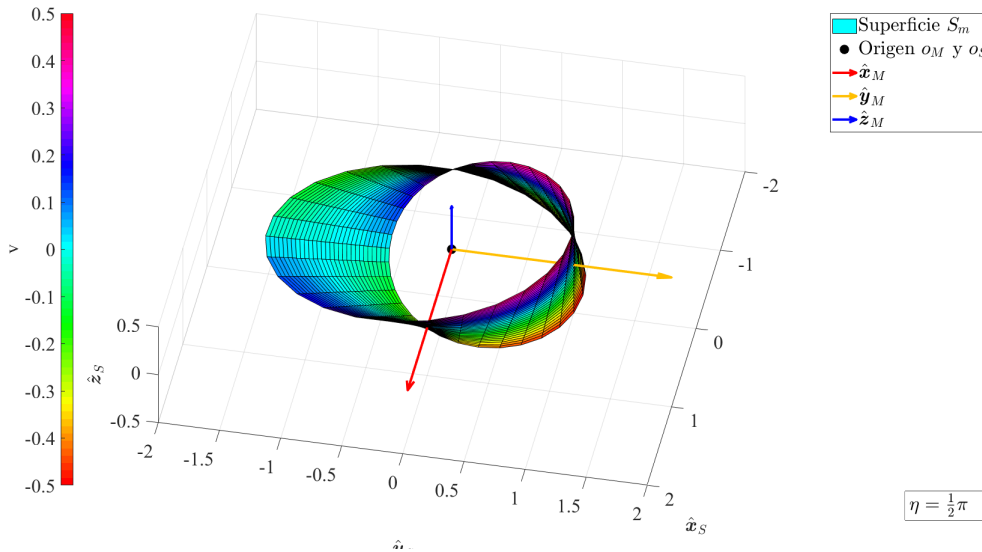


Figura 4.6: Banda de Möbius con ejes alineados con  $S$

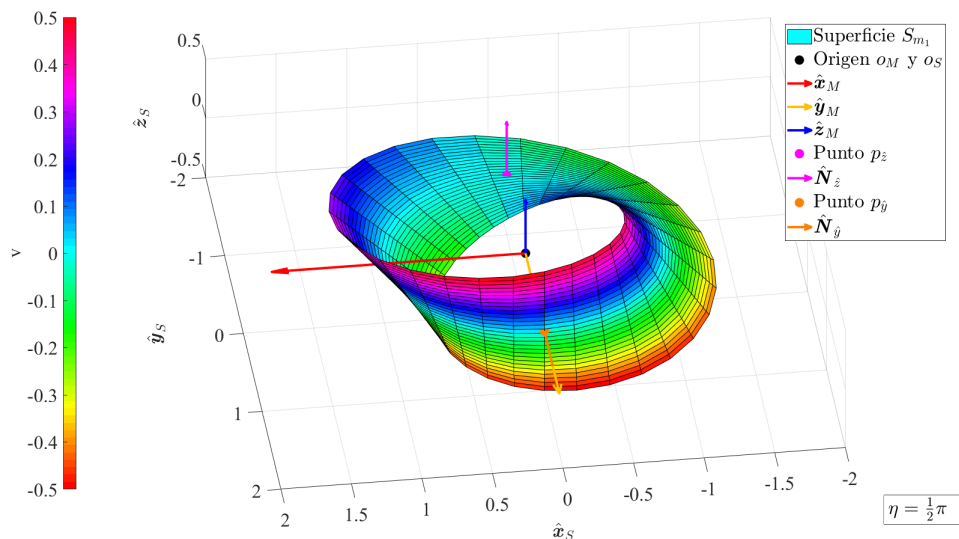


Figura 4.7: Banda de Möbius con ejes alineados y puntos de intersección.

Los puntos de intersección mostrados en la figura 4.7 son de interés para el desarrollo del siguiente ajuste, pues se nota que el eje  $\hat{x}_M$  no coincide normalmente ni colineal ni paralelamente con la superficie  $S_{m_1}$ ; mismo que se busca corregir a continuación.

## 2. Torsión.

Lo mencionado anteriormente se traduce en lograr una intersección del vector  $\hat{x}_M$  sobre la superficie  $S_{m_1}$ , y con ello dar lugar a un punto  $p_x$ , lo que se alcanza estudiando el grado de torsión de la banda. Se sabe que la banda se torsiona a razón de  $\pi$  por revolución, es decir, que las superficies  $S_m$  y  $S_{m_1}$  se ven torsionadas  $180^\circ$  al concluir el trayecto marcado por  $u$  en  $2\pi$ .

Si se aumenta el grado de torsión un poco más, será posible lograr la intersección en  $\hat{x}_M$ . Para ello, se añade un nuevo factor  $f \in \mathbb{R}$  a los argumentos de  $S_{m_1}$  en (4.25), lo que da lugar a (4.26).

$$\mathbf{S}_{m_2} \begin{cases} x_M(u, v) = \left[ r + \frac{v}{2} \cos\left(\frac{u}{2}f + \eta\right) \right] \cos(u + \eta) \\ y_M(u, v) = \left[ r + \frac{v}{2} \cos\left(\frac{u}{2}f + \eta\right) \right] \text{sen}(u + \eta) \\ z_M(u, v) = \frac{v}{2} \text{sen}\left(\frac{u}{2}f + \eta\right) \end{cases} \quad (4.26)$$

Tras un breve análisis, se concluye que se requiere una  $f$  tal que la banda tenga una torsión de  $\pi$  cuando  $u = 3/2\pi$ ; es decir, una torsión 1.5 veces más rápida. Bajo el razonamiento anterior, se obtiene que  $f = 4/3$ . Consecuentemente, al sustituirse en (4.26), se crea a (4.27) con su reducción correspondiente, al igual que una ilustración en 4.8.

$$\mathbf{S}_{m_3} \begin{cases} x_M(u, v) = \left[ r + \frac{v}{2} \cos\left(\frac{2}{3}u + \eta\right) \right] \cos(u + \eta) \\ y_M(u, v) = \left[ r + \frac{v}{2} \cos\left(\frac{2}{3}u + \eta\right) \right] \text{sen}(u + \eta) \\ z_M(u, v) = \frac{v}{2} \text{sen}\left(\frac{2}{3}u + \eta\right) \end{cases} \quad (4.27)$$

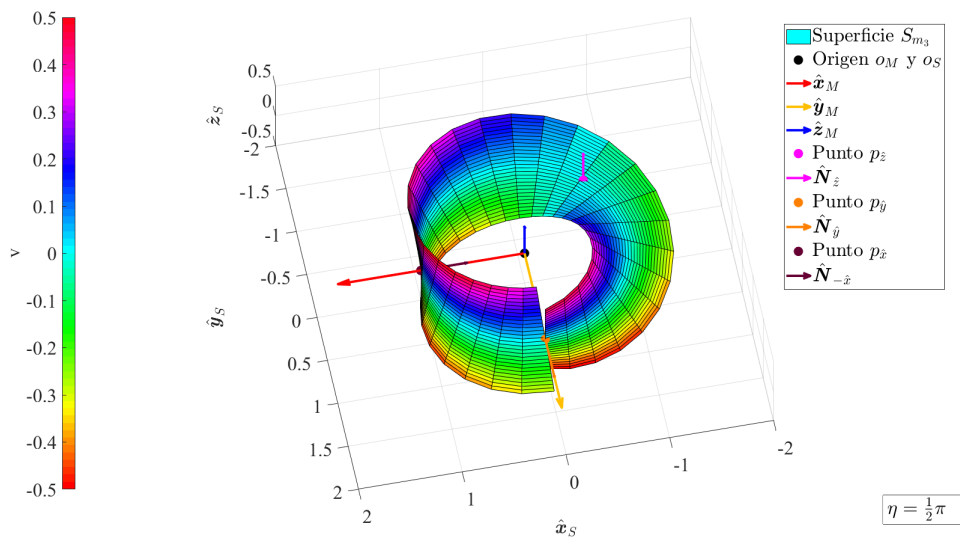


Figura 4.8: Banda de Möbius con torsión aumentada.

Ocurren tres principales consecuencias que son claramente observables en la figura 4.8 debido al incremento en la torsión: por un lado, se alcanza la intersección en  $x_M$  con sus respectivos punto y vector, aunque con sentido opuesto a  $x_S$ ; por el otro, el punto  $p_z$  se ve desplazado sobre  $S_{m_3}$  para ubicarse en  $u = 3/4\pi$ , lo que no trae ningún impacto porque su vector sigue siendo paralelo; y más importante, la banda pierde su característica de ser cerrada por la pérdida de continuidad cerca de  $u = 2\pi$ .

La solución a esto consiste en *recortar* el valor de  $u$  para  $S_{m_3}$ , redefiniendo el rango de  $u$  a  $0 \leq u \leq \frac{3}{2}\pi$ . La superficie que guarda esta propiedad se renombra como  $S_{m_4}$  y se muestra en 4.9.

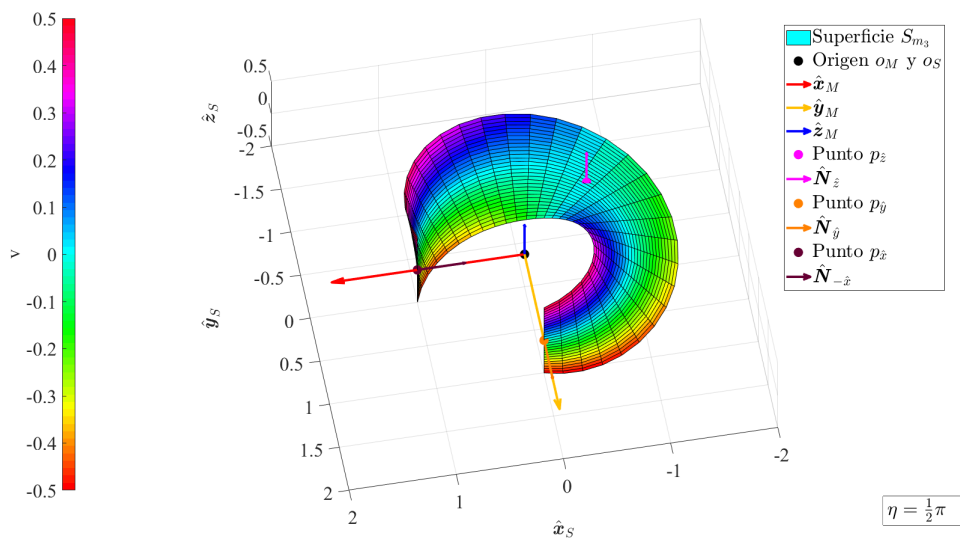


Figura 4.9: Banda de Möbius con torsión aumentada y recortada.

### 3. Unión.

El último ajuste consiste en cerrar la superficie abierta en el intervalo  $\frac{3}{2}\pi < u < 2\pi$  de  $S_{m_4}$ . Esto se logra mediante la unión con otra superficie que cuente con los siguientes requisitos.

- Que presente torsión nula para devolver la continuidad a la banda,
- Que sea capaz de adoptar el mismo ancho  $v$  y radio  $r$  de la banda,
- Que la unión entre ambas superficies sea perfecta en cualquier extremo o punto.

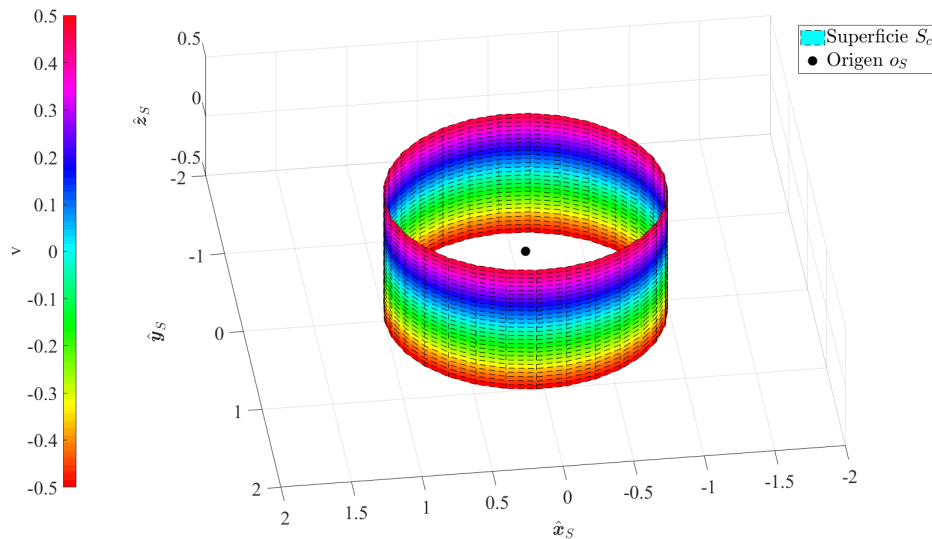
Un candidato apto es la superficie  $S_c$  descrita en (4.28), la cual representa un cilindro sin tapas que comparte el radio  $r$  y ancho  $v$  de la banda. En la figura 4.10 se ofrece una ilustración con valores unitarios, centrada en  $o_S$ .

$$S_c \begin{cases} x_M(u) = r \cos(u) \\ y_M(u) = r \sin(u) \\ z_M(u) = \frac{v}{2} \end{cases} \quad (4.28)$$

Sin embargo, al igual que con  $S_m$  y sus variantes, la ecuación que describe al cilindro en (4.28) también se ve alterada por el factor de alineación  $\eta$ , por lo que pasa a convertirse en  $S_{c_1}$  y que yace en (4.29).

Al añadir aplicar el intervalo abierto  $3/2\pi < u < 2\pi$  a dicha superficie, se obtiene la figura (4.11); siendo ésta la forma final que se empleará con respecto al cilindro.

$$S_{c_1} \begin{cases} x_M(u) = r \cos(u + \eta) \\ y_M(u) = r \sin(u + \eta) \\ z_M(u) = \frac{v}{2} \end{cases} \quad (4.29)$$



**Figura 4.10:** Superficie de cilindro sin tapas, con ancho y radio unitarios.

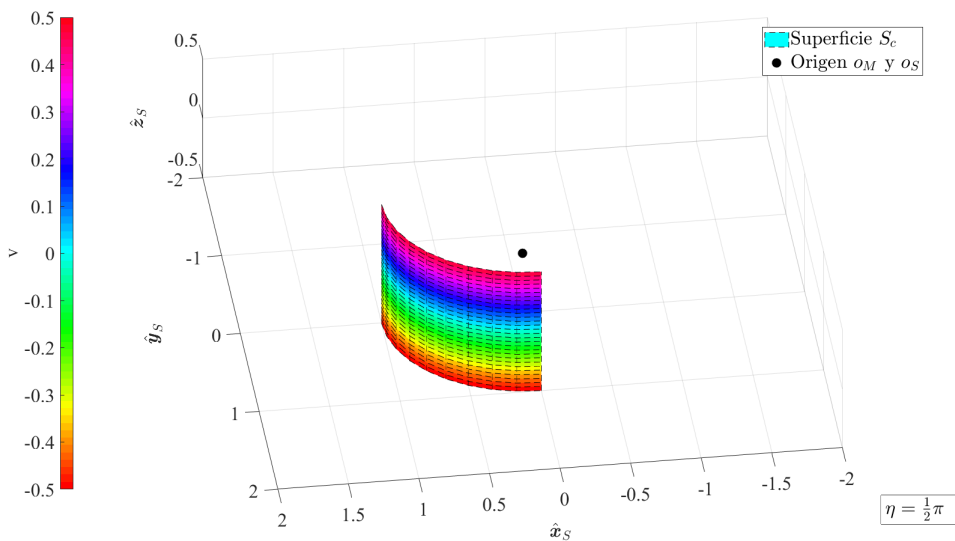


Figura 4.11: Superficie recortada de cilindro sin tapas.

La actividad final de los ajustes topológicos corresponde con nada más ni nada menos que con la unión de  $S_{m_4}$  y  $S_{c_1}$ , misma que da lugar a una tercera denominada como *Banda de Möbius modificada*, representada por  $S_M$  (4.30) y que se muestra en la figura 4.12.

$$S_M = S_{m_4} \cup S_{c_1} \quad S_M \begin{cases} S_{m_4}, & 0 \leq u \leq \frac{3}{2}\pi \\ S_{c_1}, & \frac{3}{2}\pi < u < 2\pi \end{cases} \quad (4.30)$$

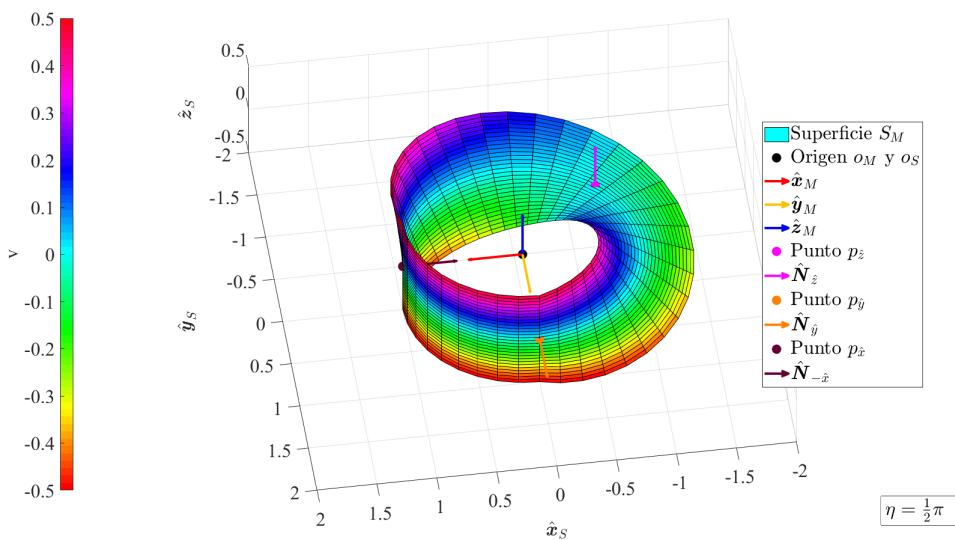


Figura 4.12: Banda de Möbius modificada.

### 4.2.2. Puntos de Intersección y Vectores Normales

La importancia de que la banda de Möbius modificada sea una superficie cerrada radica en la capacidad de recrear otros vectores normales, los cuales son opuestos a los hallados en el proceso anterior y que encuentran origen en los puntos establecidos. Por ejemplo, es evidente que en la figura 4.12, los vectores normales obtenibles son  $\hat{N}_{\hat{y}}$ ,  $\hat{N}_{\hat{z}}$  y  $\hat{N}_{-\hat{x}}$ . Sin embargo, al incrementar el valor de  $u$  hasta  $u = 2\pi$ , el vector normal obtenido ya no es  $\hat{N}_{\hat{y}}$ , sino  $\hat{N}_{-\hat{y}}$ . En consecuencia, se hallan dos vectores adicionales con el incremento de  $u$ :  $\hat{N}_{-\hat{z}}$  y  $\hat{N}_{\hat{x}}$ .

Esto conlleva a que  $u$  adopte un rango mucho mayor antes de volver a su valor inicial, cero. Si se considera como una revolución cuando  $0 \leq u < 2\pi$ , entonces una segunda revolución equivale a cuando  $2\pi \leq u < 4\pi$ , misma que corresponde con el trayecto *negativo* sobre  $S_M$ . En la práctica, una vez que se alcanza la magnitud  $u = 4\pi$ , puede seguirse aumentando el valor de  $u$  ilimitadamente – bajo ciertos problemas de saturación –, o bien, aprovecharse la propiedad periódica de  $S_M$  y restar  $4\pi$  de  $u$ , procurando que  $u$  siempre se mantenga entre el intervalo  $0 \leq u < 4\pi$ . Se considera un escenario similar si  $u$  yace por debajo de cero.

Las propiedades periódicas de la banda de Möbius modificada – y su segunda revolución –, lleven a que la utilidad de  $S_M$  se expanda a recrear los vectores  $\beta_1$  y  $\beta_2$ , sus puntos y opuestos vistos en la sección 3.8. La ubicación de los puntos,  $\beta_1$  y  $\beta_2$  yacen en  $u = 1/2\pi$  y  $u = \pi$ , de donde se despliegan normalmente a la superficie.

En la figura 4.13 se presenta la superficie  $S_M$  descrita en (4.30), pero con un grado de transparencia tal que se permita observar todos los vectores mencionados y sus opuestos con el propósito de conseguir un mejor grado de comprensión de lo enunciado. Sin embargo, una de las deficiencias que tiene la banda  $S_M$  es que no es capaz de recrear los vectores  $\hat{\beta}_3$  y  $\hat{\beta}_4$ , ni sus opuestos  $-\hat{\beta}_3$  y  $-\hat{\beta}_4$ . Más adelante se explorará una alternativa para construir con una solución, pero antes es necesario determinar la función que describe los vectores normales a la superficie para dar con las componentes exactas de cada  $\hat{N}$  y  $\hat{\beta}$ .

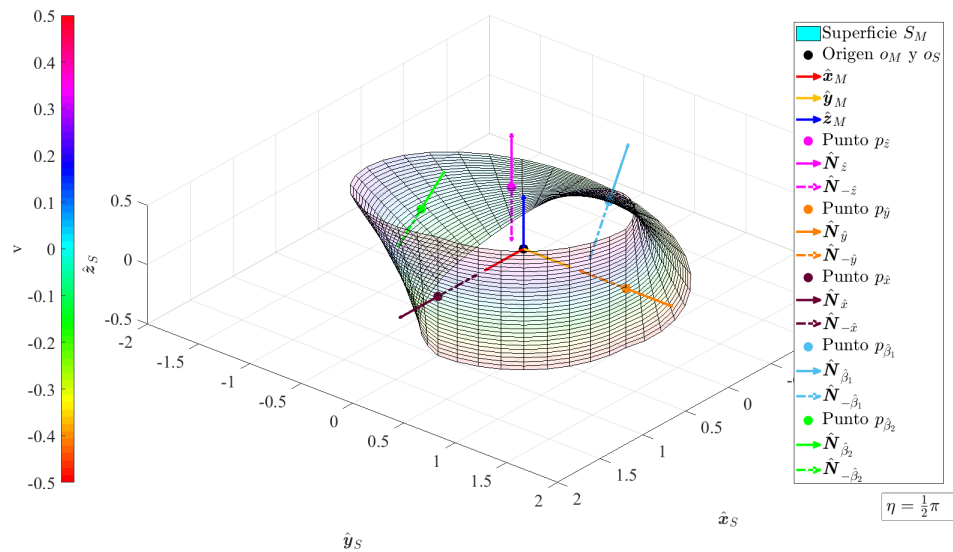


Figura 4.13: Banda de Möbius modificada y transparente.

### 4.2.3. Vector Normal a la Banda de Möbius modificada

La función que describe los vectores normales de  $S_M$  se realiza a través de una serie de pasos ordenados bien definidos a continuación. Originalmente, sería necesario un solo proceso; sin embargo, se requieren de dos, uno para  $S_{m_4}$  y otro para  $S_{c_1}$ , ya que recuérdese que  $S_M$  está compuesta por éstas dos.

#### 1. Creación de vector de superficie.

El primer paso consiste en tomar las componentes  $x$ ,  $y$  y  $z$  de la superficie en cuestión, y asignarlas a un vector,  $\mathbf{V}_S(u, v) \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ , de acuerdo con (4.31).

$$\mathbf{V}_S(u, v) = \begin{bmatrix} x_S(u, v) & y_S(u, v) & z_S(u, v) \end{bmatrix}^T \quad (4.31)$$

#### 2. Derivada del vector de superficie.

Posteriormente, se le aplican las derivadas parciales con respecto a  $u$  y  $v$ , tal y como en en (4.32).

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u}(\mathbf{V}_S(u, v)) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial u}(x_S(u, v)) & \frac{\partial}{\partial u}(y_S(u, v)) & \frac{\partial}{\partial u}(z_S(u, v)) \end{bmatrix}^T \\ \frac{\partial}{\partial v}(\mathbf{V}_S(u, v)) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial v}(x_S(u, v)) & \frac{\partial}{\partial v}(y_S(u, v)) & \frac{\partial}{\partial v}(z_S(u, v)) \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (4.32)$$

#### 3. Producto cruz.

Se aplica el producto cruz a (4.32) en (4.33).

$$\frac{\partial}{\partial u}(\mathbf{V}_S(u, v)) \times \frac{\partial}{\partial v}(\mathbf{V}_S(u, v)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial u}(y_S(u, v)) \frac{\partial}{\partial v}(z_S(u, v)) - \frac{\partial}{\partial u}(z_S(u, v)) \frac{\partial}{\partial v}(y_S(u, v)) \\ \frac{\partial}{\partial u}(z_S(u, v)) \frac{\partial}{\partial v}(x_S(u, v)) - \frac{\partial}{\partial u}(x_S(u, v)) \frac{\partial}{\partial v}(z_S(u, v)) \\ \frac{\partial}{\partial u}(x_S(u, v)) \frac{\partial}{\partial v}(y_S(u, v)) - \frac{\partial}{\partial u}(y_S(u, v)) \frac{\partial}{\partial v}(x_S(u, v)) \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

#### 4. Normalización.

Por último, se divide el producto entre su norma en (4.34) para obtener el vector normal a la superficie  $S$ , denominado cómo  $\hat{\mathbf{N}}_S(u, v) \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ .

$$\hat{\mathbf{N}}_S(u, v) = \frac{\frac{\partial}{\partial u}(\mathbf{V}_S(u, v)) \times \frac{\partial}{\partial v}(\mathbf{V}_S(u, v))}{\left\| \frac{\partial}{\partial u}(\mathbf{V}_S(u, v)) \times \frac{\partial}{\partial v}(\mathbf{V}_S(u, v)) \right\|} \quad (4.34)$$

El procedimiento se puede dar por concluido con el paso anterior. Sin embargo, se puede simplificar un poco más con uno adicional.

#### 5. Eliminación de $v$ .

Consiste en aplicar el límite de  $v \rightarrow 0$  al resultado en (4.34) con el fin de minimizar la influencia de  $v$  de la ecuación, ya que en todos los casos, los vectores normales son centrados en la banda; es decir, con una  $v$  cercana a cero.

El vector  $\mathbf{N}_S(u, v)$  es sumamente valioso, ya que contiene las componentes vectoriales de cualquier vector normal para todo  $u$  de la superficie a partir de la que fue calculado, y a partir del cual, se construye una trayectoria para que recorra el vector  $\hat{\omega}_r(t)$ . Para ello, se replica el procedimiento anterior por separado para las superficies  $S_{m_4}$  y a  $S_{c_1}$ , y así conseguir los vectores normales  $\mathbf{N}_M(u)$  en (4.35) y  $\mathbf{N}_C(u)$  en (4.36), respectivamente.



$$\hat{\mathbf{N}}_M(u) \begin{cases} x_M(u) = \frac{\cos(\frac{2}{3}u) \sin(u)}{\sqrt{|\sin(\frac{2}{3}u)|^2 + |\cos(\frac{2}{3}u) \cos(u)|^2 + |\cos(\frac{2}{3}u) \sin(u)|^2}} \\ y_M(u) = \frac{\cos(\frac{2}{3}u) \cos(u)}{\sqrt{|\sin(\frac{2}{3}u)|^2 + |\cos(\frac{2}{3}u) \cos(u)|^2 + |\cos(\frac{2}{3}u) \sin(u)|^2}} \\ z_M(u) = \frac{\sin(\frac{2}{3}u)}{\sqrt{|\sin(\frac{2}{3}u)|^2 + |\cos(\frac{2}{3}u) \cos(u)|^2 + |\cos(\frac{2}{3}u) \sin(u)|^2}} \end{cases}, \quad 0 \leq u < \frac{3}{2}\pi \quad (4.35)$$

$$\hat{\mathbf{N}}_C(u) \begin{cases} x_M(u) = \frac{-\sin(u)}{\sqrt{|\cos(u)|^2 + |\sin(u)|^2}} \\ y_M(u) = \frac{\cos(u)}{\sqrt{|\cos(u)|^2 + |\sin(u)|^2}} \\ z_M(u) = 0 \end{cases}, \quad \frac{3}{2}\pi \leq u < 2\pi \quad (4.36)$$

Los vectores normales en (4.35) y (4.36) requieren de cierto acondicionamiento para representar correctamente la trayectoria a lo largo de  $S_M$ , en virtud de estar compuesta por dos superficies. Para llevarlo a cabo, se propone la función de trayectoria  $T(t)$  en la ecuación (4.37). A su vez, nótese que  $T(t)$  se define como una función que representa la dirección del vector de momento angular  $\hat{\omega}_r(t)$ , y que depende por tanto del valor de  $u$ , lo que la convierte a  $T(t)$  y  $\hat{\omega}_r(t)$  en, más bien, funciones dependientes de  $u$ .

$$T(u) = \begin{cases} \hat{\mathbf{N}}_M(u), & \text{si } 0 \leq u < \frac{3}{2}\pi \\ -\hat{\mathbf{N}}_C(u), & \text{si } \frac{3}{2}\pi \leq u < 2\pi \\ -\hat{\mathbf{N}}_M(u), & \text{si } 2\pi \leq u < \frac{7}{2}\pi \\ \hat{\mathbf{N}}_C(u), & \text{si } \frac{7}{2}\pi \leq u < 4\pi \end{cases} \quad (4.37)$$

Con lo que, adicionalmente, ya es posible calcular las componentes de los vectores  $\beta_1, \beta_2$  y sus opuestos en (4.38), e incluso el ángulo  $\beta$  en (4.39); todos pendientes por estimar en la sección 4.2.2.

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{N}}_M(\frac{1}{2}\pi) &= \hat{\beta}_1 = [-0.5 \quad 0 \quad 0.8660]^T \\ -\hat{\mathbf{N}}_M(\frac{1}{2}\pi) &= -\hat{\beta}_1 = [0.5 \quad 0 \quad -0.8660]^T \\ \hat{\mathbf{N}}_M(\pi) &= \hat{\beta}_2 = [0 \quad 0.5 \quad 0.8660]^T \\ -\hat{\mathbf{N}}_M(\pi) &= -\hat{\beta}_2 = [0 \quad -0.5 \quad -0.8660]^T \end{aligned} \quad (4.38)$$

$$\beta = \arccos \left( \frac{\hat{\beta} \cdot \hat{z}}{\|\hat{\beta}\| \cdot \|\hat{z}\|} \right) = 0.5236\pi = 30.0007^\circ \approx 30^\circ \quad (4.39)$$

La próxima fase del modelado consiste en explorar una solución para recrear a  $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$  y sus opuestos.

#### 4.2.4. Arreglo de Bandas de Möbius modificadas

Si se aplica una  $\eta = 3/2\pi$  a  $S_M$ , entonces se obtiene una banda de Möbius modificada que es rotada  $180^\circ$  con respecto a  $\hat{z}_S$ , que sigue siendo capaz de recrear a  $\hat{N}_{\hat{x}}$ ,  $\hat{N}_{\hat{y}}$ ,  $\hat{N}_{\hat{z}}$  y sus contrarios; aunque ya no a  $\hat{\beta}_1$  y  $\hat{\beta}_2$  y sus opuestos. Naturalmente, tener una  $S_M$  con una  $\eta$  diferente también implica que se tengan que replicar el cálculo del vector normal y su condicionamiento para esta nueva superficie.

Otro cambio importante que ocurre es que ya no todos los valores de  $u$  corresponden con el mapeo de los vectores. Para mejor ilustración, véase la figura 4.14. La relación entre todos los puntos de intersección, los vectores, las componentes y la magnitud de  $u$  sobre  $S_M$  para  $\eta$  igual a  $1/2\pi$  y  $3/2\pi$  se concentran en la tabla 4.2, donde para calcularlos, basta con introducir el valor de  $u$  en (4.35) y (4.36); según sea el caso, y de conformidad con lo establecido en (4.37).

Fuera de los inconvenientes y modificaciones anteriores, contar con dos o más tipos de  $S_M$  en función de diferentes  $\eta$  abre dos otras posibilidades. Una de ellas sugiere que la mejor estrategia para garantizar la cobertura de todos los vectores normales es emplear una combinación de dos bandas, cada una con  $\eta = 1/2\pi$  y  $\eta = 3/2\pi$ ; respectivamente. Si se propone una rueda de reacción por cada banda de Möbius modificada, entonces se requieren de cuatro parejas para poder recrear todas las RWA vistas en la sección 3.8. En el arreglo de las cuatro bandas, no es recomendable tener más de una rueda de reacción compartiendo una misma banda a pesar de que sea posible, ya que la intención es permitir el libre desplazamiento de las ruedas.

Al colocar las cuatro  $S_M$  equidistantes con respecto al eje  $\hat{z}_S$ , se obtiene algo similar a lo mostrado en la figura 4.15, donde se aprecia que cualquier rueda puede adoptar los vector normales de  $S_M$ , salvo por los casos expuestos sobre  $\hat{\beta}_{1,4}$ .

Recuérdese que, lo importante y que se ha buscado preservar a lo largo de esta sección, es que los vectores  $\hat{N}$  son paralelos a los vectores  $\hat{x}_S$ ,  $\hat{y}_S$  y  $\hat{z}_S$  del satélite, ya que la influencia a éste solo se puede dar por medio de ellos, y siempre tomando de referencia el centro de masas del satelital.

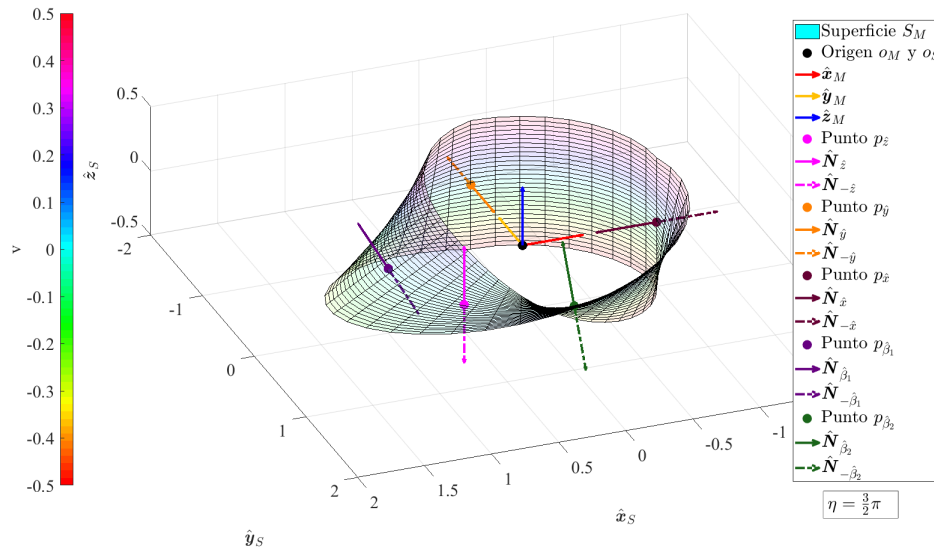


Figura 4.14: Banda de Möbius modificada con  $\eta = 3/2\pi$ .

Tabla 4.2: Puntos de intersección en ejes  $\hat{x}_S$ ,  $\hat{y}_S$  y  $\hat{z}_S$ .

$\eta[\pi]$	$u[\pi]$	Punto	Vector	Componentes vectoriales					
				Definición			Si $\beta = 30^\circ$		
				$\hat{x}_S$	$\hat{y}_S$	$\hat{z}_S$	$\hat{x}_S$	$\hat{y}_S$	$\hat{z}_S$
$\frac{1}{2}$	Primera revolución.								
	0	$p_{\hat{y}}$	$\hat{N}_{\hat{y}}$	0	1	0	0	1	0
	$\frac{1}{2}$	$\beta_1$	$\hat{N}_{\hat{\beta}_1}$	$-\sin(\beta)$	0	$\cos(\beta)$	-0.5	0	0.866
	$\frac{3}{4}$	$p_{\hat{z}}$	$\hat{N}_{\hat{z}}$	0	0	1	0	0	1
	1	$\beta_2$	$\hat{N}_{\hat{\beta}_2}$	0	$\sin(\beta)$	$\cos(\beta)$	0	0.5	0.866
	$1\frac{1}{2}$	$p_{\hat{x}}$	$\hat{N}_{-\hat{x}}$	-1	0	0	-1	0	0
	Segunda revolución.								
	2	$p_{\hat{y}}$	$\hat{N}_{-\hat{y}}$	0	-1	0	0	-1	0
	$2\frac{1}{2}$	$\beta_1$	$\hat{N}_{-\hat{\beta}_1}$	$\sin(\beta)$	0	$-\cos(\beta)$	0.5	0	-0.866
	$2\frac{3}{4}$	$p_{\hat{z}}$	$\hat{N}_{-\hat{z}}$	0	0	-1	0	0	-1
	3	$\beta_2$	$\hat{N}_{-\hat{\beta}_2}$	0	$-\sin(\beta)$	$-\cos(\beta)$	0	-0.5	-0.866
	$3\frac{1}{2}$	$p_{\hat{x}}$	$\hat{N}_{\hat{x}}$	1	0	0	1	0	0
4 = 0	$p_{\hat{y}}$	$\hat{N}_{\hat{y}}$	0	1	0	0	1	0	
$\frac{3}{2}$	Primera revolución.								
	0	$p_{\hat{y}}$	$\hat{N}_{\hat{y}}$	0	1	0	0	1	0
	$\frac{1}{2}$	$\beta_3$	$\hat{N}_{-\hat{\beta}_3}$	$-\sin(\beta)$	0	$-\cos(\beta)$	-0.5	0	-0.866
	$\frac{3}{4}$	$p_{\hat{z}}$	$\hat{N}_{-\hat{z}}$	0	0	-1	0	0	-1
	1	$\beta_4$	$\hat{N}_{-\hat{\beta}_4}$	0	$\sin(\beta)$	$-\cos(\beta)$	0	0.5	-0.866
	$1\frac{1}{2}$	$p_{\hat{x}}$	$\hat{N}_{-\hat{x}}$	-1	0	0	-1	0	0
	Segunda revolución.								
	2	$p_{\hat{y}}$	$\hat{N}_{-\hat{y}}$	0	-1	0	0	-1	0
	$2\frac{1}{2}$	$\beta_3$	$\hat{N}_{\hat{\beta}_3}$	$\sin(\beta)$	0	$\cos(\beta)$	0.5	0	0.866
	$2\frac{3}{4}$	$p_{\hat{z}}$	$\hat{N}_{\hat{z}}$	0	0	1	0	0	1
	3	$\beta_4$	$\hat{N}_{\hat{\beta}_4}$	0	$-\sin(\beta)$	$\cos(\beta)$	0	-0.5	0.866
	$3\frac{1}{2}$	$p_{\hat{x}}$	$\hat{N}_{\hat{x}}$	0	0	0	1	0	0
4 = 0	$p_{\hat{y}}$	$\hat{N}_{\hat{y}}$	0	-1	0	0	1	0	

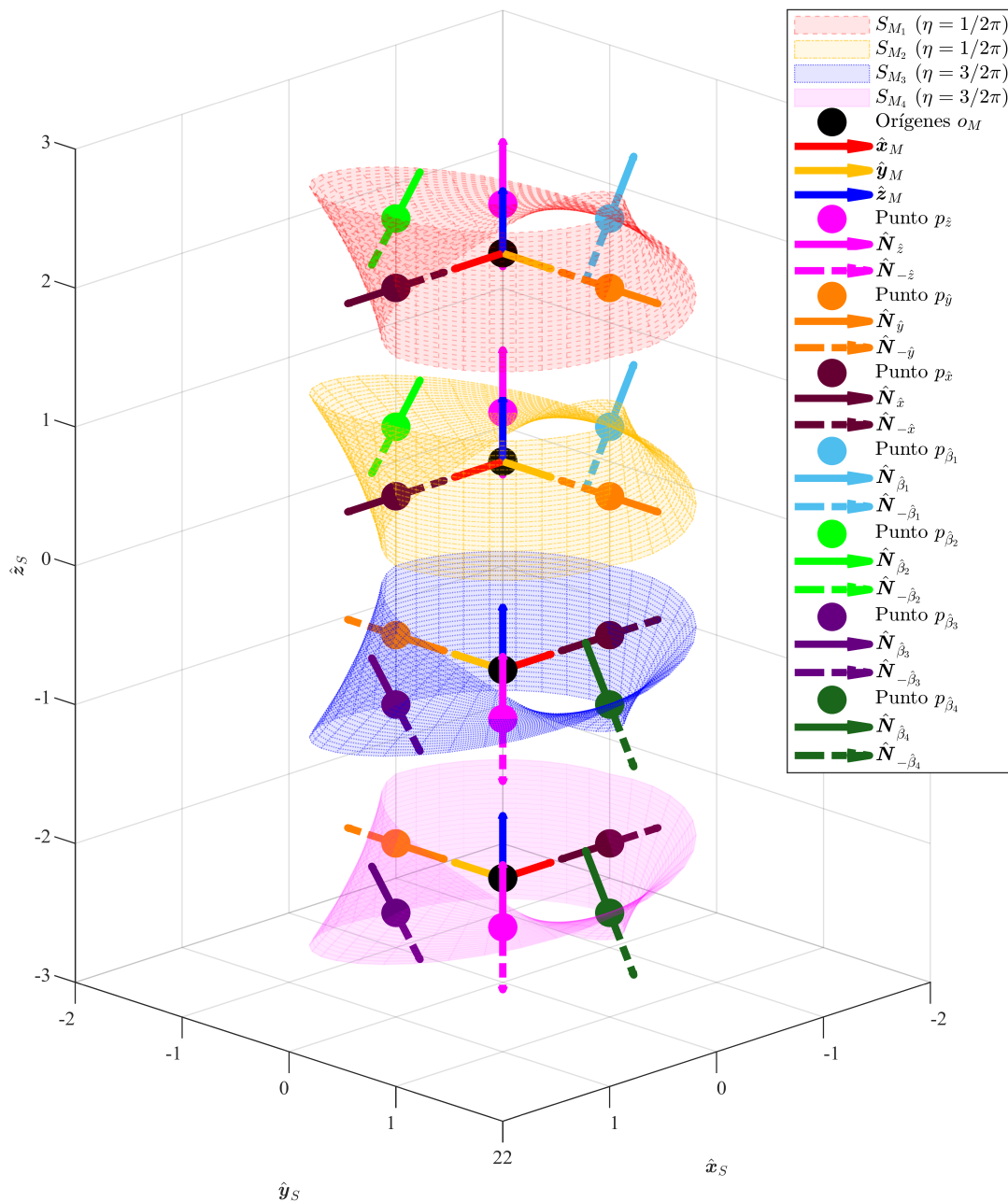


Figura 4.15: Arreglo de Bandas modificadas de Möbius.

Con lo anterior, se da por concluido el modelado de la banda y sus vectores.

### 4.3. Desplazador

El tercer elemento a modelar es el actuador secundario, que en adelante se denominará como «desplazador». Cómo se propuso anteriormente, el desplazador es el actuador auxiliar o secundario responsable de desplazar la rueda de reacción a lo largo de  $T(t)$  para que, según los valores de  $u(t)$ , adopte el vector unitario de interés.

Para que esto ocurra, el desplazador se compone – a grandes rasgos –, de dos elementos: un motor eléctrico, y un medio mecánico. Para definir el movimiento del desplazador, se adopta el marco  $M$  usado para las bandas. Esto se hace para que la  $u$  de ambos elementos, la banda y el desplazador, se encuentren en sintonía con  $u(t)$ . Con base en ello, el desplazador se encuentra centrado en el origen  $o_M$  y sobre el plano  $\hat{x} - \hat{y}$ , por lo que su movimiento se restringe a la rotación colineal con el eje  $\hat{z}_M$ .

En cuanto al motor, se propone del mismo tipo que el usado para la rueda de reacción, así que – esencialmente –, el modelo es el mismo salvo algunas modificaciones que se abordan más adelante. En similitud con la rueda, el desplazador guarda una dinámica interna y externa, ambas ilustradas en la figura 4.16. Sin embargo, la diferencia radica en que en el desplazador, se busca regular la posición angular del rotor; es decir,  $u(t)$ . Esto significa que hará falta un integrador para convertir la salida de la dinámica interna: la velocidad angular del rotor,  $\|\omega_r(t)\|$ , por la posición angular,  $\|\theta_r(t)\|$  [76].

Un par de elementos adicionales a la dinámica del desplazador son las funciones  $T(u)$  y su inversa – ambas estudiadas en la sección anterior –, ya que es necesario adquirir una interpretación de  $u(t)$  para hallar una  $\hat{\omega}_r(t)$  apropiada, y viceversa. Esto sucede debido a que, lo que se buscará en el próximo capítulo, es controlar  $\hat{\omega}_r(t)$ , mas no  $u(t)$ .

Para dar solución a todo lo anterior, en esta sección se parte con el estudio del modelo matemático del motor con sus respectivas adaptaciones, su conversión a espacio de estados y función de transferencia.

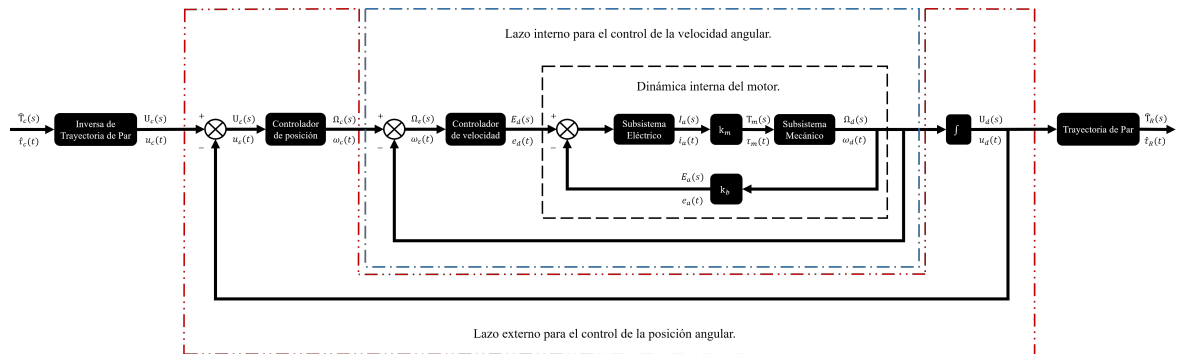


Figura 4.16: Diagrama a bloques de la dinámica completa del desplazador.

Se parte del modelo de la rueda en (4.12), al mismo tiempo que se adopta la notación en la tabla 4.1. La diferencia sustancial entre éste y el desplazador es que se requiere ejercer un mayor par, pero que en contraparte, una velocidad angular significativamente menor; lo que se soluciona si se propone agregar un tren de engranes reductores de velocidad y amplificadores de par.

Matemáticamente, la relación de reducción-amplificación se representa con el factor  $R_\tau \in \mathbb{R}$ , que se integra al modelo en (4.12), junto con la suma de los momentos de inercia de los engranes, dado por  $I_g \in \mathbb{R}$ . Así, se deduce que la inercia total de la parte rotativa del desplazador equivale a  $I_D = I_g + I_r$ , mientras que  $R_\tau$  se añade como producto a  $\tau_m(t)$  y a  $k_b\omega_r(t)$  en (4.12).

Tras todo lo anterior, el modelo en ecuaciones diferenciales se expresa como en (4.40).

$$\begin{aligned}\tau_m(t)(R_\tau) &= I_m \frac{d^2\theta_r(t)}{dt^2} + b \frac{d\theta_r(t)}{dt} \\ e(t) &= R_a i_a(t) + L_a \frac{di_a(t)}{dt} + e_a(t) \\ e_a(t) &= (R_\tau)k_b \frac{d\theta_r(t)}{dt}\end{aligned}\tag{4.40}$$

Que se reduce en (4.41), y de donde se ajustan términos en (4.42). Si se toman como estados a  $x_1(t) = \omega_r(t)$  y  $x_2(t) = i_a(t)$ , con  $\dot{x}_1(t) = \dot{\omega}_r(t)$  y  $\dot{x}_2(t) = \dot{i}_a(t)$ , y que al sustituir se obtiene (4.43).

$$\begin{aligned}k_m i_a(t)R_\tau &= I_m \dot{\omega}_r(t) + b\omega_r(t) \\ e(t) &= R_a i_a(t) + L_a \dot{i}_a(t) + k_b R_\tau \dot{\omega}_r(t)\end{aligned}\tag{4.41}$$

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_r(t) &= \frac{R_\tau k_m}{I_m} i_a(t) - \frac{b}{I_m} \omega_r(t) \\ \dot{i}_a(t) &= -\frac{R_a}{L_a} i_a(t) - \frac{R_\tau k_b}{L_a} \omega_r(t) + \frac{1}{L_a} e(t)\end{aligned}\tag{4.42}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -\frac{b}{I_m} x_1(t) + R_\tau \frac{k_m}{I_m} x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -R_\tau \frac{k_b}{L_a} x_1(t) - \frac{R_a}{L_a} x_2(t) + \frac{1}{L_a} e(t)\end{aligned}\tag{4.43}$$

Finalmente, en (4.44) se presenta el modelo en espacio de estados, cuya función de transferencia se determina de manera análoga a como se hizo en la ecuación (4.21). Esta actividad se abordará en el próximo capítulo.

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{b}{I_m} & \frac{R_\tau k_m}{I_m} \\ -\frac{R_\tau k_b}{L_a} & -\frac{R_a}{L_a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L_a} \end{bmatrix} e(t) \\ \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{4.44}$$

### 4.4. Modelo de la Dinámica Satelital

La última de las dinámicas en modelar es también la más importante, ya que los objetivos de control del ADCS se resumen en la regulación del cuaternión de actitud,  $\mathbf{q}_s(t)$ . Para lograrlo, hace falta reescribir la ecuación de Euler en una forma tal que quede claro cual es la variable de entrada. En consecuencia, retomando la ecuación (3.39), es válido afirmar que:

$$\mathbf{I}_s \dot{\boldsymbol{\omega}}_s(t) = \boldsymbol{\tau}_s(t) - \boldsymbol{\omega}_s(t) \times (\mathbf{I}_s \boldsymbol{\omega}_s(t)) \tag{4.45}$$

Por lo que,

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_s(t) = \mathbf{I}_s^{-1} [\boldsymbol{\tau}_s(t) - \boldsymbol{\omega}_s(t) \times (\mathbf{I}_s \boldsymbol{\omega}_s(t))] \tag{4.46}$$

Si se sustituye (4.46) en la ecuación de la cinemática satelital descrita por (3.14), entonces es posible obtener una expresión completa que relaciona la influencia del par  $\boldsymbol{\tau}_s(t)$  y el efecto en la actitud  $\mathbf{q}_s(t)$ .

Entonces, retomando la expresión (3.14) de la cinemática de actitud del capítulo tres,

$$\ddot{\mathbf{q}}_s(t) = \frac{1}{2} \mathbf{W}(\mathbf{q}_s)^T \dot{\boldsymbol{\omega}}_s \tag{4.47}$$

Al sustituir (4.46) en (4.47), se obtiene (4.48).

$$\ddot{\mathbf{q}}_s(t) = \frac{1}{2} \mathbf{W}(\mathbf{q}_s)^T (\mathbf{I}_s^{-1} [\boldsymbol{\tau}_s(t) - \boldsymbol{\omega}_s(t) \times (\mathbf{I}_s \boldsymbol{\omega}_s(t))]) \tag{4.48}$$

De donde resta integrar numéricamente  $\ddot{\mathbf{q}}_s(\mathbf{q}_s, \dot{\boldsymbol{\omega}}_s)$  para hallar el cuaternión de actitud,  $\mathbf{q}_s(t)$ . Este proceso se ilustra en la figura 4.17 en conjunto con la ecuación (3.14) para hallar  $\dot{\boldsymbol{\omega}}_s(t)$ .

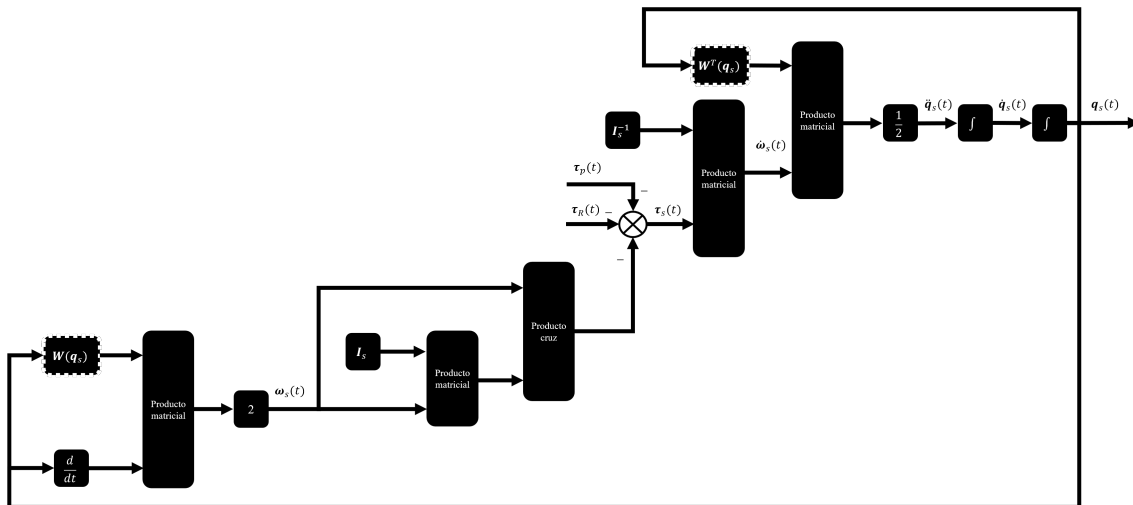


Figura 4.17: Diagrama a bloques de la dinámica de actitud satelital con entrada  $\boldsymbol{\tau}_s(t)$  y salida  $\mathbf{q}_s(t)$ .

## 4.5. Modelo de Arreglo Reconfigurable de Rueda de Reacción

En las secciones 3.7 y 3.8 se estableció que una de las utilidades de las RWA es determinar el grado de influencia que ejerce la operación de las ruedas sobre la actitud, y se explicó que esto ocurre por medio de la matriz de RWA,  $\mathbf{A}_R$ , la cual depende del  $n$  número de actuadores y que se compone de sus vectores unitarios  $\hat{\omega}_r$ .

Gracias al modelado en este capítulo – concretamente a las secciones 4.1 y 4.1.3 –, se sabe que el par es el producto final de cada una de las ruedas de reacción,  $\tau_r(t)$ , el cual es el auténtico responsable directo de los cambios en la actitud. De igual manera, se dejó en claro que  $\mathbf{A}_R$  se ha convertido en una expresión dependiente del tiempo, renombrándose como  $\mathbf{A}_R(t)$  en virtud de que  $\hat{\omega}_r(t)$  también lo es. Dichas relaciones se plasman en la ecuación (4.49).

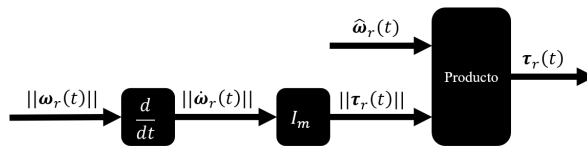
$$\boldsymbol{\tau}_R(t) = \mathbf{A}_R^T(t)\boldsymbol{\tau}_T(t) \quad (4.49)$$

donde  $\boldsymbol{\tau}_R(t) = [\tau_x(t) \ \tau_y(t) \ \tau_z(t)]^T \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$  es el vector de par total generado por las ruedas de reacción, de acuerdo con el marco de referencia del satélite. En segundo lugar,  $\boldsymbol{\tau}_T(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  equivale al vector cuyo contenido es la norma de los pares de las  $n$ ésimas ruedas. Sin embargo, no puede considerarse como la expresión final ya que – yendo un poco más lejos –, se sabe que  $\tau_r(t) = \dot{\mathbf{H}}_r(t) = I_R \dot{\omega}_r(t)$ , en razón a lo plasmado en (3.25) y (3.37). Una ilustración de este hecho se ofrece en la figura 4.18.

De tal forma que en (4.50) se ofrecen las equivalencias correspondientes para  $\boldsymbol{\tau}_T(t)$ . Al combinar (4.49) y (4.50), finalmente se obtiene (4.51).

$$\boldsymbol{\tau}_T(t) = \begin{bmatrix} \|\boldsymbol{\tau}_1(t)\| \\ \|\boldsymbol{\tau}_2(t)\| \\ \vdots \\ \|\boldsymbol{\tau}_{n-1}(t)\| \\ \|\boldsymbol{\tau}_n(t)\| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \|\dot{\mathbf{H}}_1(t)\| \\ \|\dot{\mathbf{H}}_2(t)\| \\ \vdots \\ \|\dot{\mathbf{H}}_{n-1}(t)\| \\ \|\dot{\mathbf{H}}_n(t)\| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_R \|\dot{\omega}_1(t)\| \\ I_R \|\dot{\omega}_2(t)\| \\ \vdots \\ I_R \|\dot{\omega}_{n-1}(t)\| \\ I_R \|\dot{\omega}_n(t)\| \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

$$\begin{bmatrix} \tau_x(t) \\ \tau_y(t) \\ \tau_z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\omega}_1(t) & \hat{\omega}_2(t) & \cdots & \hat{\omega}_{n-1}(t) & \hat{\omega}_n(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I_R \|\dot{\omega}_1(t)\| \\ I_R \|\dot{\omega}_2(t)\| \\ \vdots \\ I_R \|\dot{\omega}_{n-1}(t)\| \\ I_R \|\dot{\omega}_n(t)\| \end{bmatrix} \quad (4.51)$$



**Figura 4.18:** Diagrama a bloques de la generación de par a partir de los vectores unitario y normalizado de velocidad angular de una rueda de reacción.



Así, se da por concluido el proceso matemático para dar con la forma en la que las ruedas influyen en el satélite, pudiéndose encontrar una ilustración de la ecuación (4.51) en la parte b) de la figura 4.19.

Sin embargo, existe un caso inverso: la forma en la que el par  $\tau_R(t)$  se distribuye a cada una de las ruedas. Más específicamente, se trata acerca de cómo determinar el enésimo vector de par de cada rueda,  $\tau_T(t)$ , a partir del vector  $\tau_R(t)$  y de  $\mathbf{A}_R(t)$ . La forma general corresponde con (4.52), mientras que la expandida equivalente se muestra en (4.53).

$$\tau_T(t) = \mathbf{A}_R^T(t)\tau_R(t) \quad (4.52)$$

$$\begin{bmatrix} I_R|\dot{\omega}_1(t)| \\ I_R|\dot{\omega}_2(t)| \\ \vdots \\ I_R|\dot{\omega}_{n-1}(t)| \\ I_R|\dot{\omega}_n(t)| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\omega}_1(t) & \hat{\omega}_2(t) & \cdots & \hat{\omega}_{n-1}(t) & \hat{\omega}_n(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \tau_x(t) \\ \tau_y(t) \\ \tau_z(t) \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

A pesar de que ambas expresiones (4.52) y (4.53) son válidas, lo cierto es que en la práctica presentan algunas singularidades. Por ejemplo, se pueden obtener rotaciones opuestas de ruedas colineales unas con otras, lo que lleva a contrarrestar su influencia. O bien, puede que una rueda ejerza todo el trabajo mientras que las otras colineales no aporten en lo absoluto. Así, la distribución deficiente en la actividad de las ruedas es un serio inconveniente.

Con base en lo anterior – y a manera de virtud para este trabajo –, se propone el siguiente procedimiento para evitar dichos escenarios.

1. Se propone la suma de los valores absolutos de las componentes vectoriales pertenecientes a los enésimos vectores unitarios  $\hat{\omega}_R(t)$ , lo que tiene como propósito determinar el grado de colinealidad que haya entre cada actuador, aprovechando la propiedad de que la norma de los vectores unitarios equivale a la unidad.

En la ecuación (4.54) se refleja lo anterior, donde  $F_{1:3} \in \mathbb{R}$  son los coeficientes que guardan dichas operaciones, respectivamente.

$$\begin{aligned} F_1(t) &= |\hat{\omega}_{x_1}(t)| + |\hat{\omega}_{x_2}(t)| + \cdots + |\hat{\omega}_{x_{n-1}}(t)| + |\hat{\omega}_{x_n}(t)| \\ F_2(t) &= |\hat{\omega}_{y_1}(t)| + |\hat{\omega}_{y_2}(t)| + \cdots + |\hat{\omega}_{y_{n-1}}(t)| + |\hat{\omega}_{y_n}(t)| \\ F_3(t) &= |\hat{\omega}_{z_1}(t)| + |\hat{\omega}_{z_2}(t)| + \cdots + |\hat{\omega}_{z_{n-1}}(t)| + |\hat{\omega}_{z_n}(t)| \end{aligned} \quad (4.54)$$

2. El próximo paso consiste en repartir de forma equitativa el par que ejerce cada rueda, según los valores de  $F_{1:3}(t)$ . Para lograrlo, se propone dividir la unidad entre la suma de cada  $F_{1:3}(t)$ , tal y como se plasma en la ecuación (4.55).

$$F_x(t) = \frac{1}{F_1(t)}, \quad F_y(t) = \frac{1}{F_2(t)}, \quad F_z(t) = \frac{1}{F_3(t)} \quad (4.55)$$

3. El tercer paso corresponde con el caso en que no haya ninguna rueda colineal con un eje; por ejemplo, como ocurre con el arreglo 2 – P. Para lo que es necesario agregar una serie de condicionales en los que, si determinada  $F(t)$  resulta igual a cero, quiere decir que no hay una rueda colineal con el eje en cuestión, y por lo tanto, dicho valor de  $F(t)$  es nulo.

4. Posteriormente, se da lugar a una matriz,  $\mathbf{F}(t) \in \mathbb{R}^{1 \times 3}$ , cuyos argumentos son  $F_{1:3}(t)$ , tal y como se establece en (4.56).

$$\mathbf{F}(t) = \begin{bmatrix} F_x(t) & F_y(t) & F_z(t) \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

5. Lo siguiente consiste en dar lugar a una matriz  $\mathbf{G}(t) \in \mathbb{R}^{n \times 3}$ ; donde  $n$  es el número de ruedas y sus argumentos se denotan por  $g_{ij}$ , y cuyo propósito es albergar a los coeficientes arrojados por el producto matricial dado en (4.57).

$$\mathbf{G}(t) = \mathbf{A}_R^T(t) \boldsymbol{\tau}_R(t) \mathbf{F}(t) \quad (4.57)$$

6. Finalmente, se suman aritméticamente las filas de  $\mathbf{G}(t)$  con el fin de determinar el par de cada rueda, lo que equivale a  $\boldsymbol{\tau}_T(t)$ . Matemáticamente, se expresa como (4.58).

$$\boldsymbol{\tau}_T(t) = \begin{bmatrix} \|\boldsymbol{\tau}_1(t)\| \\ \|\boldsymbol{\tau}_2(t)\| \\ \vdots \\ \|\boldsymbol{\tau}_{n-1}(t)\| \\ \|\boldsymbol{\tau}_n(t)\| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} + g_{12} + g_{13} \\ g_{21} + g_{22} + g_{23} \\ \vdots \\ g_{(n-1)1} + g_{(n-1)2} + g_{(n-1)3} \\ g_{n1} + g_{n2} + g_{n3} \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

Bajo este procedimiento, se alcanza una distribución equitativa del par en función del número de actuadores y su distribución, también se suprimen fallas como la cancelación de par por la rotación de ruedas en un mismo sentido. Para una mejor comprensión, la metodología anterior se ilustra en la parte a) de la figura 4.19.

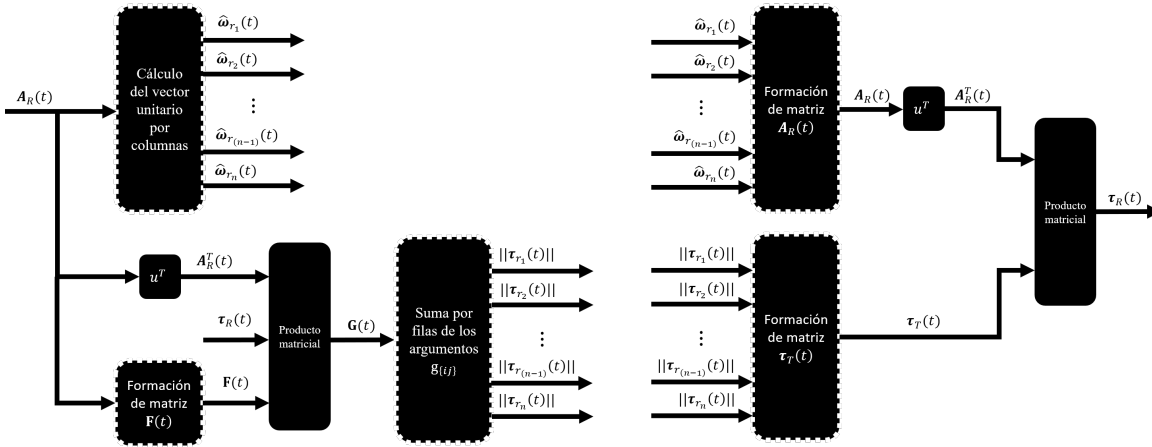


Figura 4.19: Diagrama a bloques para la obtención de a)  $\boldsymbol{\tau}_T(t)$  y b)  $\boldsymbol{\tau}_R(t)$

## 4.6. Propuesta de Control Multilazo para la Dinámica Satelital

A lo largo de este capítulo se asentó que cada modelo se encuentra entrelazado, uno con el otro, y que a pesar de que se han descrito como dinámicas independientes, todas conforman un sistema cuyo objetivo es el control de actitud de acuerdo con los objetivos del ADCS.

Hasta el momento, el modelado se ha limitado a conocer las dinámicas de cada proceso, mas no controlarlas para la regulación efectiva de la actitud, de tal modo que el objetivo por venir es encontrar una estructura de control que se ajuste a lo que se tiene.

Por una parte, queda claro que la dinámica con mayor jerarquía es la satelital, descrita de una forma conveniente por la ecuación (4.48), en donde se introduce un par producto de las ruedas de reacción e influenciado por las perturbaciones ambientales.

Por otro lado, las ruedas generan dicho par a través de la dinámica interna y externa de cada actuador, mediante la generación de velocidad angular. La influencia de cada rueda se describe mediante el RWA seleccionado, que se componen a su vez por un vector unitario.

Y finalmente, el vector unitario se define a partir de la dinámica del desplazador, cuyo fin es reubicar la rueda con el fin de que se oriente en direcciones de interés, según la trayectoria  $T(u)$  basada en el vector normal a la superficie de la Banda de Möbius modificada.

Lo anterior revela que para el control de actitud se cuentan con tres plantas, que a grandes rasgos son:

1. La dinámica y cinemática satelital;
2. La dinámica interna y externa de la rueda de reacción; y,
3. La dinámica del desplazador.

Un candidato apto para el número de plantas implicadas en este sistema es el control en cascada. Aunque, convencionalmente, el número de lazos de control generalmente es de dos; interno y externo, algunas nuevas aplicaciones han demostrado que el control en cascada puede ser muy versátil, ofreciendo la correcta regulación de las variables físicas para números mayores de lazos de control [77]. El control en cascada es muy oportuno para cuando existen dos o más dinámicas. Sin embargo, deben procurarse los siguientes criterios.

- **Una dinámica es causal con la otra.** Se cumple ya que la rueda causa el cambio en actitud.
- **Una dinámica es más rápida que la otra.** Se cumple porque la rueda de reacción debe girar en gran medida para que el satélite rote solo un poco; es decir,  $\omega_r(t) \gg \omega_s(t)$ . Y también las constantes de tiempo, ya que  $\omega_r(t)$  responde mucho más rápido que la otra.
- **Las variables de salida son medibles.** Se cumple ya que la velocidad angular  $\omega_r(t)$  y  $\omega_d(t)$  son medibles mediante un tacómetro o sensor de efecto hall,  $\omega_s(t)$  también mediante una IMU; y de igual manera el cuaternión de actitud  $\mathbf{q}(t)$  y sus derivadas. También la posición angular del desplazador,  $u(t)$ , mediante un encoder.

En cambio, las variables que no son medibles son los momentos angulares en conjunto con los pares de la rueda y el satélite, ya que no hay un instrumento inercial capaz de medirlas, y su cálculo se reduce únicamente a la estimación.

Con base en lo anterior, el control a diseñar en el próximo capítulo se basará en un control en cascada.



## Capítulo 5

# Simulación del Control Multilazo

*“La naturaleza está escrita en el lenguaje matemático.” – Galileo*

---

En este capítulo se lleva a cabo la simulación de los sistemas modelados y estructurados de acuerdo con lo visto en el capítulo anterior. Se empieza por la rueda de reacción, después el desplazador y finalmente la dinámica satelital; cada uno con sus evaluaciones correspondientes.

### 5.1. Control de Rueda de Reacción

La simulación de la rueda de reacción se divide en cinco etapas. La primera trata acerca de la selección de un motor eléctrico a partir del cual tomar los valores numéricos. La segunda, del dimensionamiento del disco inercial, de acuerdo con lo visto en 4.1.1. La tercera, de la sustitución de los valores para el modelo según lo visto en 4.1.2. La cuarta, la propuesta del control; y quinta, la simulación de la dinámica controlada.

#### 1. Selección del motor.

Se propone el motor sin escobillas *ECX Speed 6 M* de la firma *Maxon Group*, el cual, fue seleccionado en virtud de su alto desempeño, su tamaño compacto, baja fricción y amplia disponibilidad de datos técnicos en [78]. Sus parámetros fueron convertidos al Sistema Internacional, y se concentran en la tabla 5.1. Para consultar la documentación completa, véase el anexo A.

#### 2. Dimensionamiento del disco inercial

Lo siguiente consiste en determinar el momento de inercia del disco,  $I_d$ , mediante la ecuación (4.8); la cual fue estructurada de tal forma que sólo resta especificar un material de construcción y dimensiones en función del motor, ya seleccionado en el paso anterior.

La aleación seleccionada es el latón, ya que presenta una densidad con un valor de  $\rho = 8,730 \frac{Kg}{m^3}$ , el cual es superior a otros candidatos como el acero inoxidable o bronce fosforado. Otras de las propiedades que aventajaron su elección fue la alta disponibilidad en el mercado y capacidad de manufactura. Por otro lado, las dimensiones a proponer tomaron en cuenta las indicadas por el motor en el anexo A, donde se aprecia que el actuador cuenta con un diámetro exterior de  $6mm$

y una longitud máxima de  $24.1mm$ , incluyendo el eje; mismo con un diámetro de  $1mm$  y largo de  $2.8mm$ . Para una mejor comprensión, todas las dimensiones se concentran en la tabla 5.1.

Al realizar la sustitución en (4.8) – y bajo el material propuesto –, se obtiene un momento de inercia  $I_d = 3.117 \cdot 10^{-6} Kg \cdot m^2$  y una masa de 57 gramos, lo que representa un 1.9% de la masa total permisible del satélite. Bajo la propuesta de emplear cuatro ruedas, entonces dicho porcentaje pasa a ser el 7.6%. La masa total de los actuadores, compuesta por los motores y discos, equivale a  $0.24Kg$ .

Otro factor a tomar en cuenta en la labor de dimensionamiento de las ruedas es el momento angular máximo, que se calcula en (5.1) a partir de la expresión (4.10).

$$H_{max} = (I_r + I_d)\omega_{max} = 0.0326Kg \cdot m^2/s \quad (5.1)$$

**Tabla 5.1:** Parámetros mecánicos y eléctricos caracterizados del motor *ECX Speed 6 M*.

Subsistema	Notación	Magnitud [Unidades]	Descripción
Eléctrico	Parámetros		
	$k_m$	$1.75 \cdot 10^{-3} [\frac{N \cdot m}{A}]$	Constante de construcción del motor.
	$k_b$	$1.9179 \cdot 10^{-5} [\frac{N \cdot m}{(rad/s)}]$	Constante de fuerza contra-electromotriz.
	$R_a$	$12.4 [\Omega]$	Resistencia eléctrica de la armadura.
	$L_a$	$1.8 \cdot 10^{-4} [H]$	Inductancia eléctrica.
	$e_{max}$	$12 [V]$	Tensión máxima de alimentación.
Mecánico	Parámetros		
	$I_r$	$7.03 \cdot 10^{-10} [Kg \cdot m^2]$	Momento de inercia del rotor.
	$b$	$2.7200 \cdot 10^{-9} [\frac{N \cdot m}{(rad/s)}]$	Constante de fricción viscosa.
	$\omega_{max}$	$10471.9755 [rad/s]$	Velocidad angular máxima.
	$m_m$	$0.003 [Kg]$	Masa total del motor.
	$\tau_m$	$0.000425 [N \cdot m]$	Par nominal del motor.

**Tabla 5.2:** Dimensiones del disco de inercia de la rueda de reacción.

Notación	Magnitud [Unidades]	Descripción
$r_{i1}$	$0.0005 [m]$	Radio interior número uno.
$r_{i2}$	$0.0035 [m]$	Radio interior número dos.
$r_e$	$0.0100 [m]$	Radio exterior.
$h_1$	$0.0050 [m]$	Altura número uno.
$h_2$	$0.0180 [m]$	Altura número dos.

### 3. Sustitución de parámetros en el modelo

En la sección 4.1.2, se estableció que la dinámica del motor se representa por la ecuación en el espacio de estados definida en (4.20). Al sustituir los parámetros de la tabla 5.1, se obtiene la expresión (5.2), la cual se usa para calcular las matrices de controlabilidad,  $\mathbf{C}_r$ , y observabilidad,  $\mathbf{O}_r$ , en (5.3).

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0008724 & 561.3 \\ -0.1625 & -1.051 \cdot 10^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 8475 \end{bmatrix} e(t) \quad (5.2)$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_r = \begin{bmatrix} 0 & 4.7569 \cdot 10^6 \\ 8.4746 \cdot 10^3 & -8.9055 \cdot 10^8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{O}_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -8.7245 \cdot 10^{-4} & 561.3184 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

Antes de proponer un control, es necesario determinar si el sistema es controlable. Una condición necesaria y suficiente yace en que el determinante de  $\mathbf{C}_r$  sea diferente de cero, lo que se cumple al calcularlo, ya que  $\det(\mathbf{C}_r) = -4.0313 \cdot 10^{10} \neq 0$ . Por otro lado, el sistema es observable ya que el rango de la matriz  $\mathbf{O}_r$  es completo ( $n = 2$ ). Cumplidas ambas condiciones, el sistema en (5.2) a función de transferencia en (5.4), donde hay que recordar que equivale también a la relación entre la velocidad angular de la rueda,  $\Omega_r(s)$ , y la tensión aplicada,  $E(s)$ .

$$R_o(s) = \frac{\Omega_r(s)}{E(s)} = \frac{4.7569 \cdot 10^6}{s^2 + 1.0508 \cdot 10^5 s + 182.9163} \quad (5.4)$$

Al resultado se añade un controlador en (5.5), el cual es representado por la función de transferencia  $C_r(s)$ , que tiene como propósito controlar la velocidad angular y cuyas acciones de control y ganancias dependen de la sintonización descrita más adelante.

El lazo cerrado de la dinámica interna de la rueda de reacción se obtiene en (5.6) al aplicar una retroalimentación unitaria negativa para (5.5), y que también se expresa como la relación entre la velocidad angular de la rueda obtenida,  $\Omega_r(s)$ , y la velocidad angular deseada,  $\Omega_{r_c}(s)$ .

$$C_r(s)R_o(s) = C_r(s) \frac{\Omega_r(s)}{E(s)} = \frac{4.7569 \cdot 10^6 C_r(s)}{s^2 + 1.0508 \cdot 10^5 s + 182.9163} \quad (5.5)$$

$$R_c(s) = \frac{\Omega_r(s)}{\Omega_{r_c}(s)} = \frac{C_r(s)R_o(s)}{1 + C_r(s)R_o(s)} \quad (5.6)$$

### 4. Sintonización

Para el controlador  $C_r(s)$ , se opta por seguir el método de Evans. Para ello, se propone una acción proporcional dado por la constante  $k_p \in \mathbb{R}^+$  con un valor unitario, por lo que provisionalmente se tiene que  $C_r(s) = k_p = 1$ . Al sustituirlo en (5.6), se habilita la visualización de su lugar de las raíces en la figura 5.1, donde está claro que el sistema es estable y críticamente amortiguado para cualquier  $k_p$  mayor a cero y menor a 579, ya que en magnitudes superiores se vuelve subamortiguado. Esto sugiere que cualquier ganancia  $0 < k_p \leq 579$  es apropiada, aunque lo mejor es conservarla en un nivel bajo para reducir la inyección de energía y mantener bajas frecuencias.

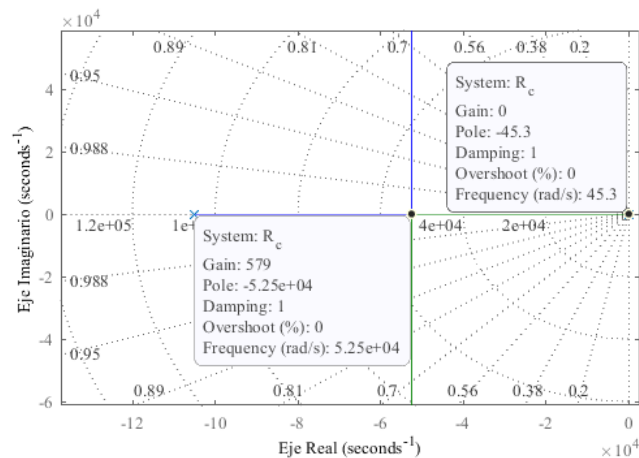


Figura 5.1: Lugar de las raíces de la función de transferencia  $R_c(s)$ .

Un método auxiliar en la sintonización consiste en observar la respuesta ante el escalón unitario. En la figura 5.2, se aprecia la dinámica interna del motor para tres ganancias distintas, de donde se concluye que presenta un comportamiento aceptable si  $k_p = 1$ . Este valor, junto con otras propiedades del controlador, se asientan en la tabla 5.4.

Asignar una magnitud superior a  $k_p$  hace más rápida la respuesta, pero también puede provocar sobreimpulsos. Por otro lado, un valor menor causa que la respuesta sea lenta, que no se siga la referencia adecuadamente y se de lugar a la acumulación de errores. Las otras acciones de control de la familia PID, derivativa e integral, no son necesarias para este lazo de control ya que la dinámica es estable, críticamente amortiguada, y perfectamente capaz de alcanzar la referencia en un tiempo aceptable ( $\approx 1$ s.).

En la práctica, se debe cuidar que el valor de  $e(t)$  no sea superior al valor nominal de tensión, ya que puede deteriorar el actuador. A menudo, la solución suele ser colocar saturadores a la salida de la acción de control. También es importante utilizar la Forma Canónica Controlable del modelo en (5.2) para asegurar que todos los modos sean controlables, toda vez que se demostró que el sistema es controlable.

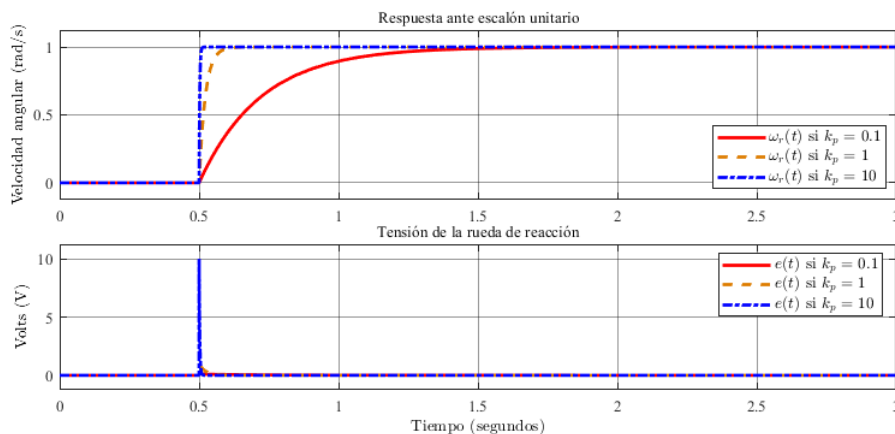


Figura 5.2: Respuesta de a)  $R_c(s)$  ante el escalón unitario, y b)  $e(t)$  si  $k_p$  igual 0.1, 1 y 10.



## 5.2. Control de Desplazador

Para llegar al control y simulación del desplazador se sigue un procedimiento similar al anterior. Lo primero consta en definir que el motor empleado en el desplazador es el mismo que en la rueda de reacción, ya que sus características positivas son notables, aunque con un tren de engranajes acoplado a la flecha con el fin de aumentar el par y reducir la velocidad angular.

### 1. Sustitución de parámetros

El tren reductor propuesto es un engranaje planetario *GPX-6*, cuya hoja técnica se encuentra disponible en el anexo A. Entre otras cosas, cabe mencionar que dicho modelo fue seleccionado debido a que es compatible y recomendado para con el motor *ECX Speed 6M*. Los parámetros del reducen se concentran en la tabla 5.3.

Con estos datos, el modelo en espacio de estados para el desplazador queda como en la ecuación (5.7), mientras que su matriz de controlabilidad y observabilidad quedan como en (5.8). Al calcular el determinante de  $\mathcal{C}_d$  y el rango de  $\mathcal{O}_d$ , se obtiene  $-8.9214 \cdot 10^{15}$  y 2; respectivamente, lo que se traduce como que el sistema en (5.7) es controlable y observable. Bajo ambas circunstancias, se procede a proponer un controlador más adelante.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -3.3873 & 1.2422 \cdot 10^8 \\ -9.2646 & -1.0508 \cdot 10^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 8.4746 \cdot 10^3 \end{bmatrix} e(t) \\ \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$\mathcal{C}_d = \begin{bmatrix} 0 & 1.0527 \cdot 10^{12} \\ 8.4746 \cdot 10^3 & -8.39055 \cdot 10^8 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{O}_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3.3873 & 1.2422 \cdot 10^8 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

Cuya función de transferencia equivalente se muestra en (5.9).

$$D_o(s) = \frac{\Omega_d(s)}{E(s)} = \frac{1.0527 \cdot 10^{12}}{s^2 + 1.0509 \cdot 10^5 s + 1.1512 \cdot 10^9} \quad (5.9)$$

Al igual que con la rueda, se propone un controlador de velocidad, dado por  $C_d(s)$ , al que se añade en (5.10).

$$C_d(s)D_o(s) = C_d(s) \frac{\Omega_d(s)}{E(s)} = \frac{1.0527 \cdot 10^{12} C_d(s)}{s^2 + 1.0509 \cdot 10^5 s + 1.1512 \cdot 10^9} \quad (5.10)$$

Se sigue con (5.11), en donde se obtiene el lazo cerrado de velocidad al aplicar una retroalimentación unitaria.

$$D_c(s) = \frac{D_o(s)}{1 + D_o(s)} = \frac{\Omega_d(s)}{\Omega_{d_c}(s)} = \frac{1.0527 \cdot 10^{12} C_d(s)}{s^2 + 1.0509 \cdot 10^5 s + 1.512 \cdot 10^9 + 1.0527 \cdot 10^{12} C_d(s)} \quad (5.11)$$

**Tabla 5.3:** Parámetros mecánicos y eléctricos del reductor planetario *GPX-6* de 3 etapas.

Subsistema	Notación	Magnitud [Unidades]	Descripción
Mecánico	Parámetros		
	$I_g$	$1.00 \cdot 10^{-10} [Kg \cdot m^2]$	Momento de inercia del mecanismo.
	$R_\tau$	57	Relación de reducción.
	$\omega_{g_{max}}$	4188.79 [rad/s]	Velocidad angular máxima de entrada.
	$m_g$	0.0025 [Kg]	Masa total del reductor.
	$\tau_g$	0.02 [N · m]	Par máximo intermitente del reductor.
	$W_g$	0.25 [N · m]	Potencia máxima intermitente del reductor.

A la que se añade un integrador en (5.12) para pasar de la velocidad angular a la posición angular,  $U(s)$ , lo que tiene como efecto más notable es que se aumenta de grado la función de transferencia. A esto, en (5.13) se propone un segundo controlador,  $C_D(s)$ , responsable del lazo de control de posición. Y finalmente, en (5.14) se cierra el segundo lazo.

$$\Delta_o(s) = \left(\frac{1}{s}\right) D_c(s) = \left(\frac{1}{s}\right) \frac{D_o(s)}{1 + D_o(s)} \quad (5.12)$$

$$C_D(s)\Delta_o(s) = C_D(s) \left(\frac{1}{s}\right) D_c(s) \quad (5.13)$$

$$\Delta_c(s) = \frac{\Delta_o(s)}{1 + \Delta_o(s)} \quad (5.14)$$

## 2. Sintonización

Para sintonizar  $C_d(s)$  se parte de proponer una  $k_p$  unitaria, para luego hallar el lugar de las raíces de (5.11), disponible en la figura 5.3. En ella, se aprecia que la trayectoria de los polos tiende a crecer hacia ambos extremos del eje imaginario; lo que sugiere que la ganancia unitaria es elevada e induce polos complejos conjugados. Si se reduce la ganancia hasta un valor igual a 0.00001, se obtienen unos polos que indican un sistema críticamente amortiguado, lo que se visualiza en la figura 5.4.

A pesar lo anterior, el sistema no es completamente capaz de alcanzar la referencia, por lo que a  $C_d(s)$  se le añade una acción integral dotada por una constante  $k_i \in \mathbb{R}^+$ . Un valor apropiado ha demostrado ser  $k_i = 0.1$ , ya que en la figura 5.5 resulta ser suficiente y sin introducir oscilaciones.

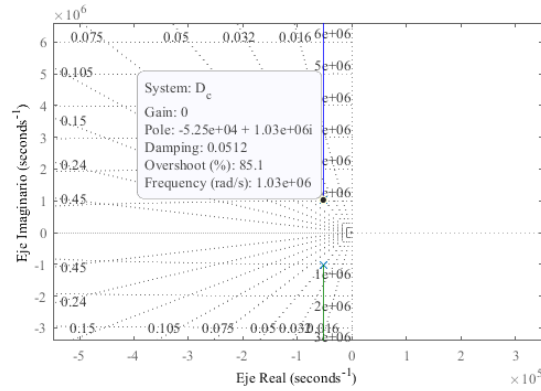


Figura 5.3: Lugar de las raíces de la función de transferencia  $D_c(s)$  si  $C_d(s) = 1$ .

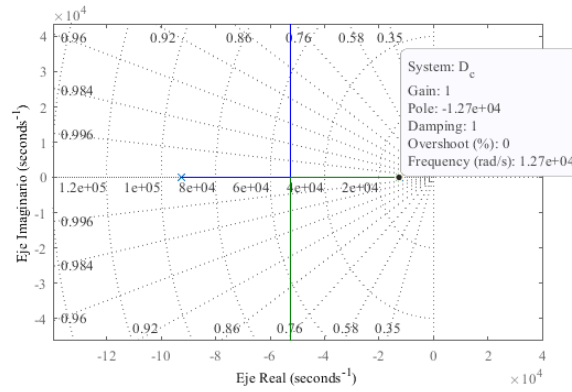


Figura 5.4: Lugar de las raíces de la función de transferencia  $D_c(s)$  si  $C_d(s) = 0.00001$ .

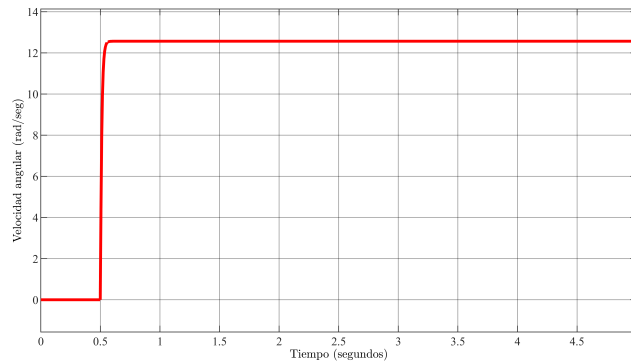


Figura 5.5: Respuesta de  $D_c(s)$  ante el escalón si  $C_d(s) = 0.00001 + 0.1 \frac{1}{s}$ .

Para el lazo externo del desplazador, responsable del control de posición, se aplica el escalón del valor máximo que puede adoptar  $u(t)$ ; es decir,  $4\pi$ . De inicio se consideró una  $C_D(s)$  unitaria, lo que arrojó una respuesta que alcanza la referencia y sin oscilaciones. Sin embargo, tardó cerca de siete segundos en alcanzarla, por lo que se probó aumentando la ganancia en tres valores: uno, diez y cien en un esfuerzo por mejorar el tiempo de asentamiento. La comparación de las tres respuestas es visible en la figura 5.6.

De modo que la ganancia seleccionada es diez, debido a que tiene un buen tiempo de asentamiento y no requiere tanta energía. Las características de ambos controladores,  $C_d(s)$  y  $C_D(s)$ , se resumen en la tabla 5.4.

En consecuencia, los vectores unitarios que ofrece el desplazador se pueden apreciar en la figura 5.7, en donde se aplica una  $u(t)$  en forma de rampa. En la práctica,  $u(t)$  se satura en 0 y en  $4\pi$  para evitar singularidades.

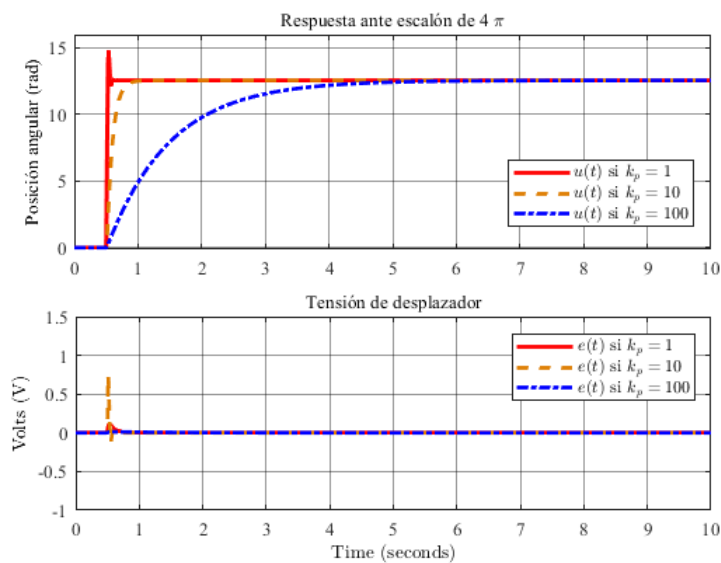


Figura 5.6: Respuesta de  $\Delta_c(s)$  ante el escalón de  $4\pi$  si  $C_D(s)$  bajo diferentes ganancias.

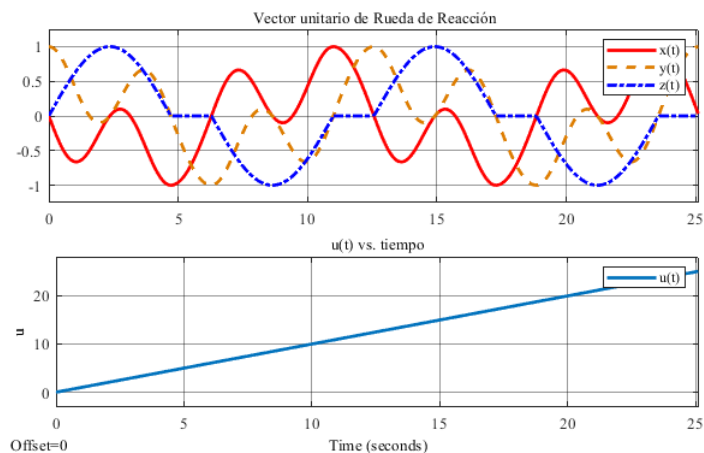


Figura 5.7: Valores de a)  $T(u)$  si  $\eta = 1/2\pi$ , b)  $u(t)$ .

### 5.3. Control de Dinámica Satelital

El primer paso para simular la dinámica satelital consiste en definir un tensor de inercia  $\mathbf{I}_s$  en (5.15), el cual fue tomado del proyecto de un CubeSat de 3U en [79], mismo que es usado para el resto de las simulaciones en este trabajo.

$$\mathbf{I}_s = \begin{bmatrix} 6.0237 & 0.0029 & 0.0042 \\ 0.0029 & 1.3045 & 0.0131 \\ 0.0029 & 0.0131 & 6.0135 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3} kg \cdot m^2 \quad (5.15)$$

Con lo que, entonces, ya es posible proponer un controlador representado por  $C_q(s)$  inmediatamente después de la conformación del vector de error  $\mathbf{v}_{err}(t)$ . Recuérdese que  $C_q(s)$  es responsable del control de actitud,  $\mathbf{q}_s(t)$ , a través de la manipulación del par  $\boldsymbol{\tau}_s(t)$ , de acuerdo con la dinámica vista en (4.48). La sintonización se da por medio de métodos heurísticos y se realiza una vez que las ruedas y los desplazadores han sido sintonizados y colocados de acuerdo con lo abordado en el capítulo anterior. Un conjunto de ganancias apropiadas para  $C_q(s)$  se concentran en la tabla 5.4, al igual que los controladores anteriores.

La simulación con estos valores, y bajo un arreglo 3-0, arroja la parte a) de la figura 5.8, donde se aprecia la actitud satelital en términos de  $\phi_s(t)$ ,  $\theta_s(t)$  y  $\psi_s(t)$  con respecto a sus referencias  $\phi_c(t)$ ,  $\theta_c(t)$  y  $\psi_c(t)$ . Lo principal a notar es que la referencia se alcanza cerca de los cuarenta segundos si  $[\phi_c(t), \theta_c(t), \psi_c(t)]^T = [\pi/4, \pi/4, \pi/4]^T$ . Por otra parte, en la parte b) de la misma figura, se nota que el error de actitud por cuaterniones se vuelve casi nulo al cabo de veinte segundos desde que ocurre el cambio en la referencia, ya que  $\mathbf{q}_\varepsilon(t) \approx [1, 0, 0, 0]^T$ .

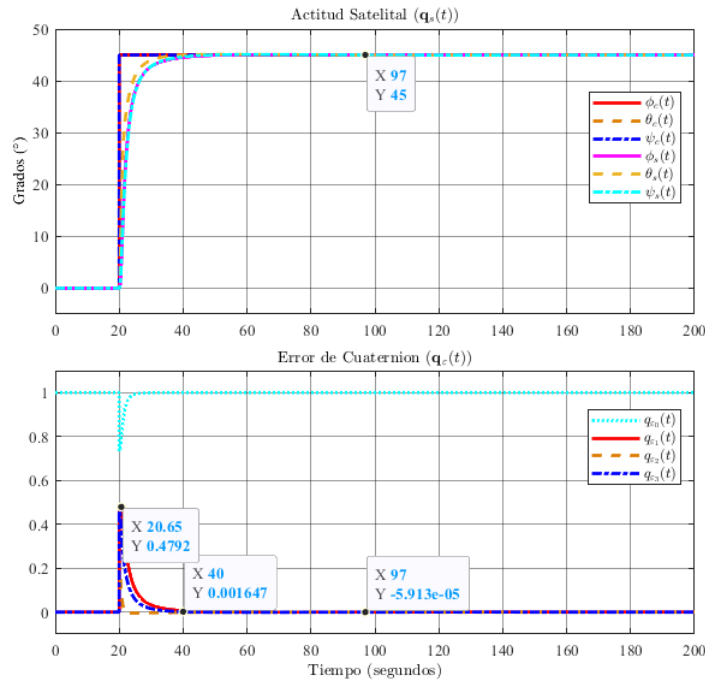


Figura 5.8: Actitud satelital y cuaternión de error.

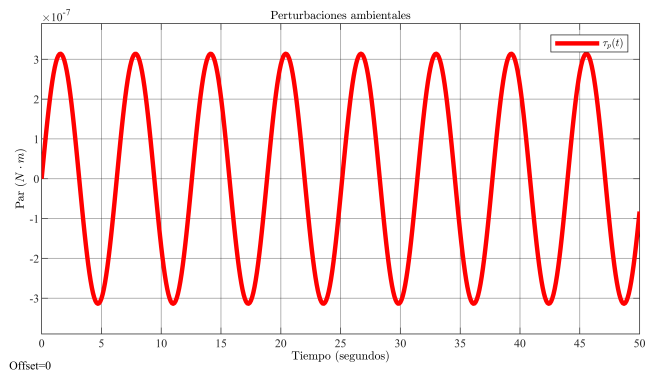
**Tabla 5.4:** Acciones y ganancias de control para la dinámica satelital.

Variable				Control	Notación	Ganancias		
Manipulada	Notación	Controlada	Notación			$k_p$	$k_i$	$k_d$
Rueda de Reacción								
Tensión	$e(t)$	Vel. angular	$\omega_r(t)$	P	$C_r$	1	0	0
Desplazador								
Tensión	$e(t)$	Vel. angular	$\omega_d(t)$	PI	$C_d$	0.00001	0.1	0
Vel. angular	$\omega_r(t)$	Pos. angular	$\theta_r(t)$	P	$C_D$	10	0	0
Dinámica satelital								
Par	$\tau_s(t)$	Cuaternión	$\mathbf{q}_s(t)$	PI	$C_q$	300	25	0

Para las perturbaciones, se tomaron las estimaciones máximas producto de estudios previos, disponibles en [79] y [56], de donde se obtuvieron los valores en la tabla 5.5, y a partir de los que se calculó su promedio y, posteriormente, el valor medio cuadrático (RMS, por sus siglas en Inglés), de lo que se obtuvo  $2.22 \cdot 10^{-7} N \cdot m$  y a partir del cual se construyó la señal en la figura 5.9.

**Tabla 5.5:** Pares estimados de perturbación.

Nombre	Par Máximo 1 [ $N \cdot m$ ]	Par Máximo 2 [ $N \cdot m$ ]	Promedio [ $N \cdot m$ ]
Arrastre Aerodinámico	$4.29 \cdot 10^{-9}$	$6.97 \cdot 10^{-9}$	$5.63 \cdot 10^{-9}$
Presión Solar	$3.28 \cdot 10^{-9}$	$1.64 \cdot 10^{-9}$	$2.46 \cdot 10^{-9}$
Gradiente Gravitacional	$2.82 \cdot 10^{-8}$	$1.75 \cdot 10^{-9}$	$1.49 \cdot 10^{-8}$
Perturbación Magnética	$4.5 \cdot 10^{-8}$	$4.00 \cdot 10^{-7}$	$2.22 \cdot 10^{-7}$
Valor RMS	$5.33 \cdot 10^{-8}$	$4.1 \cdot 10^{-7}$	$2.22 \cdot 10^{-7}$

**Figura 5.9:** Simulación de las perturbaciones  $\tau_p(t)$ .

## 5.4. Reconfiguración de RWA

Existen dos maneras para poner a prueba la funcionalidad del arreglo reconfigurable. El primero abarca exclusivamente el control de posición angular de los desplazadores; es decir, que las ruedas conformen cada uno de los RWA vistos en la sección 3.8. Mientras que el segundo, además de lo anterior, corresponde con el control de la actitud. Esto último se entiende como un método de prueba más consistente ya que, finalmente, lo que interesa es lograr la regulación efectiva de la actitud.

De tal modo que se proponen los escenarios en la tabla 5.6, en donde  $t_d \in \mathbb{R}$  corresponde con el tiempo muerto; es decir, los segundos que transcurren entre el cambio de RWA y la activación de las ruedas una vez concluida la reconfiguración.

Para cada caso se incluyen tres figuras: la primera ilustra a) a la actitud satelital resultante, y en b) al cuaternión de error de actitud. La segunda, la tensión aplicada y el par generado por cada una de las ruedas de reacción. Y la tercera, la tensión del desplazador y el vector unitario obtenido.

**Tabla 5.6:** Escenarios para validar el desempeño del Arreglo Reconfigurable de las Ruedas de Reacción.

Caso	RWA		$t_d$ [s]	Pert. ( $\tau_p$ )	Actitud ( $[\phi_s(t), \theta_s(t), \psi_s(t)]^T$ )	
	Inicial	Final			Inicial [°]	Final [°]
1	3-O	3-O	N/A	Sí	$[-10, -20, -30]^T$	$[60, 50, 40]^T$
2	4-PYR	3-O	5	Sí	$[10, 20, 30]^T$	$[-50, -50, -50]^T$
3	4-PYR	3-O	0	Sí	$[-45, -45, -45]^T$	$[45, 45, 45]^T$
4	4-TR	4-TI	0	Sí	$[-45, -45, -45]^T$	$[45, 45, 45]^T$

### Caso 1

El propósito de este escenario es demostrar que la dinámica descrita por el modelado es correcta, y es capaz de mitigar las perturbaciones. De tal modo que – con fines ilustrativos –, se propuso el arreglo 3-O en todo momento, y una actitud inicial negativa que pasa a una positiva con respecto al marco de referencia inercial. Las perturbaciones fueron activadas en todo momento.

Los resultados se aprecian en las figuras 5.10, 5.11 y 5.12 de acuerdo con lo mencionado anteriormente.

Nótese que en 5.10 se alcanza la actitud de referencia en un tiempo de asentamiento aproximado de 30 segundos, lo que se debe a que, como se aprecia en 5.11, se ejerció una tensión negativa en las ruedas de reacción, lo que generó un par negativo; ambas variables en sentido opuesto a la rotación de actitud, y que al aproximarse a la referencia, se volvieron positivos por breve período de tiempo.

Por otra parte, en la figura 5.12 se aprecia que la tensión de los desplazadores se mantiene nula ya que no hubo cambios que realizar en  $u(t)$ , en virtud de que los vectores unitarios  $\hat{\omega}_r(t)$  ya se encontraban en el vector deseado de actitud al inicio de la simulación.

Por último, la influencia de las perturbaciones es mínima, ya que no hay evidencia de oscilaciones en los estados transitorio y estacionario.

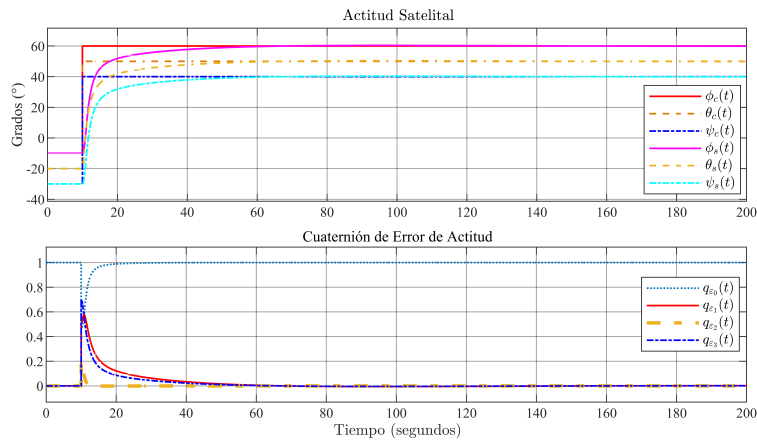


Figura 5.10: Caso 1: Actitud y error satelitales

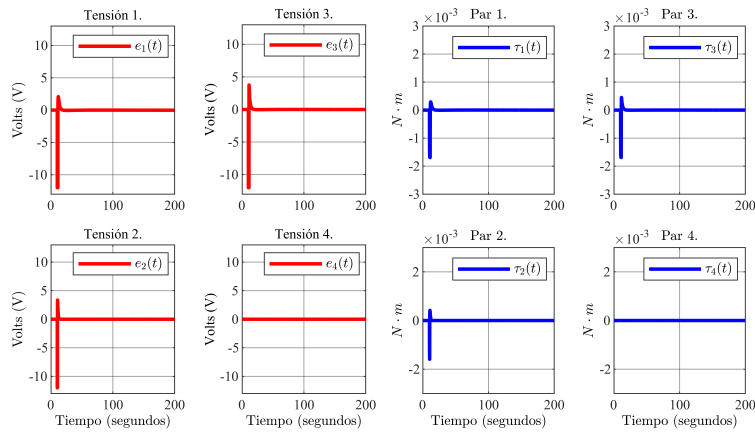


Figura 5.11: Caso 1: Tensión aplicada a las ruedas de reacción y par generado.

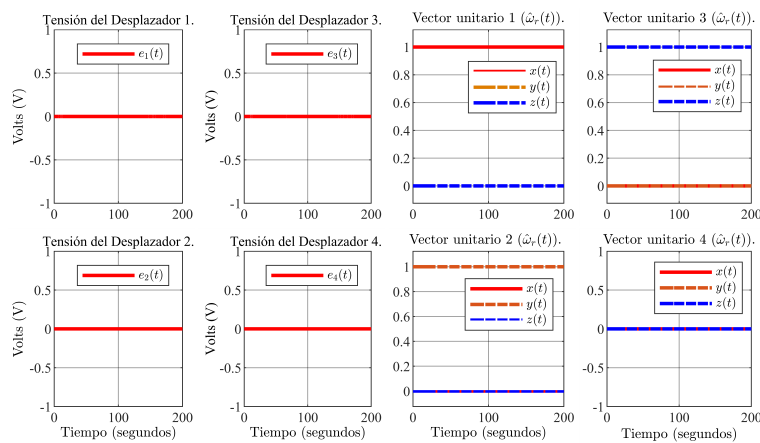


Figura 5.12: Caso 1: Tensión aplicada a los desplazadores y vectores unitarios obtenidos.



## Caso 2

El segundo escenario tiene como propósito ilustrar la utilidad del diseño al reconfigurar un arreglo inicial de 4-PYR a uno final de 3-O, lo que equivale al caso principal de interés. Es importante señalar que se implementa un tiempo muerto de cinco segundos para que la dinámica de las ruedas y el satélite no se vean afectadas por la reconfiguración.

Los resultados yacen en la figuras 5.13, 5.14 y 5.15.

Lo primero a señalar es que la reconfiguración se realiza en el segundo 25, mientras que la referencia empieza en el 30. Esto le da tiempo más que suficiente para que se desplacen las ruedas de reacción a lo largo de las trayectorias correspondientes.

Este caso es un poco opuesto al anterior, ya que además de la reconfiguración, sucede también que la actitud pasa de una inicial positiva a una negativa; tal y como se ilustra en 5.13 y 5.14. Además, la reconfiguración se refleja en la figura 5.15, en donde en el segundo 25 las componentes vectoriales reflejan la transformación de un RWA 4-PYR a 3-O.

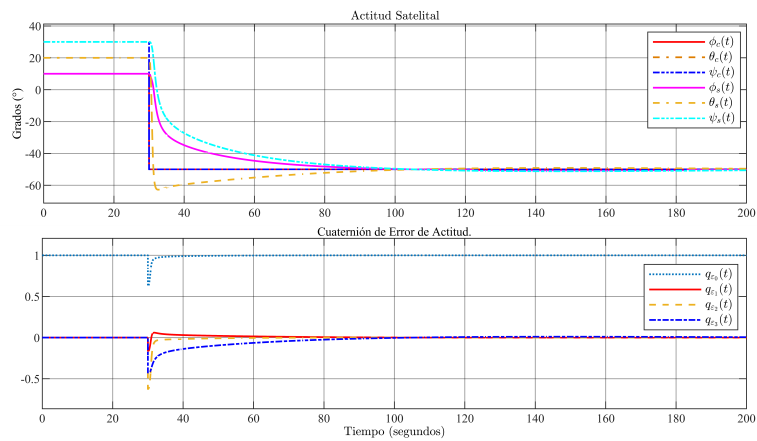


Figura 5.13: Caso 2: Actitud y error satelitales

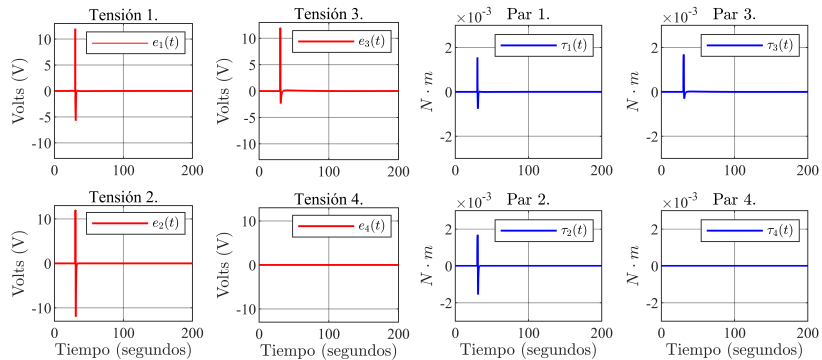


Figura 5.14: Caso 2: Tensión aplicada a las ruedas de reacción y par generado.

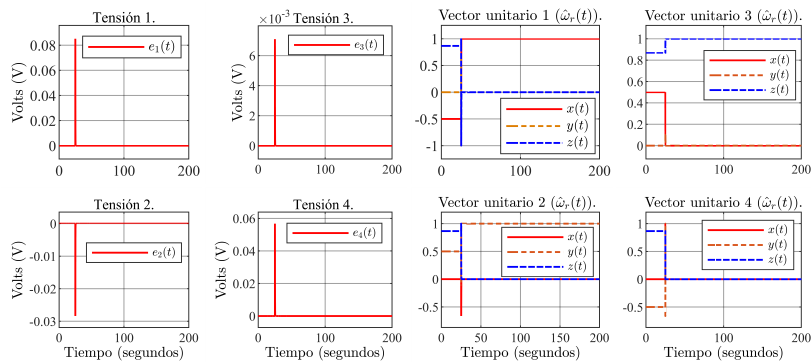


Figura 5.15: Caso 2: Tensión aplicada a los desplazadores y vectores unitarios obtenidos.

### Caso 3

El tercer caso es similar al anterior, solo que en este la transformación de RWA se realiza simultáneamente con el cambio en la referencia; es decir, no hay tiempo muerto.

Los resultados para este caso yacen en las figuras 5.16, 5.17 y 5.18.

Lo peculiar es que la actitud no se ve particularmente afectada, pues en la figura 5.16 se ve que se alcanza el valor deseado y en un tiempo cercano a los sesenta segundos desde el cambio en la referencia. Esto sugiere que el satélite es capaz de lograr la actitud deseada a pesar de que la transformación sea simultánea, e incluso bajo una rotación de  $\pi/2$  radianes. Es evidente que, en comparación con el caso anterior, el aumento de la referencia ha propiciado que se tome más tiempo para alcanzar el objetivo.

En cambio, en la figura 5.18 se aprecia la tensión aplicada para que ocurra la reconfiguración y las componentes del vector unitario obtenido, que evidencian el cambio de 4-PYR a 3-O.

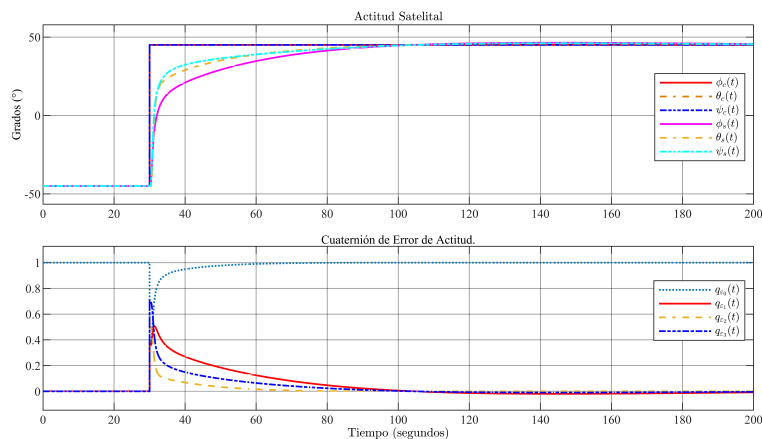


Figura 5.16: Caso 3: Actitud y error satelitales

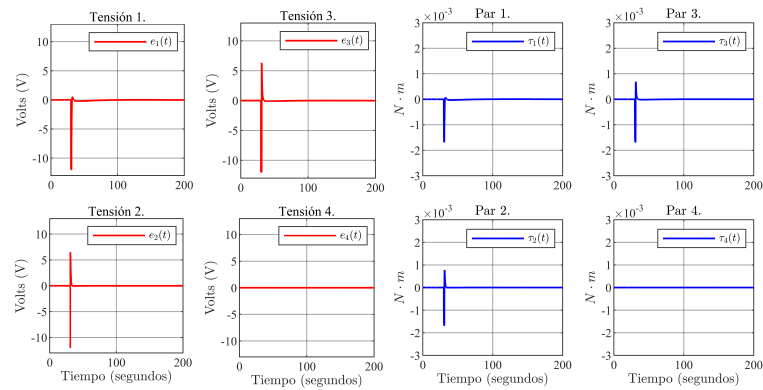


Figura 5.17: Caso 3: Tensión aplicada a las ruedas de reacción y par generado.

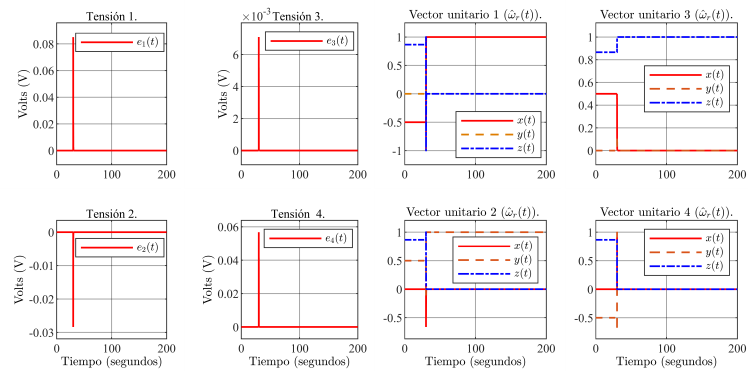


Figura 5.18: Caso 3: Tensión aplicada a los desplazadores y vectores unitarios obtenidos.

### Caso 4

Por último, en este caso lo que se intenta demostrar es la efectividad de una reconfiguración entre los arreglos 4-TR y 4-TI de manera simultánea con el cambio en la referencia y con resultados disponibles en las figuras 5.19, 5.20 y 5.21.

Este caso no es la excepción en alcanzar el objetivo, lo que logra en alrededor de sesenta segundos desde el cambio en la referencia acuerdo con la figura 5.19.

Por otro lado, en la figura 5.20 se aprecia el desempeño de las cuatro ruedas para alcanzar la actitud deseada. Y finalmente, en la figura 5.21 se aprecian los cambios en las componentes de los vectores unitarios, consistentes con los arreglos inicial y final.

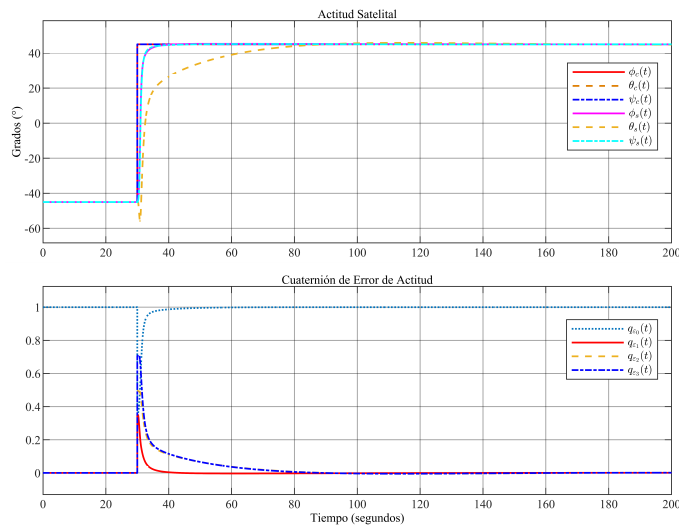


Figura 5.19: Caso 4: Actitud y error satelitales

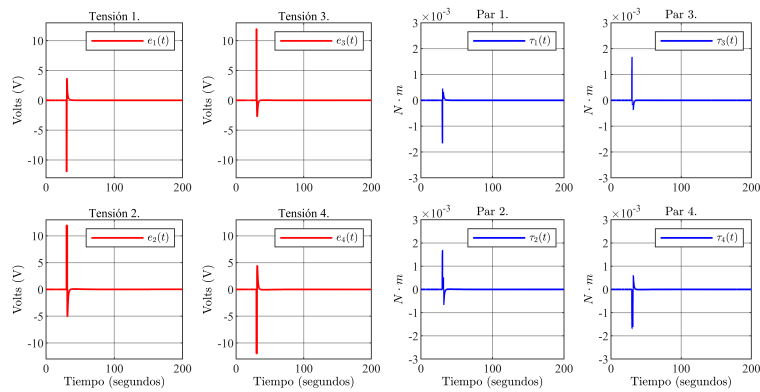


Figura 5.20: Caso 4: Tensión aplicada a las ruedas de reacción y par generado.

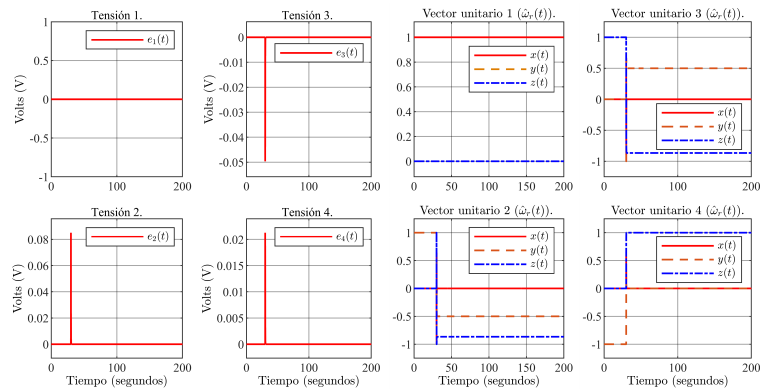


Figura 5.21: Caso 4: Tensión aplicada a los desplazadores y vectores unitarios obtenidos.

## Capítulo 6

# Conclusiones y Trabajos a Futuro

*“La Técnica al Servicio de la Patria.” – Instituto Politécnico Nacional*

---

Las ruedas de reacción son actuadores sumamente potentes, versátiles y con capacidades que son de gran utilidad para la ciencia y la tecnología. No por nada sus aplicaciones van desde péndulos invertidos hasta el control de actitud de la Estación Espacial Internacional. En ese sentido, lo que se presenta con este trabajo no es otra cosa sino un complemento para la aplicación de control de actitud al ofrecer una extensión evolutiva a los Arreglos de Ruedas de Reacción convencionales, misma que desarrolló a través de la hipótesis de reubicar los actuadores, lo que llevó al descubrimiento de una nueva herramienta para el control satelital.

Lo fascinante acerca de este descubrimiento, el Arreglo Reconfigurable de la Rueda de Reacción, es que combina el uso de dichos actuadores con una superficie tan enigmática como lo es la Banda de Möbius; no sin antes, por supuesto, aplicar algunos ajustes topológicos.

Así, el Arreglo Reconfigurable representa un nuevo – y diminuto – escalón en la ciencia del control de actitud satelital. Con la superficie modificada de Möbius, se abren las puertas para otros trabajos; por ejemplo, comparar el desempeño del Arreglo Reconfigurable entre distintos controladores y técnicas de control. Uno de ellos puede ser aplicar control óptimo para tomar en cuenta el consumo energético de las ruedas, o para buscar la trayectoria mínima para  $T(u)$  siempre que se cambie  $u(t)$  aprovechando la recursividad de la banda modificada; o bien, aplicar el control robusto para mejorar todavía más el desempeño ante  $\tau_p(t)$  con base en las funciones de sensibilidad.

Otra área de oportunidad yace en el seguimiento de trayectoria frente a señales de referencia de tipos diferentes, como la senoidal o rampa, ya que únicamente se probó ante la respuesta al escalón.

Si bien el Arreglo Reconfigurable fue pensado inicialmente para satélites CubeSat, no existe una razón para no llevarlo al campo aeronáutico. Es decir, en la figura 2.8 se expuso que AirBus ha implementado Giroscopios de Control de Momento (GMC) en aviones, los cuales están subactuados por ruedas de reacción, por lo que, quizá, el Arreglo Reconfigurable resulte en una alternativa viable.

Aunque es cierto que es un poco difícil ver Arreglos Reconfigurables en aviones por la brecha económica entre uno y un CubeSat, otra posible aplicación yace en los vehículos no tripulados; por ejemplo, cuadricópteros, en dónde si un motor falla, un repuesto lo supla al reubicarse en su posición sin necesidad de la intervención humana.

Por otra parte, en cuanto a las capacidades técnicas, lo primero a intentar consiste en probar con un algoritmo de control no lineal para la dinámica de actitud, en virtud de que las ecuaciones que la describen son descritas como cuasi-lineales. A pesar de que el PID fue capaz de hacerles frente de una manera aceptable, una sugerencia indica que con otro control podría presentarse un mejor desempeño, pero que permanecerá como un tema abierto debido a los alcances del proyecto. En cuanto a los desplazadores y las ruedas, se cree que los controladores igualmente pueden ser P-PI, debido a que ejecutaron su labor apropiadamente.

Un punto adicional que puede ser abordado en próximos estudios es el efecto causado por el error de medición en los instrumentos y sensores, lo que se refleja como una retroalimentación diferente a la unitaria negativa.

En cuanto a las ruedas, existe la oportunidad de mejorar los modelos matemáticos si se consideran otras variables; por ejemplo, el juego axial o los datos térmicos en las hojas técnicas del fabricante en el anexo A. También puede proponerse un modelo complementario basado en el retardo, debido a que – a diferencia de la simulación –, la respuesta de los actuadores no es puramente inmediata. Otro caso a considerar en el modelado es plantear el escenario en el que el centro de masas del satélite no sea coincidente con el origen,  $o_s$ , ya que el estándar CubeSat permite hasta una desviación de  $2mm$  [17].

El verdadero potencial del Arreglo Reconfigurable yace en poner a prueba los algoritmos bajo un mayor número de actuadores. En este trabajo únicamente se consideraron cuatro ruedas porque los RWA más populares son de este número o inferior; sin embargo, las ecuaciones (3.40) y (4.51) ofrecen la capacidad de reubicar  $n$  ruedas, lo que permitiría ofrecer mayor tasa de supervivencia de los satélites ante fallas de ruedas de reacción. En adición, se pueden conformar RWA con mejores capacidades, como el Hexagonal, compuesto por seis ruedas.

A manera de comentario final, el Arreglo Reconfigurable ha demostrado ser un éxito en virtud de que logró cumplir los objetivos de control al permitir orientar el CubeSat en la actitud deseada y mantenerla allí a pesar de las perturbaciones.

Resta decir que el mayor y más significativo trabajo a futuro es la propia comprobación de la correcta operación a través de un prototipo, ya que, con frecuencia, la realidad presenta pequeñas diferencias a lo arrojado por las simulaciones.

# Anexo A

## Documentación Técnica

*“Si tienes tiempo para sentir pena por ti mismo,  
tienes tiempo para superarte.” – Saitama*

---

En este anexo se hallan la documentación técnica (*datasheets*) correspondiente a los componentes comerciales referidos a lo largo del presente trabajo.

Los elementos son:

1. Motor eléctrico sin escobillas *Brushless* de alta potencia con diámetro de 6mm y velocidad máxima de 100,000 rpm, modelo «ECX SPEED 6 M» [78].
2. Reductor planetario de tres etapas con diámetro de 6mm y relación de reducción de 57:1, modelo «GPX 6» [80].

# ECX SPEED 6 M

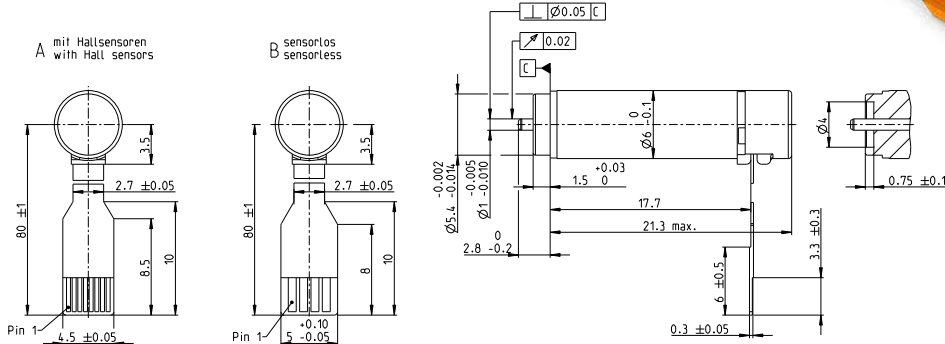
## Motor brushless $\varnothing 6$ mm

High Power

Datos de referencia: 2.0/4.0 W, 0.42 mNm, 100 000 rpm



ECX SPEED



M 2:1

### Datos del motor

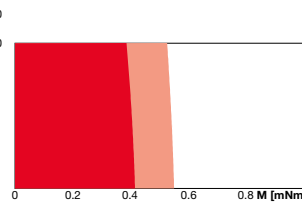
	V	3	6	12
1. Tensión nominal	V	3	6	12
2. Velocidad en vacío	rpm	74400	62700	63400
3. Corriente en vacío	mA	149	58.8	29.8
4. Velocidad nominal	rpm	52300	44900	46800
5. Par nominal (máx. par en continuo)	mNm	0.413	0.412	0.425
6. Corriente nominal (máx. corriente en continuo)	A	1.24	0.517	0.268
7. Par de arranque	mNm	1.45	1.52	1.7
8. Corriente de arranque	A	3.92	1.72	0.97
9. Máx. rendimiento	%	65.5	66.9	68.5
10. Resistencia en bornes	$\Omega$	0.766	3.49	12.4
11. Inductancia en bornes	mH	0.00529	0.0301	0.118
12. Constante de par	mNm/A	0.37	0.882	1.75
13. Constante de velocidad	rpm/V	25800	10800	5460
14. Relación velocidad/par	rpm/mNm	53400	42800	38500
15. Constante de tiempo mecánica	ms	3.93	3.15	2.84
16. Inercia del rotor	gcm <sup>2</sup>	0.00703	0.00703	0.00703

### Datos térmicos

	K/W	65.8	13.2	1.34	70.4	-20...+100	125
17. Resistencia térmica carcasa-ambiente	K/W	65.8	13.2	1.34	70.4	-20...+100	125
18. Resistencia térmica bobinado-carcasa	K/W	13.2	1.34	70.4	-20...+100	125	
19. Constante de tiempo térmica del bobinado	s	1.34	70.4	-20...+100	125		
20. Constante de tiempo térmica del motor	s	70.4	-20...+100	125			
21. Temperatura ambiente	$^{\circ}$ C	-20...+100	125				
22. Máx. temperatura de bobinado	$^{\circ}$ C	125					

### Datos mecánicos de los rodamientos de bolas

23. Máx. velocidad permitida	rpm	100 000
24. Juego axial	mm	0.007
Precarga	N	0.15
Dirección de fuerza		tracción
25. Juego radial		pretensado
26. Carga axial máx. (dinámica)	N	0.1
27. Máx. fuerza de empuje a presión (estática) (eje apoyado)	N	10
28. Carga radial máx. [mm a partir de la brida]	N	2 [2]



### Otras especificaciones

29. Número de pares de polos	1	321_GPX 6 A	Etapas [opc.]	1-5	maxon sensor para motor tipo A:	486_ESCON Module 24/2	maxon motor control	486_ESCON Module 24/2
30. Número de delgas del colector	3				429_ENX 6 MAG	487_ESCON 36/3 EC		487_ESCON Module 50/4 EC-S
31. Peso del motor	g	3				491_DEC Module 24/2		491_DEC Module 24/2
32. Nivel de ruido típico [rpm]	dBA 44 [50 000]					498_EPOS4 Mod./Comp. 24/1.5		498_EPOS4 Mod./Comp. 24/1.5

### Conexiones del motor con sensor Hall (A)

FPC Flexprint de 8 polos, paso de 0.5 mm

Pin 1 Bobinado del motor 1

Pin 2 Bobinado del motor 2

Pin 3 Bobinado del motor 3

Pin 4 V<sub>Hall</sub> 2.5...5.5 VDC

Pin 5 GND

Pin 6 Sensor Hall 1

Pin 7 Sensor Hall 2

Pin 8 Sensor Hall 3

Señales de salida: CMOS compatible con push-pull

Corriente de salida por canal: máx. 0.5 mA

### Conexiones del motor sin sensor (B)

FPC Flexprint de 4 polos, paso de 1.0 mm:

Pin 1 Bobinado del motor 1

Pin 2 Bobinado del motor 2

Pin 3 Bobinado del motor 3

Pin 4 Sin conectar

### Configuración

Eje delante: longitud

xdrives.maxongroup.com







# Bibliografía

- [1] J. Auret, “Design of an aerodynamic attitude control system for a cubesat,” Master’s thesis, University of Stellenbosch, 3 2012. [Online]. Available: <https://core.ac.uk/download/pdf/37347934.pdf>
- [2] E. Kulu. (2022) Nanosats database: Figures. Nanosats Database. [Online]. Available: <https://www.nanosats.eu/#figures>
- [3] B. R. Rustamov, *Earth Observation*, S. E. Salahova, Ed. InTech, 2012. [Online]. Available: <https://doi.org/10.5772/1116>
- [4] (2020) Control momentum gyros. Airbus. [Online]. Available: <https://www.airbus.com/en/products-services/space/control-momentum-gyros>
- [5] J. R. Wertz, *Spacecraft Attitude Determination and Control*, 1st ed. Springer Science and Business Media, 1978. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1007/978-94-009-9907-7>
- [6] R. Kristiansen, P. J. Nicklasson, and J. T. Gravdahl, “Satellite attitude tracking by quaternion-based backstepping,” *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 38, pp. 175–180, 2005. [Online]. Available: <https://doi.org/10.3182/20050703-6-CZ-1902.01990>
- [7] Z. Fan, S. Hua, M. Chundi, and L. Yuchang, “An optimal attitude control of small satellite with momentum wheel and magnetic torquerods,” *Proceedings of the 4th World Congress on Intelligent Control and Automation*, vol. 2, pp. 1395–1398, 2002. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1109/WCICA.2002.1020810>
- [8] Y. Bang and H. D. Choi, “Attitude control of a bias momentum satellite using moment of inertia,” *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 38, no. 1, pp. 243–250, 1 2002. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1109/7.993243>
- [9] S. Tafazoli and K. Khorasani, “Nonlinear control and stability analysis of spacecraft attitude recovery,” *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 42, no. 3, pp. 825–845, 7 2006. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1109/TAES.2006.248187>
- [10] M. çelebi, S. Ay, M. K. Ibrahim *et al.*, “Design and navigation control of an advanced level cansat,” in *Proceedings of 5th International Conference on Recent Advances in Space Technologies - RAST2011*. IEEE, 06 2011, pp. 752–757. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1109/RAST.2011.5966942>
- [11] B. Ø. Andresen, C. Grøn, R. H. Knudsen, C. Nielsen, K. K. Sørensen, and D. Taagaard, “Attitude control system for aausat-ii,” *Institute of Electronic Systems, Aalborg University*, 2005.
- [12] K. F. Jensen and K. Vinther, “Attitude determination and control system for aausat3,” Master’s thesis, Aalborg University, 5 2010. [Online]. Available: <https://projekter.aau.dk/projekter/en/studentthesis/>

- [attitude-determination-and-control-system-for-ausat3\(8e599f5e-b02b-4ad9-8707-6cb80466b3ea\).html](#)
- [13] I. Kök, “Comparison and analysis of attitude control systems of a satellite using reaction wheel actuators,” Master’s thesis, Luleå University of Technology, 10 2012. [Online]. Available: <http://urn.kb.se/resolve?urn=urn:nbn:se:ltu:diva-47217>
- [14] A. Shirazi and M. Mirshams, “Pyramidal reaction wheel arrangement optimization of satellite attitude control subsystem for minimizing power consumption,” *International Journal of Aeronautical and Space Sciences*, vol. 15, no. 2, pp. 190–198, 4 2014. [Online]. Available: <https://doi.org/10.5139/IJASS.2014.15.2.190>
- [15] H. Yoon, “Maximum reaction-wheel array torque/momentum envelopes for general configurations,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 44, no. 6, pp. 1219–1223, 2021. [Online]. Available: <https://doi.org/10.2514/1.G005570>
- [16] K. Muhammed, U. Umut, Tarik *et al.*, “Design and development of a test setup for reaction wheel systems of nanosatellites,” *International Conference on Advanced Technologies*, no. 20, pp. 181–195, 10 2020. [Online]. Available: <http://sutod.selcuk.edu.tr/sutod/article/view/527>
- [17] *CubeSat Design Specification*, The CubeSat Program / Cal - Poly, 2 2022. [Online]. Available: [https://www.cubesat.org/s/CDS-REV14\\_1-2022-02-09.pdf](https://www.cubesat.org/s/CDS-REV14_1-2022-02-09.pdf)
- [18] A. Gutiérrez Medina, “Desarrollo de un entrenador experimental con dos ruedas de reacción para un cubesat educativo,” Master’s thesis, Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, 2015. [Online]. Available: <http://cicese.repositorioinstitucional.mx/jspui/handle/1007/258>
- [19] D. Messman *et al.*, “Advances in the development of the attitude determination and control system of the cubesat move-ii,” *European Conference for Aeronautics and Aerospace Sciences (EUCASS)*, vol. 7, pp. 1–15, 2017. [Online]. Available: <https://doi.org/10.13009/EUCASS2017-660>
- [20] J. D. Biggs and G. Livornese, “Control of a thrust-vectoring cubesat using a single variable-speed control moment gyroscope,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 43, no. 10, pp. 1–16, 2020. [Online]. Available: <https://doi.org/10.2514/1.G005181>
- [21] D. Bock and M. Tajmar, “Highly miniaturized feep propulsion system (nanofeep) for attitude and orbit control of cubesats,” *Acta Astronautica*, vol. 144, pp. 422–428, 2018. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2018.01.012>
- [22] X. Zhang *et al.*, “Piece-wise affine mpc-based attitude control for a cubesat during orbital manoeuvres,” *Aerospace Science and Technology*, vol. 118, pp. 1–14, 2021. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016/j.ast.2021.106997>
- [23] Y. Zhitong, S. Haibin, and W. Bingwei, “Accessibility assessment and trajectory design for multiple near-earth-asteroids exploration using stand-alone cubesats,” *Aerospace Science and Technology*, vol. 188, pp. 1–19, 2021. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016/j.ast.2021.106944>
- [24] J. P. Kaufman, B. G. Keating, and B. R. Johnson, “Precision tests of parity violation over cosmological distances,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 455, pp. 1981–1988, 2016. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1093/mnras/stv2348>
- [25] J. Braga *et al.*, “Lecx: a cubesat experiment to detect and localize cosmic explosions in hard x-rays,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 493, pp. 4852–4860, 2020. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1093/mnras/staa500>

- [26] S. P. Neumann *et al.*, “Q3sat: quantum communications uplink to a 3u cubesat—feasibility and design,” *EPJ Quantum Technology*, vol. 5, no. 4, pp. 1–24, 2018. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1140/epjqt/s40507-018-0068-1>
- [27] A. Cortiella *et al.*, “3cat-2: Attitude determination and control system for a gnss-r earth observation 6u cubesat mission,” *European Journal of Remote Sensing*, vol. 49, no. 1, pp. 759–776, 2018. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.5721/EuJRS20164940>
- [28] L. A. Domínguez, “Sistema personal de comunicaciones satelitales globalstar como carga de paga y sistema de comunicación principal en el nanosatélite aztechsat,” Master’s thesis, Instituto Politécnico Nacional, 10 2014. [Online]. Available: <http://tesis.ipn.mx:8080/xmlui/handle/123456789/15438>
- [29] A. Ali *et al.*, “Innovative power management, attitude determination and control tile for cubesat standard nanosatellites,” *Acta Astronautica*, vol. 96, pp. 116–127, 2014. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2013.11.013>
- [30] R. E. Snider, “Attitude control of a satellite simulator using reaction wheels and a pid controller,” Master’s thesis, Air Force Institute of Technology, 2010. [Online]. Available: <https://apps.dtic.mil/sti/citations/ADA516856>
- [31] V. M. Lechuga-Gerónimo *et al.*, “Cascade control for a 1u cubesat satellite,” *Congreso Nacional de Ingeniería Electromecánica y de Sistemas (CNIES)*, no. XX, pp. 486–490, 11 2021. [Online]. Available: <https://www.researchgate.net/publication/357240551>
- [32] M. Tassano Ferrés, “Design and implementation of an attitude determination and control system for the antelsat,” Master’s thesis, Universidad de la República, 2015. [Online]. Available: <https://hdl.handle.net/20.500.12008/5214>
- [33] M. K. Quadrino, “Testing the attitude determination and control of a cubesat with hardware-in-the-loop,” Master’s thesis, Massachusetts Institute of Technology, 2014. [Online]. Available: <http://hdl.handle.net/1721.1/91382>
- [34] D. J. Calvo-Cerezo, “Desarrollo, implementación y evaluación de un algoritmo de lógico difusa para el control de actitud de nanosatélites,” Ph.D. dissertation, Universidad Politécnica de Madrid, 2017. [Online]. Available: <https://doi.org/10.20868/UPM.thesis.47742>
- [35] A. R. Walker, P. T. Putman *et al.*, “Solely magnetic genetic/fuzzy-attitude-control algorithm for a cubesat,” *Journal of Spacecraft and Rockets*, vol. 52, no. 6, pp. 1627–1639, 2015. [Online]. Available: <https://doi.org/10.2514/1.A33294>
- [36] A. Pothiwala and M. A. Dahleh, “ $H_\infty$  optimal control for the attitude control and momentum management of the space station,” Laboratory for Information and Decision Systems Massachusetts Institute of Technology, Tech. Rep., 6 1990. [Online]. Available: <https://dspace.mit.edu/handle/1721.1/3208>
- [37] L. Cao, X. Li, X. Chen, and Y. Zhao, “Minimum sliding mode error feedback control for fault tolerant small satellite attitude control,” *Advances in Space Research*, vol. 53, pp. 309–324, 01 2014. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016/j.asr.2013.11.009>
- [38] N. A. Gatsonis *et al.*, “Micropulsed plasma thrusters for attitude control of a low-earth-orbiting cubesat,” *Journal of Spacecraft and Rockets*, vol. 53, no. 1, pp. 57–73, 2016. [Online]. Available: <https://arc.aiaa.org/doi/10.2514/1.A33345>
- [39] (2022) Smallsat propulsion system epss. Nano Avionics. [Online]. Available: <https://nanoavionics.com/cubesat-components/cubesat-propulsion-system-epss>

- [40] (2022) Nanosatellite micropropulsion system. CubeSatShop. [Online]. Available: <https://www.cubesatshop.com/product/nanosatellite-micropropulsion-system>
- [41] F. Rysanek, J. W. Hartmann, J. Schein, and R. Binder, “Microvacuum arc thruster design for a cubesat class satellite,” *USU Conference on Small Satellites*, vol. 16, pp. 1–15, 2002. [Online]. Available: <https://digitalcommons.usu.edu/smallsat/2002/all2002/2/>
- [42] H. C. Polat, J. Virgili-Llop, and R. Marcello, “Survey, statistical analysis and classification of launched cubesat missions with emphasis on the attitude control method,” *Journal of Small Satellites*, vol. 5, pp. 513–530, 2016. [Online]. Available: <https://www.researchgate.net/publication/316919176>
- [43] M. Z. G. Tang, B. Chen and Q. Guo, “On-orbit modal identification for vibration suppression of flexible aerospace structure using reaction wheel actuator,” *Aerospace Science and Technology*, vol. 107, pp. 1–10, 2020. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016/j.ast.2020.106250>
- [44] K. Daw-Kwa, Y. Hyungjoo, K. Woo-Yong, K. Yong-Bok, and C. Hong-Taek, “Development of a spherical reaction wheel actuator using electromagnetic induction,” *Aerospace Science and Technology*, vol. 39, pp. 86–94, 2014. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016/j.ast.2014.09.004>
- [45] H. Huang and J. Zhou, “Solar sailing cubesat attitude control method with satellite as moving mass,” *Acta Astronautica*, vol. 159, pp. 331–341, 2019. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2019.03.077>
- [46] K. Geuk-Nam, P. Sang-Young, L. Taeyand *et al.*, “Development of cubesat systems in formation flying for the solar science demonstration: The canyval-c mission,” *Advances in Space Research*, vol. 68, pp. 4434–4455, 2021. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016/j.asr.2021.09.021>
- [47] L. Hall. (2021, 6) Advanced composite solar sail system: Using sunlight to power deep space exploration. National Aeronautics and Space Administration. [Online]. Available: [https://www.nasa.gov/directorates/spacetech/small\\_spacecraft/ACS3](https://www.nasa.gov/directorates/spacetech/small_spacecraft/ACS3)
- [48] C. Riano-Rios, R. Sun, R. Bevilacqua, and W. E. Dixon, “Aerodynamic and gravity gradient based attitude control for cubesats in the presence of environmental and spacecraft uncertainties,” *Acta Astronautica*, vol. 180, pp. 439–450, 3 2021. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2020.12.038>
- [49] V. Francois-Lavet, “Study of passive and active attitude control systems for the oufti nanosatellites,” Master’s thesis, University of Liège, Faculty of Applied Sciences, 5 2010. [Online]. Available: [http://alpha.plasma.inpe.br/nordeste/conasat/arquivos/projetos/OUFTI1/OUFTI-1-ADCS-Attitude\\_Control\\_System.pdf](http://alpha.plasma.inpe.br/nordeste/conasat/arquivos/projetos/OUFTI1/OUFTI-1-ADCS-Attitude_Control_System.pdf)
- [50] Nctr-m002 magnetorquer rod. CubeSat Shop. [Online]. Available: <https://www.cubesatshop.com/product/nctr-m002-magnetorquer-rod/>
- [51] (2022) Cubesat magnetorquer satbus mtq. Nano Avionics. [Online]. Available: <https://nanoavionics.com/cubesat-components/cubesat-magnetorquer-satbus-mtq/>
- [52] J. D. Gutiérrez López and C. F. Herrera Rodríguez, “Diseño de un sistema de control de orientación utilizando giroscopios de control de momento,” *Scientia et Technica*, vol. 18, no. 4, pp. 640–645, 12 2013. [Online]. Available: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=84929984008>
- [53] A. M. Hassan and A. A. El-Badawy, “Novel omnimagnet actuation method for a cubesat nano-satellite,” *Aerospace Science and Technology*, vol. 117, pp. 1–9, 2021. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016/j.ast.2021.106913>

- [54] J. Li, M. Post, T. Wright, and R. Lee, “Design of attitude control systems for cubesat-class nanosatellite,” *Journal of Control Science and Engineering*, vol. 2013, pp. 1–15, 2013. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1155/2013/657182>
- [55] M. Chessab Mahdi, *Attitude Stabilization for CubeSat: Concepts and Technology*, 1st ed. Cambridge Scholars Publishing, 2018. [Online]. Available: <https://www.cambridgescholars.com/product/978-1-5275-0651-0>
- [56] D. Miller, “Mcubed-2 magnetic research,” Michigan Exploration Laboratory, Tech. Rep., 4 2013. [Online]. Available: [https://www.aerospades.com/uploads/3/7/3/2/37325123/mcubed\\_magnet.pdf](https://www.aerospades.com/uploads/3/7/3/2/37325123/mcubed_magnet.pdf)
- [57] J. T. Gravdahl, E. Eide, A. Skavhaug, K. Svartveit, K. Fauske, and F. M. Indergaard, “Three axis attitude determination and control system for a picosatellite: Design and implementation,” *Proceedings of the 54th International Astronautical Congress*, vol. 54, 10 2003. [Online]. Available: <https://doi.org/10.2514/6.IAC-03-A.5.07>
- [58] B. Zakaria and Z. M. Amine, “Modern attitude control for artificial satellites,” Master’s thesis, University of Saad Dahleb-Blida, 2020. [Online]. Available: <https://doi.org/10.13140/RG.2.2.34468.50565>
- [59] F. Landis Markley and J. L. Crassidis, *Fundamentals of Spacecraft Attitude Determination and Control*, 1st ed. Springer, 2014. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1007/978-1-4939-0802-8>
- [60] J. Auret and W. Steyn, “Design of an aerodynamic attitude control system for a cubesat,” *International Astronautical Congress (IAC)*, vol. 62, pp. 1–19, 01 2011. [Online]. Available: <https://www.researchgate.net/publication/287074816>
- [61] M. J. Sidi, *Spacraft Dynamics and Control: A Practical Engineering Approach*, 1st ed. Cambridge University Press, 1997. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511815652.008>
- [62] G. Bråthen, “Design of attitude control system of a double cubesat,” Master’s thesis, Norwegian University of Science and Technology (NTNU), 1 2013. [Online]. Available: <https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.640.1867&rep=rep1&type=pdf>
- [63] C. A. Rosso-Bayona and J. P. Vieira-Martínez, “Modelo teórico mimo para un sistema de orientación de 3dof de un satélite,” Master’s thesis, Pontificia Universidad Javeriana, 2010. [Online]. Available: <http://hdl.handle.net/10554/7012>
- [64] J. King, “Increasing agility in orthogonal reaction wheel attitude control systems,” *Acta Astronautica*, vol. 177, pp. 673–683, 2020. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2020.08.027>
- [65] E. D. Cortés-García, “Experimentación del control de actitud en un prototipo de cubesat con ruedas de reacción,” Master’s thesis, Universidad Nacional de Colombia, 2 2020. [Online]. Available: <https://doi.org/10.13140/RG.2.2.24678.37441>
- [66] K. Daw-Kwan, “Micro-vibration model and parameter estimation method of a reaction wheel assembly,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 333, pp. 4214–4231, 2014. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2014.04.032>
- [67] M. Sugita, “Torque distribution algorithm for effective use of reaction wheel torques and angular momentums,” *Acta Astronautica*, vol. 139, pp. 18–23, 2017. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2017.06.014>

- [68] Z. Ismail and R. Varatharajoo, “A study of reaction wheel configurations for a 3-axis satellite attitude control,” *Advances in Space Research*, vol. 45, pp. 750–759, 03 2010. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016/j.asr.2009.11.004>
- [69] E. Oland and R. Schlanbusch, “Reaction wheel design for cubesats,” *International Conference on Recent Advances in Space Technologies*, vol. 4, pp. 778–783, 7 2009. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1109/RAST.2009.5158296>
- [70] J. J. Tafoya Sánchez, “Control de velocidad angular de motores de corriente directa mediante técnicas de control automático,” Master’s thesis, Instituto Politécnico Nacional, 12 2010. [Online]. Available: <http://tesis.ipn.mx/handle/123456789/23896>
- [71] G. H. Díaz Huenupán, “Desarrollo de un sistema de control de orientación usando ruedas de reacción de bajo costo para nano-satélite suchai,” Master’s thesis, Universidad de Chile, 4 2018. [Online]. Available: <https://repositorio.uchile.cl/handle/2250/164022>
- [72] K. Ogata, *Ingeniería de control moderna*, 5th ed. Prentice Hall, 2010. [Online]. Available: <https://www.pearson.com/en-us/subject-catalog/p/modern-control-engineering/P200000003521>
- [73] R. C. Dorf and R. H. Bishop, *Sistemas de control moderno*, 10th ed. Prentice Hall, 2011. [Online]. Available: <https://www.pearsoneducacion.net/espa%C3%B1a/TiendaOnline/sistemas-de-control-moderno-10ed>
- [74] D. M. Myszka, *Máquinas y Mecanismos*. Pearson Education, 2012.
- [75] E. D. Bloch, *A First Course in Geometric Topology and Differential Geometry*, 1st ed. Birkhäuser, 1997. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1007/978-0-8176-8122-7>
- [76] T. P. Tumbuan, I. P. Nurprasetio *et al.*, “Maximum integrator gain of pid on performing position control of dc motor in the presence of stiction friction: Kalman conjecture approach,” *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, vol. 645, pp. 486–490, 11 2021. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1088/1757-899X/645/1/012012>
- [77] J. Li, W. Mengchun, R. He, and J. Zhang, “A design of electromechanical brake system triple-loop controllers using frequency domain method based on bode plot,” *Proceedings 2011 International Conference on Transportation, Mechanical, and Electrical Engineering (TMEE)*, pp. 795–798, 2011. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1109/TMEE.2011.6199322>
- [78] *ECX SPEED 6M: Motor brushless 6mm.*, Maxon Group, 09 2020. [Online]. Available: [https://www.maxongroup.es/medias/sys\\_master/root/8846338687006/20-ES-174.pdf](https://www.maxongroup.es/medias/sys_master/root/8846338687006/20-ES-174.pdf)
- [79] B. Prerna, B. Karabee, and T. Kaushik, “Comparative study of classical and fuzzy pid attitude control system with extended kalman filter feedback for nanosatellites,” *International Astronautical Congress (IAC)*, no. 69, pp. 1–8, 10 2018. [Online]. Available: <https://team-anant.org/papers/prerna.pdf>
- [80] *GPX 6: Reductor planetario 6mm.*, Maxon Group, 09 2020. [Online]. Available: [https://www.maxongroup.us/medias/sys\\_master/root/8846427881502/20-ES-321.pdf](https://www.maxongroup.us/medias/sys_master/root/8846427881502/20-ES-321.pdf)