

**CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS  
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**

**UNIDAD ZACATENCO  
DEPARTAMENTO DE CONTROL AUTOMÁTICO**

**Compensación Neuronal para el Control  
de Manipuladores Flexibles**

**T E S I S**

Que presenta

**MARTIN SAUL VILLEGAS QUIROZ**

Para obtener el grado de  
**MAESTRO EN CIENCIAS**

En la especialidad de  
**CONTROL AUTOMÁTICO**

Director  
**Dr. WEN YU LIU**

Ciudad de México

Octubre, 2025



## Agradecimientos

*A lo largo de mi vida, me he sentido muchas veces como un barco a la deriva, empujado por corrientes inciertas y cambios caóticos. En medio de aguas oscuras y cielos sin estrellas, han sido las piedras en el cauce —las personas que se cruzaron en mi camino, con intención o sin ella— las que me obligaron a detenerme, a repensar la dirección, a redibujar el rumbo. Algunas fueron un faro que me orientó en la tormenta, otras, la niebla que me obligó a andar entre mis propios temores. Pero todas, sin excepción, dejaron marcas que transformaron no solo mi trayecto, sino también mi ser. Agradezco a todas aquellas personas que, por fortuna o accidente, dejaron algo de sí en mi recorrido, en mi espíritu, en mi alma.*

*También agradezco profundamente al Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (CINVESTAV-IPN), al Departamento de Control Automático, a la Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación (SECIHTI) del Gobierno de México, y al Dr. Wen Yu, por brindarme la oportunidad, el respaldo académico y la confianza para llevar a cabo este proyecto.*



# Resumen

La robótica ha migrado de manipuladores rígidos a estructuras ligeras y flexibles para mejorar velocidad, eficiencia y relación carga-peso. Esta transición introduce elasticidad en juntas y enlaces, con subactuación, modos internos y vibraciones que complican el modelado y comprometen la estabilidad y el desempeño de controladores clásicos diseñados bajo supuestos de rigidez. La tesis aborda este problema evaluando un esquema que conserva la simplicidad de PD/PID e incorpora una red neuronal como compensador para aproximar en tiempo real dinámicas no modeladas.

El análisis teórico considera el controlador PD/PID base con su extensión con compensación por modelo a modo de referencia conceptual. Sin embargo, en los experimentos se emplea primero un PD/PID base exclusivamente como estabilizador y, después, se añade el término neuronal adaptativo de alimentación hacia adelante que estima el residuo dinámico. La estabilidad y el acotamiento de señales se establecen mediante funciones tipo Lyapunov, de las que se derivan condiciones de estabilidad.

La validación incluye simulaciones y experimentos en tiempo real sobre una plataforma Quanser (Flexible Joint/Flexible Link) en MATLAB/Simulink. Con índices de desempeño ISE, IAE, ITAE e ITSE, los resultados muestran mejoras consistentes en el seguimiento de trayectorias, mientras que en la supresión de vibraciones no se evidenció un avance significativo, aunque se sienta un precedente para trabajos futuros en esta dirección. En cuanto al manejo de la incertidumbre, el esquema propuesto no alcanza todavía un carácter robusto en sentido estricto, pero abre la posibilidad de explorar estrategias que lo fortalezcan.



# Abstract

Robotics has shifted from rigid manipulators to lightweight, this structure are to to improve speed, efficiency, and payload-to-weight ratio. This transition introduces elasticity in joints and links, together with underactuation, internal modes, and vibrations that complicate modeling and undermine the stability and performance of classical controllers designed under rigidity assumptions. This thesis addresses the problem by proposing a scheme that preserves the simplicity of PD/PID control while incorporating a neural network as a neurocompensator to approximate unmodeled dynamics in real time.

The theoretical analysis considers both the baseline PD/PID and its extension with model compensation as a conceptual reference. In the experiments, however, a baseline PD/PID is first used solely as a stabilizer; afterward, an adaptive feedforward neural term is added to estimate the dynamic residual. Stability and signal boundedness are established through Lyapunov-type functions, from which stability conditions are derived.

The validation comprises simulations and real-time experiments on a Quanser platform (Flexible Joint/Flexible Link) using MATLAB/Simulink. With ISE, IAE, ITAE, and ITSE performance index, the results show consistent improvements in trajectory tracking, while no significant progress was observed in vibration suppression, although this sets a precedent for future work in this direction. Regarding uncertainty handling, the proposed scheme does not yet achieve robustness in the strict sense, but it opens the possibility of exploring strategies to strengthen it.





# Índice general

|                                                                |             |
|----------------------------------------------------------------|-------------|
| <b>Resumen</b>                                                 | <b>III</b>  |
| <b>Abstract</b>                                                | <b>V</b>    |
| <b>Índice de Figuras</b>                                       | <b>XI</b>   |
| <b>Índice de Tablas</b>                                        | <b>XIII</b> |
| <b>Introducción</b>                                            | <b>1</b>    |
| Motivación . . . . .                                           | 1           |
| Objetivo general . . . . .                                     | 2           |
| Estructura de la tesis . . . . .                               | 3           |
| <b>1. Estado del Arte</b>                                      | <b>5</b>    |
| 1.1. Antecedentes . . . . .                                    | 8           |
| 1.2. Manipuladores Subactuados . . . . .                       | 10          |
| 1.3. Elasticidad Estructural . . . . .                         | 12          |
| 1.3.1. Elasticidad en juntas . . . . .                         | 12          |
| 1.3.2. Enlaces flexibles . . . . .                             | 13          |
| 1.3.2.1. Método de modos asumidos . . . . .                    | 15          |
| 1.4. Teoría de Estabilidad para Sistemas No Lineales . . . . . | 16          |
| 1.4.1. Estabilidad de Lyapunov . . . . .                       | 16          |
| 1.4.2. Principio de invariancia de LaSalle . . . . .           | 19          |

---

|                                                                       |           |
|-----------------------------------------------------------------------|-----------|
| 1.4.3. Pasividad energética . . . . .                                 | 20        |
| 1.5. Controladores Clásicos . . . . .                                 | 21        |
| 1.5.1. Compensación basada en modelo . . . . .                        | 26        |
| 1.6. Redes neuronales en el control de sistemas dinámicos . . . . .   | 27        |
| 1.6.1. Arquitecturas . . . . .                                        | 27        |
| 1.6.2. Capacidad de aproximación . . . . .                            | 28        |
| 1.6.3. Leyes de aprendizaje . . . . .                                 | 30        |
| 1.7. Conclusión del capítulo . . . . .                                | 36        |
| <b>2. Modelado de manipuladores con elasticidad estructural</b>       | <b>37</b> |
| 2.1. Consideraciones para el modelado . . . . .                       | 37        |
| 2.2. Caso A: manipulador con junta flexible . . . . .                 | 38        |
| 2.2.1. Ecuaciones de Euler—Lagrange . . . . .                         | 38        |
| 2.2.2. Ecuaciones de Movimiento . . . . .                             | 39        |
| 2.3. Caso B: manipulador con enlace flexible . . . . .                | 40        |
| 2.3.1. Ecuaciones de Euler—Lagrange . . . . .                         | 41        |
| 2.3.2. Ecuaciones de Movimiento . . . . .                             | 44        |
| 2.4. Caso C: manipulador con enlace y junta flexible . . . . .        | 45        |
| 2.4.1. Ecuaciones de movimiento . . . . .                             | 46        |
| 2.4.2. Modelo dinámico generalizado con términos residuales . . . . . | 47        |
| 2.5. Conclusión del capítulo . . . . .                                | 48        |
| <b>3. Control PD/PID con neurocompensación</b>                        | <b>49</b> |
| 3.1. Caso A: Manipulador con junta flexible . . . . .                 | 50        |
| 3.1.1. Controlador PD con neurocompensación . . . . .                 | 50        |
| 3.1.2. Controlador PID con neurocompensación . . . . .                | 54        |
| 3.2. Caso B: Manipulador con enlace flexible . . . . .                | 56        |
| 3.2.1. Controlador PD con neurocompensación . . . . .                 | 56        |
| 3.2.2. Controlador PID con neurocompensación . . . . .                | 59        |
| 3.3. Caso C: Manipulador con enlace y junta flexible . . . . .        | 61        |

---

---

|                                                                               |            |
|-------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 3.3.1. Controlador PD con neurocompensación . . . . .                         | 62         |
| 3.3.2. Controlador PID con neurocompensación . . . . .                        | 64         |
| 3.4. Conclusión del capítulo . . . . .                                        | 67         |
| <b>4. Evaluación Comparativa de Desempeño en Simulación y Experimentación</b> | <b>69</b>  |
| 4.1. Referencias Utilizadas . . . . .                                         | 69         |
| 4.2. Entorno de simulación . . . . .                                          | 70         |
| 4.3. Plataforma Experimental . . . . .                                        | 70         |
| 4.4. Resultados de la neurocompensación . . . . .                             | 71         |
| 4.4.1. Caso A – Manipulador con Junta Flexible . . . . .                      | 72         |
| 4.4.2. Caso B – Manipulador con Enlace Flexible . . . . .                     | 78         |
| 4.4.3. Caso C – Manipulador con junta/enlace Flexible . . . . .               | 84         |
| 4.5. Conclusión del capítulo . . . . .                                        | 90         |
| <b>Conclusión</b>                                                             | <b>93</b>  |
| Discusiones . . . . .                                                         | 93         |
| Conclusiones . . . . .                                                        | 94         |
| Trabajo a futuro . . . . .                                                    | 95         |
| <b>A. Arquitectura de red neuronal</b>                                        | <b>97</b>  |
| <b>B. Modelos para simulación</b>                                             | <b>103</b> |
| B.1. Identificación de Parámetros . . . . .                                   | 106        |
| B.2. Verificación del Modelo por Simulación . . . . .                         | 107        |
| <b>Bibliografía</b>                                                           | <b>107</b> |

---



## Índice de figuras

|                                                                                        |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 2.1. Diagrama de cuerpo libre de un manipulador con junta flexible . . . . .           | 39  |
| 2.2. Diagrama de cuerpo libre de un manipulador con enlace flexible . . . . .          | 40  |
| 2.3. Diagrama de cuerpo libre de un manipulador con junta y enlace flexible . . .      | 45  |
| 4.1. Sistemas físicos utilizados en los experimentos para los tres casos de estudio.   | 71  |
| 4.2. Simulación con controlador PD en el manipulador con junta flexible, $PD_3$ . .    | 72  |
| 4.3. Simulación con controlador PID en el manipulador con junta flexible, $PID_3$ .    | 73  |
| 4.4. Experimentos con controlador PD en el manipulador con junta flexible, $PD_3$ .    | 75  |
| 4.5. Experimentos con controlador PID en el manipulador con junta flexible, $PID_3$ .  | 76  |
| 4.6. Simulación con controlador PD en el manipulador con enlace flexible, $PD_3$ . .   | 78  |
| 4.7. Simulación con controlador PID en el manipulador con enlace flexible, $PID_3$ .   | 79  |
| 4.8. Experimentos con controlador PD en el manipulador con enlace flexible, $PD_3$ .   | 81  |
| 4.9. Experimentos con controlador PID en el manipulador con enlace flexible, $PID_3$ . | 82  |
| 4.10. Simulación con controlador PD en el manipulador combinado, $PD_3$ . . . . .      | 84  |
| 4.11. Simulación con controlador PID en el manipulador combinado, $PID_3$ . . . . .    | 85  |
| 4.12. Experimentos con controlador PD en el manipulador combinado, $PD_3$ . . . .      | 87  |
| 4.13. Experimentos con controlador PID en el manipulador combinado, $PID_3$ . . .      | 88  |
| B.1. Validación del modelo del manipulador de junta flexible. . . . .                  | 107 |
| B.2. Validación del modelo del manipulador de enlace flexible. . . . .                 | 108 |
| B.3. Validación del modelo del manipulador combinado. . . . .                          | 108 |



## Índice de Tablas

|                                                                                       |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4.1. Índices de desempeño para controladores PD/PID simulación (Caso A) . . .         | 73  |
| 4.2. Índices de desempeño para controladores PD/PID experimental (Caso A) . .         | 76  |
| 4.3. Índices de desempeño para controladores PD/PID simulación (Caso B) . . .         | 79  |
| 4.4. Índices de desempeño para controladores PD/PID experimental (Caso B) . .         | 82  |
| 4.5. Índices de desempeño para controladores PD/PID simulación (Caso C) . . .         | 85  |
| 4.6. Índices de desempeño para controladores PD/PID experimental (Caso C) . .         | 88  |
| <br>B.1. Coeficientes dinámicos estimados para el modelo con junta flexible . . . . . | 106 |
| B.2. Coeficientes dinámicos estimados para el modelo con enlace flexible . . . . .    | 106 |
| B.3. Coeficientes dinámicos estimados para el modelo combinado . . . . .              | 107 |





# Introducción

## Motivación

En la actualidad, la robótica enfrenta un cambio de paradigma. Se transita de manipuladores rígidos y sobredimensionados hacia estructuras más ligeras, eficientes y colaborativas. Esta evolución responde a necesidades concretas en aplicaciones industriales, médicas y aeroespaciales, donde la precisión y la interacción segura con humanos resultan fundamentales.

Sin embargo, la ligereza y la flexibilidad traen consigo un problema crucial, la aparición de vibraciones derivadas de la elasticidad en enlaces y juntas, así como dinámicas internas que complican el control. Dichas características convierten al sistema en subactuado, introduciendo incertidumbres y fenómenos que no pueden resolverse de manera robusta con técnicas de control clásicas diseñadas bajo supuestos de rigidez.

La problemática central radica en diseñar controladores capaces de mantener la simplicidad estructural de esquemas tradicionales como el PD o PID, pero que a la vez incorporen mecanismos adaptativos para enfrentar incertidumbre y compensar dinámicas no modeladas. Las redes neuronales, gracias a su capacidad de aproximación universal, surgen como una alternativa prometedora para dotar a estos sistemas de adaptabilidad en tiempo real.

Esta motivación fundamenta la presente tesis, orientada a explorar esquemas híbridos que integren controladores clásicos con neurocompensación, validando su estabilidad mediante teoría de Lyapunov y su desempeño en plataformas experimentales, y conduce a la definición de los objetivos que guían el presente trabajo.

## Objetivo general

Analizar un esquema de neurocompensación orientado a mejorar el desempeño de controladores PD/PID en tareas de seguimiento de manipuladores con elasticidad estructural, estableciendo un marco referencial respecto al problema inherente de vibraciones.

## Objetivos específicos

En función del objetivo principal, se definen a continuación los objetivos específicos que permiten su cumplimiento:

1. Derivar expresiones completas de energía cinética y potencial para los casos de junta, enlace y acoplamiento mixto, asegurando que reflejen fielmente la energía del sistema y constituyan una base coherente para su modelado dinámico
  2. Formular un modelo dinámico Lagrangiano que conserve las propiedades estructurales del sistema y permita separar la cinemática rígida de las deformaciones elásticas dominantes.
  3. Demostrar la estabilidad del sistema en tareas de seguimiento mediante funciones de Lyapunov basadas en energía y variables combinadas.
  4. Integrar una red neuronal como término de compensación, con arquitectura simple, para aproximar dinámicas no modeladas.
  5. Sintonizar controladores PD/PID para estabilizar las plataformas experimentales sin recurrir a un modelo dinámico explícito.
  6. Implementar los controladores propuestos en una plataforma experimental para los casos de junta, enlace y acoplamiento mixto, garantizando su ejecución en tiempo real y cumplimiento de las restricciones físicas del actuador.
  7. Comparar cuantitativamente el controlador PD/PID clásico y la versión con compen-
-

sación neuronal, identificando ventajas, limitaciones y compromisos entre desempeño y complejidad.

## Estructura de la tesis

La tesis se divide en cuatro capítulos numerados:

- **Capítulo 1. Estado del arte.** Se presenta una revisión del estado del arte; posteriormente, se abordan los fundamentos de la dinámica Lagrangiana, la teoría de vigas de Euler–Bernoulli aplicada a robots con elementos flexibles, los conceptos de estabilidad no lineal requeridos para la síntesis de controladores mediante funciones de Lyapunov, los principios de los controladores clásicos y la teoría de redes neuronales aplicada al control automático.
- **Capítulo 2. Modelado de manipuladores con elasticidad estructural.** Se derivan los modelos dinámicos correspondientes a los casos de junta flexible, enlace flexible y acoplamiento combinado.
- **Capítulo 3. Control PD/PID con neurocompensación.** Se diseñan controladores PD/PID para tareas de seguimiento, cuya estabilidad se demuestra mediante funciones de Lyapunov. Posteriormente, se integra una red neuronal como término de compensación, y se derivan reglas de aprendizaje en línea que aseguran convergencia en sentido de Lyapunov.
- **Capítulo 4. Evaluación comparativa de desempeño en simulación y experimentación.** Se implementan los esquemas clásico y con neurocompensación en las plantas Quanser de manipuladores flexibles con MATLAB/Simulink; posteriormente, se analizan empleando índices de desempeño.

La tesis concluye con un apartado de conclusiones y trabajo futuro, seguido de anexos. Durante la realización de esta investigación se preparó y sometió el artículo:

S. Villegas, W. Yu, “PD/PID Control with Neural Compensation for Flexible-Joint Robots”,

---

*The 7th International Conference on Industrial Artificial Intelligence (IAI 2025)* (Agosto 2025).

---

# CAPÍTULO 1

## Estado del Arte

En las últimas décadas, la robótica ha transitado desde estructuras rígidas, robustas y fuertemente actuadas hacia sistemas ligeros, colaborativos y de alta eficiencia energética [1, 2, 3, 4]. Esta evolución ha sido impulsada por la demanda de robots más rápidos, precisos y adaptables, capaces de operar en espacios compartidos con humanos y en aplicaciones con restricciones físicas, como la cirugía asistida, la inspección aeroespacial o la robótica de campo. Como consecuencia directa de esta transformación, los manipuladores robóticos modernos han incorporado estructuras más delgadas, extensas y flexibles, lo que introduce inevitablemente fenómenos de vibración mecánica, deformación estructural y acoplamientos dinámicos indeseados [1, 5].

Esta flexibilidad —presente en enlaces largos o juntas elásticas— altera la dinámica del sistema en comparación con su equivalente rígido [6, 7]. A diferencia de los manipuladores completamente rígidos, donde la salida del sistema puede determinarse directamente a partir de las coordenadas articulares, los robots con elasticidad estructural presentan grados de libertad internos no actuados, como deformaciones elásticas o modos vibratorios, que interfieren con la precisión de posicionamiento y la estabilidad del control. Desde el punto de vista del modelado, esta característica convierte al sistema en inherentemente subactuado: existen más variables dinámicas relevantes que entradas de control disponibles, lo que complica tanto la identificación como el diseño de controladores efectivos [6].

Se han desarrollado diversas estrategias de modelado para representar adecuadamente esta dinámica. Entre ellas destacan el uso de métodos de elementos finitos [8], formulaciones basadas en haces de Euler–Bernoulli [9] o Timoshenko [10], técnicas de reducción modal como los modos asumidos [11], el método de Ritz [12], los modelos *lumped parameter* [13], y formulaciones híbridas que combinan variables distribuidas y concentradas [14, 15, 16]. Estas aproximaciones permiten representar las vibraciones dominantes mediante un conjunto reducido de coordenadas modales, preservando en muchos casos la estructura lagrangiana del sistema [15]. No obstante, la incorporación de estas variables adicionales convierte al modelo en un sistema no lineal de orden superior, con múltiples acoplamientos cruzados, términos estructurales complejos y un comportamiento característico de subactuación dinámica [6].

Ante este panorama, las estrategias de control convencionales enfrentan serias dificultades. Los controladores PD/PID, que han sido eficientes en robótica clásica, deben ser modificados para incluir compensaciones específicas de elasticidad, y aún así su desempeño se degrada frente a trayectorias agresivas o perturbaciones [17, 18, 19, 20]. En contraste, las técnicas avanzadas de control no lineal —como el control por realimentación lineal, *backstepping*, control óptimo LQR o control adaptativo basado en regresores— requieren típicamente el conocimiento explícito de la dinámica del sistema, incluyendo parámetros como la rigidez elástica, la inercia distribuida o el efecto exacto que las deformaciones internas ejercen sobre las variables de salida [21, 22, 23, 24, 25]. En manipuladores flexibles, estos parámetros son frecuentemente inciertos, dependientes del tiempo o no medibles directamente.

Incluso los enfoques que permiten cierta incertidumbre paramétrica, como el control adaptativo clásico [26], el control robusto  $\mathcal{H}_\infty$  [27], o la técnica  $\mu$ -síntesis [28], presentan limitaciones cuando se aplican a tareas sensibles como el seguimiento de trayectorias precisas o la supresión activa de vibraciones [29, 30]. En particular, problemas como la fricción no lineal, el desgaste mecánico, la variación de rigidez por temperatura o carga, y los retardos en la retroalimentación sensorial afectan negativamente la estabilidad y el desempeño del sistema, comprometiendo su uso en aplicaciones críticas.

Frente a estas limitaciones, las redes neuronales han sido exploradas como herramientas úti-

---

---

les y adaptables para la compensación dinámica en sistemas no lineales. Su capacidad de aproximación universal —formalmente establecida por el teorema de Cybenko y sus extensiones [31, 32, 33]— permite representar funciones no lineales desconocidas con alta precisión, aunque siempre con un error de aproximación finito. En el contexto del control, esta propiedad se traduce en la posibilidad de estimar en tiempo real perturbaciones, dinámicas residuales o términos no modelados que escapan al análisis físico convencional.

A diferencia de los esquemas tradicionales, una red neuronal no requiere conocer la estructura exacta del sistema para operar. Mediante reglas de aprendizaje adaptativo, como las propuestas por Narendra y Parthasarathy [34], puede ajustar sus parámetros internos en línea, minimizando el error de seguimiento y generando una señal de compensación útil incluso ante perturbaciones no estructuradas. Aunque una red neuronal por sí sola no puede garantizar robustez en sentido estricto, puede integrarse dentro de lazo cerrado como una herramienta de adaptación funcional, contribuyendo a mantener el desempeño frente a incertidumbre estructural [35, 36, 37].

Esto ha motivado comparaciones con técnicas como el control de rechazo activo de perturbaciones (ADRC) [38], observadores no lineales de alta [39], control adaptativo por modelo de referencia (MRAC) [40] o compensadores basados en lógica difusa [40, 41, 42]. En todos estos casos, el objetivo común es enfrentar dinámicas desconocidas o difíciles de modelar, aunque los métodos difieren en cuanto a su complejidad, requisitos estructurales y capacidad de generalización. Lo destacable del caso neuronal es que permite preservar la simplicidad del controlador principal —por ejemplo, un esquema PD/PID clásico— al añadir una capa de compensación que se ajusta en tiempo real, sin modificar sustancialmente la arquitectura original.

El valor de estas aproximaciones híbridas radica en su capacidad para mantener estructuras de control intuitivas y pasivas, mientras se dota al sistema de adaptabilidad frente a condiciones de operación cambiantes. En el contexto de la robótica flexible, donde las oscilaciones internas pueden comprometer la precisión y la seguridad del movimiento, este tipo de estrategias representa una solución eficaz, escalable y coherente con los retos actuales de control

---

inteligente [43, 44].

## 1.1. Antecedentes

El control adaptativo clásico nació con el momento de fuerza estimado de Slotine y Li, capaz de converger aún con dinámica incierta [45]. Muy pronto, Lozano-Leal y Brogliato adaptaron esta idea a robots con juntas elásticas al estimar inercia y rigidez en línea, mientras Colbaugh y Glass confirmaron que la estrategia se sostenía en espacio-tarea siempre que la flexibilidad fuese moderada [26, 46]. Sin embargo, el simple regulador PD de Tomei dejó claro que, sin amortiguamiento específico, las vibraciones de alta frecuencia siguen degradando la precisión [18].

Para capturar esos modos rápidos surgió la separación lenta-rápida. Ge y Postlethwaite describieron la elasticidad como subsistema veloz y confiaron su compensación a un estimador neuronal en tiempo real, permitiendo que el controlador principal atendiera solo a las variables lentas [47]. La seguridad de estos sistemas híbridos se formalizó mediante juegos diferenciales gracias a Tomlin y colaboradores, lo que facilitó conmutar entre regímenes rígido y flexible sin perder estabilidad [48]. Paralelamente, Ortega *et al.* aportaron una nueva perspectiva orientada a la eficiencia energética con la inyección de amortiguamiento y el *energy-shaping*, ideas que Ott *et al.* llevaron a un controlador de impedancia cartesiana con lazo de par para juntas flexibles [49, 50]. El *positive position feedback* multivariable validado por Moheimani probó en laboratorio que estos planteamientos pasivos funcionan, pero también mostró que requieren caracterizar con precisión la rigidez y los modos dominantes [51].

La dificultad de identificar todos los parámetros impulsó un giro hacia métodos basados en datos. Huang propuso el *Extreme Learning Machine*, reduciendo drásticamente el tiempo de entrenamiento sin sacrificar capacidad de aproximación [52]. A continuación, Jiang y Higaki mezclaron un regulador lineal con una red para transitar suavemente entre comportamiento rígido y elástico [53], mientras Sun *et al.* añadieron control deslizante y observadores RBF

---



logrando convergencia incluso sin medir todas las velocidades [54]. En frecuencia, Liu *et al.* mostraron que un identificador neuronal simplifica la sintonía cuando aparecen resonancias no previstas [55]. Mvogo *et al.* introdujeron soporte vectorial en un esquema *backstepping* y Li *et al.* demostraron convergencia de parámetros con proyección y perturbación singular, aunque ambos dependían aún de una línea divisoria clara entre modelo y residuo [25, 56].

Para afrontar incertidumbres de mayor magnitud, el aprendizaje por refuerzo cobró protagonismo: Depraetere *et al.* emplearon *Natural Actor–Critic* alcanzando movimientos óptimos tras pocas iteraciones [57]. Ouyang *et al.* trasladaron esa idea a un brazo flexible ligero y verificaron estabilidad mediante Lyapunov [58]. Sun *et al.* suprimieron vibraciones con una red profunda acoplada a un modelo masa-resorte, mientras Bian y Gao transfirieron energía a modos inocuos mediante resonancia interna uno-a-uno [59, 60]. No obstante, Sasaki *et al.* y Barjini *et al.* evidenciaron la brecha *sim-to-real*, señalando la necesidad de observadores que compensen diferencias entre simulación y prototipo [61, 62].

Los retos se acentúan en aplicaciones espaciales. Zhang *et al.* redujeron la vibración de un robot paralelo flexible con deslizamiento adaptativo, You *et al.* unieron teoría  $H_\infty$  con redes para microgravedad y Hejrati aplicó compensación neuro-adaptativa en frontera ante saturaciones [63, 64, 65]. Yao *et al.* añadieron consenso bipartito disparado por eventos frente a fallas actuadoras y Cheng y Chen fusionaron lógica difusa y redes en el estudio para la captura de un satélite [66, 67]. Guo *et al.* optaron por selección modal guiada por datos antes de diseñar supresores y Ronzani *et al.* demostraron que el aprendizaje repetitivo permite manipular objetos flexibles sin vibración ni sensores adicionales [68, 69].

En síntesis, la elasticidad introduce dinámicas residuales y vibraciones que desbordan la descripción analítica exacta. La aproximación universal de Funahashi [70], combinada con entrenamientos ultrarrápidos [52], respalda las redes neuronales como compensadores capaces de aprender estas incertidumbres en tiempo real.

---

## 1.2. Manipuladores Subactuados

Un sistema robótico se denomina subactuado cuando posee menos actuadores que coordenadas generalizadas, lo que impide el control directo de todas sus variables.

**Definición 1.1.** [71] Sea  $q(t) \in \mathbb{R}^n$  el vector de coordenadas generalizadas,  $\tau(t) \in \mathbb{R}^m$  el vector de entradas, si  $m < n$ , se denomina subactuado, y su dinámica tiene la forma

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = B(q)\tau, \quad (1.1)$$

donde  $M(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$   $M = M^\top > 0$  es la matriz de inercia,  $C(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz de Coriolis y centrífuga,  $G(q) \in \mathbb{R}^n$  el vector de fuerzas gravitacionales,  $B(q) \in \mathbb{R}^{n \times m}$  la matriz de distribución de pares,  $\text{rank}(B) = m$ .

**Observación 1.2** (Implicaciones del carácter subactuado). En un sistema subactuado

1. No es posible controlar todas las coordenadas generalizadas de forma directa [71];
2. La controlabilidad total depende del acoplamiento dinámico entre variables actuadas y no actuadas [72];
3. Requiere estrategias de control complejas [73, 74, 75].

Estas características contrastan con los sistemas completamente actuados, en los cuales es posible aplicar técnicas de control lineal convencionales.

**Observación 1.3.** En sistemas subactuados [71], las coordenadas  $q(t) \in \mathbb{R}^n$  pueden partitionarse como

$$q(t) = [q_a(t) \quad q_u(t)]^\top, \quad (1.2)$$

donde  $q_a(t) \in \mathbb{R}^m$  son los componentes actuados,  $q_u(t) \in \mathbb{R}^{n-m}$  son los componentes no actuados o pasivos.

Se identifican tres categorías de manipuladores subactuados en la literatura académica. La primera categoría comprende sistemas de enlaces rígidos con un número de motores inferior al de los enlaces [71]. La segunda categoría corresponde a los sistemas con enlaces o juntas elásticas, en los que la deformación introduce variables internas que no son objeto de acción

directa —el tema central de esta tesis [76]. La tercera clasificación abarca plataformas móviles o sujetas a limitaciones no holonómicas, tales como robots terrestres, satélites equipados con brazos manipuladores o vehículos submarinos [77].

**Definición 1.4.** [72] *Un sistema mecánico subactuado se modela a partir del Lagrangiano  $\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \mathcal{T}(q, \dot{q}) - \mathcal{V}(q)$ , y su dinámica se obtiene mediante*

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = B(q)\tau. \quad (1.3)$$

*El término  $\mathcal{V}(q)$  puede incluir potenciales gravitacionales y elásticos.*

**Teorema 1.5.** [72] *Considérese un sistema mecánico subactuado con partición  $q = [q_a \quad q_u]^\top$ , sea la dinámica*

$$\begin{aligned} M_{aa}(q)\ddot{q}_a + M_{au}(q)\ddot{q}_u + h_a(q, \dot{q}) &= \tau, \\ M_{ua}(q)\ddot{q}_a + M_{uu}(q)\ddot{q}_u + h_u(q, \dot{q}) &= 0, \end{aligned} \quad (1.4)$$

*con  $M(q) = \begin{bmatrix} M_{aa}(q) & M_{au}(q) \\ M_{ua}(q) & M_{uu}(q) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , y  $h(t) = \begin{bmatrix} h_a(q, \dot{q}) \\ h_u(q, \dot{q}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$  si el subsistema actuado es controlable y el acoplamiento es tal que el sistema completo es retroalimentable por pasividad, entonces existe una ley de control que estabiliza localmente el sistema en torno a un punto de equilibrio.*

Consulte la demostración en [72].

**Teorema 1.6** (Antisimetría estructural). [49] *Sea un sistema mecánico derivado de una formulación lagrangiana con energía cinética de la forma*

$$\mathcal{T}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^\top M(q) \dot{q}, \quad (1.5)$$

*la matriz de Coriolis  $C(q, \dot{q})$  puede definirse de modo que se satisfaga la siguiente propiedad estructural*

$$\dot{q}^\top \left( \dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q}) \right) \dot{q} = 0 \quad \forall q, \dot{q}. \quad (1.6)$$

Consulte la demostración en [49].

**Teorema 1.7** (Pasividad estructural). [6] *Sea el sistema subactuado descrito por*

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = B(q)\tau. \quad (1.7)$$

Si  $M(q)$  es simétrica definida positiva, y la matriz  $\dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q})$  es antisimétrica, entonces el sistema es pasivo con respecto a las variables  $(\tau, \dot{q})$ , es decir

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \dot{q}^\top M(q) \dot{q} + \mathcal{T}(q) \right) = \dot{q}^\top B(q) \tau. \quad (1.8)$$

*Demostración.* Directa por derivación de la energía total y su propiedad de antisimetría  $\dot{M} - 2C$ .  $\square$

**Observación 1.8.** Esta propiedad permite el uso de funciones de energía como candidatos de Lyapunov para probar estabilidad, aún si el sistema sea subactuado.

## 1.3. Elasticidad Estructural

La elasticidad en los manipuladores robóticos puede mostrarse tanto en las uniones como en los enlaces, en ambas situaciones, se introducen grados de libertad internos no actuados. Este apartado expone las formulaciones y las variables estructurales requeridas para la construcción de los modelos dinámicos desarrollados en el Capítulo 2.

### 1.3.1. Elasticidad en juntas

En una junta flexible, el ángulo de salida del motor  $\theta(t) \in \mathbb{R}^n$  y el ángulo físico del enlace  $\delta(t) \in \mathbb{R}^n$  están conectados por un acoplamiento elástico. Esta elasticidad se representa por un resorte torsional con rigidez  $K_s \in \mathbb{R}^{n \times n} > 0$ , de modo que la diferencia entre ambas variables define la vibración relativa  $\alpha(t) \in \mathbb{R}^n$

$$\alpha(t) := \delta(t) - \theta(t). \quad (1.9)$$

**Observación 1.9.** La variable  $\alpha(t)$  representa la vibración inducida por el acoplamiento elástico. Esta coordenada será usada para el análisis de estabilidad y diseño de control.

**Definición 1.10.** [71, 78] *Un sistema con elasticidad en la junta posee un acoplamiento con rigidez finita entre el motor y el enlace. Este acoplamiento puede modelarse como*

$$\tau_{K_s} = -K_s(\delta - \theta) = -K_s\alpha, \quad (1.10)$$

*A nivel energético, la energía potencial almacenada en el resorte se define como*

$$V_e = \frac{1}{2}K_s(\delta - \theta)^2. \quad (1.11)$$

**Observación 1.11.** *Este tipo de elasticidad convierte al manipulador en un sistema orden superior, subactuado, con dinámica interna no desacoplable.*

El modelado detallado será presentado más adelante, pero puede generalizarse mediante una formulación Lagrangiana con dos coordenadas acopladas.

### 1.3.2. Enlaces flexibles

Los manipuladores con enlaces flexibles presentan deformaciones estructurales a lo largo de sus cuerpos, lo cual implica que su dinámica no puede representarse adecuadamente mediante modelos de parámetros concentrados. Este tipo de sistemas requiere una formulación de tipo continuo, típicamente en el marco de la teoría de vigas.

**Definición 1.12.** [15] *Se denomina enlace flexible a todo eslabón cuya deformación transversal  $w(d, t)$  es no despreciable frente al desplazamiento global, donde  $d \in [0, L]$  es la posición a lo largo del eje del enlace, con  $L$  la longitud total del enlace y  $t$  es el tiempo. El modelo dinámico general de un enlace delgado, homogéneo y sujeto a pequeñas deformaciones está dado por la ecuación de Euler–Bernoulli*

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(d, t) + EI \frac{\partial^4 w}{\partial t^4}(d, t) = 0, \quad (1.12)$$

donde  $\rho A$  es la densidad lineal de masa del enlace,  $EI$  es la rigidez a la flexión (producto del módulo de Young por el momento de inercia geométrico).

**Supuestos de modelado** Este modelo se formula bajo los siguientes supuestos fundamentales:

1. El brazo se modela como una viga delgada con propiedades geométricas constantes y masa distribuida homogéneamente;
2. la flexibilidad se presenta exclusivamente en la dirección lateral. Se asume rigidez frente a fuerzas axiales, torsión y flexión gravitacional, y solo se consideran deformaciones elásticas;
3. los efectos de fricción interna, deformaciones no lineales o perturbaciones externas se consideran despreciables.

**Definición 1.13** (Posición general de un punto sobre el enlace). [79] Sea  $d \in [0, L]$  la posición espacial sobre el enlace. La posición del punto en coordenadas globales está dada por

$$r(d, t) = R(\theta) \begin{bmatrix} d \\ w(d, t) \end{bmatrix}, \quad (1.13)$$

donde  $R(\theta) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  es la matriz de rotación planar  $R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ .

**Definición 1.14** (Energía cinética por flexión). [80] La energía cinética del enlace, considerando su movimiento rígido y flexible, es

$$\mathcal{T}(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \|\dot{r}(\ell, t)\|^2 d\ell. \quad (1.14)$$

**Definición 1.15** (Energía potencial por flexión). [77] La energía potencial elástica del enlace, producto de su curvatura, está dada por

$$\mathcal{V}_e(t) = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \ell^2} \right)^2 d\ell. \quad (1.15)$$

**Definición 1.16** (Energía potencial gravitacional). [71] La energía gravitacional acumulada por la deformación y orientación del enlace es

$$\mathcal{V}_g(t) = \int_0^L \rho A g r_y(\ell, t) d\ell, \quad (1.16)$$

donde  $g$  es la gravedad,  $r_y(\ell, t) = e_2^\top r(\ell, t)$ , con  $e_2 = [0 \quad 1]^\top$ .

### 1.3.2.1. Método de modos asumidos

Para fines de análisis y control, se emplea el método de modos asumidos, en el cual la deformación transversal se aproxima como una combinación finita de funciones base en

$$w(d, t) \approx \sum_{i=1}^k \phi_i(d) \bar{\alpha}_i(t), \quad (1.17)$$

donde  $\phi_i(d)$  son funciones espaciales que satisfacen las condiciones de frontera,  $\bar{\alpha}_i(t)$  son coordenadas modales que representan las amplitudes temporales de cada modo [77].

**Observación 1.17.** *Si se considera un número infinito de modos ( $k \rightarrow \infty$ ), la expansión converge en norma al campo de deformación exacto*

$$w(d, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(d) \bar{\alpha}_i(t), \quad (1.18)$$

*y se recupera completamente la formulación distribuida original. Esta equivalencia garantiza que el método de modos asumidos no es solo una técnica de aproximación, sino una extensión consistente del modelo continuo cuando se considera el límite total.*

**Observación 1.18.** [79] *Los modos  $\phi_i$  pueden seleccionarse ortogonales respecto al producto interno ponderado por la densidad de masa, i.e.*

$$\int_0^L \rho A \phi_i(\ell) \phi_j(\ell) d\ell = 0 \quad \text{si } i \neq j. \quad (1.19)$$

*Esta propiedad permite desacoplar las ecuaciones modales y justificar la truncación a un número reducido de modos dominantes.*

Este método transforma el modelo original, de dimensión infinita, en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de dimensión finita, preservando su estructura física [71].

**Definición 1.19.** [1] *El modelo dinámico extendido de un manipulador con elasticidad estructural, considerando tanto juntas como enlaces flexibles, puede escribirse como*

$$\begin{aligned} M(\delta) \ddot{\delta} + C(\delta, \dot{\delta}) \dot{\delta} + G(\delta) + K_s(\delta - \theta) &= 0, \\ J \ddot{\theta} - K_s(\delta - \theta) &= \tau. \end{aligned} \quad (1.20)$$

*Este sistema representa el caso base.*

**Observación 1.20.** *Cuando el enlace presenta flexibilidad distribuida, la aproximación mediante reducción modal introduce términos adicionales  $F_\delta$  y  $F_\theta$ , derivados siguiendo la metodología dinámica de cuerpos rígidos articulados en [80], los cuales representan efectos agregados de los modos superiores truncados, disipación interna u otros efectos de flexión transversal. El modelo modificado toma la forma*

$$\begin{aligned} M(\delta)\ddot{\delta} + C(\delta, \dot{\delta})\dot{\delta} + G(\delta) + K_s(\delta - \theta) + F_\delta &= 0, \\ J\ddot{\theta} - K_s(\delta - \theta) + F_\theta &= \tau. \end{aligned} \tag{1.21}$$

*Este ajuste permite mantener la estructura lagrangiana del sistema.*

## 1.4. Teoría de Estabilidad para Sistemas No Lineales

Este apartado expone los principios esenciales de estabilidad, las condiciones suficientes más frecuentemente empleadas, y su correlación con la energía mecánica del sistema.

### 1.4.1. Estabilidad de Lyapunov

Sea el sistema autónomo no lineal descrito por

$$\dot{x} = f(x), \quad f(0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.22}$$

donde  $x = 0$  es un punto de equilibrio. El análisis de estabilidad se centra en las propiedades del sistema alrededor de dicho punto [81].

**Definición 1.21** (Estabilidad de Lyapunov). [81] *El punto de equilibrio  $x = 0$  se dice estable en el sentido de Lyapunov si, para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que*

$$\|x(0)\| < \delta \rightarrow \|x(t)\| < \epsilon, \quad \forall t \geq 0. \tag{1.23}$$

**Definición 1.22** (Estabilidad asintótica). [81] *El punto de equilibrio  $x = 0$  es asintóticamente estable si es estable en el sentido de Lyapunov y además,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0. \tag{1.24}$$



**Definición 1.23** (Estabilidad exponencial). [81] *El punto de equilibrio es exponencialmente estable si existen constantes positivas  $c, \lambda, \delta$  tales que*

$$\|x(0)\| < \delta \rightarrow \|x(t)\| \leq c\|x(0)\|e^{-\lambda t}, \quad \forall t \geq 0. \quad (1.25)$$

**Teorema 1.24** (Estabilidad del punto de equilibrio en el sentido de Lyapunov). [82] *Sea el sistema no lineal autónomo*

$$\dot{x} = f(x), \quad f(0) = 0, \quad x \in D \subset \mathbb{R}^n, \quad (1.26)$$

*donde  $D$  es un entorno abierto que contiene al origen. Además, supóngase que existe una función escalar  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ , continuamente diferenciable, tal que*

$$\begin{aligned} a) \quad & V(x) > 0, \quad \forall x \in D \setminus \{0\}, \text{ y } V(0) = 0, \\ b) \quad & \dot{V}(x) = \nabla V(x)^\top f(x) \leq 0, \quad x \in D. \end{aligned} \quad (1.27)$$

*Entonces el punto de equilibrio  $x = 0$  es estable en el sentido de Lyapunov.*

Consulte la demostración en [81].

**Teorema 1.25** (Estabilidad asintótica del punto de equilibrio en el sentido de Lyapunov). *Sea el sistema no lineal autónomo*

$$\dot{x} = f(x), \quad f(0) = 0, \quad x \in D \subset \mathbb{R}^n, \quad (1.28)$$

*donde  $D$  es un entorno abierto que contiene al origen. Además, supóngase que existe una función escalar  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ , continuamente diferenciable, tal que*

$$\begin{aligned} a) \quad & V(x) > 0, \quad \forall x \in D \setminus \{0\}, \text{ y } V(0) = 0, \\ b) \quad & \dot{V}(x) = \nabla V(x)^\top f(x) < 0, \quad x \in D. \end{aligned} \quad (1.29)$$

*Entonces el punto de equilibrio  $x = 0$  es asintóticamente estable.*

Consulte la demostración en [81].

**Teorema 1.26** (Acotamiento final uniforme basado en Lyapunov con perturbación constante). *Sea el sistema dinámico*

$$\dot{x} = f(x), \quad f(0) = 0, \quad x \in D \subset \mathbb{R}^n, \quad (1.30)$$

donde  $f$  es localmente Lipschitz en  $x$ , uniformemente en  $t \in [0, \infty)$ . Supóngase que existe una función de Lyapunov  $V(x) \in \mathcal{C}^1$ , y constantes positivas  $c_1, c_2, c_3 > 0$ , así como una constante  $\bar{\varepsilon} > 0$ , tales que, se satisface el acotamiento cuadrático

$$c_1\|x\|^2 \leq V(x) \leq c_2\|x\|^2 \quad \forall x, \quad (1.31)$$

la derivada de  $V$  está acotada por

$$\dot{V}(x, t) \leq -c_3\|x\|^2 + \bar{\varepsilon} \quad \forall x, \quad (1.32)$$

entonces, la solución  $x(t)$  del sistema es uniformemente últimamente acotada, y se satisface

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| \leq \sqrt{\frac{c_2 \bar{\varepsilon}}{c_1 c_3}}. \quad (1.33)$$

*Demostración.* De la hipótesis sobre  $V$ , tenemos  $\dot{V}(x, t) \leq -c_3\|x\|^2 + \bar{\varepsilon}$ . Como  $V(x) \leq c_2\|x\|^2$ , entonces  $\|x\|^2 \geq \frac{1}{c_2}V(x)$ , y por lo tanto

$$\dot{V}(x, t) \leq -\frac{c_3}{c_2}V(x) + \bar{\varepsilon}, \quad (1.34)$$

definiendo  $\alpha := \frac{c_3}{c_2}$ , obtenemos  $\dot{V}(t) \leq -\alpha V(t) + \bar{\varepsilon}$ . Consideramos la ecuación auxiliar

$$\dot{w}(t) = -\alpha w(t) + \bar{\varepsilon}, \quad w(0) = V(0), \quad (1.35)$$

cuya solución exacta es  $w(t) = V(0)e^{-\alpha t} + \frac{\bar{\varepsilon}}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t})$ , por el Lema de comparación [81] se concluye que  $V(t) \leq V(0)e^{-\alpha t} + \frac{\bar{\varepsilon}}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t})$ , tomando el límite superior

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} V(t) \leq \frac{\bar{\varepsilon}}{\alpha}, \quad (1.36)$$

finalmente, usando  $V(x) \geq c_1\|x\|^2$ , se concluye que

$$\|x(t)\|^2 \leq \frac{1}{c_1}V(t) \quad \Rightarrow \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| \leq \sqrt{\frac{1}{c_1} \cdot \frac{\bar{\varepsilon}}{\alpha}} = \sqrt{\frac{c_2 \bar{\varepsilon}}{c_1 c_3}}. \quad (1.37)$$

□

**Observación 1.27** (Perturbación continua acotada). Si en lugar de una perturbación constante se tiene una función continua  $\epsilon(t)$  tal que  $\|\epsilon(t)\| \leq \bar{\varepsilon} \quad \forall t \geq 0$ , entonces el resultado del teorema sigue siendo válido con la misma cota asintótica.

**Observación 1.28** (Estabilidad práctica). *La conclusión del teorema implica que existe una constante  $\delta > 0 : \limsup_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| \leq \delta$ , lo que garantiza que el sistema es estable en forma práctica en el sentido de Lyapunov. Esto significa que las trayectorias entran y permanecen dentro de una vecindad del equilibrio cuya magnitud depende de la perturbación  $\bar{\varepsilon}$ , aunque no necesariamente converjan al origen.*

### 1.4.2. Principio de invariancia de LaSalle

Los teoremas clásicos de Lyapunov requieren que la derivada  $\dot{V}(x)$  sea negativa definida para garantizar la estabilidad asintótica. El principio de invariancia de LaSalle permite relajar esta condición, extendiendo el análisis a casos donde  $\dot{V}(x) \leq 0$ , sin ser estrictamente negativa.

**Teorema 1.29.** *Sea el sistema autónomo*

$$\dot{x} = f(x), \quad f(0) = 0, \quad x \in D \subset \mathbb{R}^n, \quad (1.38)$$

donde  $f$  es suave y sea  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  una función continuamente diferenciable tal que

- a)  $V(x) > 0, \quad \forall x \in D \setminus \{0\}, \text{ y } V(0) = 0,$
- b)  $\dot{V}(x) = \nabla V(x)^\top f(x) < 0, \quad x \in D.$

Además, existe  $\Omega_c$  un conjunto compacto e invariante para alguna constante  $c > 0$ ,

$$c) \Omega_c = \{x \in D : V(x) \leq c\},$$

entonces, toda solución inicial en  $\Omega_c$  converge al conjunto más grande invariante contenido en

$$E = \{x \in \Omega_c : \dot{V}(x) = 0\}. \quad (1.39)$$

Si el único conjunto invariante contenido en  $E$  es  $\{0\}$ , entonces el equilibrio  $x = 0$  es asintóticamente estable.

Consulte la demostración en [81].

**Observación 1.30.** *En manipuladores flexibles con controladores PD/PID, este principio permite demostrar estabilidad aún si existen modos no controlados directamente [78], siempre que la energía total disminuya monótonamente.*

### 1.4.3. Pasividad energética

La pasividad energética es una propiedad estructural que relaciona el flujo de energía entre entradas y salidas con la dinámica interna del sistema. Un sistema pasivo no puede generar energía, solo almacenarla o disiparla.

**Definición 1.31** (Sistema pasivo). [81] Sea el sistema entrada-salida

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad y = h(x), \quad (1.40)$$

con  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u, y \in \mathbb{R}^m$ , se dice que el sistema es pasivo si existe una función continua y positiva definida  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ , llamada función de almacenamiento, tal que

$$\dot{V}(x) \leq y^\top u, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.41)$$

**Teorema 1.32** (Estabilidad por pasividad energética). Considérese un sistema pasivo con función de almacenamiento  $V(x)$  y aplicando la realimentación pasiva

$$u = -Ky, \quad K > 0, \quad (1.42)$$

se obtiene

$$\dot{V}(x) \leq -y^\top Ky \leq 0, \quad (1.43)$$

si además  $y(x) = 0 \rightarrow x = 0$ , entonces el sistema es asintóticamente estable en el origen.

Consulte la demostración en [74].

**Observación 1.33.** Los sistemas lagrangianos disipativos poseen pasividad estructural. Por ejemplo, el manipulador mecánico:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + D\dot{q} = \tau, \quad (1.44)$$

es pasivo respecto a  $u = \tau$ , con energía  $V(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^\top M(q)\dot{q} + U(q)$ , y se cumple

$$\dot{V}(q, \dot{q}) = -\dot{q}^\top D\dot{q} + \dot{q}^\top \tau \leq \dot{q}^\top \tau = y^\top u, \quad (1.45)$$

esta propiedad será clave al diseñar y analizar controladores PD/PID, y es la base de múltiples esquemas de compensación [74].

**Observación 1.34.** *Este resultado conecta directamente las propiedades pasivas de sistemas mecánicos con la estabilidad de controladores PD. Será la base del análisis energético en los siguientes capítulos.*

## 1.5. Controladores Clásicos

Esta sección expone el desarrollo analítico de las estrategias de control convencionales, con énfasis en su estructura matemática y en las condiciones de estabilidad.

Los controladores PD/PID representan esquemas fundamentales de control retroalimentado en sistemas mecánicos. El diseño de estos controladores parte del análisis del error de seguimiento.

**Definición 1.35** (Problemas de regulación y seguimiento ). *Sea  $q(t) \in \mathbb{R}^n$  coordenadas generalizadas, y  $q^d(t) \in \mathbb{R}^n$  una referencia deseada, se define el error de seguimiento como*

$$e(t) = q^d(t) - q(t), \quad (1.46)$$

*y sus derivadas temporales como  $\dot{e}(t) = \dot{q}^d(t) - \dot{q}(t)$ ,  $\ddot{e}(t) = \ddot{q}^d(t) - \ddot{q}(t)$  tales que*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = q^d(t) - q(t) = 0, \quad \text{con } \dot{e}(t), \ddot{e}(t) \text{ acotadas.} \quad (1.47)$$

*En el caso particular de regulación*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = q^d, \quad \text{con } q^d = \text{cte}, \quad \dot{q}^d = 0, \quad \ddot{q}^d = 0. \quad (1.48)$$

Estas definiciones se utilizarán sistemáticamente en el análisis de estabilidad y formulación de funciones de Lyapunov en las siguientes subsecciones.

**Teorema 1.36** (Convergencia del error mediante la variable combinada). *Sea*

$$r(t) = \dot{e}(t) + \Lambda e(t), \quad (1.49)$$

*donde  $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz diagonal,  $\Lambda > 0$ . Si  $r(t) \rightarrow 0$  exponencialmente, entonces  $e(t) \rightarrow 0$  exponencialmente.*

---

*Demostración.* La dinámica de  $e(t)$  puede escribirse como un sistema lineal de primer orden

$$\dot{e}(t) = -\Lambda e(t) + r(t).$$

Si  $r(t) \rightarrow 0$  exponencialmente, entonces este sistema lineal no autónomo forzado converge exponencialmente al origen por el principio de estabilidad entrada-salida. Dado que  $\Lambda$  es estable, se concluye que  $e(t) \rightarrow 0$  exponencialmente.  $\square$

La variable combinada  $r(t)$  se utilizará en los capítulos posteriores como base para el diseño de leyes de control con estabilidad garantizada mediante funciones de Lyapunov.

**Definición 1.37.** *Sea el sistema mecánico de la forma lagrangiana*

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau, \quad (1.50)$$

*un controlador Proporcional-Derivativo se define como*

$$\tau(t) = K_p e(t) + K_d \dot{e}(t), \quad (1.51)$$

*donde  $K_p, K_d \in \mathbb{R}^{n \times n}$  son matrices simétricas definidas positivas. Considerando la variable combinada, se tiene*

$$\tau(t) = K_r r(t) = K_r \dot{e}(t) + K_r \Lambda e(t) = K_d \dot{e}(t) + K_p e(t), \quad (1.52)$$

*con  $K_r \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $K_d = K_r$ ,  $K_p = K_r \Lambda$ .*

**Teorema 1.38** (Estabilidad bajo control PD). *Considérese el sistema Lagrangiano*

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau, \quad (1.53)$$

*y aplíquese el control PD*

$$\tau(t) = K_r r, \quad (1.54)$$

*Supóngase que  $M(q) > 0$ ,  $K_r > 0$ , y que  $C(q, \dot{q})$  satisface la propiedad de cancelación pasiva, entonces es estable en el sentido de Lyapunov.*

*Demostración.* Considérese la función candidata de Lyapunov

$$V(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} r^\top M r > 0, \quad (1.55)$$

cuya derivada temporal es

$$\dot{V}(q, \dot{q}) = r^\top M \dot{r} + \frac{1}{2} r^\top \dot{M} r, \quad (1.56)$$

sustituyendo la dinámica del sistema con el control PD

$$M \dot{r} = M(\ddot{e} + \Lambda \dot{e}) = M(\ddot{q}^d - \ddot{q} + \Lambda \dot{e}) = M(\ddot{q}^d + \Lambda \dot{e}) - M \ddot{q} = M(\ddot{q}^d + \Lambda \dot{e}) + C \dot{q} + G - \tau, \quad (1.57)$$

se obtiene

$$\dot{V}(q, \dot{q}) = r^\top (M(\ddot{q}^d + \Lambda \dot{e}) + C \dot{q} + G - \tau) + \frac{1}{2} r^\top \dot{M} r, \quad (1.58)$$

considerando que  $C \dot{q} = -C r + C(\dot{q}^d + \Lambda e)$ , entonces

$$\dot{V}(q, \dot{q}) = -r^\top K_r r + r^\top (M(\ddot{q}^d + \Lambda \dot{e}) + C(\dot{q}^d + \Lambda e) + G), \quad (1.59)$$

definiendo  $d = (M(\ddot{q}^d + \Lambda \dot{e}) + C(\dot{q}^d + \Lambda e) + G)$ , el cual es acotado si  $q^d$  es suave y acotado, entonces

$$\dot{V}(q, \dot{q}) \leq -r^\top K_r r + r^\top d, \quad (1.60)$$

considerando la siguiente desigualdad de Young,

$$r^\top d \leq r^\top \bar{\Lambda} r + d^\top \bar{\Lambda}^{-1} d \leq r^\top \bar{\Lambda} r + \bar{d}, \quad (1.61)$$

considerando lo anterior entonces

$$\dot{V}(q, \dot{q}) \leq -r^\top (K_r - \bar{\Lambda}) r + \bar{d}, \quad (1.62)$$

cuando  $K_r > \bar{\Lambda}$  entonces  $\|r\|_{(K_r - \bar{\Lambda})}^2 \rightarrow \bar{d}$  se concluye que el sistema estable en el sentido de Lyapunov, para la región  $c(\bar{d})$ .  $\square$

**Observación 1.39** (Definición explícita de  $c(\bar{d})$ ). *En la cota obtenida*

$$\dot{V} \leq -\|r\|_{K_r - \bar{\Lambda}}^2 + \bar{d}, \quad (1.63)$$

si  $K_r > \bar{\Lambda}$  se deduce una cota última para  $r$ :

$$\|r(t)\| \leq \rho(\bar{d}) := \sqrt{\frac{\bar{d}}{\lambda_{\min}(K_r - \bar{\Lambda})}}. \quad (1.64)$$

Con ello, la región mencionada como  $c(\bar{d})$  queda definida como

$$c(\bar{d}) := \{(q, \dot{q}) : \|r(q, \dot{q})\| \leq \rho(\bar{d})\}. \quad (1.65)$$

Nótese que si  $d \equiv 0$  entonces  $\bar{d} = 0$  y  $\rho(\bar{d}) = 0$ , por lo que  $c(\bar{d})$  colapsa al equilibrio  $r = 0$ .

**Observación 1.40** (Condición sobre  $\bar{d}$  para que  $c(\bar{d})$  exista). Para que la región acotada  $c(\bar{d})$  esté bien definida, deben cumplirse simultáneamente la ganancia estricta positiva  $K_r - \bar{\Lambda} > 0 \Rightarrow \lambda_{\min}(K_r - \bar{\Lambda}) > 0$ ; y la perturbación finita y acotada  $0 \leq \bar{d} < \infty$ . De esta forma, la cota  $\|r(t)\| \leq \sqrt{\frac{\bar{d}}{\lambda_{\min}(K_r - \bar{\Lambda})}}$  es válida. Cuanto menor sea  $\bar{d}$ , más pequeña será la región  $c(\bar{d})$ . En el caso ideal  $\bar{d} = 0$ , la región se reduce al punto de equilibrio  $r = 0$ .

**Definición 1.41** (Controlador PID en forma extendida). Sea el sistema Lagrangiano

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau, \quad (1.66)$$

y sea  $e(t) \in \mathbb{R}^n$  el error de seguimiento. Se define el controlador Proporcional-Integral-Derivativo en su forma extendida como

$$\begin{cases} \tau(t) &= K_p e(t) + K_d \dot{e}(t) + K_i z(t), \\ \dot{z} &= e(t), \end{cases} \quad (1.67)$$

donde  $K_p, K_d, K_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  son matrices simétricas definidas positivas, y  $z(t) \in \mathbb{R}^n$  es el estado integrador.

**Teorema 1.42** (Estabilidad bajo control PID). Sea el sistema Lagrangiano

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau, \quad (1.68)$$

con  $e(t)$  como el error de seguimiento. Sea el controlador PID definido por

$$\begin{cases} \tau(t) &= K_p e(t) + K_d \dot{e}(t) + K_i z(t), \\ \dot{z} &= e(t) \end{cases}, \quad (1.69)$$

con  $K_p, K_d, K_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  definidas positivas. Supóngase además que  $M(q) > 0$ ,  $C(q, \dot{q})$  cumple la condición de antisimetría, entonces es estable en el sentido de Lyapunov.



*Demostración.* Sea la ley de control tipo PID sin compensación  $\tau = K_p e + K_d \dot{e} + K_i z$ ,  $\dot{z} = e$ , se propone la siguiente función candidata de Lyapunov

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \dot{e}^\top M \dot{e} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^\top & z^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_p & \gamma K_i \\ \gamma K_i & K_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ z \end{bmatrix}, \\ &= \frac{1}{2} \dot{e}^\top M \dot{e} + \frac{1}{2} e^\top K_p e + \gamma e^\top K_i z + \frac{1}{2} z^\top K_i z, \end{aligned} \quad (1.70)$$

la derivada temporal de  $V$  a lo largo de las trayectorias del sistema es

$$\dot{V} = \dot{e}^\top M \ddot{e} + \frac{1}{2} \dot{e}^\top \dot{M} \dot{e} + \dot{e}^\top K_p e + \gamma \dot{e}^\top K_i z + \gamma e^\top K_i \dot{z} + z^\top K_i \dot{z}. \quad (1.71)$$

Considerando de la dinámica del sistema y la ley de control, se tiene

$$M \ddot{e} = M \ddot{q}^d - K_p e - K_d \dot{e} - K_i z + C \dot{q} + G, \quad (1.72)$$

sustituyendo en  $\dot{V}$ , se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{e}^\top (M \ddot{q}^d + C \dot{q} + G - K_p e - K_d \dot{e} - K_i z) \\ &\quad + \frac{1}{2} \dot{e}^\top \dot{M} \dot{e} + \dot{e}^\top K_p e + \gamma \dot{e}^\top K_i z + \gamma e^\top K_i \dot{z} + z^\top K_i \dot{z}. \end{aligned} \quad (1.73)$$

Agrupando los términos y simplificando los que se cancelan, se obtiene

$$\dot{V} = -\dot{e}^\top K_d \dot{e} + \dot{e}^\top (M \ddot{q}^d + C \dot{q}^d + G) - (1 - \gamma) \dot{e}^\top K_i z + \gamma e^\top K_i e + z^\top K_i e, \quad (1.74)$$

donde se define el término auxiliar  $d := \dot{e}^\top (M \ddot{q}^d + C \dot{q}^d + G)$ , esto es

$$\dot{V} = -\dot{e}^\top K_d \dot{e} + \dot{e}^\top d - (1 - \gamma) \dot{e}^\top K_i z + \gamma e^\top K_i e + z^\top K_i e, \quad (1.75)$$

aplicando desigualdades de Young

$$\dot{V} \leq -\dot{e}^\top (K_d - \bar{\Lambda}) \dot{e} + \bar{d} + \frac{1 - \gamma}{2} \varepsilon_1 \|\dot{e}\|_{K_i}^2 + \left( \gamma + \frac{\varepsilon_2}{2} \right) \|e\|_{K_i}^2 + \left( \frac{1}{2\varepsilon_2} + \frac{1 - \gamma}{2\varepsilon_1} \right) \|z\|_{K_i}^2, \quad (1.76)$$

con  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ ,  $\|x\|_{K_i}^2 := x^\top K_i x$ . Definiendo  $\epsilon := \bar{d} + \frac{1 - \gamma}{2} \varepsilon_1 \|\dot{e}\|_{K_i}^2 + \left( \gamma + \frac{\varepsilon_2}{2} \right) \|e\|_{K_i}^2 + \left( \frac{1}{2\varepsilon_2} + \frac{1 - \gamma}{2\varepsilon_1} \right) \|z\|_{K_i}^2$ , además suponemos a  $\epsilon$  acotado, es decir  $\epsilon < \bar{\epsilon}$ , por lo tanto

$$\dot{V} \leq -\dot{e}^\top (K_d - \bar{\Lambda}) \dot{e} + \bar{\epsilon}, \quad (1.77)$$

podemos concluir que el sistema es estable en el sentido de Lyapunov, entorno a una región dada por  $c(\bar{\epsilon})$ .  $\square$

### 1.5.1. Compensación basada en modelo

**Definición 1.43** (Compensación dinámica estructurada). *Sea un sistema lagrangiano de la forma*

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau, \quad (1.78)$$

*la compensación basada en modelo consiste en diseñar una ley de control que cancele parcial o totalmente los términos estructurales conocidos del modelo dinámico, típicamente mediante*

$$\tau = M(q)\nu + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q), \quad (1.79)$$

*donde  $\nu$  es una nueva entrada auxiliar (comando aceleración).*

Esta estructura se conoce como compensación dinámica o linealización dinámica parcial, y transforma la dinámica en

$$\ddot{q} = \nu, \quad (1.80)$$

permitiendo aplicar técnicas lineales sobre la variable  $\nu$ . Es base para estrategias como control por retroalimentación lineal, planificación con feedforward o control inverso.

**Observación 1.44** (Limitaciones prácticas). *Aunque esta técnica mejora el desempeño del sistema y facilita el diseño de lazo cerrado, su aplicación efectiva depende del conocimiento exacto de  $M(q)$ ,  $C(q, \dot{q})$ ,  $G(q)$  y disponibilidad de sensores para  $q, \dot{q}$ . En particular, en manipuladores subactuados la compensación estructural puede inducir inestabilidad.*

**Ejemplo 1.45** (Controlador PD con compensación de gravedad). *Considere el sistema lagrangiano*

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau, \quad (1.81)$$

*y supóngase que se desea llevar el sistema al equilibrio  $q = 0$ . La ley de control propuesta es*

$$\tau = K_p e + K_d \dot{e} + G(q), \quad (1.82)$$

*donde  $K_p, K_d \in \mathbb{R}^{n \times n}$  son matrices definidas positivas.*

*Demostración.* Se propone una función candidata de Lyapunov, tal que

$$V = \frac{1}{2} \dot{e}^\top M(q) \dot{e} + \frac{1}{2} e^\top K_p e, \quad (1.83)$$

cuya derivada es

$$\dot{V} = -\dot{e}^\top K_p \dot{e} \leq 0. \quad (1.84)$$

Dado que  $V$  es positiva definida, radialmente no acotada, y  $\dot{V} \leq 0$ , por el principio de LaSalle garantiza que  $(e, \dot{e}) \rightarrow 0$ ; el sistema es asintóticamente estable bajo compensación por modelo.

□

**Observación 1.46.** *Este resultado es extendible al caso de seguimiento con referencia  $q^d$  usando la variable combinada  $r = \dot{e} + \Lambda e$ , y ajustando la ley de control para incorporar términos de  $M(q)\ddot{q}^d + C(q, \dot{q})\dot{q}^d$ .*

La compensación basada en modelo es especialmente útil cuando se dispone de un modelo preciso, y sienta las bases para estrategias avanzadas de control.

## 1.6. Redes neuronales en el control de sistemas dinámicos

Las redes neuronales artificiales (RNA) han emergido como herramientas funcionales en el control no lineal [83], debido a su capacidad de aproximación universal y su implementación adaptable en tiempo real. En control adaptativo no lineal, se insertan estas aproximaciones dentro de la ley de control, en las siguientes subsecciones se analizan formalmente las arquitecturas utilizadas, su capacidad de aproximación teórica y los mecanismos de aprendizaje que permiten la adaptación continua del sistema.

### 1.6.1. Arquitecturas

Las arquitecturas de redes neuronales más utilizadas en control de sistemas dinámicos son aquellas que permiten una representación funcional estable y eficiente en tiempo real, todas comparten una estructura funcional explícita, pero difieren en sus mecanismos de entrenamiento y adaptabilidad.

**Definición 1.47** (Perceptrón multicapa). *Una red neuronal feedforward de una capa oculta con funciones de activación no lineales y una salida lineal tiene la forma*

$$\hat{f}(x; \vartheta) = \sum_{i=1}^{N_k} \hat{W}_i \Gamma(v_i^\top x + b_i), \quad (1.85)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$  es el vector de entrada,  $\vartheta = \{\hat{W}_i, v_i, b_i\}_{i=1}^{N_k}$  son los parámetros adaptables (pesos y sesgos),  $\Gamma(\cdot)$  es una función de activación no lineal (sigmoide, tangente hiperbólica, ReLU, etc.),  $N_k \in \mathbb{N}$  es el número de neuronas ocultas.

Esta arquitectura es universalmente capaz de aproximar funciones continuas sobre compactos de  $\mathbb{R}^n$  [84]

**Definición 1.48** (Extreme Learning Machine - ELM). *Una ELM tiene la misma forma funcional que un MLP con una sola capa oculta, pero los parámetros  $\{v_i, b_i\}$  son fijados aleatoriamente y no se actualizan. Solo se ajustan los pesos de salida  $\{\hat{W}_i\}$  mediante una solución cerrada tipo mínimos cuadrados*

$$f = \hat{W}^\top \Gamma(x), \quad \hat{W} = (\Gamma(x)^\top \Gamma(x))^{-1} \Gamma(x)^\top f, \quad (1.86)$$

donde es  $\Gamma(x)$  el vector de activaciones ocultas evaluado en la entrada  $x$ .

Las ELM permiten entrenamiento extremadamente rápido sin iteraciones, a costa de reducir la capacidad de adaptación en línea [52].

### 1.6.2. Capacidad de aproximación

Una de las propiedades fundamentales que justifica el uso de redes neuronales en control no lineal es su capacidad de aproximar funciones continuas con precisión arbitraria.

**Teorema 1.49** (Aproximación universal de redes feedforward). *Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua sobre un compacto  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Entonces, para todo  $\epsilon > 0$ , existe una red neuronal feedforward de una sola capa oculta de la forma*

$$\hat{f}(x; \vartheta) = \sum_{i=1}^{N_k} \hat{W}_i \Gamma(v_i^\top x + b_i), \quad (1.87)$$

tal que

$$\sup_{x \in \mathcal{D}} |f(x) - \hat{f}(x; \vartheta)| < \epsilon, \quad (1.88)$$

donde  $\Gamma(\cdot) \in \mathcal{C}^1$  es una función de activación no lineal, sigmoideal y acotada, y  $\vartheta = \{\hat{W}_i, v_i, b_i\}_{i=1}^{N_k}$  es el conjunto de parámetros de la red.

Consulte la demostración en [31]

Este resultado, conocido como el teorema del aproximador universal, fue demostrado formalmente por Cybenko [31], y extendido para clases más generales de funciones por Funahashi [70] y Barron [32]. En términos funcionales, implica que el conjunto de funciones generadas por una red neuronal simple es denso en  $\mathcal{C}(D)$  bajo la norma uniforme.

**Lema 1.50** (Densidad funcional de redes neuronales). *Sea  $\mathcal{H} = \text{span}\{\Gamma(v_i^\top x + b)\}$  con  $v \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}$ , y  $\Gamma(\cdot)$  continua y no polinómica. Entonces,  $\mathcal{H}$  es denso en  $\mathcal{C}(D)$  con respecto a la norma suprema.*

Véase la prueba en [33]

**Observación 1.51.** *La propiedad de densidad garantiza que cualquier función continua relevante para el control —ya sea una ley de control ideal, una función de compensación dinámica, una fuerza perturbadora o una señal de referencia no modelada— puede ser aproximada arbitrariamente bien por una red neuronal con una única capa oculta.*

Esto implica que, desde el punto de vista funcional, el uso de redes neuronales en control no impone restricciones sobre la clase de funciones que pueden ser compensadas o aprendidas. La única limitación práctica se encuentra en el mecanismo de entrenamiento, la capacidad de adaptación y la dimensión del espacio de parámetros. Aunque el teorema garantiza la existencia de una red que aproxima una función dada, no proporciona una cota explícita del error en términos de  $N_k$ , ni del conjunto óptimo de parámetros  $\vartheta$ .

**Observación 1.52.** *En un diseño de control adaptativo, la red neuronal actúa como un estimador funcional en tiempo real. Esta propiedad permite interpretar el uso de redes neuronales como una extensión funcional del principio de certeza equivalente [85], y ha sido aplicada con éxito en manipuladores no lineales [75].*

### 1.6.3. Leyes de aprendizaje

En control adaptativo basado en redes neuronales, el proceso de aprendizaje consiste en actualizar en línea los parámetros [86]  $\vartheta = \{\hat{W}_i, v_i, b_i\}_{i=1}^{N_k}$ , con el objetivo de minimizar el error entre la salida deseada  $f(x)$  y la salida aproximada  $\hat{f}(x; \vartheta)$ . Este ajuste se realiza mediante reglas de aprendizaje que pueden ser continuas o discretas, y cuya estabilidad puede evaluarse formalmente usando funciones de Lyapunov.

**Definición 1.53** (Error funcional de aproximación). *Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función desconocida, y sea  $\hat{f}(x; \vartheta)$  una red neuronal, el error funcional se define como*

$$e(x; \vartheta) = f(x) - \hat{f}(x; \vartheta), \quad (1.89)$$

y el error cuadrático instantáneo como

$$E(\vartheta) = \frac{1}{2} |e(x; \vartheta)|^2. \quad (1.90)$$

**Ley de aprendizaje basada en gradiente** El objetivo es minimizar la función de error  $E(\vartheta)$ , por lo que se aplica el método del gradiente descendente en tiempo continuo, cuya regla de ajuste es

$$\min_{\vartheta} E(\vartheta) \rightarrow \dot{\vartheta} = -\eta \nabla_{\vartheta} E(\vartheta), \quad (1.91)$$

donde  $\eta > 0$  El signo negativo indica que el ajuste se realiza en la dirección de mayor decremento de  $E(\vartheta)$ . Para el caso de un MLP, las expresiones de gradiente para los parámetros individuales son

$$\dot{\hat{W}}_i = \eta e(x) \Gamma'(v_i^\top x + b), \quad \dot{v}_i = \eta e(x) \Gamma'(v_i^\top x + b) x, \quad \dot{b}_i = \eta e(x) \Gamma'(v_i^\top x + b). \quad (1.92)$$

Revisar apéndice Apéndice A

**Observación 1.54** (Aprendizaje en ELM). *En ELM, los parámetros internos  $v_i, b_i$  se fijan aleatoriamente. El aprendizaje se reduce a resolver por mínimos cuadrados los pesos de salida*

$$\hat{W} = (\Gamma(x)^\top \Gamma(x))^{-1} \Gamma(x)^\top f, \quad (1.93)$$

donde  $\Gamma(x) \in \mathbb{R}^{N \times N_k}$  es la matriz de activaciones ocultas evaluadas,  $f$  es el vector de salidas deseadas. Este tipo de aprendizaje rápido es útil para identificación de funciones estáticas o modelos inversos.

Revisar apéndice Apéndice A

**Definición 1.55** (Error de modelado en redes neuronales). [75, 86] Sea un sistema no lineal  $y = f(x)$  y una red neuronal con salida  $\hat{y} = \hat{f}(x; \vartheta) = \hat{W}^\top \Gamma(x)$ , si el sistema cumple la condición de correspondencia exacta, esto es

$$y = W^{\star\top} \Gamma(x), \quad (1.94)$$

entonces el error de aproximación se expresa como

$$e = \hat{y} - y = \tilde{W}^\top \Gamma(x), \text{ donde } \tilde{W} = \hat{W} - W^* \quad (1.95)$$

.

**Teorema 1.56** (Aprendizaje estable continuo, lineal en parámetros). Considérese un sistema cuya salida satisface la condición de matching

$$y(t) = W^* \Gamma(x(t)), \quad (1.96)$$

donde  $\Gamma(x(t)) \in \mathbb{R}^m$  es un vector de regresores y  $W^* \in \mathbb{R}^{p \times m}$  es una matriz constante (desconocida). Sea el estimador

$$\hat{y}(t) = \hat{W}^\top \Gamma(x(t)), \quad (1.97)$$

con ley adaptativa

$$\dot{\hat{W}} = -K_\Gamma e(t) \Gamma^\top(x(t)), \quad e(t) := \hat{y}(t) - y(t), \quad (1.98)$$

donde  $K_\Gamma = K_\Gamma^\top > 0$ .

Supóngase que  $\Gamma(x(t))$  es acotado y, para la convergencia, que  $\dot{\Gamma}(x(t))$  es acotado. Entonces:

(a) El sistema adaptativo es estable en el sentido de Lyapunov; en particular,

$$\dot{V}(t) = -\|e(t)\|^2 \leq 0, \quad (1.99)$$

$$\text{con } V(t) = \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ \tilde{W}^\top \Gamma^{-1} \tilde{W} \right\} \text{ y } \tilde{W} := \hat{W} - W^*.$$

(b) Si además  $\dot{\Gamma}$  es acotado, entonces  $e(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

(c) Si, adicionalmente,  $\Gamma$  es persistentemente excitante (PE), entonces  $\tilde{W}(t) \rightarrow 0$ .

*Demostración.* Defina  $\tilde{W} = \hat{W} - W^*$ . Nótese que

$$e(t) = \hat{y}(t) - y(t) = \tilde{W} \Gamma(x(t)). \quad (1.100)$$

Considérese el candidato de Lyapunov

$$V(t) = \frac{1}{2} \text{tr} \{ \tilde{W}^\top K_\Gamma^{-1} \tilde{W} \} = \frac{1}{2} \|\tilde{W}\|_{K_\Gamma^{-1}}^2 > 0 \text{ si } \tilde{W} \neq 0. \quad (1.101)$$

Su derivada a lo largo de las trayectorias es

$$\dot{V} = \text{tr} \{ \tilde{W}^\top K_\Gamma^{-1} \dot{\tilde{W}} \} = \text{tr} \{ \tilde{W}^\top K_\Gamma^{-1} (-K_\Gamma e \Gamma^\top) \} = -\text{tr} \{ \tilde{W}^\top e \Gamma^\top \}. \quad (1.102)$$

Como  $e = \tilde{W} \Gamma$ , se obtiene

$$\text{tr} \{ \tilde{W}^\top e \Gamma^\top \} = \text{tr} \{ \Gamma^\top \tilde{W}^\top e \} = \text{tr} \{ e^\top e \} = \|e\|^2, \quad (1.103)$$

y por tanto

$$\dot{V}(t) = -\|e\|^2 \leq 0. \quad (1.104)$$

De aquí,  $V(t)$  es no creciente,  $\tilde{W}$  es acotado y  $e \in L_2$ . Para la convergencia, derivemos  $e$

$$\dot{e} = \dot{\hat{W}} \Gamma + \hat{W} \dot{\Gamma} - W^* \dot{\Gamma} = \dot{\hat{W}} \Gamma + \tilde{W} \dot{\Gamma} = -K_\Gamma e \|\Gamma\|^2 + \tilde{W} \dot{\Gamma}. \quad (1.105)$$

Bajo la acotación de  $\Gamma$ ,  $\dot{\Gamma}$  y  $\tilde{W}$ , se concluye que  $\dot{e}$  es acotado, de modo que  $e$  es uniformemente continuo. Como además  $e \in L_2 \cap L_\infty$ , por el Lema de Barbalat se sigue que  $e \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Finalmente, si  $\Gamma$  es PE, la relación  $e = \tilde{W} \Gamma$  y  $e \rightarrow 0$  implican  $\tilde{W} \rightarrow 0$ .  $\square$

En muchos problemas prácticos, la red debe aproximar una salida principal deseada, pero al hacerlo puede afectar otra magnitud cuyo valor también importa. Por ejemplo, el ajuste de la salida principal  $\hat{y}$  puede inducir una componente no deseada  $\hat{b}$ . Para capturar esta situación, se introduce el concepto de restricción sobre una salida auxiliar que idealmente debería anularse o permanecer acotada.



**Definición 1.57** (Restricción funcional suave). *En redes neuronales, se dice que se impone una restricción funcional suave sobre una salida cuando la condición deseada se incorpora a la función de costo instantánea mediante un término de penalización adicional. Añadir penalizaciones a la función de costo es el mecanismo estándar de regularización y objetivos auxiliares en aprendizaje profundo [87]. Al integrar o promediar en el tiempo, la función de costo agregada  $E$  hereda dicha penalización.*

**Observación 1.58.** “Suave”, es una condición que no se impone directamente como una regla estricta -dura, sino que se agrega como un término de penalización en la función de costo. En aprendizaje multitarea, la función de costo instantánea compuesta se construye como suma-suma ponderada- de términos por salida/tarea; por ello, un término  $\lambda \hat{b}^2$  se interpreta como objetivo auxiliar integrado [88, 87]. El parámetro  $\lambda \geq 0$  gestiona la relación entre el error principal y la supresión de  $\hat{b}$ .

**Definición 1.59** (Salida auxiliar lineal). *A partir de la salida completa  $\hat{f}(x; \vartheta) \in \mathbb{R}^p$ , definimos la salida principal*

$$\hat{a}(x; \vartheta) = e_1^\top \hat{f}(x; \vartheta), \quad (1.106)$$

donde  $e_1^\top = [1 \ 0 \ \cdots \ 0] \in \mathbb{R}^{1 \times p}$ , y la salida auxiliar

$$\hat{b}(x; \vartheta) = C \hat{f}(x; \vartheta), \quad (1.107)$$

con  $C \in \mathbb{R}^{1 \times p}$  conocida.

**Definición 1.60** (Problema de optimización con restricción). *El problema con restricción dura es*

$$\min_{\vartheta} E(\vartheta; x) \quad \text{sujeto a} \quad \hat{b}(x; \vartheta) = 0. \quad (1.108)$$

esto es, se define la función de costo instantánea penalizada

$$E_T(\vartheta; x) = E(\vartheta; x) + \lambda (\hat{b}(x; \vartheta))^2, \quad \lambda \geq 0, \quad (1.109)$$

y la función de costo agregada en tiempo continuo

$$J_T(\vartheta) = \int_0^T E_T(\vartheta; x(\tau)) d\tau. \quad (1.110)$$

que satisface  $J_T(\vartheta) = \frac{1}{2} \int_0^T \|e\|^2 d\tau + \int_0^T \lambda \hat{b}^2 d\tau$ , en línea con la construcción por suma ponderada de objetivos en aprendizaje multitarea [87, 88].

En aprendizaje multitarea, se combinan objetivos de varias salidas en una única función de costo por suma ponderada, con pesos fijos o dinámicos [88]. Para este caso, la salida auxiliar induce el término  $\lambda \hat{b}^2$  que pondera el compromiso entre seguimiento principal y supresión de la salida auxiliar.

**Teorema 1.61** (Aprendizaje estable continuo con penalización auxiliar). *Sea  $\Gamma(x(t)) \in \mathbb{R}^m$  acotada, con  $\dot{\Gamma}(x(t))$  acotada. Considérese*

$$\hat{y}(t) = \hat{W}(t) \Gamma(x(t)) \in \mathbb{R}^p, \quad \hat{a}(t) = e_1^\top \hat{y}(t), \quad \hat{b}(t) = C \hat{y}(t), \quad (1.111)$$

y defínase  $r(t) = [a_d(t) \ 0]^\top$ ,  $\zeta(t) = [\hat{a}(t) - a_d(t) \ \hat{b}(t)]^\top$ ,  $Q = \begin{bmatrix} e_1^\top \\ C \end{bmatrix}$  y  $D = \text{diag}(1, \lambda)$  con  $\lambda \geq 0$ . con ley de aprendizaje

$$\dot{\hat{W}} = -K Q^\top D \zeta(t) \Gamma^\top(x(t)), \quad K = K^\top > 0, \quad (1.112)$$

garantiza:

1. Estabilidad de Lyapunov con candidato  $V = \frac{1}{2} \text{tr}\{\tilde{W}^\top K^{-1} \tilde{W}\}$ ,  $\tilde{W} = \hat{W} - W^*$  para un  $W^*$  compatible, y

$$\dot{V}(t) = -(\hat{a}(t) - a_d(t))^2 - \lambda \hat{b}(t)^2 \leq 0. \quad (1.113)$$

2. Si  $\dot{r}(t)$  es acotada, entonces  $\zeta(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ ; en particular,  $\hat{a}(t) \rightarrow a_d(t)$  y  $\hat{b}(t) \rightarrow 0$ .

*Demostración.* Por definición,

$$\zeta(t) = Q \hat{W} \Gamma - r = Q(\hat{W} - W^*) \Gamma = Q \tilde{W} \Gamma. \quad (1.114)$$

considerando la función candidato de Lyapunov,

$$V(t) = \frac{1}{2} \text{tr}\{\tilde{W}^\top K^{-1} \tilde{W}\} > 0 \text{ si } \tilde{W} \neq 0. \quad (1.115)$$

Derivando la función de Lyapunov, considerando además al ley de aprendizaje

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &= \text{tr}\{\tilde{W}^\top K^{-1} \dot{\tilde{W}}\} = \text{tr}\{\tilde{W}^\top K^{-1} (-KQ^\top D \zeta \Gamma^\top)\} \\
 &= -\text{tr}\{\tilde{W}^\top Q^\top D \zeta \Gamma^\top\} = -\text{tr}\{D \zeta \Gamma^\top \tilde{W}^\top Q^\top\} \\
 &= -\text{tr}\{D \zeta (Q \tilde{W} \Gamma)\} = -\text{tr}\{D \zeta \zeta^\top\} = -\zeta^\top D \zeta,
 \end{aligned} \tag{1.116}$$

es decir,

$$\dot{V}(t) = -(\hat{a}(t) - a_d(t))^2 - \lambda \hat{b}(t)^2 \leq 0, \tag{1.117}$$

lo que prueba (1). En particular,  $\tilde{W}$  es acotado y  $\zeta \in L_2 \cap L_\infty$ . Además, derivando  $\zeta$ ,

$$\begin{aligned}
 \dot{\zeta} &= Q \dot{\tilde{W}} \Gamma + Q \tilde{W} \dot{\Gamma} - \dot{r} \\
 &= Q \dot{\tilde{W}} \Gamma + Q \tilde{W} \dot{\Gamma} - \dot{r}.
 \end{aligned} \tag{1.118}$$

Bajo las hipótesis,  $\Gamma$ ,  $\dot{\Gamma}$ ,  $\tilde{W}$  y  $\dot{r}$  son acotados, por lo que  $\dot{\zeta}$  es acotada y  $\zeta$  es uniformemente continua. Como además  $\zeta \in L_2$ , por el Lema de Barbalat se obtiene  $\zeta(t) \rightarrow 0$ , esto es,  $\hat{a}(t) \rightarrow a_d(t)$  y  $\hat{b}(t) \rightarrow 0$ , lo que prueba (2).  $\square$

Este esquema es ventajoso para el problema del presente trabajo, la tarea seguimiento induce vibraciones, incluir la penalización  $\lambda \hat{b}^2$  en la función de costo instantánea introduce un vector de error compuesto  $\zeta = [\hat{a} - a_d \ \hat{b}]^\top$  y una métrica  $D = \text{diag}(1, \lambda)$ . En la prueba por Lyapunov, esta elección hace que la derivada sea

$$\dot{V} = -\zeta^\top D \zeta = -(\hat{a} - a_d)^2 - \lambda \hat{b}^2 \leq 0, \tag{1.119}$$

de modo que la penalización no compromete estabilidad; por el contrario, aumenta la disipación en la componente auxiliar. Aunque el objetivo de la tesis es compensar dinámicas no modeladas, matemáticamente esta arquitectura es coherente con dicho objetivo, al redefinir el error a un vector compuesto y ponderado, los resultados de estabilidad y convergencia son equivalentes bajo las mismas hipótesis de acotación [87, 88].

## 1.7. Conclusión del capítulo

Este capítulo establece las bases teóricas de este trabajo. En primer lugar, se clasificaron los manipuladores flexibles —como los enlaces elásticos y las juntas flexibles— y se presentaron sus modelos energéticos mediante el uso de Lagrange y la separación modal. Posteriormente, se definió el marco de estabilidad no lineal a través de las funciones de Lyapunov y se introdujeron los controladores PD/PID, señalando sus limitaciones en sistemas subactuados. Finalmente, se expusieron los fundamentos matemáticos de las redes neuronales aplicadas al control, destacando su capacidad para aproximar dinámicas no modeladas.

---

## CAPÍTULO 2

# Modelado de manipuladores con elasticidad estructural

En este capítulo se desarrolla el modelado dinámico de manipuladores robóticos que presentan elasticidad estructural, se consideran tres configuraciones: elasticidad concentrada en la junta (caso A), elasticidad distribuida en el enlace (caso B), y una combinación de ambas (caso C). Cada configuración es modelada mediante la formulación Lagrangiana, derivando expresiones dinámicas que respetan las propiedades estructurales del sistema y son aptas para análisis de estabilidad y síntesis de controladores.

### 2.1. Consideraciones para el modelado

El sistema mecánico se modela como un conjunto de cuerpos rígidos unidos por actuadores rotacionales, con grados de libertad generalizados  $q \in \mathbb{R}^n$ . En presencia de elasticidad, las coordenadas se separan en dos conjuntos  $\theta \in \mathbb{R}^m$  posiciones de los motores (coordenadas actuadas),  $\delta \in \mathbb{R}^{n-m}$  posiciones efectivas de los enlaces o articulaciones (coordenadas físicas del manipulador). La elasticidad se modela mediante acoplamientos tipo resorte, lo cual introduce variables internas como  $\alpha = \delta - \theta$  que representan deformaciones elásticas relativas. Las hipótesis adoptadas para todos los casos son:

**Hipótesis 2.1.** *Las fuentes de elasticidad se representan como resortes lineales de rigidez constante  $K_s$ , sin fricción interna ni histéresis.*

**Hipótesis 2.2.** *No se considera disipación energética, excepto la inducida por el control activo. Las únicas fuerzas conservativas provienen de la gravedad y los elementos elásticos.*

**Hipótesis 2.3.** *El sistema es subactuado, el número de entradas  $m$  es estrictamente menor o igual al número total de coordenadas generalizadas  $n$ .*

La energía total del sistema está compuesta por tres contribuciones fundamentales: la energía cinética que abarca los términos asociados a las masas del motor, de los enlaces y los posibles acoplamientos entre ellos; la energía potencial gravitacional, que depende de la configuración espacial del manipulador; y la energía elástica, que se almacena como resultado de las deformaciones relativas entre los distintos elementos del sistema.

Con esta estructura, se procederá a desarrollar los modelos dinámicos particulares para cada caso en las siguientes secciones.

## 2.2. Caso A: manipulador con junta flexible

Sea el siguiente sistema de la figura 2.1, donde  $\theta$  es el ángulo del rotor del motor,  $\alpha$  el ángulo del enlace respecto a  $\theta$ ,  $\delta$  posición angular del brazo,  $M$  inercia del enlace (centro de masa),  $J$  inercia del motor,  $K_s$  constante de rigidez torsional de la junta,  $m$  masa del enlace,  $l$  distancia desde la base al centro de masa,  $g$  aceleración de la gravedad,  $\tau$  par aplicado en la base.

### 2.2.1. Ecuaciones de Euler—Lagrange

A continuación se describen los términos de energía cinética y potencial del sistema.

**Energía cinética del sistema**

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}M\dot{\delta}^2. \quad (2.1)$$

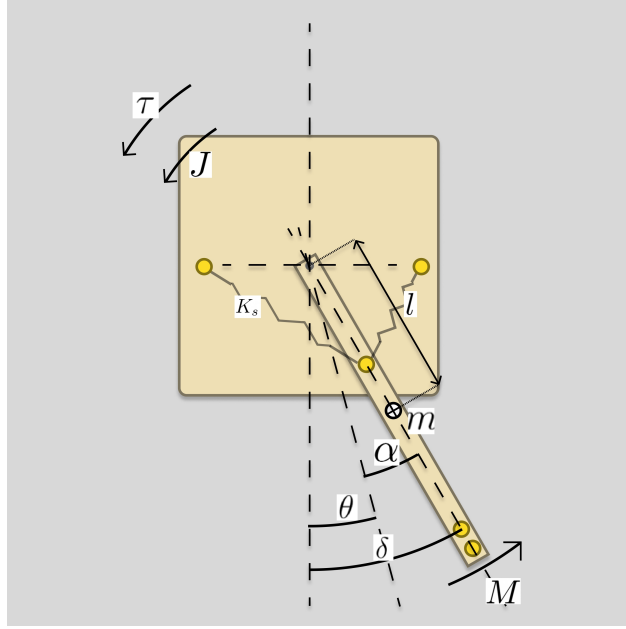


Figura 2.1: Diagrama de cuerpo libre de un manipulador con junta flexible

### Energía potencial del sistema

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2}K_s(\delta - \theta)^2 - mgl_c \cos(\delta) = \frac{1}{2}K_s\alpha^2 - mgl_c \cos(\delta). \quad (2.2)$$

### Función Lagrangiana

$$\mathcal{L}(\theta, \delta, \dot{\theta}, \dot{\delta}) = \mathcal{T} - \mathcal{V} = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}M\dot{\delta}^2 - \frac{1}{2}K_s(\delta - \theta)^2 + mgl_c \cos(\delta). \quad (2.3)$$

### 2.2.2. Ecuaciones de Movimiento

Aplicando la ecuación de Euler–Lagrange a cada conjunto de coordenadas, se obtiene

Para  $\theta$

$$J\ddot{\theta} - K_s(\delta - \theta) = \tau. \quad (2.4)$$

Para  $\delta$

$$M\ddot{\delta} + K_s(\delta - \theta) + mgl_c \sin(\delta) = 0. \quad (2.5)$$

Agrupando las ecuaciones anteriores, el sistema dinámico completo queda descrito por

$$\begin{aligned} M(\delta)\ddot{\delta} + C(\delta, \dot{\delta})\dot{\delta} + G(\delta) + K_s(\delta - \theta) &= 0, \\ J\ddot{\theta} - K_s(\delta - \theta) &= \tau, \end{aligned} \quad (2.6)$$

con  $C(\delta, \dot{\delta})\dot{\delta} = 0$ . Esta formulación representa un sistema subactuado.

### 2.3. Caso B: manipulador con enlace flexible

Este caso considera un manipulador en el que la elasticidad está distribuida a lo largo del enlace. La fuente principal de deformación proviene de la flexión transversal, modelada como una viga tipo Euler–Bernoulli bajo el supuesto de pequeñas deformaciones.

Considere el siguiente sistema de la figura 2.2, donde  $EI$  rigidez flexional del enlace,  $\rho$  den-

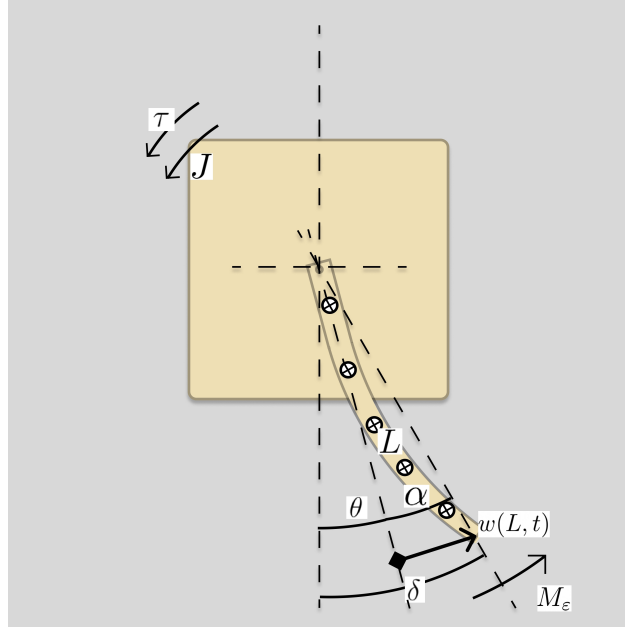


Figura 2.2: Diagrama de cuerpo libre de un manipulador con enlace flexible

sidad,  $A$  área transversal,  $\rho A$  densidad lineal,  $w(l, t)$  desplazamiento transversal en el punto  $l$  del enlace,  $\tau$  par aplicado al brazo,  $\theta$  ángulo del rotor del motor (base),  $J$  es el momento inercial del motor respecto a la base y  $L$  la longitud del enlace.



### 2.3.1. Ecuaciones de Euler—Lagrange

A continuación se describen los términos de energía cinética y potencial del sistema.

**Energía cinética del sistema.**

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\int_0^L \rho A \|\dot{r}(\ell, t)\|^2 d\ell. \quad (2.7)$$

**Energía potencial del sistema.**

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2}\int_0^L EI \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \ell^2} \right)^2 d\ell + \int_0^L \rho A g r_y(\ell, t) d\ell. \quad (2.8)$$

**Método de modos asumidos**

El modelado Lagrangiano de manipuladores flexibles se apoya de forma canónica en el método de Modos Asumidos y en la partición de la energía total en porciones rígidas y elásticas, esto es

$$w(l, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(l) q_i(t), \quad \dot{w}(l, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) \dot{q}_i(t), \quad (2.9)$$

se define  $r(l, t) = R(\theta) \begin{bmatrix} l \\ w(l, t) \end{bmatrix}$ .

Para capturar el efecto dominante de las vibraciones en la punta del enlace flexible, se introduce una partición espacial del dominio  $[0, L]$ , como

$$[0, L] = [0, L - \varepsilon] \cup [L - \varepsilon, L] \text{ con } \varepsilon < L, \quad (2.10)$$

La masa en el tramo final  $[L - \varepsilon, L]$  como una masa concentrada se agrupa en  $m_\varepsilon = \rho A \varepsilon$ , lo que permite un Lagrangiano dominante más un residuo  $\mathcal{L}_{\text{HOT}}$ . A partir del desarrollo modal, se propone una expansión del desplazamiento transversal mediante el método de Modos Asumidos

$$w(l, t) = \phi_1(l) q_1(t) + \sum_{i=2}^{\infty} \phi_i(l) q_i(t). \quad (2.11)$$

Dado que la máxima deformación se concentra en la punta  $\ell = L$ , se aproxima la curvatura angular efectiva como  $\alpha(t) := \frac{w(L, t)}{L}$  en el punto  $L$  bajo la hipótesis que  $w(L, t) < L$ , esta

relación se motiva por la expansión angular de primer orden:  $a(L, t) = \arctan\left(\frac{w(L, t)}{L}\right)$ , entonces

$$r(L, t) = R(\theta) \begin{bmatrix} L \\ w(L, t) \end{bmatrix} = R(\theta) \begin{bmatrix} L \\ L\alpha(t) \end{bmatrix} = LR(\theta) \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha(t) \end{bmatrix}, \quad (2.12)$$

al derivar respecto al tiempo se obtiene la velocidad del extremo,

$$\dot{r}(L, t) = LR(\theta) \begin{bmatrix} -\alpha\dot{\theta} \\ (\dot{\theta} + \dot{\alpha}) \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

y, por tanto, el cuadrado de la norma de la velocidad se calcula como

$$\|\dot{r}(L, t)\|^2 = L^2[(\alpha\dot{\theta})^2 + (\dot{\alpha} + \dot{\theta})^2] = L^2[(\delta - \theta)^2\dot{\theta}^2 + \dot{\delta}^2], \quad (2.14)$$

donde se ha definido la coordenada angular efectiva total como  $\delta = \theta + \alpha$ .

**Separación por  $\varepsilon$ .** Particionamos el dominio para aislar la contribución cinética en la región cercana a la punta del enlace

$$\mathcal{T}_r = \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^{L-\varepsilon} \rho A \|\dot{r}(\ell, t)\|^2 d\ell}_{\mathcal{T}_b} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_{L-\varepsilon}^L \rho A \|\dot{r}(L, t)\|^2 d\ell}_{\mathcal{T}_\varepsilon} + \mathcal{T}_{HOT}. \quad (2.15)$$

donde se han definido  $\mathcal{T}_b, \mathcal{T}_\varepsilon$  como las contribuciones del cuerpo del enlace y de la región de punta, respectivamente. A esto se le suma un término residual  $\mathcal{T}_{HOT}$  que representa la energía derivada de modos superiores no modelados y a efectos de acoplamiento ignorados.

Esto implica

$$\mathcal{T} \approx \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 + \mathcal{T}_b + \mathcal{T}_\varepsilon + \mathcal{T}_{HOT} = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 + \mathcal{T}_\varepsilon + \mathcal{T}_F = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M_\varepsilon \dot{\delta}^2 + \mathcal{T}_F, \quad (2.16)$$

donde se ha definido la masa efectiva en la punta como  $m_\varepsilon := \rho A \varepsilon$ , y la inercia equivalente como  $M_\varepsilon = m_\varepsilon L^2$ . El término  $\mathcal{T}_F$  agrupa la energía cinética restante: aquella que proviene del tramo intermedio del enlace y de los modos superiores en la expansión modal.

Aunque la integración en  $\mathcal{T}_\varepsilon$  se realiza sobre un tramo muy pequeño  $[L - \varepsilon, L]$  con  $\varepsilon < L$ , esta porción de dominio representa una masa no despreciable, si se le modela como una masa

concentrada  $m_\varepsilon$ . Además, en esa región la velocidad puede considerarse constante e igual a la velocidad en la punta, es decir,  $\dot{r}(d, t) \approx \dot{r}(L, t)$  lo que justifica la aproximación

$$\mathcal{T}_\varepsilon \approx \frac{1}{2} m_\varepsilon \|\dot{r}(L, t)\|^2. \quad (2.17)$$

Esta técnica, permite capturar la dinámica dominante sin resolver toda la distribución modal del sistema.

Para el caso de la energía potencial, aplicamos esta separación tanto a la energía elástica como al término gravitacional. Esto, para el caso de la elástica

$$\mathcal{V}_e = \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^{L-\varepsilon} EI \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \ell} \right)^2 d\ell}_{\mathcal{V}_b} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_{L-\varepsilon}^L EI \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \ell} \right)^2 d\ell}_{\mathcal{V}_\varepsilon} + \mathcal{V}_{\text{HOT}}. \quad (2.18)$$

En el segundo término, bajo la hipótesis de un solo modo dominante y usando la forma  $w(l, t) \approx \phi_1(\ell)q_1(t)$ , se obtiene una rigidez efectiva

$$\mathcal{V}_\varepsilon = \frac{1}{2} K_s (\delta - \theta)^2, \quad (2.19)$$

con  $K_s = EI \int_{L-\varepsilon}^L \phi(\ell)^2 d\ell$ . Para el caso de la energía gravitacional,

$$\mathcal{V}_g = \underbrace{\int_0^{L-\varepsilon} \rho A g r_y(\ell, t) d\ell}_{\mathcal{V}_b} + \underbrace{\int_{L-\varepsilon}^L \rho A g r_y(\ell, t) d\ell}_{\mathcal{V}_\varepsilon}. \quad (2.20)$$

Como en la energía cinética, el segundo término se aproxima por una masa concentrada en la punta

$$\mathcal{V}_{g,\varepsilon} \approx m_\varepsilon g r_y(L, t) = -m_\varepsilon g L \cos(\delta). \quad (2.21)$$

Agrupando ambos términos

$$\mathcal{V} \approx -m_\varepsilon g L \cos(\delta) + \frac{1}{2} K_\alpha (\delta - \theta)^2 + \mathcal{V}_F, \quad (2.22)$$

donde  $\mathcal{V}_F$  representa los términos residuales de la parte no modelada del cuerpo flexible.

**Observación 2.4.** *Se considera lo siguiente:*

- *La separación mediante  $\varepsilon$  es matemáticamente válida por la propiedad de partición de la integral definida [89].*
- *Físicamente se justifica porque las vibraciones dominantes suelen concentrarse en el extremo del enlace flexible [77].*
- *Los términos  $\mathcal{T}_F$ ,  $\mathcal{V}_F$  capturan los modos no modelados ( $\phi_{i \geq 2}$ ) y términos cuadráticos ignorados.*

**Lagrangiano dominante y término HOT.** Agrupando con la parte rígida

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{dom}} &= \mathcal{T}_{\text{dom}} - \mathcal{V}_{\text{dom}} = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}M_\varepsilon\dot{\delta}^2 + m_\varepsilon gL \cos(\delta) - \frac{1}{2}K_\alpha(\delta - \theta)^2, \\ \mathcal{L}_{\text{total}} &= \mathcal{L}_{\text{dom}} + \mathcal{L}_{\text{HOT}},\end{aligned}\tag{2.23}$$

donde  $\mathcal{L}_{\text{HOT}}$  agrupa los términos excluidos por la aproximación local y los modos superiores  $\phi_{i \geq 2}$ .

### 2.3.2. Ecuaciones de Movimiento

A continuación, se presentan las ecuaciones de movimiento obtenidas a partir del Lagrangiano dominante del sistema.

**Para  $\theta$**

$$J\ddot{\theta} - K_s(\delta - \theta) + F_\theta = \tau.\tag{2.24}$$

**Para  $\delta$**

$$M_\varepsilon\ddot{\delta} + K_s(\delta - \theta) + m_\varepsilon gL \sin(\delta) + F_\delta = 0.\tag{2.25}$$

Que se aproxima a la generalización de los robots flexibles, i.e.

$$\begin{aligned}M(\delta)\ddot{\delta} + C(\delta, \dot{\delta})\dot{\delta} + G(\delta) + K_s(\delta - \theta) + F_\delta &= 0, \\ J\ddot{\theta} - K_s(\delta - \theta) + F_\theta &= \tau.\end{aligned}\tag{2.26}$$

Los términos  $F_\delta, F_\theta$  corresponden a las fuerzas generalizadas derivadas del Lagrangiano residual  $\mathcal{L}_F$ . Al igual que en el modelo del robot con junta flexible, es necesario omitir los efectos gravitacionales debido a que el sistema opera en un plano horizontal.

## 2.4. Caso C: manipulador con enlace y junta flexible

Este caso modela un manipulador que presenta elasticidad tanto en la unión entre el actuador y el enlace (junta flexible), como a lo largo del propio enlace (flexibilidad estructural).

Sea el siguiente sistema de la figura 2.3, con  $\theta$  ángulo del rotor del motor,  $\theta_0$  ángulo del

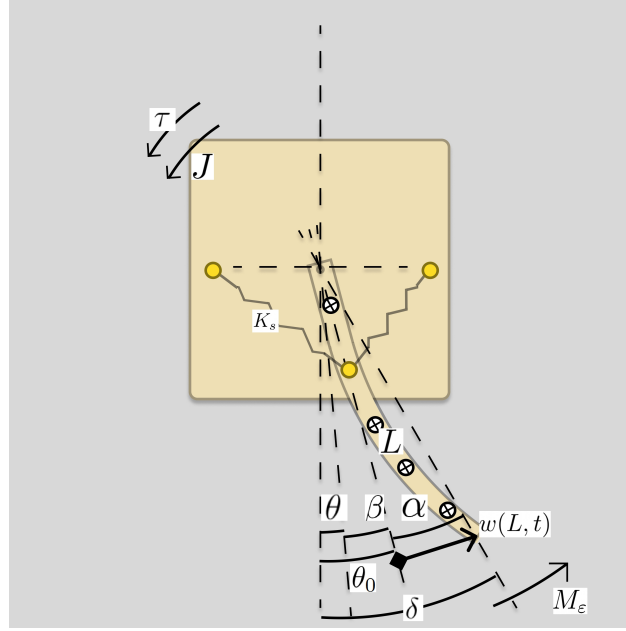


Figura 2.3: Diagrama de cuerpo libre de un manipulador con junta y enlace flexible

cuerpo rígido del enlace, es decir, después de la junta elástica. Se define como  $\theta_0 := \theta + \beta$  y  $\delta$  ángulo total en el extremo del enlace flexible. Se define como  $\delta := \theta_0 + \alpha$ .

Con estas definiciones, se modelan las deformaciones internas mediante las variables relativas  $\beta = \theta_0 - \theta$ ,  $\alpha = \delta - \theta_0$ , estas relaciones permiten mantener la independencia de coordenadas, pero conservar la estructura jerárquica que facilita el análisis energético y dinámico del sistema.

**Energía cinética del sistema** La energía cinética total se obtiene como la suma de dos contribuciones principales: la energía cinética del rotor del motor de inercia  $J$ , rotando con velocidad  $\dot{\theta}$ ; y la energía cinética de una masa concentrada  $m_e$  ubicada en la punta del enlace,

a distancia  $L$  del origen. Esta masa se mueve con velocidad angular total  $\dot{\delta} = \dot{\theta} + \dot{\beta} + \dot{\alpha}$ .

Definiendo  $M_\epsilon := m_\epsilon L^2$  como la inercia efectiva en la punta, se obtiene

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}M_\epsilon\dot{\delta}^2 + \mathcal{T}_F, \quad (2.27)$$

donde  $T_F$  representa la energía cinética residual asociada a los modos de vibración superiores y masa distribuida del cuerpo del enlace. Este término será despreciado en el modelo dominante, pero considerado en el análisis de estabilidad en capítulos posteriores.

**Energía potencial del sistema** La energía potencial total incorpora tres efectos: la energía almacenada en la junta elástica entre el motor y el cuerpo del enlace, con rigidez torsional  $K_\beta$ , que penaliza la deformación relativa  $\beta$ ; la energía elástica asociada a la flexión del enlace, modelada como un resorte equivalente de rigidez  $K_\alpha$ , que penaliza la deformación relativa  $\alpha$ ; y el potencial gravitacional de la masa concentrada en la punta, con respecto a la dirección vertical.

Se obtiene entonces

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2}K_\beta(\theta_0 - \theta)^2 + \frac{1}{2}K_\alpha(\delta - \theta_0)^2 - m_\epsilon g L \cos(\delta) + \mathcal{V}_F, \quad (2.28)$$

donde  $\mathcal{V}_F$  representa la energía potencial residual asociada a rigideces distribuidas y modos ignorados.

### Lagrangiano dominante

El Lagrangiano principal del sistema se define como la diferencia entre la energía cinética y la energía potencial, excluyendo los residuos:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}M_\epsilon\dot{\delta}^2 - \frac{1}{2}K_\beta(\theta_0 - \theta)^2 - \frac{1}{2}K_\alpha(\delta - \theta_0)^2 + m_\epsilon g L \cos(\delta). \quad (2.29)$$

#### 2.4.1. Ecuaciones de movimiento

Aplicando el formalismo de Euler–Lagrange a las coordenadas generalizadas  $\theta$ ,  $\theta_0$  y  $\delta$ , se obtienen las siguientes ecuaciones dinámicas

Para  $\theta$

$$J\ddot{\theta} - K_\beta(\theta_0 - \theta) = \tau. \quad (2.30)$$

Para  $\theta_0$

$$K_\beta(\theta_0 - \theta) - K_\alpha(\delta - \theta_0) = 0. \quad (2.31)$$

Para  $\delta$

$$M_\varepsilon\ddot{\delta} + K_\alpha(\delta - \theta_0) + m_\varepsilon gL \sin(\delta) = 0. \quad (2.32)$$

**Observación 2.5.** *La ecuación para  $\theta_0$  es algebraica y representa una condición de equilibrio entre las dos rigideces. Este tipo de ecuaciones se conoce como restricción diferencial-algebraica.*

**Observación 2.6.** *La única entrada de control es el par  $\tau$ , aplicado en el motor. El sistema es subactuado y exhibe dinámica acoplada entre la base y el extremo.*

**Observación 2.7.** *Las deformaciones relativas  $\beta$  y  $\alpha$  son responsables de introducir oscilaciones, lo cual motiva el desarrollo de esquemas de control con compensación.*

### 2.4.2. Modelo dinámico generalizado con términos residuales

Incorporando las contribuciones residuales asociadas al Lagrangiano complementario  $\mathcal{L}_F$ , se adicionan fuerzas generalizadas no modeladas explícitamente. Estas se agrupan en tres términos, el sistema completo queda entonces descrito por

$$\begin{aligned} J\ddot{\theta} - K_\beta(\theta_0 - \theta) + F_\theta &= \tau, \\ K_\beta(\theta_0 - \theta) - K_\alpha(\delta - \theta_0) + F_{\theta_0} &= 0, \\ M_\varepsilon\ddot{\delta} + K_\alpha(\delta - \theta_0) + m_\varepsilon gL \sin(\delta) + F_\delta &= 0. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Los términos  $F_\theta$ ,  $F_{\theta_0}$  y  $F_\delta$  encapsulan los efectos dinámicos de orden superior excluidos por el modelo dominante. Estos incluyen la energía cinética y potencial de los modos no considerados en el desarrollo modal, así como términos de acoplamiento estructural ignorados en la simplificación con masa concentrada.

Por lo que se puede establecer un modelo generalizado para esta estructura; esto es

$$\begin{aligned}
 J\ddot{\theta} - K_{\beta}(\theta_0 - \theta) + F_{\theta} &= \tau, \\
 K_{\beta}(\theta_0 - \theta) - K_{\alpha}(\delta - \theta_0) + F_{\theta_0} &= 0, \\
 M_{\varepsilon}\ddot{\delta} + C\dot{\delta} + G + K_{\alpha}(\delta - \theta_0) + F_{\delta} &= 0.
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

## 2.5. Conclusión del capítulo

En este capítulo se desarrollan los modelos dinámicos de tres configuraciones de manipuladores robóticos con elasticidad estructural: junta flexible, enlace flexible y sistema combinado. A partir de la formulación Lagrangiana se obtienen ecuaciones no lineales que conservan propiedades estructurales esenciales. Estos modelos se reescriben en forma matricial normalizada, destacando la distinción entre variables actuadas y no actuadas, lo cual facilita el análisis de estabilidad y el diseño de controladores robustos.



## CAPÍTULO 3

### Control PD/PID con neurocompensación

Este capítulo presenta el análisis de estabilidad en lazo cerrado de cuatro estructuras de control aplicadas a manipuladores con elasticidad: controladores PD/PID, cada uno con compensación basada en modelo o con compensación mediante red neuronal. El enfoque se centra en demostrar la validez teórica de cada ley de control cuando se aplica a tres configuraciones dinámicas distintas.

Se adopta una organización secuencial basada en el tipo de sistema, donde cada bloque (Casos A, B y C) incluye el análisis de cuatro esquemas de control: PD con compensación por modelo, PD con neurocompensación, PID con compensación por modelo y PID con neurocompensación.

**Observación 3.1** (Estructura de las funciones de Lyapunov). *En todos los casos considerados, las funciones candidatas de Lyapunov se construyen siguiendo una lógica modular que refleja la naturaleza del sistema:*

1. **Parte actuada:** *corresponde a las coordenadas directamente controladas por el actuador (por ejemplo,  $r, \dot{e}, e, z$ ), donde las ganancias  $K_p, K_d, K_r, K_i$  introducen términos de estabilización.*
2. **Parte subactuada o elástica:** *incorpora las variables que modelan la flexibilidad estructural del manipulador (e.g.,  $\alpha = \delta - \theta, \beta = \theta_0 - \theta$ ), junto con sus velocidades.*

*Estas variables no son controladas directamente, pero su energía potencial y cinética debe estar incluida para capturar el acoplamiento dinámico y garantizar acotamiento.*

3. **Parte neuroadaptativa:** cuando se emplea compensación neuronal, se añade un término cuadrático en el error de estimación de pesos,

$$\frac{1}{2} \text{tr}\{\tilde{W}^\top K_\Gamma^{-1} \tilde{W}\},$$

*el cual permite demostrar que la ley de adaptación asegura que la red neuronal no compromete la estabilidad y que el error de aproximación se mantiene acotado.*

*De esta forma, cada función candidata combina: (i) la energía controlada directamente, (ii) la energía asociada a elasticidad o modos subactuados, y (iii) la energía de adaptación de la red. Esta estructura común unifica los análisis de los casos A, B y C, y permite demostrar estabilidad en todos los esquemas (PD/PID, con y sin neurocompensación).*

### 3.1. Caso A: Manipulador con junta flexible

Este caso considera un manipulador con una única articulación elástica, donde la dinámica está determinada por dos coordenadas independientes: una asociada al motor y otra al enlace.

#### 3.1.1. Controlador PD con neurocompensación

Considerando el modelo dinámico del sistema de junta elástica

$$\begin{aligned} M(\delta)\ddot{\delta} + C(\delta, \dot{\delta})\dot{\delta} + G(\delta) + K_s(\delta - \theta) &= 0, \\ J\ddot{\theta} - K_s(\delta - \theta) &= \tau, \end{aligned} \tag{3.1}$$

se define la variable de error como  $e = \theta^d - \theta$ , y la variable combinada como  $r := \dot{e} + \Lambda e$ ,  $\Lambda = \Lambda^\top > 0$ , se considera la siguiente ley de control PD con compensación por modelo

$$\tau = J(\ddot{\theta}_d + \Lambda\dot{e}) + G - K_s(\delta - \theta) + K_r r = J(\ddot{\theta}^d + \Lambda\dot{e}) + G - K_s\alpha + K_r r, \tag{3.2}$$

donde  $K_r > 0$  es la ganancia proporcional sobre la variable combinada  $r$ , y el término  $K_s(\delta - \theta)$  corresponde a la compensación del par elástico.

### Estabilidad mediante una función de Lyapunov.

**Proposición 3.2.** *Considere el sistema descrito por las ecuaciones dinámicas correspondientes bajo la ley de control propuesta. Con la siguiente función candidata de Lyapunov*

$$V = \frac{1}{2}\dot{\delta}^\top M\dot{\delta} + \frac{1}{2}r^\top Jr + \frac{1}{2}\alpha^\top K_s\alpha, \quad (3.3)$$

*se demuestra que el origen del sistema de errores es estable en el sentido práctico y uniformemente acotado.*

*Demostración.* Se propone la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2}\dot{\delta}^\top M\dot{\delta} + \frac{1}{2}r^\top Jr + \frac{1}{2}\alpha^\top K_s\alpha, \quad (3.4)$$

calculando la derivada temporal de  $V$

$$\dot{V} = \dot{\delta}^\top M\ddot{\delta} + \frac{1}{2}\dot{\delta}^\top \dot{M}\dot{\delta} + r^\top J\dot{r} + \alpha^\top K_s\dot{\alpha}, \quad (3.5)$$

considerando  $\dot{\alpha} = \dot{\delta} - \dot{\theta}$ ,  $\dot{r} = \ddot{\theta}^d + \Lambda\dot{e} - \ddot{\theta}$ ,  $M(\delta)\ddot{\delta} = -C(\delta, \dot{\delta})\dot{\delta} - G(\delta) - K_s(\delta - \theta)$ , se sustituye

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{\delta}^\top (-K_s\alpha - G) + r^\top J(\ddot{\theta}^d + \Lambda\dot{e} - \ddot{\theta}) + \alpha^\top K_s(\dot{\delta} - \dot{\theta}) \\ &= \dot{\delta}^\top (-K_s\alpha - G) + r^\top (-\tau - K_s\alpha + J(\ddot{\theta}^d + \Lambda\dot{e})) + \alpha^\top K_s(\dot{\delta} - \dot{\theta}), \end{aligned} \quad (3.6)$$

y considerando la ley de control anterior  $\tau = J(\ddot{\theta}^d + \Lambda\dot{e}) - K_s\alpha + G + K_r r$ , finalmente

$$\dot{V} = -r^\top K_r r - \alpha^\top K_s \dot{\theta} - (r + \dot{\delta})^\top G \quad (3.7)$$

donde  $G := mgl \sin(\delta)$  es el término gravitacional. Si se descartan los efectos gravitacionales (es decir,  $G = 0$ , lo que es válido para el sistema sobre un plano horizontal, entonces

$$\dot{V} = -r^\top K_r r - \alpha^\top K_s \dot{\theta}. \quad (3.8)$$

Aplicando la desigualdad de Young al término cruzado

$$\dot{V} \leq -r^\top K_r r + \frac{1}{2}\|\dot{\theta}\|_{K_s}^2 + \frac{1}{2}\|\alpha\|_{K_s}^2, \quad (3.9)$$

donde  $\|x\|_{K_s}^2 = x^\top K_s x$ . Este resultado implica que, aunque la energía total del sistema decrece por el término  $-r^\top K_r r$ , dado que  $\alpha^\top K_s \dot{\theta}$  es acotado, se concluye que el sistema es estable en el sentido de Lyapunov, en torno a una región de  $\dot{\theta}$  y  $\alpha$ .  $\square$

El esquema PD con compensación neuronal incorpora una red neuronal tipo feedforward entrenada en línea como bloque adicional en la trayectoria de control. Esta red tiene como objetivo aproximar y cancelar las dinámicas no modeladas o residuales generadas por la flexibilidad estructural del sistema.

**Ley de control con red neuronal.** La ley de control se define como

$$\tau = \hat{W} \Gamma(x) + K_r r, \quad (3.10)$$

donde  $\hat{W}$  es el vector de pesos estimados de la red neuronal,  $\Gamma(x)$  es el vector de activaciones. Se asume que existe un modelo neuronal ideal tal que

$$W^* \Gamma(x) + \eta = J(\ddot{\theta}_d + \Lambda \dot{e}) - K_s(\delta - \theta) + G, \quad (3.11)$$

donde  $\eta$  es un error de aproximación acotado. La red neuronal busca aprender en línea este mapeo mediante una ley de adaptación de la forma

$$\dot{\tilde{W}} = \dot{W}^* - \dot{W} = -K_\Gamma \Gamma(x) r^\top, \quad (3.12)$$

con  $K_\Gamma = K_\Gamma^\top > 0$  como matriz de ganancia adaptativa. Este término garantiza que la red evolucione en dirección opuesta al error de seguimiento, reforzando la estabilidad.

**Estabilidad del sistema compensado.**

**Proposición 3.3.** *Sea el sistema definido por las ecuaciones dinámicas y la ley de control propuesta. Usando la siguiente función candidata de Lyapunov*

$$V = \frac{1}{2} r^\top J r + \frac{1}{2} \dot{\delta}^\top M \dot{\delta} + \frac{1}{2} \alpha^\top K_s \alpha + \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ \tilde{W}^\top K_\Gamma^{-1} \tilde{W} \right\}, \quad (3.13)$$

*se garantiza que el origen del sistema de errores es estable de manera práctica y uniformemente acotada.*

*Demostración.* Para analizar la estabilidad del sistema en lazo cerrado bajo la ley de control con neurocompensación, se propone la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2}r^\top J r + \frac{1}{2}\dot{\delta}^\top M \dot{\delta} + \frac{1}{2}\alpha^\top K_s \alpha + \frac{1}{2}tr\left\{\tilde{W}^\top K_\Gamma^{-1}\tilde{W}\right\}, \quad (3.14)$$

donde  $\tilde{W} := W^* - \hat{W}$  es el error de estimación de los pesos,  $K_\Gamma > 0$  es la matriz de ganancia adaptativa definida positiva. Calculando la derivada de  $V$  a lo largo de las trayectorias del sistema

$$\dot{V} = -\dot{\delta}^\top G + r^\top(-\tau + K_s \alpha + J(\ddot{\theta}^d + \Lambda \dot{e}) + G - \dot{G}) - \alpha^\top K_s \dot{\theta} + tr\{\tilde{W}^\top K_\Gamma^{-1}\dot{\tilde{W}}\}, \quad (3.15)$$

considerando que  $W^*\Gamma(x) + \eta = J(\ddot{\theta}_d + \Lambda \dot{e}) - K_s \alpha + G$ , se tiene que

$$\dot{V} = -(r + \dot{\delta})^\top G + r^\top(-\tau + (W^*\Gamma(x) + \eta)) - \alpha^\top K_s \dot{\theta} + tr\{\tilde{W}^\top K_\Gamma^{-1}\dot{\tilde{W}}\}, \quad (3.16)$$

con la ley de control  $\tau = \hat{W}\Gamma(x) + K_r r$ ,

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -(r + \dot{\delta})^\top G + r^\top(-\hat{W}\Gamma(x) - K_r r + (W^*\Gamma(x) + \eta)) - \alpha^\top K_s \dot{\theta} + tr\{\tilde{W}^\top K_\Gamma^{-1}\dot{\tilde{W}}\}, \\ &= -(r + \dot{\delta})^\top G + r^\top(-K_r r + (\tilde{W}\Gamma(x) + \eta)) - \alpha^\top K_s \dot{\theta} + tr\{\tilde{W}^\top K_\Gamma^{-1}\dot{\tilde{W}}\}, \\ &= -(r + \dot{\delta})^\top G - r^\top K_r r + r^\top \tilde{W}\Gamma(x) + r^\top \eta - \alpha^\top K_s \dot{\theta} + tr\{\tilde{W}^\top K_\Gamma^{-1}\dot{\tilde{W}}\}, \\ &= -(r + \dot{\delta})^\top G - r^\top K_r r + r^\top \eta - \alpha^\top K_s \dot{\theta} + tr\{\tilde{W}^\top (K_\Gamma^{-1}\dot{\tilde{W}} + \Gamma(x)r^\top)\}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

además, se tiene que la ley de adaptación  $\dot{\tilde{W}} + K_\Gamma \Gamma(x)r^\top = 0$ , se simplifica a la expresión

$$\dot{V} = -r^\top K_r r + r^\top \eta - (r + \dot{\delta})^\top G - \alpha^\top K_s \dot{\theta}. \quad (3.18)$$

Para  $r^\top \eta$ , se considera la desigualdad tipo Young

$$r^\top \eta \leq r^\top \bar{\Lambda} r + \eta^\top \bar{\Lambda}^{-1} \eta, \quad (3.19)$$

con  $\bar{\Lambda} = \bar{\Lambda}^\top > 0$ . Si el sistema opera en plano horizontal, esto es,  $G = 0$ , y si se aplica la desigualdad de Young a los términos cruzados, obtenemos

$$\dot{V} \leq -r^\top (K_r - \bar{\Lambda})r + \bar{\eta} + \frac{1}{2}\|\dot{\theta}\|_{K_s}^2 + \frac{1}{2}\|\alpha\|_{K_s}^2. \quad (3.20)$$

donde  $\eta^\top \bar{\Lambda}^{-1} \eta < \bar{\eta}$ . Este resultado demuestra que el sistema es estable en el sentido de Lyapunov en una región de  $\theta$ ,  $\alpha$  y  $\bar{\eta}$ , y que el error de seguimiento  $r$  está acotado. La presencia del error de aproximación  $\eta$  puede degradar la convergencia, pero no compromete la estabilidad del sistema completo.  $\square$

### 3.1.2. Controlador PID con neurocompensación

El controlador PID con compensación por modelo introduce un integrador explícito que actúa sobre el error de posición, lo que permite eliminar errores en régimen permanente. Se considera la siguiente ley de control PID con compensación por modelo

$$\tau = J\ddot{\theta}^d - K_s\alpha + G + K_pe + K_d\dot{e} + K_iz, \quad (3.21)$$

donde  $K_i > 0$  es la ganancia integral y  $\dot{z} = e$ .

#### Estabilidad mediante una función de Lyapunov

**Proposición 3.4.** *Bajo la dinámica del sistema y la ley de control planteada, con la siguiente función candidata de Lyapunov*

$$V = \frac{1}{2}\dot{\delta}^\top M(\delta)\dot{\delta} + \frac{1}{2}\dot{e}^\top J\dot{e} + \frac{1}{2}\alpha^\top K_s\alpha + \frac{1}{2}e^\top K_pe + \gamma e^\top K_iz + \frac{1}{2}z^\top K_iz, \quad (3.22)$$

donde  $\gamma \in (0, 1)$  es una constante escalar, se establece que el origen del sistema de errores es estable en el sentido de Lyapunov, práctico y uniformemente acotado.

*Demostración.* Se propone la siguiente función candidata de Lyapunov

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}\dot{\delta}^\top M(\delta)\dot{\delta} + \frac{1}{2}\dot{e}^\top J\dot{e} + \frac{1}{2}\alpha^\top K_s\alpha + \frac{1}{2}e^\top K_pe + \gamma e^\top K_iz + \frac{1}{2}z^\top K_iz, \\ &= \frac{1}{2}\dot{\delta}^\top M(\delta)\dot{\delta} + \frac{1}{2}\dot{e}^\top J\dot{e} + \frac{1}{2}\alpha^\top K_s\alpha + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^\top & z^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_p & \gamma K_i \\ \gamma K_i & K_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ z \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.23)$$

donde  $\gamma \in (0, 1)$  es una constante escalar, la derivada de la función es

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{\delta}^\top M\dot{\delta} + \frac{1}{2}\dot{\delta}^\top \dot{M}\dot{\delta} + \dot{e}^\top J\dot{e} + \alpha^\top K_s\dot{\alpha} + \dot{e}^\top K_pe + \gamma(\dot{e}^\top K_iz + e^\top K_i\dot{z}) + \dot{z}^\top K_iz \\ &= -(\dot{\delta} + \dot{e})^\top G - \dot{e}^\top K_d\dot{e} - (1 - \gamma)\dot{e}^\top K_iz + e^\top K_iz + \gamma e^\top K_ie - \alpha^\top K_s\dot{\theta} \end{aligned} \quad (3.24)$$

aplicando desigualdades tipo Young a los términos cruzados, obtenemos

$$\dot{V} \leq - \left[ \lambda_{\min}(K_d) - \left( 1 + \frac{1 - \gamma}{2} \lambda_{\max}(K_i) \right) \right] \|\dot{e}\|^2 + d(t), \quad (3.25)$$

con  $d(t) = \|\dot{\delta}\|^2 + \left(\frac{1-\gamma}{2}\right) \lambda_{\max}(K_i) \|z\|^2 + \left(\frac{1}{2} + \gamma\right) \lambda_{\max}(K_i) \|e\|^2 + \frac{1}{2} \|\alpha\|_{K_s}^2 + \frac{1}{2} \|\dot{\theta}\|_{K_s}^2 + \frac{1}{2} \bar{G}^2$ , considerando que los efectos de la gravedad son despreciables,  $G = 0$ , entonces

$$\dot{V} \leq - \left[ \lambda_{\min}(K_d) - \frac{1-\gamma}{2} \lambda_{\max}(K_i) \right] \|\dot{e}\|^2 + d(t), \quad (3.26)$$

con  $d(t) = \left(\frac{1-\gamma}{2}\right) \lambda_{\max}(K_i) \|z\|^2 + \left(\frac{1}{2} + \gamma\right) \lambda_{\max}(K_i) \|e\|^2 + \frac{1}{2} \|\alpha\|_{K_s}^2 + \frac{1}{2} \|\dot{\theta}\|_{K_s}^2$ , considerando a  $c_1 := \lambda_{\min}(K_d) - \frac{1-\gamma}{2} \lambda_{\max}(K_i) > 0$ ,  $k_0 := \frac{1}{\lambda_{\max}(J)}$ , además se sabe que  $d(t)$  es acotado  $\|d(t)\| < \bar{d}$ , se tiene

$$\dot{V} \leq -c_1 \|\dot{e}\|^2 + \bar{d}, \quad \rightarrow \quad \dot{V} \leq -\tilde{c} V + \bar{d}, \quad \tilde{c} := c_1 k_0 > 0. \quad (3.27)$$

Aplicando el lema de comparación,

$$V(t) \leq \left( V(0) - \frac{\bar{d}}{\tilde{c}} \right) e^{-\tilde{c}t} + \frac{\bar{d}}{\tilde{c}}, \quad (3.28)$$

por lo que el sistema es estable en una región dada por  $\left\{ x : V(x) \leq \frac{\bar{d}}{\tilde{c}} \right\}$ .  $\square$

### Controlador PID con neurocompensación.

Al igual que en el caso del controlador PD, los términos son compensados por la red neuronal. El controlador conserva su forma, pero delega parte de la acción correctiva a la red.

**Ley de control con red neuronal** Para esta ley de control se considera la siguiente estructura

$$\tau = \hat{W}\Gamma(x) + K_p e + K_d \dot{e} + K_i z, \quad (3.29)$$

y se asume que existe un modelo ideal tal que  $W^*\Gamma(x) + \eta = J\ddot{\theta}^d - K_s \alpha + G$ , y ley de aprendizaje  $\dot{\tilde{W}} = -K_\Gamma \Gamma(x) r^\top$ .

### Estabilidad del sistema compensado

**Proposición 3.5.** *Para el sistema considerado junto con la ley de control propuesta, al analizar la siguiente función candidata de Lyapunov*

$$V = \frac{1}{2} \dot{\delta}^\top M(\delta) \dot{\delta} + \frac{1}{2} \dot{e}^\top J \dot{e} + \frac{1}{2} \alpha^\top K_s \alpha + \frac{1}{2} e^\top K_p e + \gamma e^\top K_i z + \frac{1}{2} z^\top K_i z + \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ \tilde{W}^\top K_\Gamma^{-1} \tilde{W} \right\}, \quad (3.30)$$

donde  $\gamma \in (0, 1)$  es una constante escalar, se concluye que el origen del sistema de errores es estable, de manera práctica y uniformemente acotada.

*Demostración.* Se propone la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2}\dot{\delta}^\top M(\delta)\dot{\delta} + \frac{1}{2}\dot{e}^\top J\dot{e} + \frac{1}{2}\alpha^\top K_s\alpha + \frac{1}{2}e^\top K_p e + \gamma e^\top K_i z + \frac{1}{2}z^\top K_i z + \frac{1}{2}\text{tr}\left\{\tilde{W}^\top K_F^{-1}\tilde{W}\right\}, \quad (3.31)$$

donde  $\gamma \in (0, 1)$  es una constante escalar, la derivada de la función es

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{\delta}^\top M\ddot{\delta} + \frac{1}{2}\dot{\delta}^\top \dot{M}\dot{\delta} + \dot{e}^\top J\ddot{e} + \alpha^\top K_s\dot{\alpha} + \dot{e}^\top K_p e + \gamma(\dot{e}^\top K_i z + e^\top K_i \dot{z}) + \dot{z}^\top K_i z \\ &\quad + \text{tr}\{\tilde{W}^\top K_F^{-1}\dot{\tilde{W}}\} \\ &= -(\dot{\delta} + \dot{e})^\top G - \dot{e}^\top K_d \dot{e} - (1 - \gamma)\dot{e}^\top K_i z + e^\top K_i z + \gamma e^\top K_i \dot{e} - \alpha^\top K\dot{\theta} + \dot{e}^\top \eta \end{aligned} \quad (3.32)$$

aplicando desigualdades y considerando la ausencia de gravedad,  $G = 0$ , obtenemos

$$\dot{V} \leq - \left[ \lambda_{\min}(K_d) - \left( \frac{1 - \gamma}{2} \lambda_{\max}(K_i) + \bar{\Lambda} \right) \right] \|\dot{e}\|^2 + d(t) \quad (3.33)$$

con  $d(t) = \left( \frac{1 - \gamma}{2} \right) \lambda_{\max}(K_i) \|z\|^2 + \left( \frac{1}{2} + \gamma \right) \lambda_{\max}(K_i) \|e\|^2 + \frac{1}{2} \|\alpha\|_{K_s}^2 + \frac{1}{2} \|\dot{\theta}\|_{K_s}^2 + \bar{\eta}$ , con  $\eta \bar{\Lambda}^{-1} \eta < \bar{\eta}$  y  $\|d(t)\| < \bar{d}$ . Por lo que el sistema es estable en el sentido de Lyapunov en la región  $\left\{ x : V(x) \leq \frac{\bar{d}}{\bar{c}} \right\}$ .  $\square$

## 3.2. Caso B: Manipulador con enlace flexible

Este caso aborda un manipulador cuya elasticidad se concentra a lo largo del enlace, en lugar de en la articulación. Las coordenadas generalizadas incluyen el ángulo efectivo del enlace  $\delta$  y el ángulo del motor  $\theta$ , los cuales están acoplados por un resorte equivalente de rigidez  $K_s$ .

### 3.2.1. Controlador PD con neurocompensación

El controlador PD con compensación por modelo para sistemas con enlace flexible tiene como objetivo estabilizar la posición del extremo del enlace. El modelo dinámico utilizado es



el siguiente

$$\begin{aligned} M(\delta)\ddot{\delta} + C(\delta, \dot{\delta})\dot{\delta} + G(\delta) + K_s(\delta - \theta) + F_\delta &= 0, \\ J\ddot{\theta} - K_s(\delta - \theta) + F_\theta &= \tau, \end{aligned} \quad (3.34)$$

con la ley de control PD

$$\tau = J(\ddot{\theta}_d + \Lambda\dot{e}) - K_s\alpha + F_\theta + G + K_r r. \quad (3.35)$$

**Observación 3.6.** *Observe que el sistema anterior es similar al manipulador con junta flexible (Caso A). El término  $F_\theta$  puede compensarse mediante la ley de control, mientras que  $F_\delta$  pasa a formar parte de la incertidumbre que delimita la región de estabilidad del sistema.*

### Estabilidad mediante una función de Lyapunov

**Proposición 3.7.** *Dado el sistema descrito por las ecuaciones dinámicas y sujeto a la ley de control propuesta, se demuestra con la siguiente función candidata de Lyapunov*

$$V = \frac{1}{2}\dot{\delta}^\top M(\delta)\dot{\delta} + \frac{1}{2}r^\top J r + \frac{1}{2}\alpha^\top K_s \alpha, \quad (3.36)$$

que el origen del sistema de errores es estable en el sentido de Lyapunov, garantizando estabilidad práctica y uniformemente acotada.

*Demostración.* Se propone la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2}\dot{\delta}^\top M(\delta)\dot{\delta} + \frac{1}{2}r^\top J r + \frac{1}{2}\alpha^\top K_s \alpha, \quad (3.37)$$

cuya derivada es

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -r^\top K_r r - (r + \dot{\delta})^\top F_\delta - (r + \dot{\delta})^\top G - \alpha^\top K_s \dot{\theta}, \\ &= -r^\top K_r r - r^\top (G + F_\delta) - \dot{\delta}^\top (G + F_\delta) - \alpha^\top K_s \dot{\theta}, \end{aligned} \quad (3.38)$$

considerando  $d_0 := F_\delta + G$  y aplicando la desigualdad de Young a los términos, la derivada se puede expresar como

$$V \leq -r^\top (K_r - \bar{\Lambda})r + \frac{1}{2}\|\dot{\delta}\|_\varepsilon^2 + \frac{1}{2}\|\alpha\|_{K_s}^2 + \frac{1}{2}\|\dot{\theta}\|_{K_s}^2 + d_0^\top \left( \bar{\Lambda}^{-1} + \frac{1}{2}\varepsilon^{-1} \right) d_0, \quad (3.39)$$

los términos de la gravedad son despreciados por la configuración del manipulador, tenemos  $d_0 = F_\delta$ , además definimos a  $d := \frac{1}{2}\|\dot{\delta}\|_\varepsilon^2 + \frac{1}{2}\|\alpha\|_{K_s}^2 + \frac{1}{2}\|\dot{\theta}\|_{K_s}^2 + d_0^\top (\bar{\Lambda}^{-1} + \frac{1}{2}\varepsilon^{-1}) d_0$ , y sabemos además que  $\|d\| < \bar{d}$  entonces,

$$V \leq -r^\top (K_r - \bar{\Lambda})r + \bar{d} \quad (3.40)$$

Este resultado implica que el sistema es estable en el sentido práctico de Lyapunov, con una cota determinada por los términos residuales  $F_\delta$ ,  $G(\delta)$  -si aplica-, y las señales  $\alpha$ ,  $\dot{\theta}$ ,  $\dot{\delta}$ . Si estas últimas permanecen acotadas, la energía total del sistema decrece, garantizando estabilidad del lazo cerrado.  $\square$

**Controlador PD con neurocompensación** Dado que la flexibilidad está distribuida a lo largo del enlace, el controlador actúa únicamente sobre el motor  $\theta$ , mientras que el enlace  $\delta$  evoluciona de manera indirecta. La red neuronal absorbe las no linealidades estructurales y los efectos del acoplamiento elástico

**Ley de control con red neuronal.** La ley de control PD con neurocompensación se expresa como

$$\tau = \hat{W}\Gamma(x) + K_r r, \quad (3.41)$$

se asume la existencia de un modelo ideal  $W^*\Gamma(x) + \eta = J(\ddot{\theta}_d + \Lambda\dot{e}) - K_s\alpha + F_\theta + G$ , con ley de adaptación  $\dot{\hat{W}} = -K_\Gamma\Gamma(x)r^\top$ ,  $K_\Gamma = K_\Gamma^\top > 0$ .

### Estabilidad del sistema compensado

**Proposición 3.8.** *Considere el sistema dinámico bajo la ley de control planteada. Con la siguiente función candidata de Lyapunov*

$$V = \frac{1}{2}\dot{\delta}^\top M(\delta)\dot{\delta} + \frac{1}{2}r^\top J r + \frac{1}{2}\alpha^\top K_s\alpha + \frac{1}{2}\text{tr} \left\{ \tilde{W}^\top K_\Gamma^{-1} \tilde{W} \right\}, \quad (3.42)$$

*se prueba que el origen del sistema de errores es estable en el sentido de Lyapunov, de forma práctica y uniformemente acotada.*

*Demostración.* Se propone la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2}\dot{\delta}^\top M(\delta)\dot{\delta} + \frac{1}{2}r^\top J r + \frac{1}{2}\alpha^\top K_s\alpha + \frac{1}{2}\text{tr} \left\{ \tilde{W}^\top K_\Gamma^{-1} \tilde{W} \right\}, \quad (3.43)$$

cuya derivada es

$$\begin{aligned}\dot{V} &= -r^\top K_r r - (r + \delta)^\top F_\delta - (r + \delta)^\top G - \alpha^\top K_s \dot{\theta} + r^\top \eta \\ &= -r^\top K_r r - r^\top (G + F_\delta + \eta) - \delta^\top (G + F_\delta) - \alpha^\top K_s \dot{\theta},\end{aligned}\quad (3.44)$$

considerando  $d_0 := F_\delta + G + \eta$  y  $d_1 := F_\delta + G$ , por la configuración del manipulador  $G = 0$ , aplicando la desigualdad de Young a los términos, la derivada se puede expresar como

$$V \leq -r^\top (K_r - \bar{\Lambda})r + \frac{1}{2}\|\dot{\delta}\|_\varepsilon^2 + \frac{1}{2}\|\alpha\|_{K_s}^2 + \frac{1}{2}\|\dot{\theta}\|_{K_s}^2 + d_0^\top \bar{\Lambda}^{-1}d_0 + d_1^\top \frac{1}{2}\varepsilon^{-1}d_1, \quad (3.45)$$

definimos a  $d := \frac{1}{2}\|\dot{\delta}\|_\varepsilon^2 + \frac{1}{2}\|\alpha\|_{K_s}^2 + \frac{1}{2}\|\dot{\theta}\|_{K_s}^2 + d_0^\top \bar{\Lambda}^{-1}d_0 + d_1^\top \frac{1}{2}\varepsilon^{-1}d_1$ , con  $\|d\| < \bar{d}$  entonces,

$$V \leq -r^\top (K_r - \bar{\Lambda})r + \bar{d} \quad (3.46)$$

Este resultado implica que el sistema es estable en el sentido práctico de Lyapunov al igual que su caso de una compensación por modelo.  $\square$

### 3.2.2. Controlador PID con neurocompensación

El PID con compensación por modelo incorpora un integrador explícito sobre el error de posición, eliminando errores en régimen permanente. Se plantea la siguiente ley de control

$$\tau = J\ddot{\theta}^d - K_s\alpha + G + F_\theta + K_p e + K_d \dot{e} + K_i z, \quad (3.47)$$

donde  $K_i > 0$  es la ganancia integral y  $\dot{z} = e$ .

#### Estabilidad mediante una función de Lyapunov

**Proposición 3.9.** *Sea el sistema descrito por las ecuaciones dinámicas bajo la ley de control propuesta. Con la siguiente función candidata de Lyapunov*

$$V = \frac{1}{2}\dot{\delta}^\top M(\delta)\dot{\delta} + \frac{1}{2}\dot{e}^\top J\dot{e} + \frac{1}{2}\alpha^\top K_s\alpha + \frac{1}{2}e^\top K_p e + \gamma e^\top K_i z + \frac{1}{2}z^\top K_i z, \quad (3.48)$$

donde  $\gamma \in (0, 1)$  es una constante escalar, se demuestra que el origen del sistema de errores es estable, práctico y uniformemente acotado.

*Demostración.* Se propone la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2}\dot{\delta}^\top M(\delta)\dot{\delta} + \frac{1}{2}\dot{e}^\top J\dot{e} + \frac{1}{2}\alpha^\top K_s\alpha + \frac{1}{2}e^\top K_p e + \gamma e^\top K_i z + \frac{1}{2}z^\top K_i z, \quad (3.49)$$

donde  $\gamma \in (0, 1)$  es una constante escalar, la derivada de la función es

$$\dot{V} = -(\dot{\delta} + \dot{e})^\top G - (\dot{\delta} + \dot{e})^\top F_\theta - \dot{e}^\top K_d \dot{e} - (1 - \gamma)\dot{e}^\top K_i z + e^\top K_i z + \gamma e^\top K_i e - \alpha^\top K_s \dot{\theta} \quad (3.50)$$

considerando  $d_0 := F_\delta + G$

$$\dot{V} = -(\dot{\delta} + \dot{e})^\top d_0 - \dot{e}^\top K_d \dot{e} - (1 - \gamma)\dot{e}^\top K_i z + e^\top K_i z + \gamma e^\top K_i e - \alpha^\top K_s \dot{\theta} \quad (3.51)$$

además, por la configuración del manipulador  $G = 0$ , aplicando la desigualdad de Young a los términos con  $\bar{\Lambda} > 0$ , esto es,  $-(\dot{\delta} + \dot{e})^\top d_0 \leq (\dot{\delta} + \dot{e})^\top \bar{\Lambda}(\dot{\delta} + \dot{e}) + d_0^\top \bar{\Lambda}^{-1} d_0$ , y distribuyendo

$$\dot{V} \leq -\dot{e}^\top \left[ \lambda_{\min}(K_d) - \left( \bar{\Lambda} + \frac{1 - \gamma}{2} \lambda_{\max}(K_i) \right) \right] \dot{e} + d(t), \quad (3.52)$$

donde  $d(t) := \dot{\delta}^\top \bar{\Lambda} \dot{\delta} + d_0^\top \bar{\Lambda}^{-1} d_0 + \left( \frac{1}{2} + \gamma \right) e^\top K_i e + \left( 1 - \frac{\gamma}{2} \right) z^\top K_i z + \frac{1}{2} \alpha^\top K_s \alpha + \frac{1}{2} \dot{\theta}^\top K_s \dot{\theta}$ , con  $d_0 = F_\delta$  pues  $G = 0$ . Lo cual implica la estabilidad práctica del lazo cerrado. La región de cota mejora al disminuir  $\|d_0\|$  y  $\lambda_{\max}(\bar{\Lambda})$ .  $\square$

**Controlador PID con neurocompensación** Similar al caso anterior, la red neuronal compensa los términos. El controlador no se modifica estructuralmente, aunque parte de la corrección es asumida por la red.

**Ley de control con red neuronal** Para esta ley de control se considera la siguiente estructura

$$\tau = \hat{W}\Gamma(x) + K_p e + K_d \dot{e} + K_i z, \quad (3.53)$$

y se asume que existe un modelo ideal tal que  $W^*\Gamma(x) + \eta = J\ddot{\theta}^d - K_s \alpha + G + F_\theta$ , y ley de aprendizaje  $\dot{\hat{W}} = -K_\Gamma \Gamma(x) r^\top$ .

**Estabilidad del sistema compensado**

**Proposición 3.10.** *Para el sistema dinámico considerado y la ley de control propuesta, se prueba con la siguiente función candidata de Lyapunov*

$$V = \frac{1}{2}\dot{\delta}^\top M(\delta)\dot{\delta} + \frac{1}{2}\dot{e}^\top J\dot{e} + \frac{1}{2}\alpha^\top K_s\alpha + \frac{1}{2}e^\top K_p e + \gamma e^\top K_i z + \frac{1}{2}z^\top K_i z, \quad (3.54)$$

$$+ \frac{1}{2}\text{tr} \left\{ \tilde{W}^\top K_\Gamma^{-1} \tilde{W} \right\},$$

donde  $\gamma \in (0, 1)$  es una constante escalar, que el origen del sistema de errores es estable en el sentido práctico y uniformemente acotado.

*Demostración.* Se propone la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2}\dot{\delta}^\top M(\delta)\dot{\delta} + \frac{1}{2}\dot{e}^\top J\dot{e} + \frac{1}{2}\alpha^\top K_s\alpha + \frac{1}{2}e^\top K_p e + \gamma e^\top K_i z + \frac{1}{2}z^\top K_i z, \quad (3.55)$$

$$+ \frac{1}{2}\text{tr} \left\{ \tilde{W}^\top K_\Gamma^{-1} \tilde{W} \right\},$$

donde  $\gamma \in (0, 1)$  es una constante escalar, la derivada de la función es

$$\dot{V} = -(\dot{\delta} + \dot{e})^\top G - (\dot{\delta} + \dot{e})^\top F_\theta - \dot{e}^\top K_d \dot{e} - (1 - \gamma)\dot{e}^\top K_i z + e^\top K_i z + \gamma e^\top K_i e - \alpha^\top K_s \dot{\theta} + \dot{e}^\top \eta \quad (3.56)$$

considerando  $d_0 := F_\delta + G + \eta$  y  $d_1 := F_\delta + G$

$$\dot{V} \leq -\dot{e}^\top \left[ \lambda_{\min}(K_d) - \left( \varepsilon + \bar{\Lambda} + \frac{1 - \gamma}{2} \lambda_{\max}(K_i) \right) \right] \dot{e} + d(t), \quad (3.57)$$

donde  $d(t) := \dot{\delta}^\top (\varepsilon + \bar{\Lambda}) \dot{\delta} + d_1^\top \varepsilon^{-1} d_1 + \frac{1}{2} d_0^\top \bar{\Lambda}^{-1} d_0 + \frac{1}{2} d_1^\top \bar{\Lambda}^{-1} d_1 + \left( \frac{1}{2} + \gamma \right) e^\top K_i e + \left( 1 - \frac{\gamma}{2} \right) z^\top K_i z + \frac{1}{2} \alpha^\top K_s \alpha + \frac{1}{2} \dot{\theta}^\top K_s \dot{\theta}$ . Esto implica la estabilidad práctica en torno a una región  $c(\bar{d})$ .  $\square$

### 3.3. Caso C: Manipulador con enlace y junta flexible

Este caso considera un manipulador que presenta simultáneamente elasticidad en la junta motriz y en el propio enlace. La dinámica resultante combina los efectos de acoplamiento torsional (como en el caso A) y flexión distribuida (como en el caso B), lo que introduce mayor complejidad en el análisis y el diseño del controlador.

### 3.3.1. Controlador PD con neurocompensación

Se busca estabilizar (o hacer seguir una referencia) la posición del extremo  $\delta$  en presencia de acoplamientos elásticos. Para ello partimos del siguiente modelo dinámico combinado de junta-enlace elástico

$$\begin{aligned} J\ddot{\theta} - K_\beta(\theta_0 - \theta) + F_\theta &= \tau, \\ K_\beta(\theta_0 - \theta) - K_\alpha(\delta - \theta_0) + F_{\theta_0} &= 0, \\ M_\varepsilon\ddot{\delta} + C\dot{\delta} + G + K_\alpha(\delta - \theta_0) + F_\delta &= 0. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Para la deflexión de la junta se utiliza  $\beta := \theta_0 - \theta$ . Con estos términos, la ley de control se plantea como

$$\tau = J(\ddot{\theta}^d + \Lambda\dot{e}) - K_\beta\beta + F_\theta + K_r r. \quad (3.59)$$

#### Estabilidad mediante una función de Lyapunov

**Proposición 3.11.** *Considere el sistema definido por las ecuaciones dinámicas y la ley de control planteada. Usando la siguiente función candidata de Lyapunov*

$$V = \frac{1}{2} \dot{\delta}^\top M_\varepsilon \dot{\delta} + \frac{1}{2} r^\top J r + \frac{1}{2} \alpha^\top K_\alpha \alpha + \frac{1}{2} \beta^\top K_\beta \beta. \quad (3.60)$$

*se concluye que el origen del sistema de errores es estable en el sentido de Lyapunov, práctico y uniformemente acotado.*

*Demostración.* Se propone la siguiente función de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2} \dot{\delta}^\top M_\varepsilon \dot{\delta} + \frac{1}{2} r^\top J r + \frac{1}{2} \alpha^\top K_\alpha \alpha + \frac{1}{2} \beta^\top K_\beta \beta. \quad (3.61)$$

Con la ley  $\tau = J(\ddot{\theta}^d + \Lambda\dot{e}) - K_\beta\beta + F_\theta + K_r r$ , de la ecuación de  $\theta$  obtenemos  $J\ddot{\theta} = J(\ddot{\theta}^d + \Lambda\dot{e}) + K_r r$ , por lo que  $r^\top J \dot{r} \rightarrow -r^\top K_r r$ . De la dinámica de  $\delta$ ,  $M_\varepsilon\ddot{\delta} + C\dot{\delta} + G + K_\alpha\alpha + F_\delta = 0$  y usando  $\dot{\alpha} = \dot{\delta} - \dot{\theta}_0$ ,  $\dot{\beta} = \dot{\theta}_0 - \dot{\theta}$ , y la restricción  $K_\beta\beta - K_\alpha\alpha + F_{\theta_0} = 0$ , se sigue que

$$\dot{V} = -r^\top K_r r - \dot{\delta}^\top (G_\delta + F_\delta) - \dot{\theta}_0^\top F_{\theta_0} - \beta^\top K_\beta \dot{\theta}. \quad (3.62)$$

Aplicando desigualdades de Young con matrices de diseño

$$\dot{V} \leq -r^\top K_r r + (t), \quad (3.63)$$

donded(t) :=  $\frac{1}{2}\dot{\delta}^\top E_\delta \dot{\delta} + \frac{1}{2}(G_\delta + F_\delta)^\top E_\delta^{-1}(G_\delta + F_\delta) + \frac{1}{2}\dot{\theta}_0^\top S_0 \dot{\theta}_0 + \frac{1}{2}F_{\theta_0}^\top S_0^{-1}F_{\theta_0} + \frac{1}{2}\beta^\top K_\beta \beta + \frac{1}{2}\dot{\theta}^\top K_\beta \dot{\theta}$ . Si  $K_r > 0$  y  $d(t)$  es acotada, existe  $\bar{d}$  tal que  $\|d(t)\| \leq \bar{d}$ , entonces

$$\dot{V} \leq -\lambda_{\min}(K_r)\|r\|^2 + \bar{d}, \quad (3.64)$$

lo cual garantiza la estabilidad práctica del lazo cerrado.  $\square$

**Controlador PD con neurocompensación** Al igual que los casos anteriores, establecemos una compensación neuronal para este caso combinado.

**Ley de control con red neuronal.** La ley de control PD con neurocompensación se expresa como

$$\tau = \hat{W}\Gamma(x) + K_r r, \quad (3.65)$$

se asume la existencia de un modelo ideal  $W^*\Gamma(x) + \eta = J(\ddot{\theta}^d + \Lambda \dot{e}) - K_\beta \beta + F_\theta$ , con ley de adaptación  $\dot{\hat{W}} = -K_\Gamma \Gamma(x)r^\top$ ,  $K_\Gamma = K_\Gamma^\top > 0$ .

#### Estabilidad del sistema compensado

**Proposición 3.12.** *Dado el sistema dinámico sujeto a la ley de control propuesta, con la siguiente función candidata de Lyapunov*

$$V = \frac{1}{2}\dot{\delta}^\top M_\epsilon \dot{\delta} + \frac{1}{2}r^\top J r + \frac{1}{2}\alpha^\top K_\alpha \alpha + \frac{1}{2}\beta^\top K_\beta \beta + \frac{1}{2}\text{tr} \left\{ \tilde{W}^\top K_\Gamma^{-1} \tilde{W} \right\}, \quad (3.66)$$

*se obtiene que el origen del sistema de errores es estable en el sentido de Lyapunov, garantizando estabilidad práctica y uniformemente acotada.*

*Demostración.* Se propone la siguiente función de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2}\dot{\delta}^\top M_\epsilon \dot{\delta} + \frac{1}{2}r^\top J r + \frac{1}{2}\alpha^\top K_\alpha \alpha + \frac{1}{2}\beta^\top K_\beta \beta + \frac{1}{2}\text{tr} \left\{ \tilde{W}^\top K_\Gamma^{-1} \tilde{W} \right\}, \quad (3.67)$$

aplicando la desigualdad de Young matricial con matrices de diseño  $\bar{\Lambda} > 0$ ,  $E_\delta > 0$ ,  $S_0 > 0$ , la derivada en el tiempo es

$$\dot{V} \leq -r^\top (K_r - \bar{\Lambda}) r + d(t), \quad (3.68)$$

con  $d(t) = \eta^\top \bar{\Lambda}_r^{-1} \eta + \frac{1}{2}\dot{\delta}^\top E_\delta \dot{\delta} + \frac{1}{2}(G_\delta + F_\delta)^\top E_\delta^{-1}(G_\delta + F_\delta) + \frac{1}{2}\dot{\theta}_0^\top S_0 \dot{\theta}_0 + \frac{1}{2}F_{\theta_0}^\top S_0^{-1}F_{\theta_0} + \frac{1}{2}\beta^\top K_\beta \beta + \frac{1}{2}\dot{\theta}^\top K_\beta \dot{\theta}$ . Si  $K_r - \bar{\Lambda}_r > 0$  y  $d(t)$  es acotada  $\exists \bar{d}$ , entonces implica la estabilidad práctica del lazo cerrado en una región.  $\square$

### 3.3.2. Controlador PID con neurocompensación

Se busca seguimiento de la posición del extremo  $\delta$  en presencia de acoplamientos elásticos y gravedad no despreciables, actuando sobre la junta  $\theta$  con un PID y compensando explícitamente el par elástico de la junta y fricción/perturbaciones medibles en el actuador. La ley de control es

$$\tau = J\ddot{\theta}^d - K_\beta\beta + F_\theta + K_p e + K_d\dot{e} + K_i z, \quad \dot{z} = e, \quad (3.69)$$

donde  $e := \theta^d - \theta$ ,  $\beta := \theta_0 - \theta$  y  $K_p, K_d, K_i > 0$ . **Estabilidad mediante una función de Lyapunov**

**Proposición 3.13.** *Para el sistema descrito por las ecuaciones dinámicas correspondientes bajo la acción de la ley de control propuesta, se establece con la siguiente función candidata de Lyapunov*

$$\begin{aligned} V = & \frac{1}{2} \dot{\delta}^\top M_\varepsilon \dot{\delta} + \frac{1}{2} \dot{e}^\top J \dot{e} + \frac{1}{2} \alpha^\top K_\alpha \alpha + \frac{1}{2} \beta^\top K_\beta \beta + \frac{1}{2} e^\top K_p e + \gamma e^\top K_i z \\ & + \frac{1}{2} z^\top K_i z, \end{aligned} \quad (3.70)$$

con  $\alpha := \delta - \theta_0$  y  $\gamma \in (0, 1)$ , que el origen del sistema de errores es estable de forma práctica y uniformemente acotada.

*Demostración.* Considérese el candidato

$$\begin{aligned} V = & \frac{1}{2} \dot{\delta}^\top M_\varepsilon \dot{\delta} + \frac{1}{2} \dot{e}^\top J \dot{e} + \frac{1}{2} \alpha^\top K_\alpha \alpha + \frac{1}{2} \beta^\top K_\beta \beta + \frac{1}{2} e^\top K_p e + \gamma e^\top K_i z \\ & + \frac{1}{2} z^\top K_i z, \end{aligned} \quad (3.71)$$

con  $\alpha := \delta - \theta_0$  y  $\gamma \in (0, 1)$ . De la ecuación de  $\theta$ ,  $J\ddot{\theta} - K_\beta\beta + F_\theta = \tau$ , al sustituir  $\tau$  se obtiene

$$J\ddot{\theta} = J\ddot{\theta}^d + K_p e + K_d \dot{e} + K_i z \Rightarrow \dot{e}^\top J \ddot{e} = -\dot{e}^\top K_p e - \dot{e}^\top K_d \dot{e} - \dot{e}^\top K_i z. \quad (3.72)$$

Sumando los términos de  $V$  que involucran  $e, z$  (y usando  $\dot{z} = e$ ) resulta

$$-\dot{e}^\top K_d \dot{e} - (1 - \gamma) \dot{e}^\top K_i z + e^\top K_i z + \gamma e^\top K_i e. \quad (3.73)$$

Para la pareja  $(\delta, \theta_0)$ , en conjunto,

$$\dot{V} = -\dot{e}^\top K_d \dot{e} - (1 - \gamma) \dot{e}^\top K_i z + e^\top K_i z + \gamma e^\top K_i e - \dot{\delta}^\top (G_\delta + F_\delta) - \dot{\theta}_0^\top F_{\theta_0} - \beta^\top K_\beta \dot{\theta}. \quad (3.74)$$



Para matrices de diseño  $E_\delta > 0$ ,  $S_0 > 0$ , la derivada temporal se simplifica a

$$\dot{V} \leq -\dot{e}^\top \left[ \lambda_{\min}(K_d) - \frac{1-\gamma}{2} \lambda_{\max}(K_i) \right] \dot{e} + d(t), \quad (3.75)$$

donde  $d(t) = \left(\frac{1}{2} + \gamma\right) e^\top K_i e + \left(1 - \frac{\gamma}{2}\right) z^\top K_i z + \frac{1}{2} \beta^\top K_\beta \beta + \frac{1}{2} \dot{\theta}^\top K_\beta \dot{\theta} + \frac{1}{2} \dot{\delta}^\top E_\delta \dot{\delta} + \frac{1}{2} (G_\delta + F_\delta)^\top E_\delta^{-1} (G_\delta + F_\delta) + \frac{1}{2} \dot{\theta}_0^\top S_0 \dot{\theta}_0 + \frac{1}{2} F_{\theta_0}^\top S_0^{-1} F_{\theta_0}$ . Si  $d(t)$  es acotada, existe  $\bar{d}$  tal que  $\|d(t)\| \leq \bar{d}$ , entonces implica la estabilidad práctica del lazo cerrado.  $\square$

**Controlador PD con neurocompensación** Al igual que todos los casos anteriores, establecemos una compensación neuronal para este caso combinado. **Ley de control con red neuronal** Para esta ley de control se considera la siguiente estructura

$$\tau = \hat{W}\Gamma(x) + K_p e + K_d \dot{e} + K_i z, \quad (3.76)$$

y se asume que existe un modelo ideal tal que  $W^*\Gamma(x) + \eta = J\ddot{\theta}^d - K_\beta \beta + F_\theta$ , y ley de aprendizaje  $\dot{\hat{W}} = -K_\Gamma \Gamma(x) r^\top$ .

### Estabilidad mediante una función de Lyapunov

**Proposición 3.14.** *Considere el sistema bajo estudio con la ley de control propuesta. Con la siguiente función candidata de Lyapunov*

$$\begin{aligned} V = & \frac{1}{2} \dot{\delta}^\top M_\varepsilon \dot{\delta} + \frac{1}{2} \dot{e}^\top J \dot{e} + \frac{1}{2} \alpha^\top K_\alpha \alpha + \frac{1}{2} \beta^\top K_\beta \beta + \frac{1}{2} e^\top K_p e + \gamma e^\top K_i z \\ & + \frac{1}{2} z^\top K_i z + \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ \tilde{W}^\top K_\Gamma^{-1} \tilde{W} \right\}, \end{aligned} \quad (3.77)$$

se asegura que el origen del sistema de errores es estable, práctico y uniformemente acotado.

*Demostración.* Partimos de

$$\begin{aligned} V = & \frac{1}{2} \dot{\delta}^\top M_\varepsilon \dot{\delta} + \frac{1}{2} \dot{e}^\top J \dot{e} + \frac{1}{2} \alpha^\top K_\alpha \alpha + \frac{1}{2} \beta^\top K_\beta \beta + \frac{1}{2} e^\top K_p e + \gamma e^\top K_i z \\ & + \frac{1}{2} z^\top K_i z + \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ \tilde{W}^\top K_\Gamma^{-1} \tilde{W} \right\}, \end{aligned} \quad (3.78)$$

Aplicando desigualdades de Young con matrices de diseño  $\bar{\Lambda} > 0$ ,  $E_\delta > 0$ ,  $S_0 > 0$ , se llega a la siguiente expresión

$$\dot{V} \leq -\dot{e}^\top \left[ \lambda_{\min}(K_d) - \left( \bar{\Lambda} + \frac{1-\gamma}{2} \lambda_{\max} K_i \right) \right] \dot{e} + d(t), \quad (3.79)$$

con  $d(t) = \left(\frac{1}{2} + \gamma\right)e^\top K_i e + \left(1 - \frac{\gamma}{2}\right)z^\top K_i z + \frac{1}{2}\beta^\top K_\beta \beta + \frac{1}{2}\dot{\theta}^\top K_\beta \dot{\theta} + \frac{1}{2}\dot{\delta}^\top E_\delta \dot{\delta} + \frac{1}{2}(G_\delta + F_\delta)^\top E_\delta^{-1}(G_\delta + F_\delta) + \frac{1}{2}\dot{\theta}_0^\top S_0 \dot{\theta}_0 + \frac{1}{2}F_{\theta_0}^\top S_0^{-1}F_{\theta_0} + \eta^\top \bar{\Lambda}^{-1}\eta$ . Si  $d(t)$  es acotada, entonces implica la estabilidad práctica del lazo cerrado en una región  $c(\bar{d})$ .  $\square$

**Observación 3.15** (Alcance de los resultados y efecto de la neurocompensación). *De los resultados anteriores es importante notar:*

1. *En los apartados anteriores se obtuvo la estabilidad práctica (UUB): si los parámetros y perturbaciones del sistema permanecen acotados, existe una función clase- $\mathcal{K}$ ,  $c(\cdot)$ , tal que la trayectoria entra y permanece en la bola*

$$\mathcal{B}_{c(\bar{d})} = \{x : V(x) \leq c(\bar{d})\},$$

*donde  $\bar{d}$  agrega las cotas de los términos residuales (gravedad no compensada, fricción o perturbaciones, acoples elásticos, referencias y sus derivadas, etc.);*

2. *Las condiciones de diseño, por ejemplo,*

$$K_r - \bar{\Lambda}_r > 0 \quad \text{o} \quad K_d - \left(\bar{\Lambda} + \frac{1-\gamma}{2} K_i\right) > 0$$

*aseguran disipación suficiente y, por tanto, la entrada a  $\mathcal{B}_{c(\bar{d})}$ . No implican convergencia global al origen, sino acotamiento en torno al cero con radio  $c(\bar{d})$ ;*

3. *Si se emplea neurocompensación con una función de costo que, además de compensar incertidumbres, penalice explícitamente medidas de vibración (p.ej.,  $\|\alpha\|$ ,  $\|\beta\|$ ,  $\|\dot{\delta}\|$ ,  $\|\delta - \theta_0\|$ ), entonces*

$$\bar{d} \longmapsto \bar{d}_{\text{eff}} \leq \bar{d}, \quad \Rightarrow \quad \mathcal{B}_{c(\bar{d}_{\text{eff}})} \subseteq \mathcal{B}_{c(\bar{d})}.$$

*Es decir, la región práctica de estabilidad puede reducirse al disminuir los términos residuales mediante aprendizaje;*

4. *Las demostraciones no cambian: la estructura de Lyapunov y las condiciones de ganancia permanecen; lo que se modifica implícitamente es la cota agregada  $\bar{d}$  (y con ello el radio  $c(\bar{d})$ ) cuando la red atenúa perturbaciones/oscilaciones;*

5. *No se detalla esta reducción en las pruebas porque depende del caso (arquitectura, señales de entrenamiento, ponderaciones en la pérdida, persistencia de excitación, etc.). Formalmente, basta garantizar acotación y reducción de los términos de aproximación/perturbación para inducir  $\bar{d}_{\text{eff}} < \bar{d}$  sin alterar los teoremas de estabilidad práctica.*

### 3.4. Conclusión del capítulo

Este capítulo presenta el análisis de estabilidad de cuatro esquemas de control aplicados a manipuladores con flexibilidad estructural, considerando tres configuraciones: junta flexible, enlace flexible y modelo combinado. En cada caso se estudian controladores PD y PID, con y sin compensación neuronal, derivando condiciones explícitas de estabilidad en el sentido de Lyapunov. Los resultados muestran que los esquemas con compensación por modelo establecen estabilidad práctica bajo supuestos estructurales adecuados, mientras que la incorporación de redes neuronales no degrada la estabilidad ni la convergencia del sistema, al tiempo que compensa dinámicas no modeladas.



## CAPÍTULO 4

# Evaluación Comparativa de Desempeño en Simulación y Experimentación

Este capítulo evalúa los esquemas de control propuestos en los tres modelos desarrollados: junta flexible (Caso A), enlace flexible (Caso B) y sistema combinado (Caso C). La evaluación incluye la identificación de coeficientes dinámicos mediante mínimos cuadrados y la comparación de seis configuraciones de control (tres PD y tres PID) por modelo, tanto en simulación como en experimentación evaluados con índices de desempeño.

### 4.1. Referencias Utilizadas

Para el seguimiento se utilizaron tres tipos de trayectoria representativas:

**Trayectoria cúbica continua (C1):** transición suave desde 0 hasta 60 grados en el intervalo  $[0, T_f]$ , con derivadas inicial y final nulas:

$$\theta_d(t) = \frac{180}{T_f^2}t^2 - \frac{120}{T_f^3}t^3$$

**Trayectoria de orden 4 sube-baja (C2):** perfil simétrico que asciende a 60 grados y regresa a 0 en  $[0, T_f]$ :

$$\theta_d(t) = \frac{960}{T_f^2}t^2 - \frac{1920}{T_f^3}t^3 + \frac{960}{T_f^4}t^4$$

**Trayectoria híbrida cúbica-senoidal amortiguada (C3):** se divide en dos fases. En la primera, el sistema se mueve de 0 a 30 grados en  $[0, T_1]$ , con:

$$\theta_d(t) = \frac{90}{T_1^2}t^2 - \frac{60}{T_1^3}t^3, \quad 0 \leq t \leq T_1$$

donde  $T_1 = T_f/3$ . En la segunda fase  $t > T_1$ , la referencia evoluciona de 30 a 60 grados mediante:

$$\theta_d(t) = 30 + 30 \left(1 - e^{-d\tau} \cos(\omega\tau)\right), \quad t > T_1, \quad \tau = \frac{t - T_1}{T_2}, \quad T_2 = T_f - T_1$$

con  $d$  factor de amortiguamiento y  $\omega$  frecuencia angular.

Todas estas trayectorias fueron diseñadas para representar condiciones exigentes y variadas en sistemas con acoplamiento elástico. Se utiliza un tiempo total  $T_f = 15$  s.

## 4.2. Entorno de simulación

Para evaluar el desempeño de los controladores, los coeficientes de los modelos dinámicos (Capítulo 2) se estiman numéricamente mediante el método de Mínimos Cuadrados (LS), a partir de datos experimentales obtenidos en la plataforma física. Las expresiones adaptadas para la simulación, junto con su validación e identificación, se presentan en el Anexo A.

## 4.3. Plataforma Experimental

A continuación, se presentan resultados de simulación y validación experimental en el sistema Quanser de junta flexible, evaluando el desempeño del controlador propuesto. Los controladores PD/PID fueron sintonizados heurísticamente para estabilizar el sistema.

### Descripción de la plataforma experimental

Las señales de control y adquisición se implementaron en tiempo real con Simulink y una interfaz Quanser Q2-USB. Las Figuras 4.1 muestran los sistemas físicos utilizados.

---



(a) Manipulador junta flexible    (b) Manipulador enlace flexible    (c) Manipulador combinado

Figura 4.1: Sistemas físicos utilizados en los experimentos para los tres casos de estudio.

El paso de integración para esta simulación es de 0.001 s y el método de integración es de tipo *Euler*. Se utilizaron treinta neuronas y los datos de entrada a la red neuronal fueron

$$x = \left[ \theta, \dot{\theta}, e, \dot{e}, \int e, \theta^d, \dot{\theta}^d, \ddot{\theta}^d, \alpha, \dot{\alpha}, \delta, \dot{\delta} \right]. \quad (4.1)$$

Para el manipulador combinado, los datos de entrada se complementan mediante la inclusión de los estados  $\left[ \beta, \dot{\beta} \right]$ . El programa utilizado para la implementación de la red neuronal se muestra en el apéndice A. Los módulos utilizados en la implementación fueron: *Quanser Q2-USB*, *Quanser VoltPAQ-X1*, *Rotary Flexible Joint module*, *Rotary Flexible Link module*. En el manipulador combinado, las dos plataformas se integraron mediante un acoplamiento vertical.

## 4.4. Resultados de la neurocompensación

A continuación, se presentan los resultados de simulación y experimentación para los tres casos de estudio: junta flexible, enlace flexible y sistema combinado. Se incluyen las trayectorias deseadas y reales, el error de seguimiento, la señal de control aplicada y la diferencia angular entre el eje motriz y el eje de salida. Las pruebas experimentales se realizaron sobre la plataforma Quanser, replicando las condiciones de simulación.

#### 4.4.1. Caso A – Manipulador con Junta Flexible

La medición de posición se realiza mediante un encoder óptico, por lo que los datos son discretos y dependen de la resolución del sensor, un efecto que no se refleja en la simulación.

En las figuras se aprecia que, tanto en los resultados simulados como en los experimentales, la compensación mejora el desempeño de los controladores; las tablas complementan esta evidencia con un resumen de los valores obtenidos.

#### Resultados en simulación

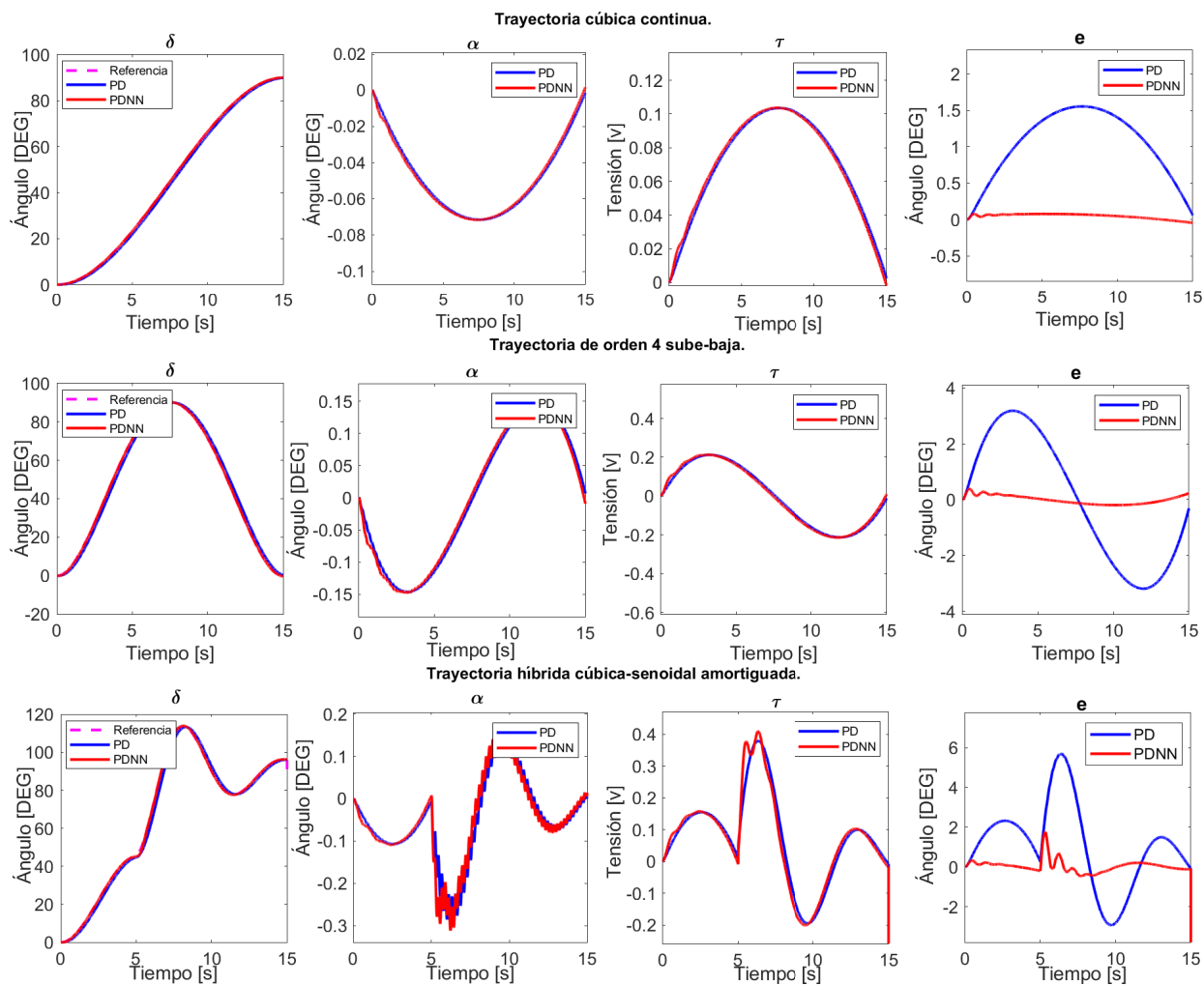


Figura 4.2: Simulación con controlador PD en el manipulador con junta flexible,  $PD_3$ .



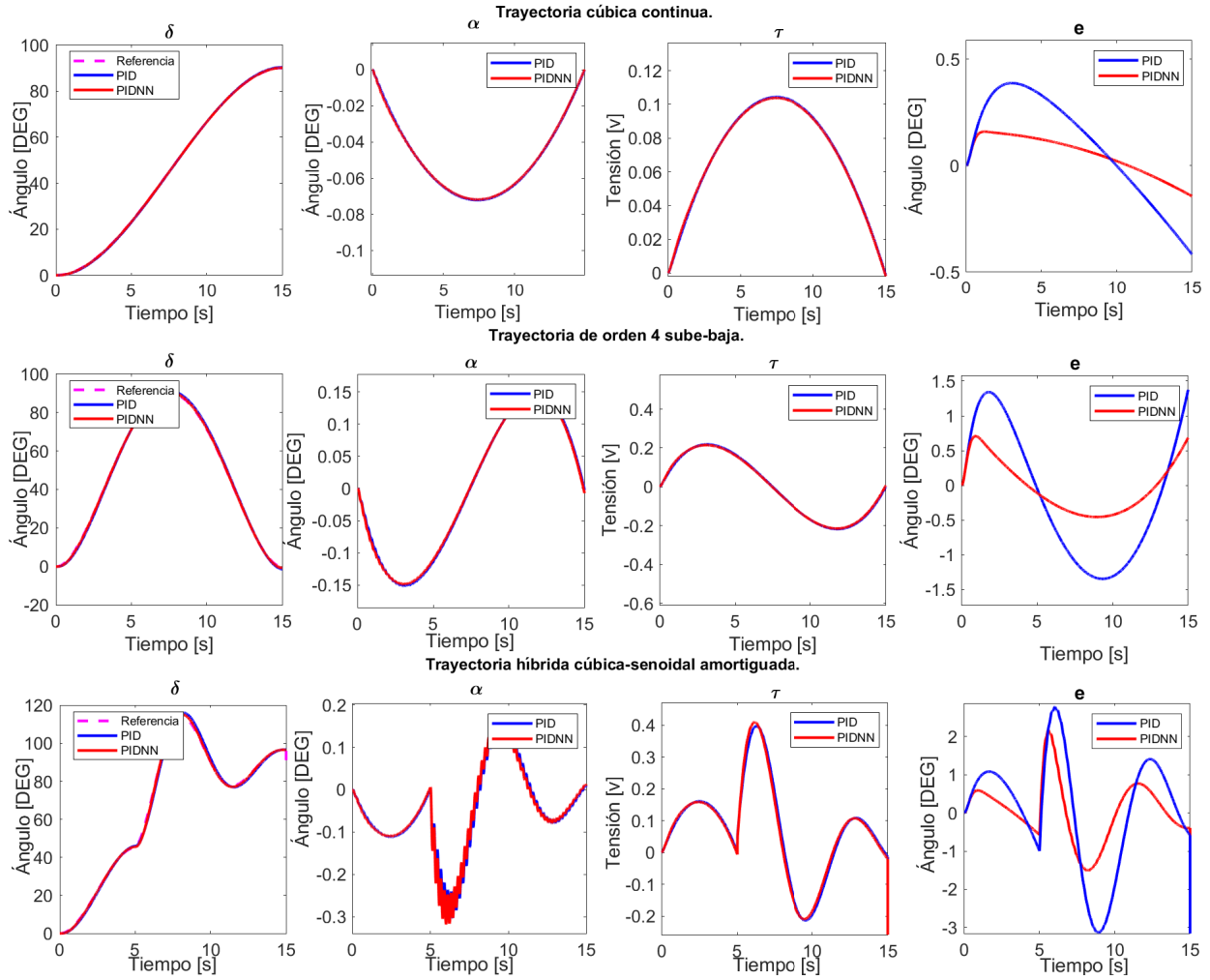
Figura 4.3: Simulación con controlador PID en el manipulador con junta flexible,  $PID_3$ .

Tabla 4.1: Índices de desempeño para controladores PD/PID simulación (Caso A)

| Curva                          | Ganancias                | Variante | ISE     | IAE    | ITAE   | ITSE   | MSE                  | MAE    |
|--------------------------------|--------------------------|----------|---------|--------|--------|--------|----------------------|--------|
| <i>Proporcional-Derivativo</i> |                          |          |         |        |        |        |                      |        |
| C1                             | $K_p = 2$ , $K_d = 0.05$ | Clásico  | 0.0224  | 0.5294 | 4.11   | 0.1745 | 0.0015               | 0.0353 |
|                                |                          | NN       | 0.00005 | 0.0251 | 0.157  | 0.0003 | $3.6 \times 10^{-6}$ | 0.0017 |
|                                | $K_p = 3$ , $K_d = 0.15$ | Clásico  | 0.0102  | 0.3574 | 2.747  | 0.0766 | 0.0007               | 0.0238 |
|                                |                          | NN       | 0.00044 | 0.0227 | 0.1402 | 0.0002 | $2.9 \times 10^{-6}$ | 0.0015 |
|                                | $K_p = 4$ , $K_d = 0.25$ | Clásico  | 0.0059  | 0.2713 | 2.074  | 0.0450 | 0.0004               | 0.0181 |

Continúa en la siguiente página

| Curva                                   | Ganancias                              | Variante | ISE                   | IAE           | ITAE          | ITSE           | MSE                   | MAE           |
|-----------------------------------------|----------------------------------------|----------|-----------------------|---------------|---------------|----------------|-----------------------|---------------|
|                                         |                                        | NN       | $1.56 \times 10^{-5}$ | <b>0.0139</b> | <b>0.0858</b> | <b>0.00008</b> | $1.04 \times 10^{-6}$ | <b>0.0009</b> |
| C2                                      | $K_p = 2$ , $K_d = 0.05$               | Clásico  | 0.0903                | 1.053         | 8.154         | 0.7019         | 0.0060                | 0.0702        |
|                                         |                                        | NN       | 0.0008                | 0.0916        | 0.6604        | 0.0051         | $5.27 \times 10^{-5}$ | 0.0061        |
|                                         | $K_p = 3$ , $K_d = 0.15$               | Clásico  | 0.0414                | 0.713         | 5.472         | 0.3180         | 0.0028                | 0.0475        |
|                                         |                                        | NN       | 0.0006                | 0.0804        | 0.5767        | 0.0038         | $3.90 \times 10^{-5}$ | 0.0054        |
|                                         | $K_p = 4$ , $K_d = 0.25$               | Clásico  | 0.0239                | 0.5417        | 4.137         | 0.1824         | 0.0016                | 0.0361        |
|                                         |                                        | NN       | <b>0.0001</b>         | <b>0.0349</b> | <b>0.241</b>  | <b>0.0006</b>  | $7.08 \times 10^{-6}$ | <b>0.0023</b> |
| C3                                      | $K_p = 2$ , $K_d = 0.05$               | Clásico  | 0.0955                | 0.9734        | 6.802         | 0.6443         | 0.0064                | 0.0649        |
|                                         |                                        | NN       | 0.0050                | 0.1906        | 1.389         | 0.0332         | 0.0003                | 0.0127        |
|                                         | $K_p = 3$ , $K_d = 0.15$               | Clásico  | 0.0445                | 0.6619        | 4.586         | 0.2975         | 0.0030                | 0.0441        |
|                                         |                                        | NN       | 0.0032                | 0.1577        | 1.162         | 0.0219         | 0.0002                | 0.0105        |
|                                         | $K_p = 4$ , $K_d = 0.25$               | Clásico  | 0.0259                | 0.5037        | 3.473         | 0.1719         | 0.0017                | 0.0336        |
|                                         |                                        | NN       | <b>0.0004</b>         | <b>0.0539</b> | <b>0.3714</b> | <b>0.0031</b>  | $3.30 \times 10^{-5}$ | <b>0.0035</b> |
| <i>Proporcional-Integral-Derivativo</i> |                                        |          |                       |               |               |                |                       |               |
| C1                                      | $K_p = 1$ , $K_i = 0.9$ , $K_d = 0.05$ | Clásico  | 0.0038                | 0.2042        | 1.501         | 0.0270         | 0.0003                | 0.0136        |
|                                         |                                        | NN       | $7.75 \times 10^{-5}$ | 0.0282        | 0.1798        | 0.0004         | $5.17 \times 10^{-6}$ | 0.0019        |
|                                         | $K_p = 3$ , $K_i = 2$ , $K_d = 0.15$   | Clásico  | 0.0007                | 0.0889        | 0.6336        | 0.0047         | $4.56 \times 10^{-5}$ | 0.0059        |
|                                         |                                        | NN       | $5.62 \times 10^{-5}$ | 0.0255        | 0.1601        | 0.0003         | $3.75 \times 10^{-6}$ | 0.0017        |
|                                         | $K_p = 5$ , $K_i = 3$ , $K_d = 0.3$    | Clásico  | 0.0003                | 0.0599        | 0.4167        | 0.0020         | $2.05 \times 10^{-5}$ | 0.0040        |
|                                         |                                        | NN       | $4.77 \times 10^{-5}$ | <b>0.0236</b> | <b>0.1476</b> | <b>0.0002</b>  | $3.18 \times 10^{-6}$ | <b>0.0015</b> |
| C2                                      | $K_p = 1$ , $K_i = 0.9$ , $K_d = 0.05$ | Clásico  | 0.0587                | 0.8373        | 6.142         | 0.4171         | 0.0039                | 0.0558        |
|                                         |                                        | NN       | 0.0013                | 0.1118        | 0.7864        | 0.0074         | $8.43 \times 10^{-5}$ | 0.0075        |
|                                         | $K_p = 3$ , $K_i = 2$ , $K_d = 0.15$   | Clásico  | 0.0094                | 0.3361        | 2.490         | 0.0688         | 0.0006                | 0.0224        |
|                                         |                                        | NN       | 0.0008                | 0.0931        | 0.6703        | 0.0052         | $5.20 \times 10^{-5}$ | 0.0062        |
|                                         | $K_p = 5$ , $K_i = 3$ , $K_d = 0.3$    | Clásico  | 0.0040                | 0.2202        | 1.631         | 0.0295         | 0.0003                | 0.0147        |
|                                         |                                        | NN       | <b>0.0006</b>         | <b>0.0843</b> | <b>0.6045</b> | <b>0.0041</b>  | $4.11 \times 10^{-5}$ | <b>0.0056</b> |
| C3                                      | $K_p = 1$ , $K_i = 0.9$ , $K_d = 0.05$ | Clásico  | 0.2173                | 1.434         | 12.18         | 1.947          | 0.0145                | 0.0956        |
|                                         |                                        | NN       | 0.0117                | 0.2716        | 1.966         | 0.0794         | 0.0008                | 0.0181        |
|                                         | $K_p = 3$ , $K_i = 2$ , $K_d = 0.15$   | Clásico  | 0.0254                | 0.4908        | 3.886         | 0.2074         | 0.0017                | 0.0327        |
|                                         |                                        | NN       | 0.0042                | 0.1851        | 1.376         | 0.0294         | 0.0003                | 0.0123        |
|                                         | $K_p = 5$ , $K_i = 3$ , $K_d = 0.3$    | Clásico  | 0.0097                | 0.3044        | 2.370         | 0.0778         | 0.0006                | 0.0203        |
|                                         |                                        | NN       | <b>0.0027</b>         | <b>0.1573</b> | <b>1.184</b>  | <b>0.0203</b>  | <b>0.0001</b>         | <b>0.0104</b> |

## Resultados experimentales

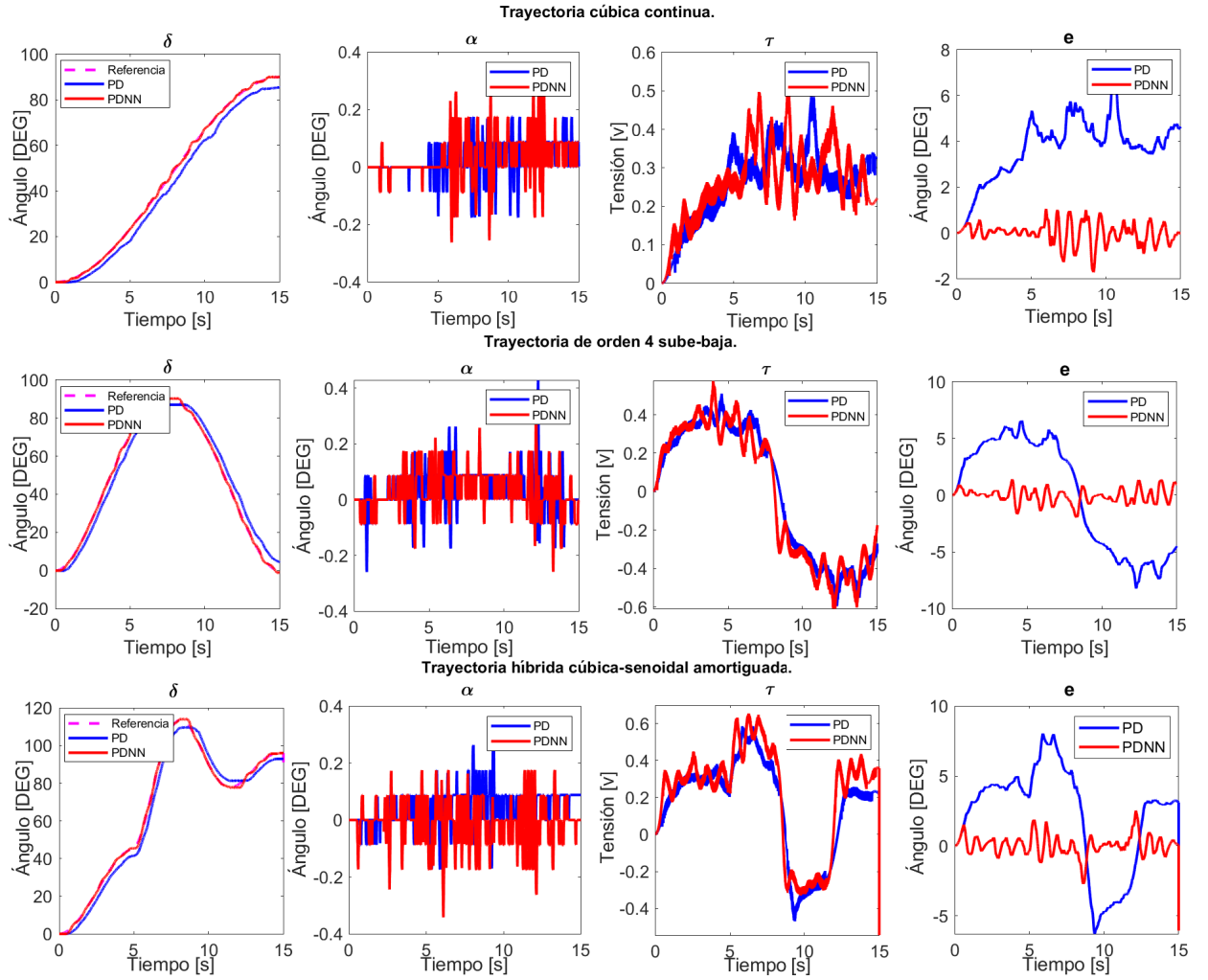


Figura 4.4: Experimentos con controlador PD en el manipulador con junta flexible,  $PD_3$ .

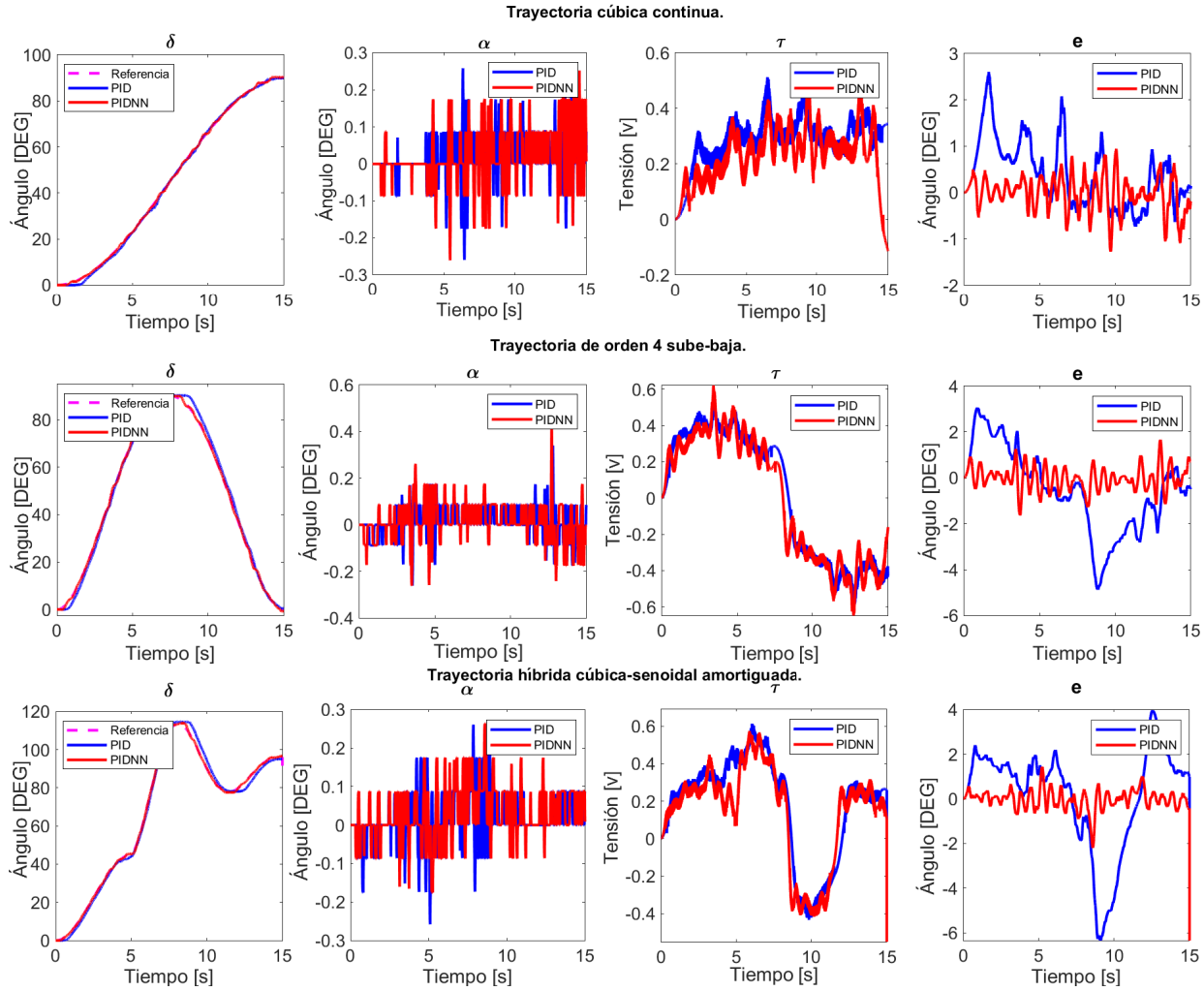


Figura 4.5: Experimentos con controlador PID en el manipulador con junta flexible,  $PID_3$ .

Tabla 4.2: Índices de desempeño para controladores PD/PID experimental (Caso A)

| Curva                          | Ganancias                | Variante | ISE    | IAE    | ITAE  | ITSE   | MSE    | MAE    |
|--------------------------------|--------------------------|----------|--------|--------|-------|--------|--------|--------|
| <i>Proporcional-Derivativo</i> |                          |          |        |        |       |        |        |        |
| C1                             | $K_p = 2$ , $K_d = 0.05$ | Clásico  | 0.2716 | 1.884  | 16.57 | 2.535  | 0.0181 | 0.1256 |
|                                |                          | NN       | 0.0038 | 0.1852 | 1.503 | 0.0322 | 0.0002 | 0.0123 |
|                                | $K_p = 3$ , $K_d = 0.15$ | Clásico  | 0.2134 | 1.659  | 15.08 | 2.127  | 0.0142 | 0.1106 |
|                                |                          | NN       | 0.0024 | 0.1428 | 1.092 | 0.0186 | 0.0001 | 0.0095 |
|                                | $K_p = 4$ , $K_d = 0.25$ | Clásico  | 0.0705 | 0.9652 | 8.237 | 0.6282 | 0.0047 | 0.0643 |

*Continúa en la siguiente página*

| Curva                            | Ganancias                              | Variante | ISE           | IAE           | ITAE          | ITSE          | MSE                   | MAE           |
|----------------------------------|----------------------------------------|----------|---------------|---------------|---------------|---------------|-----------------------|---------------|
|                                  |                                        | NN       | <b>0.0009</b> | <b>0.0883</b> | <b>0.7437</b> | <b>0.0083</b> | $6.41 \times 10^{-5}$ | <b>0.0058</b> |
| C2                               | $K_p = 2$ , $K_d = 0.05$               | Clásico  | 0.4484        | 2.405         | 19.1          | 3.662         | 0.0298                | 0.1603        |
|                                  |                                        | NN       | 0.0141        | 0.3416        | 2.866         | 0.128         | 0.0009                | 0.0227        |
|                                  | $K_p = 3$ , $K_d = 0.15$               | Clásico  | 0.1748        | 1.525         | 12.35         | 1.484         | 0.0116                | 0.1017        |
|                                  |                                        | NN       | 0.0059        | 0.2275        | 1.85          | 0.0507        | 0.0003                | 0.0151        |
|                                  | $K_p = 4$ , $K_d = 0.25$               | Clásico  | 0.1086        | 1.202         | 9.841         | 0.9426        | 0.0072                | 0.0801        |
|                                  |                                        | NN       | <b>0.0018</b> | <b>0.1293</b> | <b>1.075</b>  | <b>0.0158</b> | <b>0.0001</b>         | <b>0.0086</b> |
| C3                               | $K_p = 2$ , $K_d = 0.05$               | Clásico  | 0.3077        | 1.913         | 13.7          | 2.096         | 0.0205                | 0.1275        |
|                                  |                                        | NN       | 0.0206        | 0.4031        | 3.105         | 0.1671        | 0.0013                | 0.0268        |
|                                  | $K_p = 3$ , $K_d = 0.15$               | Clásico  | 0.1391        | 1.303         | 9.433         | 0.9577        | 0.0092                | 0.0868        |
|                                  |                                        | NN       | 0.0099        | 0.2589        | 1.997         | 0.0811        | 0.0006                | 0.0172        |
|                                  | $K_p =$ , $K_d =$                      | Clásico  | 0.0847        | 1.037         | 7.58          | 0.5967        | 0.0056                | 0.0691        |
|                                  |                                        | NN       | <b>0.0024</b> | <b>0.1401</b> | <b>1.059</b>  | <b>0.0199</b> | <b>0.0001</b>         | <b>0.0093</b> |
| Proporcional-Integral-Derivativo |                                        |          |               |               |               |               |                       |               |
| C1                               | $K_p = 4$ , $K_i = 0.9$ , $K_d = 0.05$ | Clásico  | 0.0415        | 0.6392        | 4.908         | 0.3072        | 0.0027                | 0.0426        |
|                                  |                                        | NN       | 0.0124        | 0.3284        | 2.499         | 0.0898        | 0.0008                | 0.0219        |
|                                  | $K_p = 3$ , $K_i = 2$ , $K_d = 0.15$   | Clásico  | 0.0060        | 0.2408        | 1.608         | 0.0344        | 0.0004                | 0.01605       |
|                                  |                                        | NN       | 0.0026        | 0.1529        | 1.37          | 0.0253        | 0.0001                | 0.0102        |
|                                  | $K_p = 5$ , $K_i = 3$ , $K_d = 0.3$    | Clásico  | 0.0030        | 0.1637        | 0.9386        | 0.0132        | 0.0002                | 0.0109        |
|                                  |                                        | NN       | <b>0.0006</b> | <b>0.0766</b> | <b>0.6561</b> | <b>0.0062</b> | $4.43 \times 10^{-5}$ | <b>0.0050</b> |
| C2                               | $K_p = 4$ , $K_i = 0.9$ , $K_d = 0.05$ | Clásico  | 0.2468        | 1.475         | 10.97         | 1.831         | 0.0164                | 0.0983        |
|                                  |                                        | NN       | 0.0331        | 0.5741        | 4.685         | 0.2811        | 0.0022                | 0.0382        |
|                                  | $K_p = 3$ , $K_i = 2$ , $K_d = 0.15$   | Clásico  | 0.0417        | 0.6333        | 4.705         | 0.313         | 0.0027                | 0.0422        |
|                                  |                                        | NN       | 0.0063        | 0.2381        | 1.747         | 0.0417        | 0.0004                | 0.0158        |
|                                  | $K_p = 5$ , $K_i = 3$ , $K_d = 0.3$    | Clásico  | 0.0165        | 0.3929        | 2.899         | 0.1263        | 0.0011                | 0.0261        |
|                                  |                                        | NN       | <b>0.0013</b> | <b>0.1085</b> | <b>0.8399</b> | <b>0.0103</b> | $8.68 \times 10^{-5}$ | <b>0.0072</b> |
| C3                               | $K_p = 4$ , $K_i = 0.9$ , $K_d = 0.05$ | Clásico  | 0.458         | 2.106         | 18.93         | 4.456         | 0.0305                | 0.1404        |
|                                  |                                        | NN       | 0.0576        | 0.652         | 4.794         | 0.4657        | 0.0038                | 0.0434        |
|                                  | $K_p = 3$ , $K_i = 2$ , $K_d = 0.15$   | Clásico  | 0.0665        | 0.7512        | 6.299         | 0.5913        | 0.0044                | 0.0500        |
|                                  |                                        | NN       | 0.0099        | 0.2672        | 2.148         | 0.0879        | 0.0006                | 0.0178        |
|                                  | $K_p = 5$ , $K_i = 3$ , $K_d = 0.3$    | Clásico  | 0.0249        | 0.4846        | 4.072         | 0.2277        | 0.0016                | 0.0323        |
|                                  |                                        | NN       | <b>0.0009</b> | <b>0.0855</b> | <b>0.663</b>  | <b>0.0075</b> | $6.34 \times 10^{-5}$ | <b>0.0057</b> |

#### 4.4.2. Caso B – Manipulador con Enlace Flexible

En este caso, la medición de posición es de naturaleza analógica y, por lo tanto, continua. Sin embargo, presenta variaciones asociadas al proceso de adquisición de datos, ya sea por oscilaciones pequeñas o por ruido de medición, aspectos que no se consideran en la simulación.

Las figuras ilustran la respuesta del sistema en ambos escenarios y las tablas presentan un resumen cuantitativo las mejoras obtenidas con la implementación del esquema.

#### Resultados en simulación

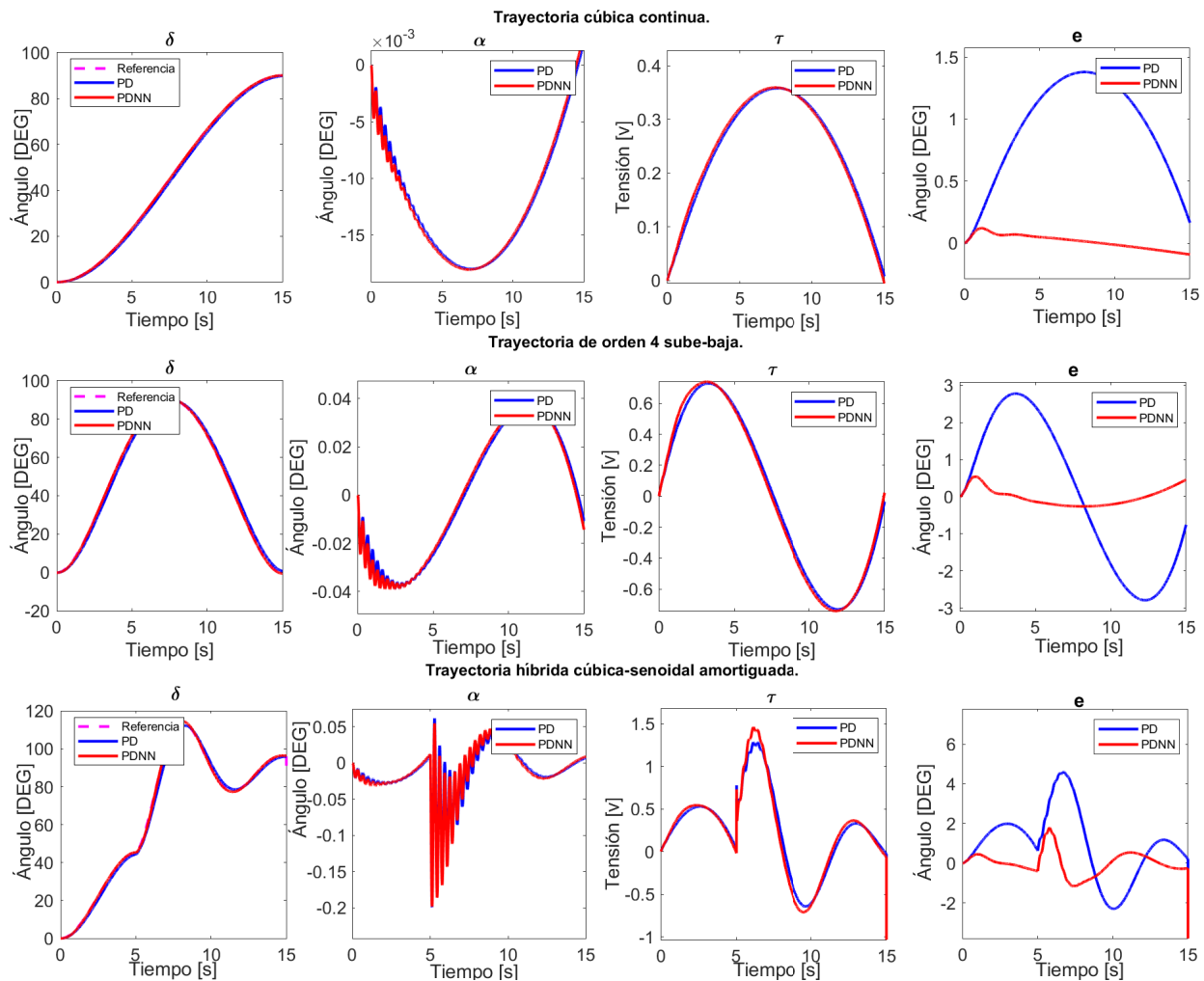


Figura 4.6: Simulación con controlador PD en el manipulador con enlace flexible,  $PD_3$ .

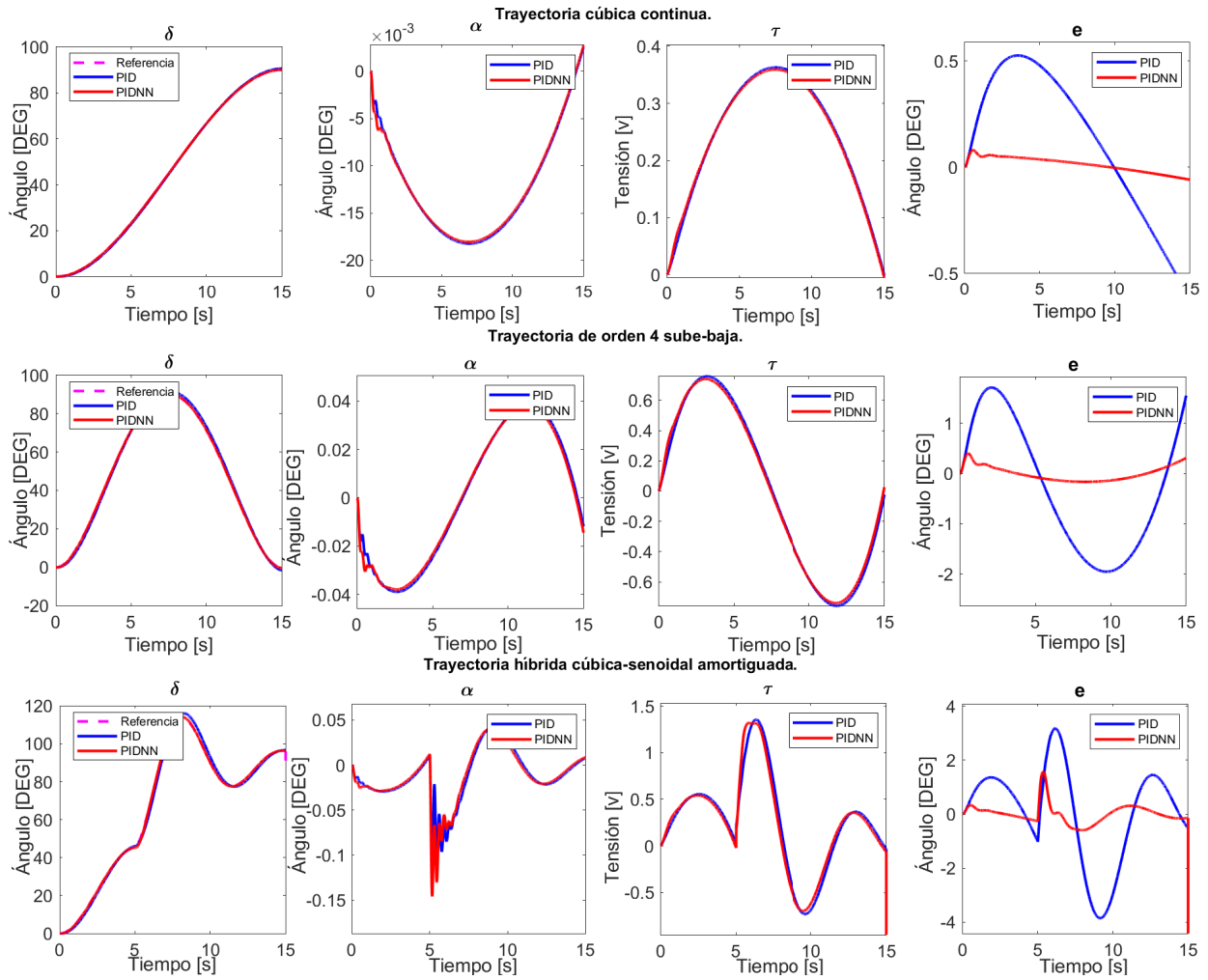


Figura 4.7: Simulación con controlador PID en el manipulador con enlace flexible,  $PID_3$ .

Tabla 4.3: Índices de desempeño para controladores PD/PID simulación (Caso B)

| Curva                          | Ganancias              | Variante | ISE                   | IAE    | ITAE   | ITSE   | MSE                   | MAE    |
|--------------------------------|------------------------|----------|-----------------------|--------|--------|--------|-----------------------|--------|
| <i>Proporcional-Derivativo</i> |                        |          |                       |        |        |        |                       |        |
| C1                             | $K_p = 8$ , $K_d = 2$  | Clásico  | 0.0162                | 0.4491 | 3.560  | 0.1286 | 0.0011                | 0.0299 |
|                                |                        | NN       | $3.54 \times 10^{-5}$ | 0.0195 | 0.1378 | 0.0002 | $2.36 \times 10^{-6}$ | 0.0013 |
|                                | $K_p = 12$ , $K_d = 4$ | Clásico  | 0.0072                | 0.3005 | 2.377  | 0.0575 | 0.0005                | 0.0200 |
|                                |                        | NN       | $2.46 \times 10^{-5}$ | 0.0164 | 0.1142 | 0.0002 | $1.64 \times 10^{-6}$ | 0.0011 |
|                                | $K_p = 15$ , $K_d = 6$ | Clásico  | 0.0046                | 0.2408 | 1.910  | 0.0370 | 0.0003                | 0.0161 |
|                                |                        | NN       | $1.12 \times 10^{-5}$ | 0.0125 | 0.0985 | 0.0001 | $1.12 \times 10^{-6}$ | 0.0008 |

*Continúa en la siguiente página*

| Curva                                   | Ganancias                            | Variante | ISE                   | IAE           | ITAE          | ITSE                  | MSE                   | MAE           |
|-----------------------------------------|--------------------------------------|----------|-----------------------|---------------|---------------|-----------------------|-----------------------|---------------|
|                                         |                                      | NN       | $1.45 \times 10^{-5}$ | <b>0.0125</b> | <b>0.0859</b> | $8.97 \times 10^{-5}$ | $9.68 \times 10^{-7}$ | <b>0.0008</b> |
| C2                                      | $K_p = 8$ , $K_d = 2$                | Clásico  | 0.0636                | 0.8833        | 6.944         | 0.5045                | 0.0042                | 0.0589        |
|                                         |                                      | NN       | 0.0006                | 0.0796        | 0.5853        | 0.0040                | $4.00 \times 10^{-5}$ | 0.0053        |
|                                         | $K_p = 12$ , $K_d = 4$               | Clásico  | 0.0285                | 0.5911        | 4.640         | 0.2254                | 0.0019                | 0.0394        |
|                                         |                                      | NN       | 0.0004                | 0.0661        | 0.4849        | 0.0028                | $2.73 \times 10^{-5}$ | 0.0044        |
|                                         | $K_p = 15$ , $K_d = 6$               | Clásico  | 0.0182                | 0.4727        | 3.716         | 0.1445                | 0.0012                | 0.0315        |
|                                         |                                      | NN       | <b>0.0002</b>         | <b>0.0503</b> | <b>0.3684</b> | <b>0.0015</b>         | $1.58 \times 10^{-5}$ | <b>0.0033</b> |
| C3                                      | $K_p = 8$ , $K_d = 2$                | Clásico  | 0.0630                | 0.7973        | 5.614         | 0.4283                | 0.0042                | 0.0532        |
|                                         |                                      | NN       | 0.0040                | 0.1799        | 1.346         | 0.0280                | 0.0003                | 0.0120        |
|                                         | $K_p = 12$ , $K_d = 4$               | Clásico  | 0.0282                | 0.5333        | 3.747         | 0.1912                | 0.0019                | 0.0356        |
|                                         |                                      | NN       | 0.0026                | 0.1477        | 1.115         | 0.0188                | 0.0002                | 0.0098        |
|                                         | $K_p = 15$ , $K_d = 6$               | Clásico  | 0.0178                | 0.4246        | 2.983         | 0.1210                | 0.0012                | 0.0283        |
|                                         |                                      | NN       | <b>0.0015</b>         | <b>0.1127</b> | <b>0.8478</b> | <b>0.0110</b>         | <b>0.0001</b>         | <b>0.0075</b> |
| <i>Proporcional-Integral-Derivativo</i> |                                      |          |                       |               |               |                       |                       |               |
| C1                                      | $K_p = 8$ , $K_i = 2$ , $K_d = 0.5$  | Clásico  | 0.0034                | 0.2014        | 1.442         | 0.0239                | 0.0002                | 0.0134        |
|                                         |                                      | NN       | $1.40 \times 10^{-5}$ | 0.0123        | 0.0840        | $8.56 \times 10^{-5}$ | $9.33 \times 10^{-7}$ | 0.0008        |
|                                         | $K_p = 12$ , $K_i = 4$ , $K_d = 0.8$ | Clásico  | 0.0012                | 0.1169        | 0.8475        | 0.0083                | $7.73 \times 10^{-5}$ | 0.0078        |
|                                         |                                      | NN       | $8.87 \times 10^{-6}$ | 0.0100        | 0.0663        | $5.31 \times 10^{-5}$ | $5.92 \times 10^{-7}$ | 0.0007        |
|                                         | $K_p = 15$ , $K_i = 6$ , $K_d = 1.2$ | 0.0006   | 0.0846                | 0.6164        | 0.0044        | $4.06 \times 10^{-5}$ | 0.0056                |               |
|                                         |                                      | NN       | $6.3 \times 10^{-6}$  | <b>0.0084</b> | <b>0.0552</b> | $3.67 \times 10^{-5}$ | $4.2 \times 10^{-7}$  | <b>0.0005</b> |
| C2                                      | $K_p = 8$ , $K_i = 2$ , $K_d = 0.5$  | Clásico  | 0.0409                | 0.6930        | 5.399         | 0.3313                | 0.0027                | 0.0462        |
|                                         |                                      | NN       | 0.0002                | 0.0493        | 0.3623        | 0.0016                | $1.56 \times 10^{-5}$ | 0.0033        |
|                                         | $K_p = 12$ , $K_i = 4$ , $K_d = 0.8$ | Clásico  | 0.0143                | 0.4118        | 3.145         | 0.1116                | 0.0010                | 0.0275        |
|                                         |                                      | NN       | 0.0001                | 0.0391        | 0.2859        | 0.0010                | $9.47 \times 10^{-6}$ | 0.0026        |
|                                         | $K_p = 15$ , $K_i = 6$ , $K_d = 1.2$ | Clásico  | 0.0077                | 0.3032        | 2.295         | 0.0591                | 0.0005                | 0.0202        |
|                                         |                                      | NN       | $9.8 \times 10^{-5}$  | <b>0.0326</b> | <b>0.2379</b> | <b>0.0006</b>         | $6.53 \times 10^{-6}$ | <b>0.0021</b> |
| C3                                      | $K_p = 8$ , $K_i = 2$ , $K_d = 0.5$  | Clásico  | 0.0562                | 0.7245        | 5.545         | 0.4516                | 0.0037                | 0.0483        |
|                                         |                                      | NN       | 0.0017                | 0.1034        | 0.7519        | 0.0108                | 0.0001                | 0.0069        |
|                                         | $K_p = 12$ , $K_i = 4$ , $K_d = 0.8$ | Clásico  | 0.0236                | 0.4701        | 3.627         | 0.1901                | 0.0016                | 0.0313        |
|                                         |                                      | NN       | 0.0009                | 0.0774        | 0.5684        | 0.0060                | $6.00 \times 10^{-5}$ | 0.0052        |
|                                         | $K_p = 15$ , $K_i = 6$ , $K_d = 1.2$ | Clásico  | 0.0143                | 0.3665        | 2.848         | 0.1155                | 0.0010                | 0.0244        |
|                                         |                                      | NN       | <b>0.0005</b>         | <b>0.0637</b> | <b>0.4682</b> | <b>0.0040</b>         | $3.99 \times 10^{-5}$ | <b>0.0042</b> |



## Resultados experimentales

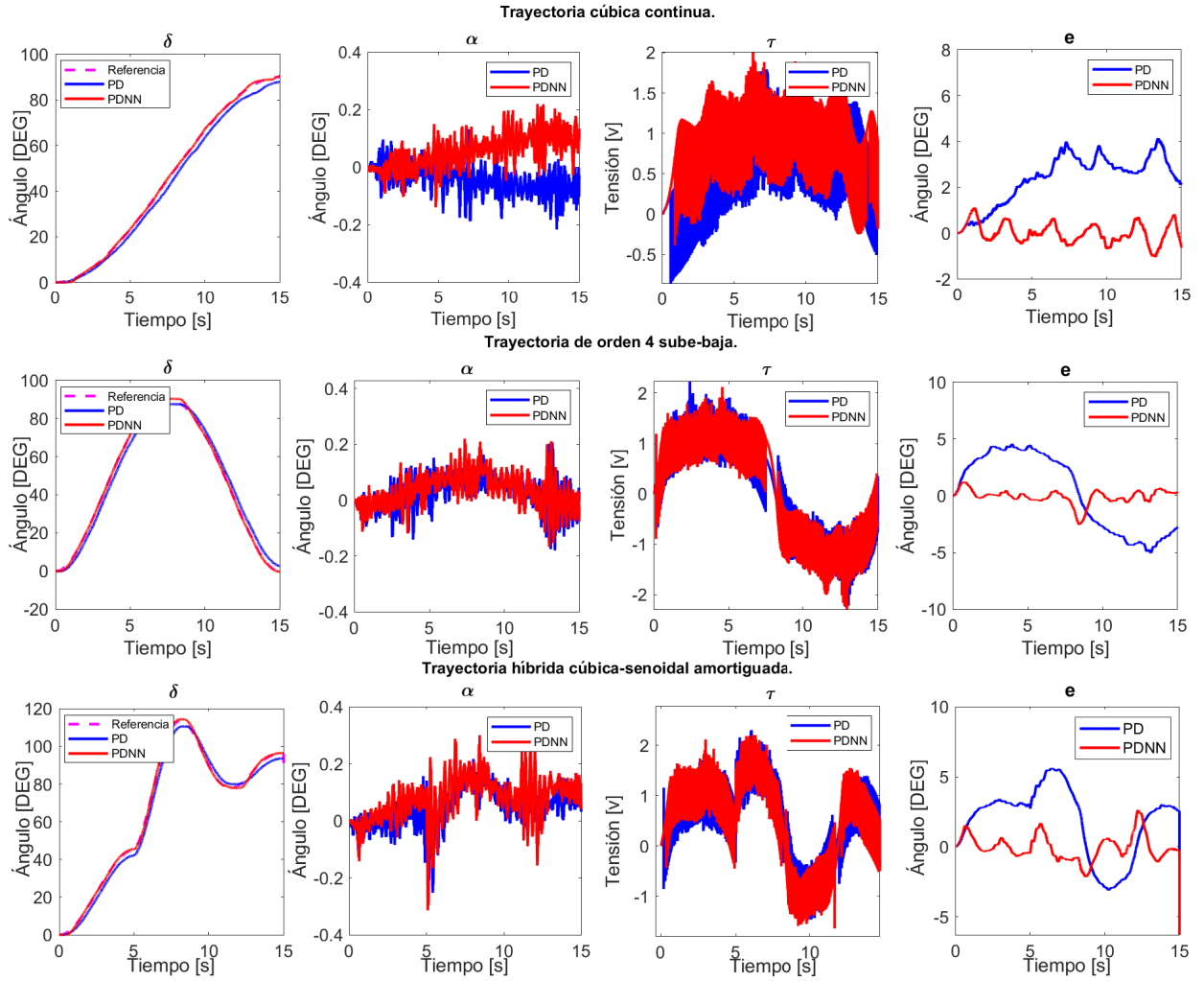


Figura 4.8: Experimentos con controlador PD en el manipulador con enlace flexible,  $PD_3$ .

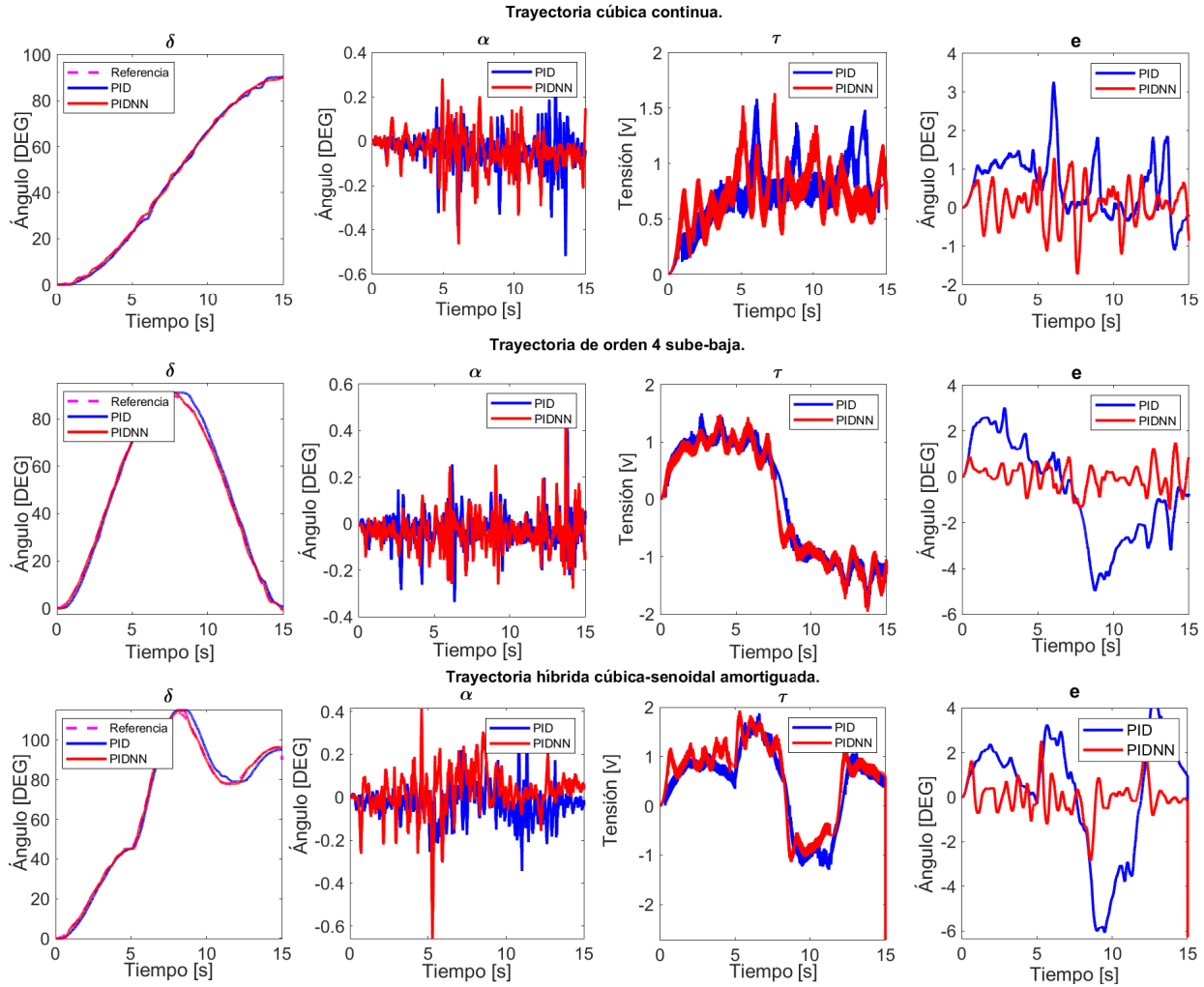


Figura 4.9: Experimentos con controlador PID en el manipulador con enlace flexible,  $PID_3$ .

Tabla 4.4: Índices de desempeño para controladores PD/PID experimental (Caso B)

| Curva                          | Ganancias              | Variante | ISE    | IAE    | ITAE   | ITSE   | MSE                   | MAE    |
|--------------------------------|------------------------|----------|--------|--------|--------|--------|-----------------------|--------|
| <i>Proporcional-Derivativo</i> |                        |          |        |        |        |        |                       |        |
| C1                             | $K_p = 8$ , $K_d = 2$  | Clásico  | 0.1833 | 1.565  | 13.47  | 1.67   | 0.0122                | 0.1043 |
|                                |                        | NN       | 0.0044 | 0.1926 | 1.24   | 0.0241 | 0.0002                | 0.0128 |
|                                | $K_p = 12$ , $K_d = 4$ | Clásico  | 0.0501 | 0.8128 | 6.927  | 0.4427 | 0.0033                | 0.0541 |
|                                |                        | NN       | 0.0011 | 0.1027 | 0.6894 | 0.0067 | $7.98 \times 10^{-5}$ | 0.0068 |
|                                | $K_p = 15$ , $K_d = 6$ | Clásico  | 0.0314 | 0.6263 | 5.649  | 0.2996 | 0.0020                | 0.0417 |
|                                |                        | NN       | 0.0001 | 0.0102 | 0.0094 | 0.0007 | $7.98 \times 10^{-5}$ | 0.0007 |

*Continúa en la siguiente página*

| Curva                            | Ganancias             | Variante                            | ISE           | IAE           | ITAE          | ITSE                  | MSE                   | MAE           |        |
|----------------------------------|-----------------------|-------------------------------------|---------------|---------------|---------------|-----------------------|-----------------------|---------------|--------|
|                                  |                       | NN                                  | <b>0.0008</b> | <b>0.0903</b> | <b>0.708</b>  | <b>0.0065</b>         | $5.56 \times 10^{-5}$ | <b>0.0060</b> |        |
| C2                               | $K_p = 8$ , $K_d = 2$ | Clásico                             | 0.1866        | 1.577         | 12.75         | 1.573                 | 0.0124                | 0.1052        |        |
|                                  |                       | NN                                  | 0.0052        | 0.2274        | 1.811         | 0.0417                | 0.0003                | 0.0151        |        |
|                                  | NN                    | 0.0034                              | 0.156         | 1.172         | 0.0265        | 0.0002                | 0.0104                |               |        |
|                                  | NN                    | <b>0.0036</b>                       | <b>0.1826</b> | <b>1.469</b>  | <b>0.0318</b> | <b>0.0002</b>         | <b>0.0121</b>         |               |        |
|                                  | C3                    | $K_p = 8$ , $K_d = 2$               | Clásico       | 0.1716        | 1.471         | 10.9                  | 1.234                 | 0.01144       | 0.0980 |
|                                  |                       |                                     | NN            | 0.0110        | 0.2901        | 2.457                 | 0.1048                | 0.0007        | 0.0193 |
| NN                               |                       | 0.0052                              | 0.2089        | 1.619         | 0.0428        | 0.0003                | 0.01398               |               |        |
| NN                               |                       | <b>0.0018</b>                       | <b>0.1113</b> | <b>0.859</b>  | <b>0.0139</b> | <b>0.0001</b>         | <b>0.0074</b>         |               |        |
| Proporcional-Integral-Derivativo |                       |                                     |               |               |               |                       |                       |               |        |
| C1                               |                       | $K_p = 8$ , $K_i = 2$ , $K_d = 0.5$ | Clásico       | 0.0228        | 0.4835        | 3.627                 | 0.1788                | 0.0015        | 0.0322 |
|                                  | NN                    |                                     | 0.0039        | 0.2007        | 1.675         | 0.0362                | 0.0002                | 0.0133        |        |
|                                  | NN                    | 0.0015                              | 0.1184        | 0.9498        | 0.0122        | 0.0001                | 0.0078                |               |        |
|                                  | NN                    | <b>0.0012</b>                       | <b>0.1064</b> | <b>0.768</b>  | <b>0.0088</b> | $8.26 \times 10^{-5}$ | <b>0.0070</b>         |               |        |
|                                  | C2                    | $K_p = 8$ , $K_i = 2$ , $K_d = 0.5$ | Clásico       | 0.129         | 1.16          | 9.678                 | 1.164                 | 0.0086        | 0.0773 |
|                                  |                       |                                     | NN            | 0.0051        | 0.2368        | 1.786                 | 0.0396                | 0.0003        | 0.0157 |
| NN                               |                       | 0.0020                              | 0.1447        | 1.163         | 0.0176        | 0.0001                | 0.0096                |               |        |
| NN                               |                       | <b>0.0013</b>                       | <b>0.1118</b> | <b>0.9215</b> | <b>0.0121</b> | $8.95 \times 10^{-5}$ | <b>0.0074</b>         |               |        |
| C3                               |                       | $K_p = 8$ , $K_i = 2$ , $K_d = 0.5$ | Clásico       | 0.1235        | 1.159         | 9.321                 | 1.07                  | 0.0082        | 0.0770 |
|                                  |                       |                                     | NN            | 0.0161        | 0.3841        | 2.986                 | 0.1236                | 0.0010        | 0.0256 |
|                                  | NN                    | 0.0039                              | 0.1713        | 1.319         | 0.0319        | 0.0002                | 0.0114                |               |        |
|                                  | NN                    | <b>0.0026</b>                       | <b>0.1377</b> | <b>0.9658</b> | <b>0.0194</b> | <b>0.0001</b>         | <b>0.0091</b>         |               |        |

### 4.4.3. Caso C – Manipulador con junta/enlace Flexible

Para este último caso, el sistema se montó de forma vertical mediante un acoplamiento plástico. Los problemas descritos en situaciones anteriores de igual forma están presentes y, debido a la naturaleza del acoplamiento, aparecieron desviaciones en la medición, es decir, el sistema no puede regresar con exactitud al origen con exactitud al origen; este efecto no se considera en la simulación. Las figuras ilustran este comportamiento y las tablas complementan con un resumen cuantitativo de las mejoras obtenidas.

#### Resultados en simulación

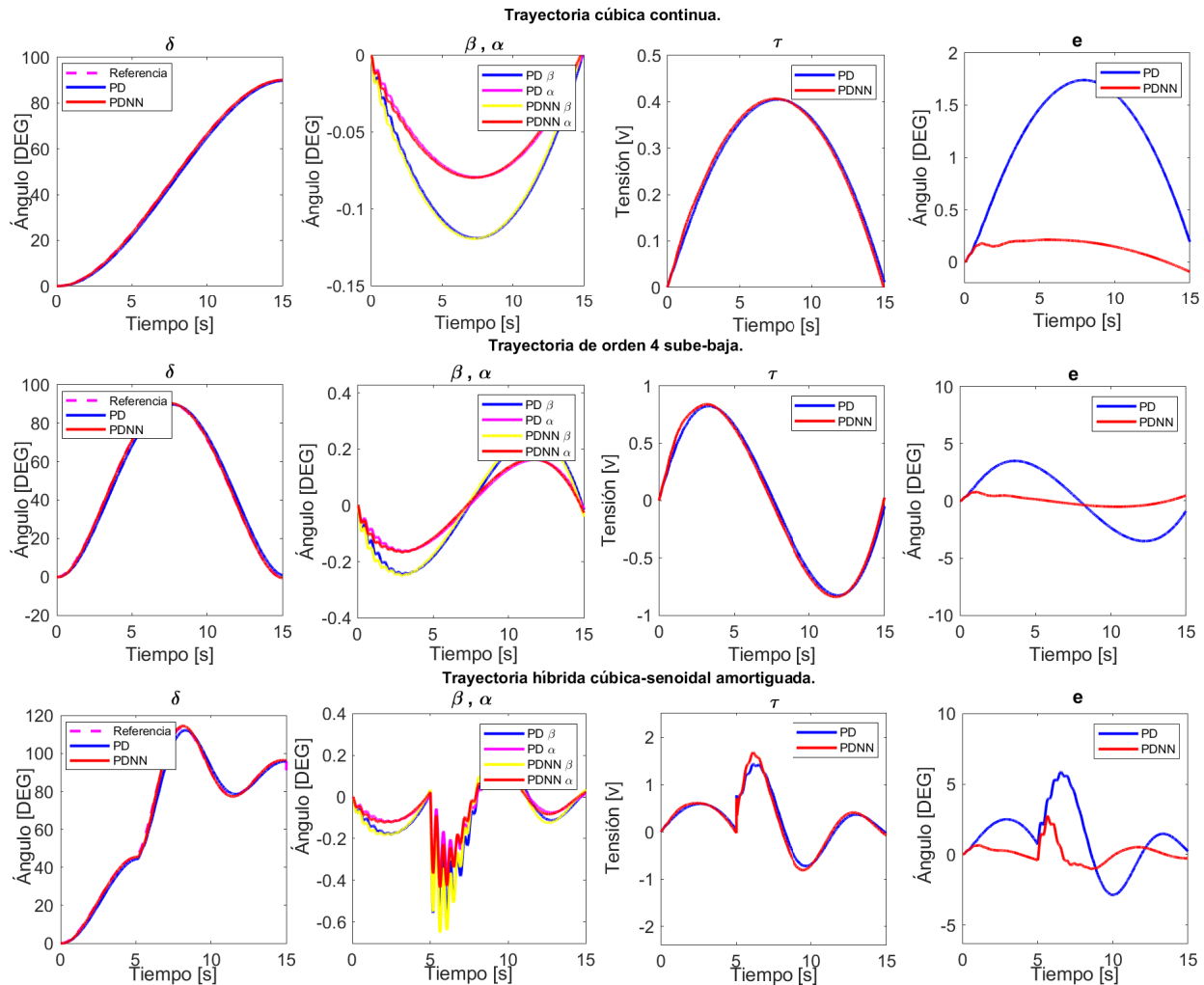


Figura 4.10: Simulación con controlador PD en el manipulador combinado,  $PD_3$ .

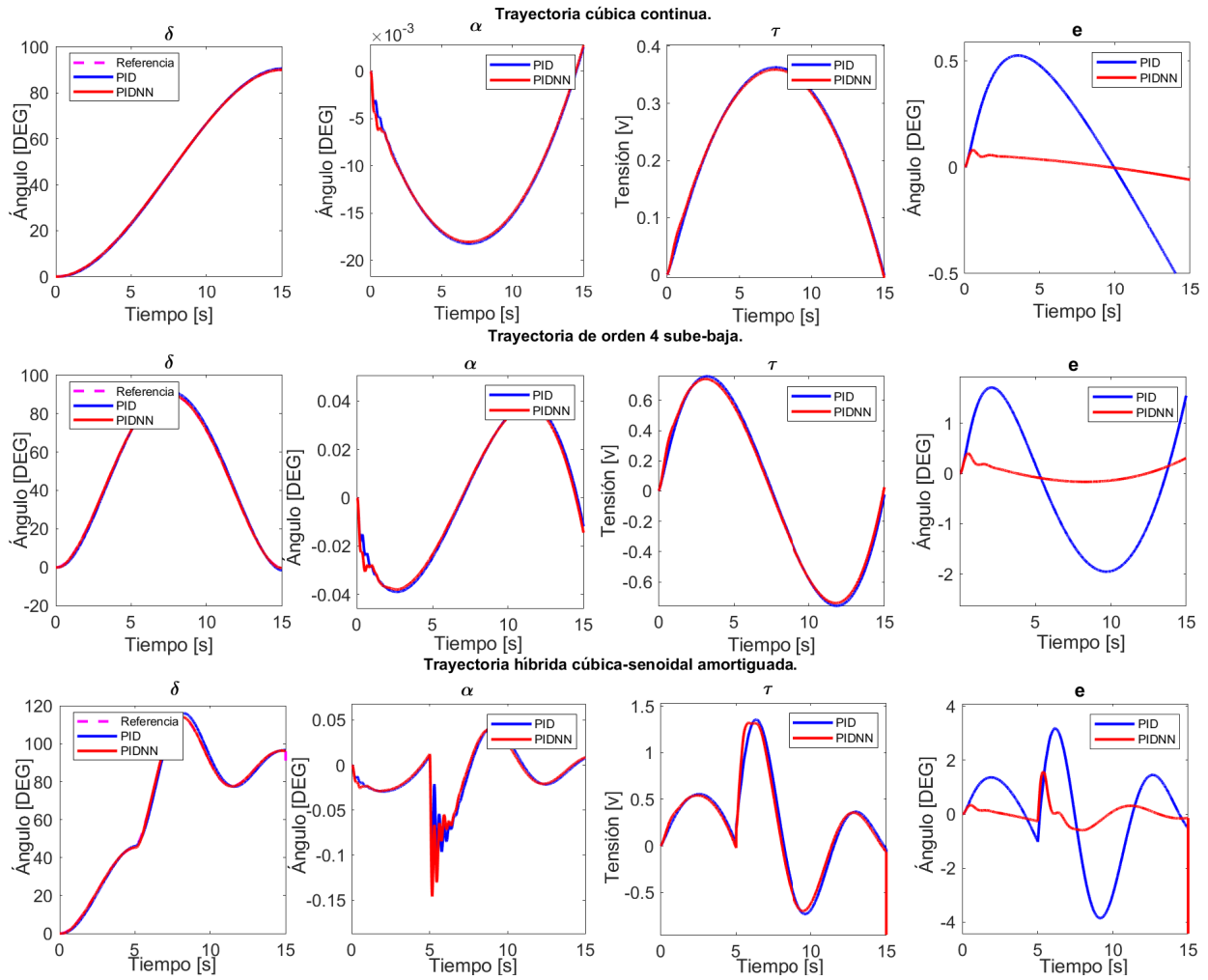
Figura 4.11: Simulación con controlador PID en el manipulador combinado,  $PID_3$ .

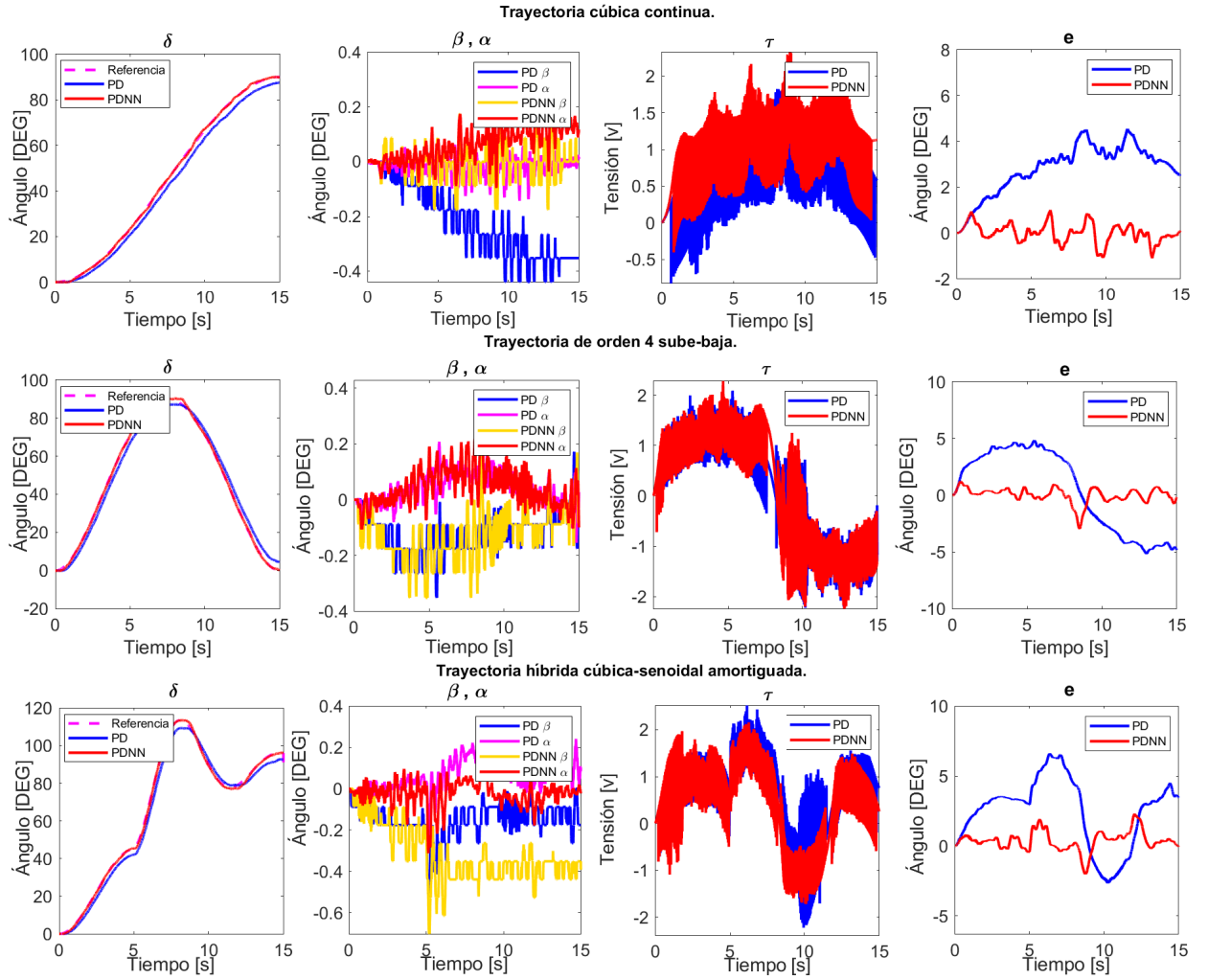
Tabla 4.5: Índices de desempeño para controladores PD/PID simulación (Caso C)

| Curva                          | Ganancias              | Variante | ISE    | IAE    | ITAE   | ITSE   | MSE                   | MAE    |
|--------------------------------|------------------------|----------|--------|--------|--------|--------|-----------------------|--------|
| <i>Proporcional-Derivativo</i> |                        |          |        |        |        |        |                       |        |
| C1                             | $K_p = 8$ , $K_d = 2$  | Clásico  | 0.0232 | 0.5386 | 4.273  | 0.1852 | 0.0015                | 0.0359 |
|                                |                        | NN       | 0.0002 | 0.0427 | 0.2572 | 0.0008 | $1.00 \times 10^{-5}$ | 0.0028 |
|                                | $K_p = 12$ , $K_d = 4$ | Clásico  | 0.0110 | 0.3708 | 2.926  | 0.0872 | 0.0007                | 0.0247 |
|                                |                        | NN       | 0.0001 | 0.0385 | 0.2390 | 0.0007 | $7.99 \times 10^{-6}$ | 0.0026 |
|                                | $K_p = 15$ , $K_d = 6$ | Clásico  | 0.0074 | 0.3034 | 2.395  | 0.0584 | 0.0005                | 0.0202 |
|                                |                        | NN       | 0.0001 | 0.0385 | 0.2390 | 0.0007 | $7.99 \times 10^{-6}$ | 0.0026 |

Continúa en la siguiente página

| Curva                                   | Ganancias                            | Variante | ISE                   | IAE           | ITAE          | ITSE          | MSE                                     | MAE           |
|-----------------------------------------|--------------------------------------|----------|-----------------------|---------------|---------------|---------------|-----------------------------------------|---------------|
|                                         |                                      | NN       | <b>0.0001</b>         | <b>0.0376</b> | <b>0.2365</b> | <b>0.0006</b> | <b><math>7.49 \times 10^{-6}</math></b> | <b>0.0024</b> |
| C2                                      | $K_p = 8$ , $K_d = 2$                | Clásico  | 0.0911                | 1.0570        | 8.314         | 0.7231        | 0.0061                                  | 0.0705        |
|                                         |                                      | NN       | 0.0013                | 0.1210        | 0.8448        | 0.0081        | $8.92 \times 10^{-5}$                   | 0.0081        |
|                                         | $K_p = 12$ , $K_d = 4$               | Clásico  | 0.0432                | 0.7287        | 5.705         | 0.3411        | 0.0029                                  | 0.0486        |
|                                         |                                      | NN       | 0.00080               | 0.0962        | 0.6644        | 0.0049        | $5.37 \times 10^{-5}$                   | 0.0064        |
|                                         | $K_p = 15$ , $K_d = 6$               | Clásico  | 0.0288                | 0.5952        | 4.657         | 0.2274        | 0.0019                                  | 0.0397        |
|                                         |                                      | NN       | <b>0.0006</b>         | <b>0.0889</b> | <b>0.6137</b> | <b>0.0042</b> | <b><math>4.51 \times 10^{-5}</math></b> | <b>0.0059</b> |
| C3                                      | $K_p = 8$ , $K_d = 2$                | Clásico  | 0.0893                | 0.9500        | 6.674         | 0.6060        | 0.0060                                  | 0.0634        |
|                                         |                                      | NN       | 0.0069                | 0.2325        | 1.679         | 0.0461        | 0.0005                                  | 0.0155        |
|                                         | $K_p = 12$ , $K_d = 4$               | Clásico  | 0.0424                | 0.6550        | 4.578         | 0.2863        | 0.0028                                  | 0.0437        |
|                                         |                                      | NN       | 0.0032                | 0.1558        | 1.096         | 0.0206        | 0.0002                                  | 0.0104        |
|                                         | $K_p = 15$ , $K_d = 6$               | Clásico  | 0.0280                | 0.5325        | 3.712         | 0.1884        | 0.0019                                  | 0.0355        |
|                                         |                                      | NN       | <b>0.0023</b>         | <b>0.1339</b> | <b>0.9314</b> | <b>0.0149</b> | <b>0.0001</b>                           | <b>0.0089</b> |
| <i>Proporcional-Integral-Derivativo</i> |                                      |          |                       |               |               |               |                                         |               |
| C1                                      | $K_p = 8$ , $K_i = 2$ , $K_d = 0.5$  | Clásico  | 0.0053                | 0.2491        | 1.739         | 0.0349        | 0.0004                                  | 0.0166        |
|                                         |                                      | NN       | 0.0002                | 0.0450        | 0.2690        | 0.0009        | $1.12 \times 10^{-5}$                   | 0.0030        |
|                                         | $K_p = 12$ , $K_i = 4$ , $K_d = 0.8$ | Clásico  | 0.0020                | 0.1516        | 1.0440        | 0.0127        | 0.0001                                  | 0.0101        |
|                                         |                                      | NN       | $1.60 \times 10^{-4}$ | 0.0441        | 0.2662        | 0.0008        | $1.07 \times 10^{-5}$                   | 0.0029        |
|                                         | $K_p = 15$ , $K_i = 6$ , $K_d = 1.2$ | Clásico  | 0.0011                | 0.1142        | 0.7743        | 0.0070        | $7.39 \times 10^{-5}$                   | 0.0076        |
|                                         |                                      | NN       | <b>0.0001</b>         | <b>0.0379</b> | <b>0.2378</b> | <b>0.0006</b> | <b><math>7.73 \times 10^{-6}</math></b> | <b>0.0025</b> |
| C2                                      | $K_p = 8$ , $K_i = 2$ , $K_d = 0.5$  | Clásico  | 0.0606                | 0.8443        | 6.5720        | 0.4904        | 0.0040                                  | 0.0563        |
|                                         |                                      | NN       | 0.0016                | 0.1337        | 0.9373        | 0.0099        | $1.07 \times 10^{-4}$                   | 0.0089        |
|                                         | $K_p = 12$ , $K_i = 4$ , $K_d = 0.8$ | Clásico  | 0.0228                | 0.5204        | 3.9530        | 0.1766        | 0.0015                                  | 0.0347        |
|                                         |                                      | NN       | 0.0015                | 0.1289        | 0.9032        | 0.0092        | $9.71 \times 10^{-5}$                   | 0.0086        |
|                                         | $K_p = 15$ , $K_i = 6$ , $K_d = 1.2$ | Clásico  | 0.0130                | 0.3944        | 2.9590        | 0.0984        | 0.0009                                  | 0.0263        |
|                                         |                                      | NN       | <b>0.0007</b>         | <b>0.0926</b> | <b>0.6403</b> | <b>0.0045</b> | <b><math>4.87 \times 10^{-5}</math></b> | <b>0.0061</b> |
| C3                                      | $K_p = 8$ , $K_i = 2$ , $K_d = 0.5$  | Clásico  | 0.0816                | 0.8776        | 6.6970        | 0.6510        | 0.0054                                  | 0.0585        |
|                                         |                                      | NN       | 0.0081                | 0.2500        | 1.8120        | 0.0544        | 0.0005                                  | 0.0167        |
|                                         | $K_p = 12$ , $K_i = 4$ , $K_d = 0.8$ | Clásico  | 0.0367                | 0.5905        | 4.5190        | 0.2914        | 0.0024                                  | 0.0394        |
|                                         |                                      | NN       | 0.0063                | 0.2282        | 1.6720        | 0.0434        | 0.0004                                  | 0.0152        |
|                                         | $K_p = 15$ , $K_i = 6$ , $K_d = 1.2$ | Clásico  | 0.0233                | 0.4724        | 3.6250        | 0.1848        | 0.0016                                  | 0.0315        |
|                                         |                                      | NN       | <b>0.0024</b>         | <b>0.1348</b> | <b>0.9417</b> | <b>0.0155</b> | <b>0.0001</b>                           | <b>0.0089</b> |

## Resultados experimentales

Figura 4.12: Experimentos con controlador PD en el manipulador combinado,  $PD_3$ .

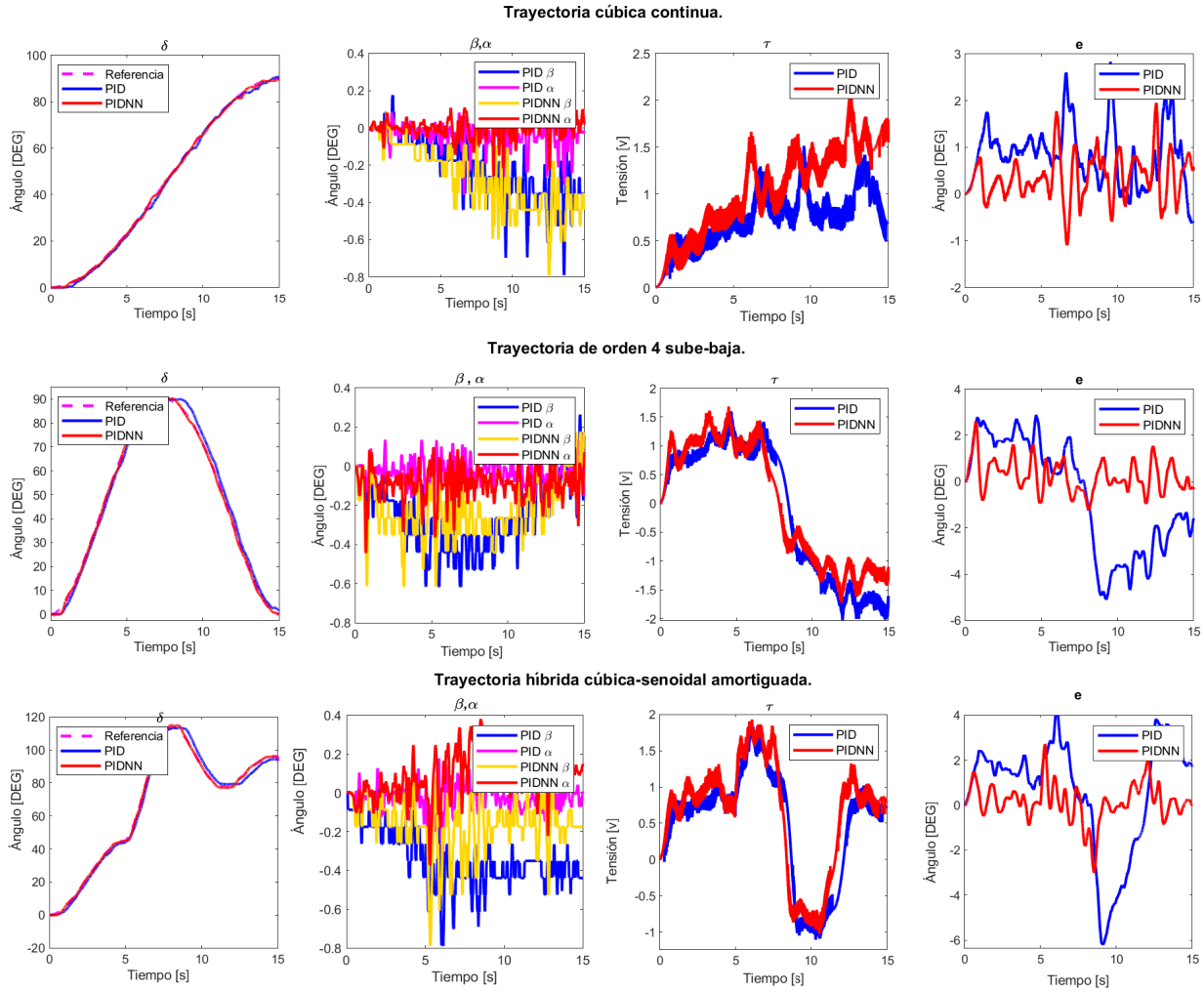


Figura 4.13: Experimentos con controlador PID en el manipulador combinado,  $PID_3$ .

Tabla 4.6: Índices de desempeño para controladores PD/PID experimental (Caso C)

| Curva                          | Ganancias              | Variante | ISE    | IAE    | ITAE  | ITSE   | MSE    | MAE    |
|--------------------------------|------------------------|----------|--------|--------|-------|--------|--------|--------|
| <i>Proporcional-Derivativo</i> |                        |          |        |        |       |        |        |        |
| C1                             | $K_p = 8$ , $K_d = 2$  | Clásico  | 0.1463 | 1.398  | 12.01 | 1.317  | 0.0097 | 0.0932 |
|                                |                        | NN       | 0.0031 | 0.1733 | 1.395 | 0.0253 | 0.0002 | 0.0115 |
|                                | $K_p = 12$ , $K_d = 4$ | Clásico  | 0.0846 | 1.073  | 8.638 | 0.6816 | 0.0056 | 0.0715 |
|                                |                        | NN       | 0.0020 | 0.1388 | 1.049 | 0.0154 | 0.0001 | 0.0092 |
|                                | $K_p = 15$ , $K_d = 6$ | Clásico  | 0.0416 | 0.7389 | 6.443 | 0.3847 | 0.0027 | 0.0492 |
|                                |                        | NN       | 0.0015 | 0.1154 | 1.012 | 0.0125 | 0.0001 | 0.0085 |

*Continúa en la siguiente página*



| Curva                            | Ganancias             | Variante                            | ISE           | IAE           | ITAE          | ITSE          | MSE                                     | MAE           |        |
|----------------------------------|-----------------------|-------------------------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|-----------------------------------------|---------------|--------|
|                                  |                       | NN                                  | <b>0.0007</b> | <b>0.0816</b> | <b>0.6115</b> | <b>0.0060</b> | <b><math>5.22 \times 10^{-5}</math></b> | <b>0.0054</b> |        |
| C2                               | $K_p = 8$ , $K_d = 2$ | Clásico                             | 0.2908        | 1.926         | 13.82         | 1.959         | 0.0193                                  | 0.1284        |        |
|                                  |                       | NN                                  | 0.0090        | 0.2865        | 2.19          | 0.0691        | 0.0006                                  | 0.0191        |        |
|                                  | NN                    | 0.0020                              | 0.1425        | 1.103         | 0.0160        | 0.0001        | 0.0095                                  |               |        |
|                                  | NN                    | <b>0.0019</b>                       | <b>0.1225</b> | <b>0.9398</b> | <b>0.0153</b> | <b>0.0001</b> | <b>0.0081</b>                           |               |        |
|                                  | C3                    | $K_p = 8$ , $K_d = 2$               | Clásico       | 0.1791        | 1.482         | 10.81         | 1.263                                   | 0.0119        | 0.0987 |
|                                  |                       |                                     | NN            | 0.0146        | 0.3483        | 2.872         | 0.1332                                  | 0.0009        | 0.0232 |
| NN                               |                       | 0.0057                              | 0.1962        | 1.733         | 0.0570        | 0.0003        | 0.0130                                  |               |        |
| NN                               |                       | <b>0.0028</b>                       | <b>0.1536</b> | <b>1.245</b>  | <b>0.0251</b> | <b>0.0001</b> | <b>0.0102</b>                           |               |        |
| Proportional-Integral-Derivativo |                       |                                     |               |               |               |               |                                         |               |        |
| C1                               |                       | $K_p = 8$ , $K_i = 2$ , $K_d = 0.5$ | Clásico       | 0.0247        | 0.4974        | 3.233         | 0.1623                                  | 0.0016        | 0.0331 |
|                                  | NN                    |                                     | 0.0039        | 0.1927        | 1.691         | 0.0388        | 0.0002                                  | 0.0128        |        |
|                                  | NN                    | 0.0026                              | 0.1427        | 1.255         | 0.0258        | 0.0001        | 0.0097                                  |               |        |
|                                  | NN                    | <b>0.0016</b>                       | <b>0.124</b>  | <b>1.066</b>  | <b>0.1494</b> | <b>0.0001</b> | <b>0.0082</b>                           |               |        |
|                                  | C2                    | $K_p = 8$ , $K_i = 2$ , $K_d = 0.5$ | Clásico       | 0.1642        | 1.347         | 12.45         | 1.706                                   | 0.0109        | 0.0898 |
|                                  |                       |                                     | NN            | 0.0157        | 0.388         | 3.263         | 0.1404                                  | 0.0010        | 0.0258 |
| NN                               |                       | 0.0056                              | 0.2148        | 1.633         | 0.0438        | 0.0003        | 0.0143                                  |               |        |
| NN                               |                       | <b>0.0023</b>                       | <b>0.1463</b> | <b>0.9493</b> | <b>0.0131</b> | <b>0.0001</b> | <b>0.0097</b>                           |               |        |
| C3                               |                       | $K_p = 8$ , $K_i = 2$ , $K_d = 0.5$ | Clásico       | 0.1276        | 1.206         | 9.756         | 1.0900                                  | 0.0085        | 0.0804 |
|                                  |                       |                                     | NN            | 0.0177        | 0.3686        | 2.986         | 0.1498                                  | 0.0011        | 0.0245 |
|                                  | NN                    | 0.0106                              | 0.2757        | 2.239         | 0.0979        | 0.0007        | 0.0183                                  |               |        |
|                                  | NN                    | <b>0.0032</b>                       | <b>0.1557</b> | <b>1.164</b>  | <b>0.0245</b> | <b>0.0002</b> | <b>0.0103</b>                           |               |        |

**Observación 4.1.** *Los resultados ilustran una mejora en el desempeño del esquema propuesto; no obstante, una parte significativa del desempeño depende de la sintonización de los hiperparámetros de la red y de la selección empírica de los datos de entrada. Además, el tiempo de muestreo se identificó como un factor decisivo para lograr un buen desempeño.*

**Observación 4.2.** *La selección de las variables de entrada se basó en las magnitudes que podían medirse o estimarse directamente. En lugar de emplear series temporales con retardos, como en esquemas tipo ARX o ARMAX, se opta por realizar estimaciones mediante derivadas aproximadas con filtros pasa-bajas. Este planteamiento redujo el costo computacional y permitió capturar información dinámica sin expandir excesivamente la dimensión de la entrada, aunque introdujo limitaciones asociadas al ruido y al filtrado.*

**Observación 4.3.** *Los errores se expresan en radianes, lo que permitió mantener coherencia en la interpretación y facilitar la comparación entre escenarios experimentales y de simulación.*

**Observación 4.4.** *Las trayectorias de referencia fueron diseñadas para evaluar el sistema, la trayectoria cúbica continua (C1) permite analizar la respuesta frente a un movimiento suave con aceleraciones inicial y final nulas, lo cual resulta apropiado para validar el seguimiento en condiciones nominales; la trayectoria de orden 4 sube-baja (C2) introduce un perfil más demandante, al requerir ascender y descender en el mismo intervalo, lo que permite observar la capacidad del sistema para manejar cambios rápidos de dirección; finalmente, la trayectoria híbrida cúbica-senoidal amortiguada (C3) combina un movimiento polinómico inicial con una dinámica oscilatoria amortiguada, representando perturbaciones más cercanas a escenarios reales con acoplamiento elástico. De este modo, el conjunto de trayectorias garantiza una evaluación integral del desempeño del esquema propuesto.*

## 4.5. Conclusión del capítulo

Este capítulo presenta una evaluación comparativa entre controladores clásicos PD/PID, así como sus variantes con compensación neuronal, aplicados a tres configuraciones de mani-

---

puladores flexibles: junta flexible, enlace flexible y modelo combinado. La identificación de parámetros mediante mínimos cuadrados permite ajustar los modelos dinámicos a los sistemas reales, garantizando consistencia estructural en las simulaciones.

Los resultados en simulación y experimentación ilustran que, aunque los controladores clásicos logran estabilizar el sistema bajo ciertas condiciones, presentan limitaciones al enfrentar trayectorias exigentes y resonancias internas. Con la inclusión de la compensación neuronal se obtienen respuestas de seguimiento más favorables, lo cual se refleja en los índices de desempeño (ISE, IAE, ITAE e ITSE) empleados para cuantificar y comparar objetivamente cada estrategia.

En el siguiente capítulo se presentan las conclusiones generales del trabajo y las líneas propuestas para investigación futura.

---



## Conclusión

### Discusiones

El análisis realizado permite evidenciar que la compensación neuronal constituye una alternativa viable para mejorar el desempeño de controladores clásicos PD/PID en sistemas con elasticidad estructural. La red neuronal, como aproximador universal de funciones, ofrece la posibilidad de modelar en línea dinámicas no explícitas, tales como términos de inercia, gravedad y fricción. Esto explica en gran medida la mejora observada en las tareas de seguimiento, y justifica el papel de la red como un mecanismo de compensación adaptable. No obstante, es fundamental reconocer que esta capacidad de aproximación no implica que el esquema sea robusto frente a todas las fuentes de incertidumbre. Los resultados de estabilidad obtenidos muestran que el sistema sigue siendo susceptible a perturbaciones externas y variaciones paramétricas, lo cual obliga a precisar que la robustez, en un sentido formal, no es garantizada por la arquitectura propuesta.

Este punto conecta con otro aspecto relevante, el esquema asegura estabilidad, pero no necesariamente un buen desempeño con eficiencia energética ni libre de desgaste. Las oscilaciones inducidas repercuten en el consumo energético y en el deterioro de los actuadores, lo cual evidencia que la estabilidad matemática no se traduce automáticamente en integridad física del sistema. De aquí surge la hipótesis de que un análisis más integral debería incluir no solo criterios de estabilidad, sino también de eficiencia energética y preservación mecánica.

En cuanto a la extensión del esquema, aunque los resultados experimentales se plantearon a

un grado de libertad, el marco desarrollado plantea la posibilidad de generalizarlo a sistemas de mayor complejidad. La justificación se encuentra en que el análisis de estabilidad mediante funciones de Lyapunov ofrece un panorama claro de las condiciones de operación seguras, lo cual puede extenderse a manipuladores con múltiples grados de libertad. Sin embargo, dado que la complejidad crece de manera no lineal al aumentar los grados de libertad, se vuelve necesario replantear el problema bajo un enfoque distribuido.

Finalmente, cabe destacar las limitaciones inherentes a las redes neuronales. Aunque su capacidad de aproximación es útil, estas no constituyen un mecanismo infalible: dependen de la arquitectura, de la calidad del entrenamiento y de la dinámica del sistema. En este trabajo se comprobó que funcionan como una alternativa práctica y adaptable, pero no sustituyen por completo la necesidad de estrategias adicionales de control. Se plantea así la visión de que la compensación neuronal debe entenderse como un complemento a métodos clásicos o avanzados, más que como una solución única al problema de elasticidad y vibraciones.

## Conclusiones

El trabajo desarrollado tuvo como objetivo evaluar un esquema de neurocompensación orientado a mejorar el desempeño de controladores PD/PID en tareas de seguimiento de manipuladores con elasticidad estructural, considerando dinámicas no modeladas y estableciendo un marco referencial respecto al problema de vibraciones. A lo largo de la investigación se cumplió con los objetivos específicos definidos, lo que en su conjunto permitió confirmar el cumplimiento del objetivo general.

En primer lugar, se derivaron expresiones de energía cinética y potencial para los casos de junta, enlace y acoplamiento mixto, asegurando la coherencia energética del sistema. Con base en ello, se formuló un modelo dinámico Lagrangiano que conserva las propiedades estructurales y permite separar la cinemática rígida de las deformaciones elásticas dominantes. Sobre este modelo se demostró la estabilidad de las tareas de seguimiento mediante funciones

---

de Lyapunov.

Posteriormente, se integró una red neuronal como término de compensación, en arquitecturas simples capaces de aproximar dinámicas no modeladas, y se implementaron controladores PD/PID sintonizados experimentalmente, lo cual permitió estabilizar la plataforma sin necesidad de recurrir a un modelo explícito. La implementación experimental en los tres casos de estudio (junta, enlace y acoplamiento mixto) verificó la sincronización en tiempo real y el respeto a las restricciones físicas de los actuadores. Finalmente, se efectuó una comparación entre los controladores clásicos y la versión compensada con redes neuronales, identificando mejoras mediante índices de desempeño, así como limitaciones asociadas al costo computacional y a la dependencia de la calidad de la aproximación neuronal.

En consecuencia, puede concluirse que el esquema de neurocompensación constituye una alternativa para mejorar el desempeño de controladores PD/PID en manipuladores con elasticidad estructural. Si bien no resuelve de manera directa el problema de vibraciones ni garantiza robustez frente a perturbaciones, el trabajo realizado sienta las bases para abordar estos desafíos en investigaciones futuras, y establece un marco de referencia que combina coherencia teórica con validación experimental.

## Trabajo a futuro

A partir de los hallazgos obtenidos, se identifican diversas líneas de investigación que pueden consolidar y ampliar los alcances de este trabajo. En primer lugar, resulta pertinente replantear el problema de vibraciones bajo un enfoque de optimización multiobjetivo, en el que las funciones de costo consideren simultáneamente precisión de seguimiento, reducción de oscilaciones y eficiencia energética. Este cambio de perspectiva permitiría atacar de manera directa un aspecto que en la presente investigación fue únicamente referencial.

Asimismo, se abre la posibilidad de explorar arquitecturas híbridas de redes neuronales. Mientras que la MLP ha mostrado utilidad como compensador de dinámicas no modeladas,

---

el uso de redes basadas en Fourier o wavelets podría capturar con mayor fidelidad los patrones vibratorios. Por otra parte, arquitecturas recurrentes como RNN o LSTM ofrecen la ventaja de representar dependencias temporales, lo que podría mejorar el desempeño del esquema en presencia de perturbaciones rápidas, siempre que se desarrolle un marco de estabilidad adecuado.

En términos de robustez, será necesario establecer un análisis formal que vaya más allá de la adaptabilidad intuitiva de las redes neuronales. Aunque estas permiten aproximar variaciones de parámetros, la evidencia muestra que el sistema es susceptible a perturbaciones, por lo cual un desarrollo teórico que combine adaptabilidad con criterios de robustez constituiría un aporte fundamental.

Otra línea de investigación relevante es la extensión a sistemas con múltiples grados de libertad. En este contexto, el análisis mediante el criterio de *small gain* ofrece un camino natural para descomponer el sistema en subsistemas interconectados y garantizar estabilidad en la interacción. De este razonamiento se desprende la posibilidad de un enfoque multiagente, donde cada agente se encargue de compensar dinámicas locales, mientras se asegura estabilidad a través de condiciones de acoplamiento distribuidas.

Finalmente, la eficiencia computacional permanece como una limitación importante. Será necesario explorar técnicas de entrenamiento ligero y plataformas de cómputo dedicado que permitan la actualización en tiempo real de los parámetros de la red sin comprometer la estabilidad. De igual forma, la integración con otros esquemas de control avanzados -*energy shaping*, control predictivo o adaptativo, etc- podría enriquecer el esquema planteado, de modo que la red neuronal actúe como un complemento estratégico más que como un sustituto de las metodologías tradicionales.

---



# APÉNDICE A

## Arquitectura de red neuronal

Este apéndice presenta los pasos de entrenamiento, la arquitectura empleada y el código fuente en MATLAB correspondiente a los modelos neuronales considerados. A continuación, se describen los algoritmos de entrenamiento para las redes MLP y ELM, junto con las expresiones utilizadas para la actualización de sus parámetros.

---

### Algoritmo 1 Entrenamiento de red MLP

---

**Entrada:**  $x(k) \in \mathbb{R}^n$ ,  $y(k) \in \mathbb{R}$ ,  $\vartheta(0) = \{\hat{W}_i(0), v_i(0), b_i(0)\}_{i=1}^{N_k}$

**Salida:**  $\hat{y}(k)$ ,  $\vartheta(k+1)$

```

1: for  $k = 0$  to  $k_{\text{final}}$  do                                     ▷ Iteración en el tiempo discreto
2:   for  $i = 1$  to  $N_k$  do                                         ▷ Bucle sobre las neuronas ocultas
3:      $z_i(k) \leftarrow v_i^\top(k)x(k) + b_i(k)$                        ▷ Preactivación de la neurona  $i$ 
4:      $\Gamma_i(k) \leftarrow \Gamma(z_i(k))$                              ▷ Activación no lineal
5:   end for
6:    $\hat{y}(k) \leftarrow \sum_{i=1}^{N_k} \hat{W}_i(k) \cdot \Gamma_i(k)$                ▷ Salida estimada
7:    $e(k) \leftarrow y(k) - \hat{y}(k)$ ,  $E(\vartheta(k)) \leftarrow \frac{1}{2}e(k)^2$    ▷ Cálculo del error y la pérdida
8:   for  $i = 1$  to  $N_k$  do                                         ▷ Retropropagación
9:      $\delta_i(k) \leftarrow e(k)\hat{W}_i(k)\Gamma'_i(k)$                  ▷ Regla delta local
10:     $\hat{W}_i(k+1) \leftarrow \hat{W}_i(k) + \eta e(k)\Gamma_i(k)$              ▷ Actualización del peso de salida
11:     $v_i(k+1) \leftarrow v_i(k) + \eta \delta_i(k)x(k)$                  ▷ Actualización de pesos de entrada
12:     $b_i(k+1) \leftarrow b_i(k) + \eta \delta_i(k)$                      ▷ Actualización del sesgo
13:  end for
14: end for

```

---

**Observación A.1.** *Este procedimiento implementa una red neuronal de tipo MLP entrenada mediante retropropagación en tiempo discreto. El entrenamiento se realiza de forma iterativa a través del cálculo del gradiente local ( $\delta_i(k)$ ) y la actualización de los parámetros por descenso de gradiente clásico.*

---

**Algoritmo 2** Entrenamiento en una sola etapa para red ELM (repetido  $k_{\text{final}} + 1$  veces)

---

**Entrada:** Conjunto de entrenamiento  $\{x(k), y(k)\}_{k=1}^N$ , número de neuronas ocultas  $N_k$ , parámetro de regularización  $\lambda$

**Salida:** Conjunto de soluciones entrenadas  $\{\hat{W}(k)\}_{k=0}^{k_{\text{final}}}$

```

1: for  $k = 0$  hasta  $k_{\text{final}}$  do                                ▷ Repeticiones del entrenamiento con nueva inicialización
2:   for  $i = 1$  hasta  $N_k$  do                                    ▷ Inicialización aleatoria
3:      $v_i(k) \leftarrow \text{rand\_uniform}([-1, 1]^n)$ 
4:      $b_i(k) \leftarrow \text{rand\_uniform}([-1, 1])$ 
5:   end for
6:   for  $j = 1$  hasta  $N$  do                                       ▷ Evaluación en todas las muestras
7:     for  $i = 1$  hasta  $N_k$  do
8:        $z_i(k, j) \leftarrow v_i^\top(k)x(j) + b_i(k)$ 
9:        $\Gamma_{j,i}(k) \leftarrow \Gamma(z_i(k, j))$ 
10:    end for
11:  end for
12:   $Y \leftarrow \begin{bmatrix} y(1) & y(2) & \dots & y(N) \end{bmatrix}^\top$ 
13:   $\hat{W}(k) \leftarrow (\Gamma(k)^\top \Gamma(k) + \lambda I)^{-1} \Gamma(k)^\top Y$       ▷ Cálculo directo de pesos de salida
14: end for

```

---

**Observación A.2.** *A diferencia del caso MLP, el entrenamiento de la red ELM se realiza en una sola etapa, resolviendo un sistema lineal con regularización. Los pesos de entrada y sesgos se inicializan aleatoriamente y se mantienen fijos durante el proceso.*

Las redes utilizadas en este trabajo presentan una arquitectura de una sola capa oculta con  $N_k$  neuronas. Cada neurona aplica una función de activación no lineal  $\Gamma(\cdot)$  tipo sigmoidea. La entrada  $x(k) \in \mathbb{R}^n$  se proyecta a través de los pesos de entrada  $v_i$  y sesgos  $b_i$  a una capa intermedia, cuya salida es luego combinada linealmente mediante los pesos  $\hat{W}_i$  para generar la salida estimada  $\hat{y}(k)$ .

---

En el caso de la red MLP, todos los parámetros  $\vartheta = \{\hat{W}_i, v_i, b_i\}$  se actualizan durante el entrenamiento mediante retropropagación. Para la red ELM, en cambio, los pesos de entrada y sesgos se inicializan aleatoriamente y se mantienen fijos, y únicamente los pesos de salida  $\hat{W}_i$  se obtienen mediante una solución cerrada por mínimos cuadrados regularizados.

A continuación, se muestra la implementación en MATLAB del algoritmo de entrenamiento para la red MLP, correspondiente al esquema con una sola capa oculta y aprendizaje en tiempo discreto. El código refleja paso a paso el proceso de propagación directa, cálculo del error y retropropagación de gradientes.

---

```

1  function y = NNBlock(u, yd, yr, b, ctrl)
2  % Entradas:
3  %   u      : vector (n*1) de características/estados de entrada a la red.
4  %   yd     : escalar; referencia deseada (setpoint) para la salida principal.
5  %   yr     : escalar; salida real medida de la planta (señal de seguimiento).
6  %   b      : vector (m*1); vibraciones medidas (señal de restricción).
7  %   ctrl   : entero (1..6); selecciona los hiperparámetros
8  %           [eta_base] según el switch interno.
9  % Salida:
10 %   y      : escalar; salida/comando de la red hacia la planta.
11 %----- Selección por ctrl -----
12 lambda= 5.0;      % penalización de bhat (>=0)
13 mu      = 1.0;     % alineación bhat ~ b (>=0)
14 satW    = 5.0;     % saturación por seguridad
15 switch int32(ctrl)
16     case 1
17         eta    = 0.7e-3;
18     case 2
19         eta    = 5e-3;
20     case 3
21         eta    = 1e-2;

```

---

---

```

22     case 4
23         eta    = 1e-2;
24     case 5
25         eta    = 1e-2;
26     case 6
27         eta    = 1e-2;
28     otherwise
29         eta    = 1e-2;
30 end
31 %----- Hiperparámetros fijos -----
32 n_oc    =30;          % neuronas ocultas (fijo; cambia si lo necesitas)
33 escala = 1e-5;        % inicialización pequeña
34 %----- Persistentes -----
35 persistent W1 b1 W2 W2b m initialized
36 if isempty(initialized)
37     n_in = numel(u);
38     m    = max(1, numel(b));          % dimensión de b
39     W1    = escala*randn(n_oc, n_in); % (n_oc x n_in)
40     b1    = escala*randn(n_oc, 1);    % (n_oc x 1)
41     W2    = escala*randn(1, n_oc);    % (1 x n_oc) -> y
42     W2b   = escala*randn(m, n_oc);    % (m x n_oc) -> bhat (interna)
43     initialized = true;
44 end
45 %----- 1) Forward -----
46 Z    = W1*u + b1;          % (n_oc x 1)
47 H    = 1./(1 + exp(-Z));    % sigmoide
48 y    = W2 * H;             % (1 x 1)
49 bhat = W2b * H;            % (m x 1) interna
50 %----- 2) Costo (para registro) -----
51 % Nota: mantengo tu lógica previa
52 ey   = yr - yd;            % "error" usado en tu backprop

```

---

---

```

53 E      = 0.5*(ey*ey) + lambda*(bhat.'*bhat) + mu*((bhat - b).'*(bhat - b)); %#ok<NASGU>
54 %----- 3) Backprop -----
55 % Derivadas en salidas
56 gy      = ey;                                % dE/dy (según tu flujo)
57 gb      = 2*lambda*bhat + 2*mu*(bhat - b);    % dE/dbhat (m x 1)
58 % Gradientes cabezas
59 dW2     = gy * (H. ');                        % (1 x n_oc)
60 dW2b    = gb * (H. ');                        % (m x n_oc)
61 % Hacia la oculta
62 dH      = (W2.' * gy) + (W2b.' * gb);        % (n_oc x 1)
63 dZ      = dH .* H .* (1 - H);                 % (n_oc x 1)
64 % Gradientes capa oculta
65 dW1     = dZ * (u. ');
66 db1     = dZ;
67 %----- 4) Actualización -----
68 W2      = clip(W2 - eta*dW2 , -satW, satW);
69 W2b     = clip(W2b - eta*dW2b, -satW, satW);
70 W1      = clip(W1 - eta*dW1 , -satW, satW);
71 b1      = clip(b1 - eta*db1 , -satW, satW);
72 end
73 %===== Utils =====
74 function A = clip(A, lo, hi)
75 A = min(max(A, lo), hi);
76 end

```

---

Tanto las arquitecturas como los algoritmos de entrenamiento presentados en este apéndice fueron implementados y validados en el entorno **MATLAB**, sirviendo como base para los experimentos de simulación y validación desarrollados en el capítulo correspondiente. La selección de parámetros, funciones de activación y número de neuronas se realizó empíricamente, priorizando la estabilidad y el desempeño en el seguimiento de trayectorias.

---



## APÉNDICE B

### Modelos para simulación

Para las simulaciones de validación que se presentaron en el capítulo 4, se utilizan versiones normalizadas y numéricamente compatibles de los tres modelos dinámicos.

#### Modelo de junta flexible (caso A)

El sistema dinámico completo queda descrito por

$$\begin{aligned} M(\delta)\ddot{\delta} + C(\delta, \dot{\delta})\dot{\delta} + G(\delta) + K_s(\delta - \theta) &= 0 \\ J\ddot{\theta} - K_s(\delta - \theta) &= \tau \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

con  $M(\delta) = M$ ,  $C(\delta, \dot{\delta}) = 0$ ,  $G(\delta) = mgl_c \sin(\delta)$ ,  $J = J$ , pueden desacoplarse los ángulos que representan la vibración  $\alpha = \delta - \theta$ , entonces,

$$\begin{aligned} J\ddot{\theta} - K_s\alpha &= \tau \\ M(\ddot{\theta} + \ddot{\alpha}) + K_s\alpha + mgl_c \sin(\theta + \alpha) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

y se expresan en forma matricial, esto es,

$$\begin{bmatrix} J & 0 \\ M & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -K_s \\ 0 & K_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ mgl_c \sin(\theta + \alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.3})$$

simplificando

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= \frac{k_s}{J}\alpha + \frac{1}{J}\tau \\ \ddot{\alpha} &= -\frac{k_s(J+M)}{JM}\alpha - \frac{mgl_c}{M}\sin(\theta + \alpha) - \frac{1}{M}\tau \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Considerando lo anterior, el par suministrado por el motor  $\tau_m$ , cumple la relación

$$\tau_m = \frac{k_\tau}{R_m} v(t) - \frac{k_\tau^2 N}{R_m} \dot{\theta} \quad (\text{B.5})$$

donde  $R_m$  representa la resistencia de la armadura,  $k_\tau$  representa la constante de par del motor,  $N$  es la constante de multiplicación del reductor y  $v(t)$  representa la tensión que se suministra al motor. También,  $\tau$  está relacionado con  $\tau_m$  por

$$\tau = N\tau_m, \quad (\text{B.6})$$

por lo tanto podemos expresar al sistema como

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= -\frac{k_\tau^2 N^2}{JR_m} \dot{\theta} + \frac{k_s}{J} \alpha + \frac{k_\tau N}{JR_m} v(t) \\ \ddot{\alpha} &= \frac{k_\tau^2 N^2}{JR_m} \dot{\theta} - \frac{k_s(M+J)}{MJ} \alpha - \frac{k_\tau N}{JR_m} v(t) - \frac{mgl_c}{M} \sin(\theta + \alpha) \end{aligned}, \quad (\text{B.7})$$

considerando que el brazo se encuentra en el plano horizontal,

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= -\frac{k_\tau^2 N^2}{JR_m} \dot{\theta} + \frac{k_s}{J} \alpha + \frac{k_\tau N}{JR_m} v(t) \\ \ddot{\alpha} &= \frac{k_\tau^2 N^2}{JR_m} \dot{\theta} - \frac{k_s(M+J)}{MJ} \alpha - \frac{k_\tau N}{JR_m} v(t) \end{aligned}, \quad (\text{B.8})$$

de manera equivalente

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= -a_0 \dot{\theta} + a_1 \alpha + a_2 v(t) \\ \ddot{\alpha} &= b_0 \dot{\theta} - b_1 \alpha - b_2 v(t) \end{aligned}, \quad (\text{B.9})$$

$$\text{con } a_0 = \frac{k_\tau^2 N^2}{JR_m}, a_1 = \frac{k_s}{J}, a_2 = \frac{k_\tau N}{JR_m}, b_0 = \frac{k_\tau^2 N^2}{JR_m}, b_1 = \frac{k_s(M+J)}{MJ}, b_2 = \frac{k_\tau N}{JR_m}.$$

**Modelo de enlace flexible (caso B)** Al igual que en el modelo del robot con junta flexible, es necesario omitir los efectos gravitacionales debido a que el sistema opera en un plano horizontal. Asimismo, los términos asociados al Lagrangiano residual  $\mathcal{L}_F$  se descartan en esta etapa, aunque se contemplan posteriormente en el análisis de estabilidad. Considerando estas simplificaciones, el modelo dinámico final del sistema queda expresado como

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= -a_0 \dot{\theta} + a_1 \alpha + a_2 v(t) \\ \ddot{\alpha} &= b_0 \dot{\theta} - b_1 \alpha - b_2 v(t) \end{aligned}, \quad (\text{B.10})$$



donde los coeficientes están definidos como  $a_0 = \frac{k_\tau^2 N^2}{JR_m}$ ,  $a_1 = \frac{K_s}{J}$ ,  $a_2 = \frac{k_\tau N}{JR_m}$ ,  $b_0 = \frac{k_\tau^2 N^2}{JR_m}$ ,  $b_1 = \frac{K_s(M_\varepsilon + J)}{M_\varepsilon J}$ ,  $b_2 = \frac{k_\tau N}{JR_m}$ .

**Modelo combinado (caso C)** A partir del modelo Lagrangiano dominante, y utilizando como variables independientes  $\theta(t)$ ,  $\beta(t) := \theta_0 - \theta$ ,  $\alpha(t) := \delta - \theta_0$ ,  $\delta = \theta + \beta + \alpha$ , el sistema dinámico, bajo la hipótesis de operación en plano horizontal y sin términos residuales, queda definido por

$$\begin{aligned} J\ddot{\theta} - K_\beta\beta &= \tau, \\ M_\varepsilon(\ddot{\theta} + \ddot{\beta} + \ddot{\alpha}) + K_\alpha\alpha &= 0, \\ K_\beta\beta - K_\alpha\alpha &= 0, \end{aligned} \tag{B.11}$$

La tercera ecuación es algebraica y representa una relación de acoplamiento elástico  $\ddot{\alpha} = \frac{K_\beta}{K_\alpha}\ddot{\beta}$ .

Sustituyendo en la segunda ecuación

$$M_\varepsilon\left(\ddot{\theta} + \ddot{\beta} + \frac{K_\beta}{K_\alpha}\ddot{\beta}\right) + K_\beta\beta = M_\varepsilon\ddot{\theta} + M_\varepsilon\left(1 + \frac{K_\beta}{K_\alpha}\right)\ddot{\beta} + K_\beta\beta = 0, \tag{B.12}$$

se introduce la relación par-voltaje para el actuador, sustituyendo en la primera ecuación

$$\ddot{\theta} = -a_0\dot{\theta} + a_1\beta + a_2v(t) \tag{B.13}$$

$$\text{con } a_0 = \frac{k_\tau^2 N^2}{JR_m}, \quad a_1 = \frac{K_\beta}{J}, \quad a_2 = \frac{k_\tau N}{JR_m}.$$

Sustituimos la expresión de  $\ddot{\theta}$  en la ecuación acoplada

$$\ddot{\beta} = b_0\dot{\theta} - b_1\beta - b_2v(t), \tag{B.14}$$

donde  $b_0 = \frac{a_0}{1 + \frac{K_\beta}{K_\alpha}}$ ,  $b_1 = \frac{M_\varepsilon a_1 + K_\beta}{M_\varepsilon(1 + \frac{K_\beta}{K_\alpha})}$ ,  $b_2 = \frac{a_2}{1 + \frac{K_\beta}{K_\alpha}}$ . El modelo desacoplado final queda expresado como

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= -a_0\dot{\theta} + a_1\beta + a_2v(t), \\ \ddot{\beta} &= b_0\dot{\theta} - b_1\beta - b_2v(t), \\ \ddot{\alpha} &= c_0\ddot{\beta}. \end{aligned} \tag{B.15}$$

Este sistema representa una estructura de tres bloques interconectados: uno actuado ( $\theta$ ) y dos subactuados ( $\beta$ ,  $\alpha$ ), con acoplamiento jerárquico.

## B.1. Identificación de Parámetros

*Formulación del método.* Considere un sistema dinámico expresado de la forma lineal respecto los parámetros

$$\tau(t) = Y(t)\vartheta \quad (\text{B.16})$$

donde  $\tau(t) \in \mathbb{R}^n$  es la señal de entrada,  $Y(t) \in \mathbb{R}^{n \times p}$  es la matriz de regresores construida a partir de variable medidas y derivadas numéricas (aceleraciones, velocidades, posiciones),  $\vartheta \in \mathbb{R}^p$  es el vector de parámetros a dinámicos a estima. La estimación se obtiene mediante el operador LS clásico

$$\hat{\vartheta} = (Y^\top Y)^{-1} Y^\top \tau, \quad (\text{B.17})$$

el proceso se aplica por separado a cada uno de los tres casos de estudio.

### Caso A – Junta Flexible

$$\ddot{\theta} = -a_0\dot{\theta} + a_1\alpha + a_2v(t), \quad \ddot{\alpha} = b_0\dot{\theta} - b_1\alpha - b_2v(t)$$

Tabla B.1: Coeficientes dinámicos estimados para el modelo con junta flexible

| Parámetro | Valor estimado | Parámetro | Valor estimado | Parámetro | Valor estimado |
|-----------|----------------|-----------|----------------|-----------|----------------|
| $a_0$     | 13.7634        | $a_1$     | 211.7862       | $a_2$     | 23.4206        |
| $b_0$     | 1.8457         | $b_1$     | 834.1035       | $b_2$     | 12.8421        |

### Caso B – Enlace Flexible

$$\ddot{\theta} = -a_0\dot{\theta} + a_1\alpha + a_2v(t), \quad \ddot{\alpha} = b_0\dot{\theta} - b_1\alpha - b_2v(t)$$

Tabla B.2: Coeficientes dinámicos estimados para el modelo con enlace flexible

| Parámetro | Valor estimado | Parámetro | Valor estimado | Parámetro | Valor estimado |
|-----------|----------------|-----------|----------------|-----------|----------------|
| $a_0$     | 24.1108        | $a_1$     | 417.0838       | $a_2$     | 10.9149        |
| $b_0$     | 9.4873         | $b_1$     | 544.4326       | $b_2$     | 4.6259         |

**Caso C – Modelo Combinado**

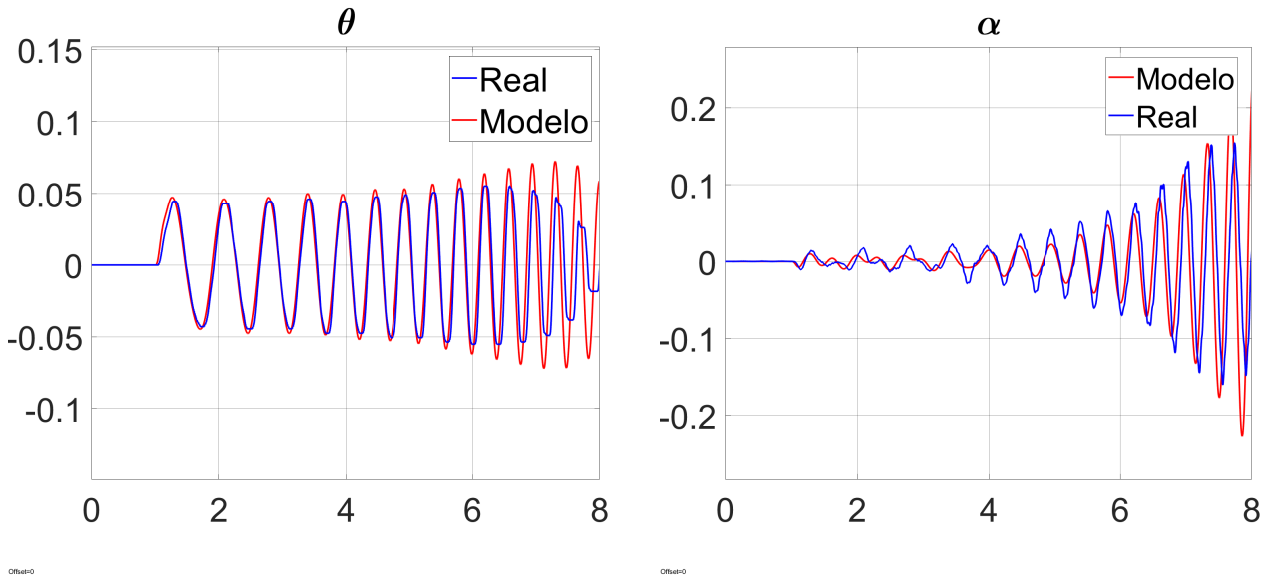
$$\ddot{\theta} = -a_0\dot{\theta} + a_1\beta + a_2v(t), \quad \ddot{\beta} = b_0\dot{\theta} - b_1\beta - b_2v(t), \quad \ddot{\alpha} = c_0\ddot{\beta}.$$

Tabla B.3: Coeficientes dinámicos estimados para el modelo combinado

| Parámetro | Valor estimado | Parámetro | Valor estimado | Parámetro | Valor estimado |
|-----------|----------------|-----------|----------------|-----------|----------------|
| $a_0$     | 26.6494        | $a_1$     | 404.3159       | $a_2$     | 11.6883        |
| $b_0$     | 9.6698         | $b_1$     | 362.6166       | $b_2$     | 4.9772         |
| $c_0$     | 1.5            |           |                |           |                |

**B.2. Verificación del Modelo por Simulación**

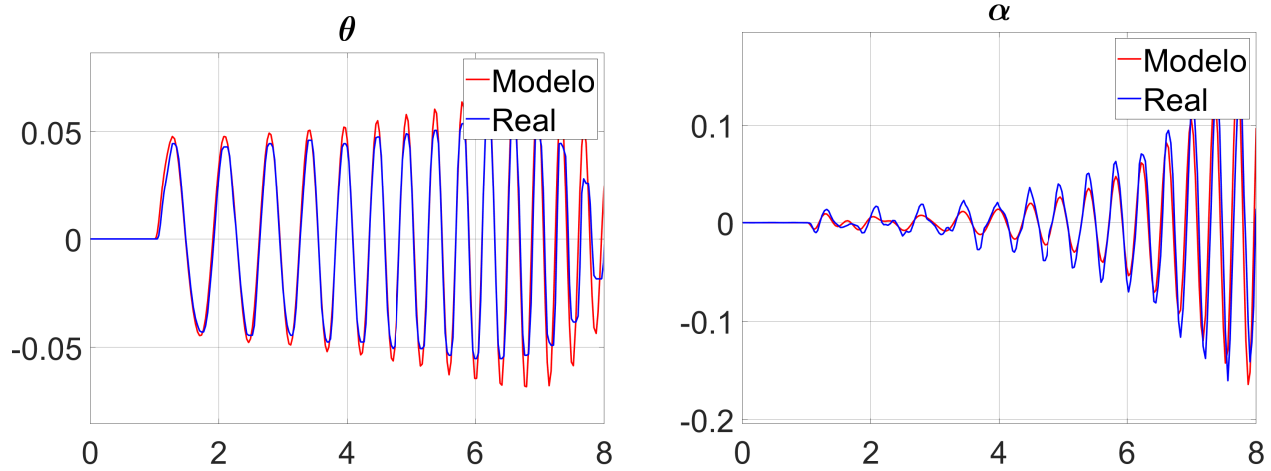
En las Figuras B.1 B.2 B.3 se muestran la respuesta de la posición, utilizada como criterio de validación principal del modelo identificado.



(a) Estimación del ángulo del rotor.

(b) Estimación del ángulo de la junta.

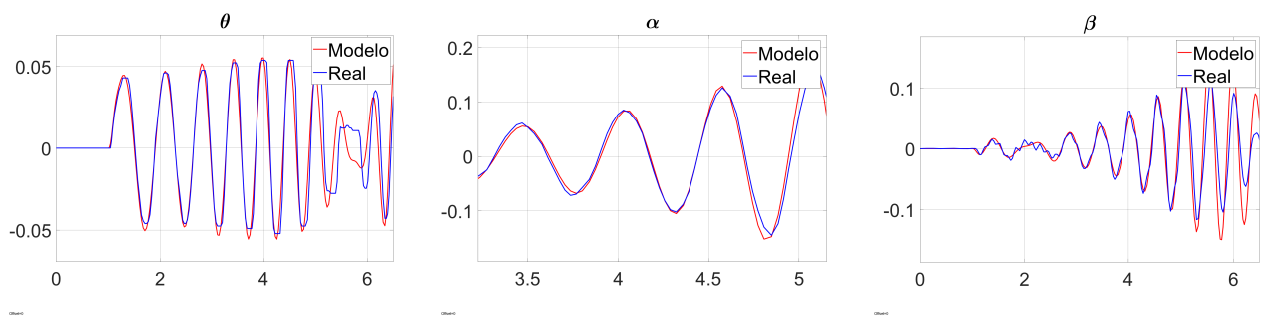
Figura B.1: Validación del modelo del manipulador de junta flexible.



(a) Estación de ángulo del rotor.

(b) Estimación del ángulo del enlace.

Figura B.2: Validación del modelo del manipulador de enlace flexible.



(a) Estación de ángulo del rotor.

(b) Estimación del ángulo de la junta.

(c) Estimación del ángulo del enlace.

Figura B.3: Validación del modelo del manipulador combinado.

## Bibliografía

- [1] Ranko Zotovic-Stanasic, Rodrigo Perez-Ubeda, and Angel Perles. Comparative study of methods for robot control with flexible joints. *Actuators*, 13(8), 2024.
- [2] Bin He, Shuai Wang, and Yongjia Liu. Underactuated robotics: A review. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 16(4):1729881419862164, 2019.
- [3] Dipendra Subedi, Ilya Tyapin, and Geir Hovland. Review on Modeling and Control of Flexible Link Manipulators. *Modeling, Identification and Control*, 41(3):141–163, 2020.
- [4] Esmail Alandoli, Marizan Sulaiman, M.Z.A Rashid, H Shah, and Zool Ismail. A review study on flexible link manipulators. *Journal of Telecommunication, Electronic and Computer Engineering*, 8:93–97, 08 2016.
- [5] Qi Zhang, Xiaofeng Liu, and Guoping Cai. Dynamics and control of a flexible-link flexible-joint space robot with joint friction. *International Journal of Aeronautical and Space Sciences*, 22(2):415–432, 2021.
- [6] Mark W. Spong. Underactuated mechanical systems. In Bruno Siciliano and Kimon P. Valavanis, editors, *Control Problems in Robotics and Automation*, pages 135–150, Berlin, Heidelberg, 1998. Springer Berlin Heidelberg.
- [7] Josiane Maria de Macedo Fernande, Marcelo Costa Tanaka, Wallace Moreira Bessa, and Edwin Kreuzer. An intelligent controller for underactuated mechanical systems, 2022.
- [8] Liang Tang and Ding Zhao. Dynamic modeling of a flexible-link flexible-joint system with tip mass considering stiffening effect. *Applied Sciences*, 12(13):6496, 2022.

- [9] Firas A. Khasawneh and Daniel Segalman. Exact and numerically stable expressions for euler-bernoulli and timoshenko beam modes. *Applied Acoustics*, 151:215–228, 2019.
  - [10] Carmelo di Castri and Arcangelo Messina. Vibration analysis of multilink manipulators based on timoshenko beam theory. *Journal of Robotics*, 2011:1–21, 2011.
  - [11] Degao Li, Jean W. Zu, and Andrew A. Goldenberg. Dynamic modeling and mode analysis of flexible-link, flexible-joint robots. *Mechanism and Machine Theory*, 33(7):1031–1044, 1998.
  - [12] Harsh Godbole, Ryan Caverly, and James Forbes. Modelling of flexible cable-driven parallel robots using a rayleigh-ritz approach. In Andreas Pott and Thomas Bruckmann, editors, *Cable-Driven Parallel Robots: Proceedings of the Fourth International Conference on Cable-Driven Parallel Robots*, pages 3–14. Springer, July 2018.
  - [13] Carmine Maria Pappalardo, Şefika İpek Lök, Levent Malgaca, and Domenico Guida. Experimental modal analysis of a single-link flexible robotic manipulator with curved geometry using applied system identification methods. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 200:110629, 2023.
  - [14] Chang Tai Kiang, Andrew Spowage, and Chan Kuan Yoong. Review of control and sensor system of flexible manipulator. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 77(1):187–213, 2015.
  - [15] W.J. Book. Modeling, design, and control of flexible manipulator arms: a tutorial review. In *29th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 500–506 vol.2, 1990.
  - [16] F. Boyer and N. Glandais. Simulation of flexible manipulators with elastic nonlinearities. In *Proceedings 1999 IEEE International Conference on Robotics and Automation (Cat. No.99CH36288C)*, volume 1, pages 759–766 vol.1, 1999.
  - [17] Xiaou Li and Wen Yu. A systematic tuning method of pid controller for robot manipulators. In *2011 9th IEEE International Conference on Control and Automation (ICCA)*, pages 274–279, 2011.
-

- 
- [18] P. Tomei. A simple pd controller for robots with elastic joints. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36(10):1208–1213, 1991.
  - [19] Ismail H. Akyuz, Ersin Yolacan, H. Metin Ertunc, and Zafer Bingul. Pid and state feedback control of a single-link flexible joint robot manipulator. In *2011 IEEE International Conference on Mechatronics*, pages 409–414, 2011.
  - [20] Wen Yu and Xiaou Li. Stable pid control for robot manipulators with neural compensation. In *2012 IEEE 51st IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 5398–5403, 2012.
  - [21] Je S. Yeon, Jong H. Park, and Sang-Hun Lee. Practical robust control for flexible joint robot manipulators. *IFAC Proceedings Volumes*, 41(2):11769–11774, 2008. 17th IFAC World Congress.
  - [22] D.M. Dawson, Z. Qu, and M.M. Bridges. Hybrid adaptive control for tracking of rigid-link flexible-joint robots. *IEE Proceedings D (Control Theory and Applications)*, 140:155–159, 1993.
  - [23] Alin Albu-Schäffer, Christian Ott, and Gerd Hirzinger. A unified passivity-based control framework for position, torque and impedance control of flexible joint robots. *The International Journal of Robotics Research*, 26(1):23–39, 2007.
  - [24] L. Huang, S.S. Ge, and T.H. Lee. Adaptive position/force control of an uncertain constrained flexible joint robots - singular perturbation approach. In *SICE 2004 Annual Conference*, volume 1, pages 220–225 vol. 1, 2004.
  - [25] Joseph Jean-Baptiste Mvogo Ahanda, Jean Bosco Mbede, Achille Melingui, and Bernard Essimbi. Robust adaptive control for robot manipulators: Support vector regression-based command filtered adaptive backstepping approach. *Robotica*, 36(4):516–534, 2018.
  - [26] Rogelio Lozano-Leal and Bernard Brogliato. Adaptive control of robot manipulators with flexible joints. In *1991 American Control Conference*, pages 938–943, 1991.
-

- [27] Hamidreza Pourmahdian, Shoorangiz Shams Shamsabad Farahani, and Roohollah Barzamini. Robust control schemes in flexible manipulators: A review. *Proceedings of the 12th National Congress of the New Technologies in Sustainable Development of Iran*, page —, October 2024.
  - [28] Mansour Karkoub, Gary Balas, Kumar Tamma, and Max Donath. Robust control of flexible manipulators via  $\mu$ -synthesis. *Control Engineering Practice*, 8(7):725–734, 2000.
  - [29] Carmen Chan-Zheng, Pablo Borja, and Jacqueliën M.A. Scherpen. Dead-zone compensation via passivity-based control for a class of mechanical systems. *IFAC-PapersOnLine*, 56(1):319–324, 2023. 12th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems NOLCOS 2022.
  - [30] R Damle, R Lashlee, V Rao, and F Kern. Identification and robust control of smart structures using artificial neural networks. *Smart Materials and Structures*, 3(1):35, mar 1994.
  - [31] George Cybenko. Approximation by superpositions of a sigmoidal function. *Mathematics of Control, Signals and Systems*, 2(4):303–314, 1989.
  - [32] A.R. Barron. Universal approximation bounds for superpositions of a sigmoidal function. *IEEE Transactions on Information Theory*, 39(3):930–945, 1993.
  - [33] Kurt Hornik, Maxwell Stinchcombe, and Halbert White. Multilayer feedforward networks are universal approximators. *Neural Networks*, 2(5):359–366, 1989.
  - [34] K.S. Narendra and K. Parthasarathy. Identification and control of dynamical systems using neural networks. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 1(1):4–27, 1990.
  - [35] Wenhui Zhang, Jinmiao Shen, Xiaoping Ye, and Shuhua Zhou. Error model-oriented vibration suppression control of free-floating space robot with flexible joints based on adaptive neural network. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 114:105028, 2022.
-



- 
- [36] Changyin Sun, Hejia Gao, Wei He, and Yao Yu. Fuzzy neural network control of a flexible robotic manipulator using assumed mode method. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 29(11):5214–5227, 2018.
- [37] Xin Liu, Chenguang Yang, Zhiguang Chen, Min Wang, and Chun-Yi Su. Neuro-adaptive observer based control of flexible joint robot. *Neurocomputing*, 275:73–82, 2018.
- [38] Marta Kordasz, Rafał Madoński, Mateusz Przybyła, and Piotr Sauer. Active disturbance rejection control for a flexible-joint manipulator. In Krzysztof Kozłowski, editor, *Robot Motion and Control 2011*, pages 247–256, London, 2012. Springer London.
- [39] Housseem Jerbi, Izzat Al-Darraj, Georgios Tsaramirsis, Mourad Kchaou, Rabeh Abbassi, and Obaid AlShammari. Fuzzy luenberger observer design for nonlinear flexible joint robot manipulator. *Electronics*, 11(10), 2022.
- [40] Steve Ulrich and J. Z. Sasiadek. Direct model reference adaptive control of a flexible joint robot. In *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, Toronto, Ontario, Canada, August 2010. American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA).
- [41] A. Jnifene and W. Andrews. Experimental study on active vibration control of a single-link flexible manipulator using tools of fuzzy logic and neural networks. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 54(3):1200–1208, 2005.
- [42] Zhongyi Chu and Jing Cui. Fuzzy disturbance-observer based control of electrically driven free-floating space manipulator. In Derong Liu, Huaguang Zhang, Marios Polycarpou, Cesare Alippi, and Haibo He, editors, *Advances in Neural Networks – ISNN 2011*, pages 41–49, Berlin, Heidelberg, 2011. Springer Berlin Heidelberg.
- [43] Roger Datouo, Joseph Jean-Baptiste Mvogo Ahanda, Achille Melingui, Frédéric Biya-Motto, and Bernard Essimbi Zobo. Adaptive fuzzy finite-time command-filtered backstepping control of flexible-joint robots. *Robotica*, 39(6):1081–1100, 2021.
- [44] Gabriel da Silva Lima, Diego Rolim Porto, Adilson José de Oliveira, and Wallace Moreira Bessa. Intelligent control of a single-link flexible manipulator using sliding modes and
-

- artificial neural networks. *Electronics Letters*, 57(23):869–872, September 2021.
- [45] J.-J.E. Slotine and Li Weiping. Adaptive manipulator control: A case study. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 33(11):995–1003, 1988.
- [46] Richard Colbaugh and Kristin Glass. Adaptive task-space control of flexible-joint manipulators. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, 20(2):225–249, 1997.
- [47] Shuzhi S. Ge and Ian Postlethwaite. Adaptive neural network controller design for flexible joint robots using singular perturbation technique. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 17(3):120–131, 1995.
- [48] C.J. Tomlin, J. Lygeros, and S. Shankar Sastry. A game theoretic approach to controller design for hybrid systems. *Proceedings of the IEEE*, 88(7):949–970, 2000.
- [49] R. Ortega, A.J. Van Der Schaft, I. Mareels, and B. Maschke. Putting energy back in control. *IEEE Control Systems Magazine*, 21(2):18–33, 2001.
- [50] C. Ott, A. Albu-Schaffer, A. Kugi, S. Stamigioli, and G. Hirzinger. A passivity based cartesian impedance controller for flexible joint robots - part i: torque feedback and gravity compensation. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2004. Proceedings. ICRA '04. 2004*, volume 3, pages 2659–2665 Vol.3, 2004.
- [51] S.O.R. Moheimani, B.J.G. Vautier, and B. Bhikkaji. Experimental implementation of extended multivariable ppf control on an active structure. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 14(3):443–455, 2006.
- [52] Guang-Bin Huang, Qin-Yu Zhu, and Chee-Kheong Siew. Extreme learning machine: Theory and applications. *Neurocomputing*, 70(1–3):489–501, 2006.
- [53] Zhi-Hong Jiang and Shinsuke Higaki. Control of flexible joint robot manipulators using a combined controller with neural network and linear regulator. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering*, 225(6):798–806, 2011.
-

- 
- [54] Tairen Sun, Hailong Pei, Yongping Pan, Hongbo Zhou, and Caihong Zhang. Neural network-based sliding mode adaptive control for robot manipulators. *Neurocomputing*, 74(14):2377–2384, 2011.
  - [55] Jinxin Liu, Xuefeng Chen, and Zhengjia He. Frequency domain active vibration control of a flexible plate based on neural networks. *Frontiers of Mechanical Engineering*, 8(2):109–117, 2013.
  - [56] Chang Li, Yuling Li, Yixin Yin, Sen Zhang, and Jie Dong. Adaptive control of flexible joint manipulators with parameter convergence. In *2019 Chinese Control Conference (CCC)*, pages 2448–2453, 2019.
  - [57] B. Depraetere, M. Liu, G. Pinte, I. Grondman, and R. Babuška. Comparison of model-free and model-based methods for time optimal hit control of a badminton robot. *Mechatronics*, 24(8):1021–1030, 2014.
  - [58] Yuncheng Ouyang, Wei He, Xiajing Li, Jin-Kun Liu, and Guang Li. Vibration control based on reinforcement learning for a single-link flexible robotic manipulator. *IFAC-PapersOnLine*, 50(1):3476–3481, 2017. 20th IFAC World Congress.
  - [59] Changyin Sun, Wei He, and Jie Hong. Neural network control of a flexible robotic manipulator using the lumped spring-mass model. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 47(8):1863–1874, 2017.
  - [60] Yushu Bian and Zhihui Gao. Nonlinear vibration control for flexible manipulator using 1: 1 internal resonance absorber. *Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control*, 37(4):1053–1066, 2018.
  - [61] Minoru Sasaki, Joseph Muguro, Fumiya Kitano, Waweru Njeri, Daiki Maeno, and Kojiro Matsushita. Vibration and position control of a two-link flexible manipulator using reinforcement learning. *Machines*, 11(7), 2023.
  - [62] Amir Hossein Barjini, Seyed Adel Alizadeh Kolagar, Sadeq Yaqubi, and Jouni Mattila. Deep reinforcement learning-based motion planning and pde control for flexible
-

manipulators, 2025.

- [63] Qingyun Zhang, Xinhua Zhao, Liang Liu, and Tengda Dai. Adaptive sliding mode neural network control and flexible vibration suppression of a flexible spatial parallel robot. *Electronics*, 10(2), 2021.
  - [64] Zhangping You, Wenhui Zhang, Jinmiao Shen, Yangfan Ye, Xiaoping Ye, and Shuhua Zhou. Adaptive neural network vibration suppression control of flexible joints space manipulator based on  $h_\infty$  theory. *Journal of Vibroengineering*, 25(3):492–505, jan 2023.
  - [65] Mahdi Hejrati. Neuro-adaptive boundary force control of dual one-link flexible arms with unmodeled dynamics and input constraints, 2022.
  - [66] Xiangqian Yao, Hao Sun, Zhijia Zhao, and Yu Liu. Event-triggered bipartite consensus tracking and vibration control of flexible timoshenko manipulators under time-varying actuator faults. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 11(5):1190–1201, 2024.
  - [67] Jing Cheng and Li Chen. The fuzzy neural network control scheme with  $h$ -infinite tracking characteristic of space robot system with dual-arm after capturing a spin spacecraft. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 7(5):1417–1424, 2020.
  - [68] Dingxu Guo, Jian Xu, and Shu Zhang. Data-driven mode shape selection and model-based vibration suppression of 3-rrr parallel manipulator with flexible actuation links, 2023.
  - [69] Daniele Ronzani, Shamil Mamedov, and Jan Swevers. Vibration free flexible object handling with a robot manipulator using learning control, 2022.
  - [70] Ken-Ichi Funahashi. On the approximate realization of continuous mappings by neural networks. *Neural Networks*, 2(3):183–192, 1989.
  - [71] Mark W. Spong and David W. Harris. *Robot Dynamics and Control*. Wiley, New York, NY, USA, 1 edition, 1989.
-

- 
- [72] C. Canudas De Wit, B. Siciliano, and G. Bastin, editors. *Theory of Robot Control*. Communications and Control Engineering. Springer London, London, UK, 1 edition, 1996.
- [73] Thomas Kailath, Ali H. Sayed, and Babak Hassibi. *Linear Estimation*. Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, USA, 2000.
- [74] Romeo Ortega, Arjan J. van der Schaft, Mark W. Spong, and Bernard Maschke. *Passivity-Based Control of Euler–Lagrange Systems*. Communications and Control Engineering. Springer, London, UK, 1998.
- [75] Frank L. Lewis. *Neural Network Control of Robot Manipulators and Nonlinear Systems*. Taylor & Francis, London, UK; Boca Raton, FL, USA, 1999.
- [76] Rafael Kelly, Víctor Santibáñez, and Antonio Loria. *Control of Robot Manipulators in Joint Space*, volume – of *Advanced Textbooks in Control and Signal Processing*. Springer, London, UK, 2005.
- [77] Bruno Siciliano and Oussama Khatib, editors. *Springer Handbook of Robotics*, volume ISBN (Print): 978-3-540-23957-4; ISBN (Electronic): 978-3-540-30301-5 of *Springer Handbooks*. Springer, Berlin, Heidelberg, 1 edition, 2008.
- [78] Wen Yu. *PID Control with Intelligent Compensation for Exoskeleton Robots*. Elsevier, Amsterdam, The Netherlands, 1 edition, 2018.
- [79] Haruhiko Asada and Jean-Jacques E. Slotine. *Robot Analysis and Control*. Wiley–Interscience, New York, NY, USA, 1 edition, 1986.
- [80] Roy Featherstone. *Rigid Body Dynamics Algorithms*, volume 49 of *Springer Tracts in Advanced Robotics*. Springer, New York, NY, USA, 1 edition, 2008.
- [81] Hassan K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 3 edition, 2002. The book can be consulted by contacting PH-AID: Wallet, Lionel.
-

- [82] Eduardo D. Sontag. *Mathematical Control Theory: Deterministic Finite Dimensional Systems*, volume 6 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer, New York, NY, USA, 2 edition, 1998.
  - [83] Martin T. Hagan, Howard B. Demuth, Mark H. Beale, and Orlando de Jesús. *Neural Network Design*. Martin Hagan, Stillwater, OK, USA, 2 edition, 2014. Includes MATLAB Neural Network Toolbox support.
  - [84] Duc Truong Pham and Xing Liu. *Neural Networks for Identification, Prediction and Control*. Springer, Berlin, Germany, 3 edition, 1997.
  - [85] Ali Zilouchian and Mo Jamshidi, editors. *Intelligent Control Systems Using Soft Computing Methodologies*. CRC Press, Boca Raton, FL, USA, 2001.
  - [86] Kumpati S. Narendra and Anuradha M. Annaswamy. *Stable Adaptive Systems*. Dover Books on Electrical Engineering. Dover Publications, Mineola, NY, USA, reprint of the 1989 edition edition, 2012. Originally published by Prentice-Hall in 1989.
  - [87] Ian Goodfellow, Yoshua Bengio, and Aaron Courville. *Deep Learning*. MIT Press, Cambridge, MA, 2016.
  - [88] Ting Gong, Tyler Lee, Cory Stephenson, Venkata Renduchintala, Suchismita Padhy, Anthony Ndirango, Gokce Keskin, and Oguz H. Elibol. A comparison of loss weighting strategies for multi-task learning in deep neural networks. *IEEE Access*, 7:141627–141632, 2019.
  - [89] Walter Rudin. *Análisis funcional*. Editorial Reverté, Barcelona, España, 1 edition, 2009.
-