



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS
AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD ZACATENCO

DEPARTAMENTO DE CONTROL AUTOMÁTICO

**“Estudio comparativo de técnicas de control semiactivo
para la reducción de vibración en edificios”.**

T E S I S

que presenta

Israel de Jesús Hernández Saldaña

Para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

en la Especialidad de

Control Automático

Directores de la Tesis:

Dr. Jesús Morales Valdez

Dr. Wen Yu Liu

Ciudad de México

Abril, 2023

Dedicatoria

Poderoso Newton, sabio Einstein, iluminado Hawking y Buda amitabha, su deseo por saber abrieron las puertas a un universo de posibilidades.

Dedicado a todos a aquellos que quieren saber más...

Agradecimientos

En primer lugar, le agradezco a mis asesores los Doctores Jesús Morales Valdez y Wen Yu Liu, por su apoyo, orientación y paciencia para el desarrollo de este trabajo, al final el conocimiento que me transmiten es mi mayor recompensa. Un especial encomio al Dr. Rubén Alejandro Garrido Moctezuma quien participo desde un inicio en el desarrollo de la presente tesis y cuyos comentarios quedaron plasmados en la mejora de la misma.

El agradecimiento a mis profesores en la maestría y a lo largo de mi formación académica sin ellos no me encontraría en este nivel de mi preparación profesional. Al M.C. Andrés Rodríguez Torres, por compartir su experiencia para resolver las complicaciones que se presentaron durante el desarrollo de este trabajo.

Gracias a mi familia por su ánimo, sustento y cariño, en los momentos difíciles cuando flaquea el alma por las preocupaciones banales de la vida, su simple presencia o recuerdo, son suficiente para recobrar el aliento y continuar con la labor encomendada hasta ver culminada la misma.

A la comunidad de investigadores y estudiantes del departamento de Control Automático, por tener un ambiente de divulgación científica con un espíritu de enriquecimiento mutuo. Haciendo

extensivo este reconocimiento a los colaboradores en las diversas áreas y al respectivo personal de apoyo, también son parte de los logros del mencionado departamento.

A los miembros del jurado, la Dra. Martha Belem Saldívar Márquez y al Dr Moisés Bonilla Estrada, quienes con sus observaciones y comentarios enriquecieron el contenido de este trabajo.

Al Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, por crear los espacios educativos e investigación, que permitieron prepararme académicamente y desarrollar la presente tesis hasta su término.

Finalmente, agradezco a CONACYT por el apoyo económico otorgado a través de la beca nacional (tradicional) 2019 – 2, en el programa 001071-Maestría en Ciencias en Control Automático, para llevar a cabo esta investigación durante mis estudios de maestría.

Índice general

Agradecimientos	III
Resumen	VIII
Abstract	IX
Índice de figuras	X
Índice de tablas	XI
1. Introducción	1
1.1. Estado del arte	2
1.2. Planteamiento del problema	6
1.3. Aportación	7
1.4. Organización del trabajo	8
2. Modelo matemático de un edificio	9
2.1. Modelo de la viga de Timoshenko	10
2.1.1. Análisis puntual de los valores propios del modelo de la viga de Timoshenko	15
2.1.2. Estudio dinámico generalizado para el m -ésimo modo de vibración del modelo de la viga de Timoshenko	23
2.1.3. Formulación en el espacio de estados del modelo de la viga de Timoshenko .	26
2.2. Modelo perturbado del modelo de la viga de Timoshenko	28

2.3. Modelo de Bouc-Wen de un amortiguador magnetoreológico.	29
3. Comparación de técnicas de control semiactivo	33
3.1. Control por rechazo activo de perturbaciones (CRAP)	33
3.1.1. Observador de estados	36
3.1.2. Diseño de un controlador Proporcional Derivativo	37
3.1.3. Estructura de pruebas para validación numérica	39
3.1.4. Integrador numérico para acelerómetros	41
3.1.5. Validación numérica del control por rechazo activo de perturbaciones	42
3.1.5.1. Índice de desempeño	43
3.2. Control por modos deslizantes integral (CMDI)	44
3.2.1. Diseño de una superficie deslizante basado en error de posición	46
3.2.2. Análisis de estabilidad de la superficie deslizante	47
3.2.3. Validación numérica del control por modos deslizantes integral	49
3.3. Control por rechazo activo de perturbaciones con modos deslizantes integral	51
3.3.1. Validación numérica del control por rechazo activo de perturbaciones con modos deslizantes integral	52
3.4. Discusión	53
4. Control Continuo con Observadores	56
4.1. Observador algebraico	56
4.2. Control por rechazo activo de perturbaciones con modos deslizantes integral con observador algebraico	61
4.3. Discusión	64
5. Conclusiones	68
5.1. Trabajo futuro	68

Resumen

Esta tesis presenta un estudio comparativo entre estrategias de control semiactivo aplicado a estructuras rígidas para minimizar los desplazamientos laterales y con ello reducir el daño en edificios debido a perturbaciones sísmicas.

Se utiliza el modelo de la viga de Timoshenko para representar la estructura. Este trabajo emplea un amortiguador magnetoreológico ubicado entre el primer nivel de la estructura y la superficie del suelo. Este actuador es no lineal por lo que se emplea el modelo de Bouc-Wen para caracterizarlo.

Las estrategias estudiadas son el control por rechazo activo de perturbaciones (CRAP), control por modos deslizantes integral (*CMDI*) y el controlador combinado *CRAP + CMDI*. Además, se emplea un observador algebraico para estimar las señales de desplazamiento y velocidad las cuales no se pueden medir y son requeridas por los controladores antes mencionados. Los desarrollos teóricos son evaluados mediante simulaciones numéricas.

Abstract

This thesis presents a comparative study between several semi-active control strategies applied to rigid structures to evaluate their performance to minimize lateral displacements and thereby reduce damage due to seismic disturbances.

The model of the Timoshenko beam is used to represent the structures. This work employs a magnetorheological damper located between the first level of the structure and the ground surface. This actuator is non-linear so the Bouc-Wen model is used to characterize it.

The strategies are the active disturbance rejection control (ADRC), the integral sliding mode control (ISMC) and the combined control ADRC + ISMC. In addition, an algebraic observer is used to estimate the displacement and velocity signals, which cannot be measured and are required by the controllers mentioned above. The theoretical developments are evaluated through numerical simulations.

Índice de figuras

2.1. Modelo de la viga de Timoshenko con base flexible.	11
2.2. Sección transversal de la viga de Timoshenko	12
2.3. Modelo de la viga de Timoshenko bajo perturbación externa.	28
2.4. Diagrama del modelo de Bouc-Wen de un amortiguador magnetoreológico.	30
2.5. Esquema de recorridos positivos R_{izq}^{der} y negativos R_{der}^{izq} del amortiguador magnetoreológico.	32
3.1. Ubicación del amortiguador magnetoreológico en el edificio.	33
3.2. Esquema del control por rechazo activo de perturbaciones.	39
3.3. Registro sísmico escalado del sismo de 1985.	40
3.4. Espectro de la velocidad del viento.	41
3.5. Diagrama a bloques del integrador numérico.	42
3.6. Respuesta del edificio usando el controlador $CRAP$	43
3.7. Señales de fuerza y voltaje usando el controlador $CRAP$	44
3.8. Esquema de control por modos deslizantes integral ($CMDI$).	47
3.9. Respuesta del edificio usando el controlador $CMDI$	50
3.10. Señales de fuerza y voltaje usando el controlador $CMDI$	50
3.11. Esquema de control $CRAP + CMDI$	52
3.12. Respuesta del edificio usando el controlador $CRAP + CMDI$	53

3.13. Señales de fuerza y voltaje requeridas por el $CRAP + CMDI$ 54

4.1. Gráficas de la posición 60

4.2. Gráficas de la posición con ruido de medición y corrección con filtro. 61

4.3. Respuesta del edificio usando el controlador $CRAP + CMDI + OA$ 62

4.4. Señales de fuerza y voltaje usando el controlador $CRAP + CMDI + OA$ 63

4.5. Respuesta del edificio usando el controlador $CRAP + CMDI + OA$ con ruido de medición. 63

4.6. Señales del amortiguador magnetoreológico usando el controlador $CRAP + CMDI + OA$ con ruido de medición. 64

4.7. Respuesta del edificio usando el controlador $CRAP$ con ruido de medición. 65

4.8. Respuesta del edificio usando el controlador $CMDI$ con ruido de medición. 66

4.9. Respuesta del edificio compensado por $CRAP + CMDI$ con ruido de medición. . . 67

Índice de tablas

- 2.1. Comparación entre modelos matemáticos para edificios. 10
- 2.2. Nomenclatura 14
- 3.1. Parámetros del prototipo de edificio de 5 niveles 40
- 3.2. Porcentajes de atenuación del desplazamiento lateral del edificio compensado por el controlador *CRAP*. 43
- 3.3. Índice de desempeño por el criterio de la integral del error cuadrático para el controlador *CRAP*. 44
- 3.4. Porcentajes de atenuación e índice del desempeño del controlador *CMDI*. 49
- 3.5. Porcentajes de atenuación e índice de desempeño del controlador *CRAP + CMDI*. 53
- 3.6. Porcentajes de atenuación del desplazamiento lateral por estrategia de control. . . . 54
- 3.7. Fuerza del amortiguador magnetoreológico por estrategia de control. 54
- 3.8. Índice de desempeño por el criterio de la integral del error cuadrático. 54
- 4.1. Porcentajes de atenuación e índice de desempeño del compensado por el *CRAP + CMDI + OA*. 62
- 4.2. Porcentajes de atenuación e índice de desempeño del controlador *CRAP + CMDI + OA* con ruido de medición. 64
- 4.3. Porcentajes de atenuación por controlador con ruido de medición. 66

4.4. Fuerza por estrategia de control con efecto de ruido de medición 66

4.5. Índice de desempeño de los controladores con ruido de medición. 67

Capítulo 1

Introducción

El Control Automático en estructuras ha evolucionado con el paso del tiempo, algunos autores reportan que el comienzo del control activo en estructuras se remonta al antiguo Egipto, con un sistema de apertura de puertas por medio de vapor fabricado bajo el gobierno de Herón de Alejandría (300 a.C.) [1]. En la revolución industrial el control en estructuras se hace presente en los puentes levadizos, aplicaciones en techos móviles y grúas. Hoy en día se habla de sensores, actuadores, estructuras activas, estructuras espaciales, estructuras inteligentes, etc. [5]. Especialmente se ha tratado con un nuevo concepto, el control semiactivo cuyo consumo de energía es menor al que se usaría con el control activo convencional. Esto es posible porque no se inyecta energía sino que se disipa la generada por la estructura lográndose así la modificación de su comportamiento [6].

En las últimas décadas, el crecimiento de las poblaciones, el desarrollo tecnológico en ingeniería civil y la necesidad de salvaguardar el bienestar de los habitantes, han motivado el estudio de estructuras civiles bajo efectos sísmicos.

La tesis presenta un estudio comparativo de algunas de las estrategias de control semiactivo en estructuras para reducir los desplazamientos en edificios usando amortiguadores magnetoreológicos, que son dispositivos novedosos con gran futuro en la ingeniería civil y otras aplicaciones [8].

Los sismos son eventos naturales que consisten en movimientos bruscos y repentinos, oscilatorios y trepidatorios, provocados por el desplazamiento de placas tectónicas en el subsuelo a lo largo de la corteza terrestre. Debido a que las edificaciones son construidas sobre el suelo, es inevitable que sufran la acción de las fuerzas sísmicas.

México se encuentra en la intersección de cinco placas tectónicas de importancia, la placa de la Rivera, la del Pacífico, de Cocos, la del Caribe y la placa de Norte América, siendo esta última la de mayor extensión en el territorio mexicano [39].

Por consiguiente, es importante prestar atención al uso de tecnologías de control destinadas a proteger la infraestructura de edificios frente a efectos adversos inducidos por sismos y vientos fuertes, agregando dispositivos de control como amortiguadores entre otros, que mejoran el desempeño estructural.

1.1. Estado del arte

En las últimas décadas se han realizado estudios notables en control de vibraciones de estructuras civiles con el fin de proteger a los edificios y evitar poner en riesgo vidas humanas debido a fenómenos naturales como vientos fuertes y sismos. La investigación sobre el control de vibraciones en edificios generalmente se enfoca en el uso de sistemas de control pasivos, activos y semiactivos [8].

En el control pasivo las acciones que actúan sobre la estructura para modificar su comportamiento no suministran energía, no existe realimentación ni pre-alimentación de información, y la energía es absorbida o disipada. Las ventajas del enfoque pasivo es que no requiere de fuentes de energía externa. Algunas desventajas en el caso de los aisladores es que estos solo reducen vibraciones, más no el movimiento de la estructura, y en el caso de los absorbedores, su ancho de banda está limitado y a menudo se diseñan para una frecuencia específica [2].

Se llama control activo cuando la fuerza de acción es generada por un actuador con una fuente de energía externa, sea que se agregue o disipe energía en la estructura, y su realimentación es una función de la señal de respuesta del sistema [8]. En comparación con el enfoque pasivo, es una forma más eficiente de reducir vibraciones, aporta mayor seguridad ante los sismos debido a que disminuye el desplazamientos en edificios. Sin embargo, requiere forzosamente una fuente de energía exterior y un sistema de control [5].

El control semiactivo es un método para modificar el comportamiento de un sistema vibratorio mediante actuadores semiactivos. Las ventajas del enfoque semiactivo son la reducción en el consumo de energía, además de que poseen estabilidad interna y adaptabilidad. Existen implementaciones para sismos y tensiones laterales por efecto del viento [7]. Dentro de sus desventajas es que requieren una fuente de energía externa, y para obtener un mejor rendimiento que un control activo se necesitan estrategias de control adecuadas [8].

Algunos consideran al control semiactivo como una evolución del control activo debido a la realimentación, la cual se considera independiente del edificio [6]. La señal de control se forma a partir de la respuesta de la estructura a la perturbación, en consecuencia, la fuerza de control se opone al movimiento [2]. El enfoque semiactivo usa parte de la energía propia del sistema de manera semejante al control pasivo y usar actuadores semiactivos que emplean energía externa [8].

En [10] se emplea un amortiguador de masa sintonizada (AMS) para minimizar los efectos del movimiento sísmico y se hace una comparación de los tres enfoques de control activo, pasivo y semiactivo. Los resultados indican que el control semiactivo es una mejor opción sobre el pasivo, y en referencia al activo no tiene un mal desempeño.

De acuerdo con algunos autores un control semiactivo es asintóticamente estable porque la energía es naturalmente disipada por el actuador y lo cual permite combinar ambas técnicas de

control para obtener una metodología de control activo para la estructura en general y control semiactivo para manipular un actuador magnetoreológico el cual funcionará dependiendo de un control predictivo instalado para robustecer el sistema ante perturbaciones no estacionarias [9].

Debido a la característica del control semiactivo de minimizar el consumo de energía en los actuadores, se han reportado experimentos de laboratorio usando un amortiguador magnetoreológico haciéndose la comparación del consumo de corriente eléctrica entre dos configuraciones distintas para el actuador [11].

Otro aspecto importante a considerar es el tipo de cimentación al momento de diseñar los algoritmos de control, por ejemplo, un edificio con base aislada con amortiguador magnetoreológico y enfoque semiactivo presenta un buen desempeño al reducir el desplazamiento relativo y la aceleración absoluta de la estructura en comparación con las soluciones pasivas [12].

Un algoritmo que provee rechazo a perturbaciones e incertidumbres parametrizadas se llama control por rechazo activo de perturbaciones (CRAP), para su funcionamiento emplea un observador de estados extendido para estimar todas las perturbaciones y los estados del sistema [14]. Surge como una mejora del control proporcional integral derivativo [24]. El algoritmo de rechazo activo de perturbaciones estima las señales en tiempo real, sin embargo, en ocasiones se debe compensar la dinámica de los actuadores. Para solucionar este inconveniente se puede adicionar un control predictivo [15].

Otra técnica para suprimir el choque sísmico está basada en el enfoque de perturbación de entrada equivalente, la cual estima la señal del sismo y produce una ley de control equivalente para compensarla. En simulaciones sus resultados fueron superiores a un regulador cuadrático lineal y un control por modos deslizantes [16]. En [17] se aborda el problema de vibraciones en estructuras de varios pisos con base aislada activa empleando rechazo activo de perturbaciones

usando la técnica de perturbación de entrada equivalente, para solo usar un canal en la señal de control y para estimar la perturbación se usa un observador de estados de orden reducido.

En la referencia [13] se presenta una aplicación del control por rechazo activo de perturbaciones en estructuras, haciendo pruebas en laboratorio se busca minimizar los desplazamientos de una estructura bajo choque sísmico. Dicho control estima la señal del sismo atenuando el movimiento de la estructura usando un amortiguador de masa activa, una ventaja de esta técnica es que no requiere por anticipado información del sistema.

Otra forma para resolver el problema de los desplazamientos causado por un sismo aparece en la referencia [18] donde se emplea el control robusto H_∞ usando un amortiguador de masa activa, esta estrategia se basada en el rechazo por ancho de banda de la perturbación lo cual permite suprimir las vibraciones inducidas por el sismo. En esta técnica la ganancia del control es estimada con el conocimiento previo de las perturbaciones siendo está una desventaja de esta técnica.

Otra estrategia se llama control por modos deslizantes que está íntimamente relacionado al uso de la energía de forma discontinua por medio de conmutación de alta frecuencia. Esta técnica se ha usado en varias aplicaciones incluyendo el control de vibraciones en estructuras bajo perturbación sísmica. Un ejemplo de aplicación es la regulación de un amortiguador de masa activa en un edificio con varios niveles y con comportamiento no lineal, en el cual se intentan minimizar los desplazamientos producidos por un sismo [29]. En [30] se emplea una propiedad del control por modos deslizantes sobre la convergencia en tiempo finito que se combinan con una red neuronal para toma de decisiones con el fin de estabilizar una estructura bajo perturbación sísmica.

Implicito en cada propuesta de control influye mucho el modelo matemático del actuador. En el caso de un amortiguador magnetoreológico dado que es de naturaleza no lineal, tener menos parámetros simplifica los cálculos como se indica en [31], donde realizan un diseño de control

adaptable con identificación de parámetros incluyendo la dinámica del actuador usando el modelo de LuGre con su respectivo control de voltaje empleando un esquema observador, estimador y controlador [33], [32].

Por otro lado existen diferentes amortiguadores magnetoreológicos, por ejemplo, el amortiguador de tipo corte cuenta con placas paralelas y no presenta la mismas características que el actuador con pistón, así se señala en [34] donde el modelo corresponde a un sistema MIMO usando dos controles de voltaje y distintos algoritmos de Lyapunov y control optimo.

En general se deben tener en cuenta las características y limitaciones del actuador y la energía que necesita para compensar las vibraciones. Estos se puede valorar empleando un índice de desempeño similar al usado en el regulador lineal cuadrático [19].

1.2. Planteamiento del problema

Una estructura bajo la acción de un movimiento sísmico presenta deformaciones debido a la fuerza producida por la aceleración del suelo. Una consecuencia de esto son los desplazamientos laterales y verticales de la estructura que pueden ocasionar daño cuando suceden en la zona plástica. Dependiendo de la intensidad del evento sísmico, estos daños pueden provocar que la estructura colapse. Conforme al propósito de esta tesis se puede acotar la problemática dentro de los siguientes razonamientos:

- ◇ Teniendo en cuenta que no se pueden medir la posición ni la velocidad de un edificio, resulta fundamental estimar las mismas para el diseño de un controlador.
- ◇ Considerando al edificio como un sistema subactuado donde el número de actuadores es menor al de los estados del sistema, lograr la reducción de movimiento es una tarea difícil tomando además en cuenta las restricciones de los actuadores.

El objetivo es verificar el funcionamiento de tres estrategias de control semiactivo en estructuras, las cuales buscan disminuir los desplazamientos laterales a consecuencia de los movimientos sísmicos para evitar daños. La meta es evaluar, comparar y encontrar la técnica con el mejor desempeño posible para la reducción de vibraciones en edificios.

Los objetivos particulares de esta tesis son los siguientes:

- 1) Mediante simulación numérica evaluar la respuesta de un edificio bajo perturbaciones siendo compensado mediante el control por rechazo activo de perturbaciones (*CRAP*), el control por modos deslizantes integral (*CMDI*) y la estrategia formada por la combinación de ambos controladores (*CRAP + CMDI*).
- 2) Evaluar el funcionamiento de un observador algebraico para la estimación de señales de desplazamiento y velocidad mediante simulación numérica en edificios bajo excitación sísmica y en presencia de ruido de medición.
- 3) Comparar el desempeño entre controladores y seleccionar al mejor.

1.3. Aportación

De la información referida en la documentación existente al momento de desarrollar la presente tesis, se observan las siguientes áreas de oportunidad para el estudio comparativo entre estrategias de control semiactivo para estructuras:

- ◇ A partir del modelo de la viga de Timoshenko se provee una alternativa de discretización exacta equivalente a la transformación de la dinámica del edificio en coordenadas modales que permite obtener un sistema de segundo orden desacoplado.
- ◇ Se adapta un estimador de estados algebraico para el caso de n grados de libertad referidos a cada piso del edificio.

Como producto del trabajo de investigación de esta tesis se produjo el artículo:

- ◇ *Semiactive Vibration Control for Vibration Reduction in Buildings Through ADRC*; Israel de Jesús Hernández Saldaña, Jesús Morales-Valdez, Andrés Rodríguez-Torres y Wen Yu; Presentado en el Congreso Nacional de Control Automático 2022; Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México.

1.4. Organización del trabajo

El presente trabajo de tesis está distribuido de la siguiente manera: el capítulo 2 describe el modelo matemático de la viga de Timoshenko para un edificio así como el proceso de discretización mediante la transformación a coordenadas modales. Además, se presenta el modelo de Bouc-Wen para modelar el funcionamiento del amortiguador magnetoreológico. En el capítulo 3 se presentan las estrategias de control por rechazo activo de perturbaciones (CRAP), control por modos deslizantes integral (CMDI) y el controlador combinado $CRAP + CMDI$, también la comparación de sus respectivos resultados en la simulación numérica. En el capítulo 4 se expone el observador algebraico de estados, se valida su funcionamiento mediante simulación numérica sin y con presencia de ruido de medición para analizar su desempeño. Además, se realizan pruebas junto con el controlador combinado $CRAP + CMDI$ y discusión de resultados con los demás controladores. Las conclusiones y los trabajos futuros de esta investigación se presentan en el capítulo 5.

Capítulo 2

Modelo matemático de un edificio

Un edificio es una estructura con elasticidad y amortiguamiento, características de los materiales que intervienen en su construcción. En consecuencia, se deben formular las siguientes suposiciones para obtener su modelo matemático:

Suposición 1.

- 1) *En el modelo los parámetros de la estructura son invariantes en el tiempo.*
- 2) *Se consideran cuerpos rígidos con masas agrupadas.*
- 3) *El edificio se modela como un sistema lineal con amortiguamiento intrínseco.*
- 4) *El modelo matemático describe un sistema continuo y discretizado para un número finito de grados de libertad (GDL).*
- 5) *Se consideran condiciones iniciales de velocidad y posición cero.*

Si la suposición 1 se cumple, se propone modelar el edificio en elementos más simples con comportamiento conocido tales como barras, vigas, placas, etc., para encontrar su ecuación dinámica. La propuesta en esta tesis es emplear el modelo de la viga de Timoshenko el cual se estudia en la siguiente sección.

2.1. Modelo de la viga de Timoshenko

El movimiento de los edificios se puede describir mediante el modelo de la viga de Timoshenko [22]. Este contempla las deformaciones a cortante y flexión, así como los ángulos de cabeceo. Una ventaja de este modelo es que se puede construir a partir de cálculos y mediciones experimentales. Se considera al modelo de la viga de Timoshenko por las ventajas que presenta (ver tabla 2.1 [23]). Finalmente, el modelo propuesto corresponde a un sistema desacoplado lo cual es conveniente para la implementación de una ley de control.

Suponga una viga prismática de tamaño L rígida ideal y fija en el plano X-Y, que presenta flexiones laterales por efecto de cargas. Supóngase también que existe una fuerza $V(x, t)$ que se aplica transversalmente a lo largo de la viga. Si se procediera a seccionar la viga uniformemente en segmentos de tamaño dx , entonces existe un movimiento $r(x, t)$ entre cada segmento transversal causado por efecto de la flexión como lo muestra la figura 2.1. Además, se forma un ángulo $\alpha(x, t)$ medido entre el eje vertical X y el centro de la viga formado por el movimiento $r(x, t)$ de la misma, creando una rotación en cada segmento dx .

Modelo	Momento de flexión	Desplazamiento lateral	Deformación de cortante	Inercia rotacional
Euler-Bernulli	✓	✓	×	×
Rayleigh	✓	✓	×	✓
Cortante	✓	✓	✓	×
Timoshenko	✓	✓	✓	✓

Tabla 2.1: Comparación entre modelos matemáticos para edificios.

Considerando cada segmento transversal dx independientemente con centro de gravedad al interior del mismo, las fuerzas ejercidas sobre ella generan los movimientos de traslación $r(x, t)$ y rotación $\alpha(x, t)$, que son gobernados por el momento de flexión $M(x, t)$ y la fuerza de cortante

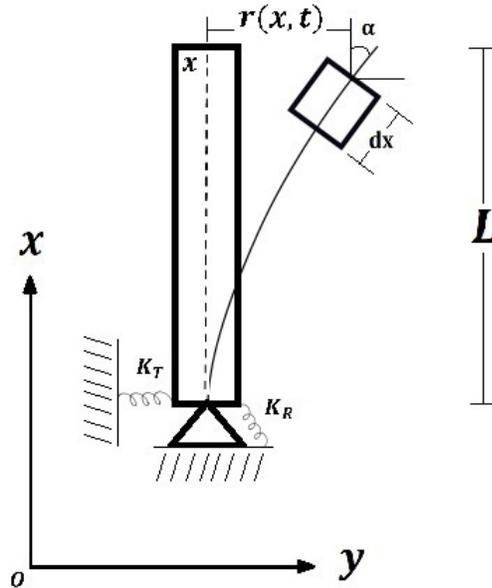


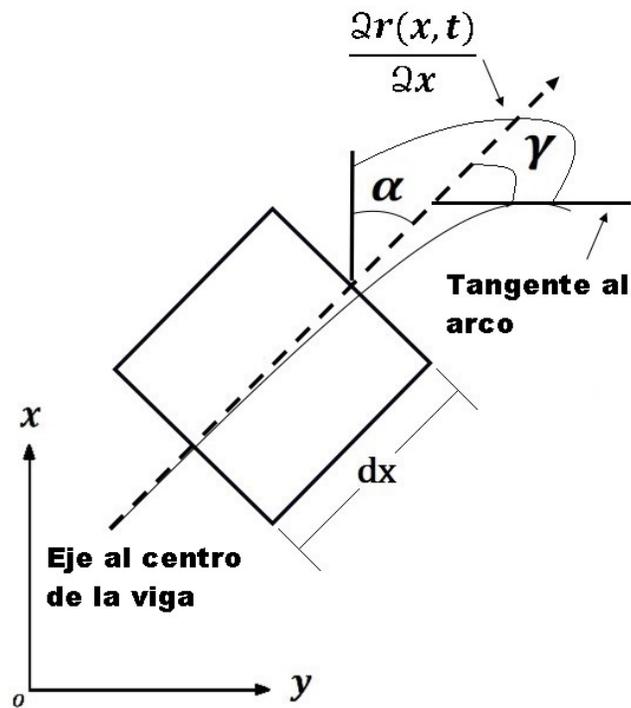
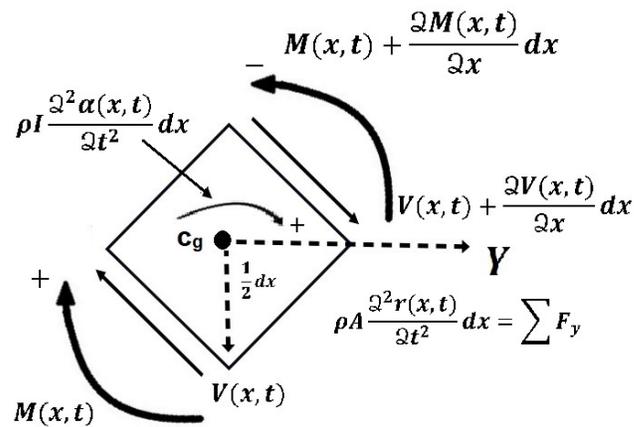
Figura 2.1: Modelo de la viga de Timoshenko con base flexible.

$V(x, t)$ (ver figura 2.2). El momento de flexión está en función del producto de la constante de elasticidad de la viga E por la inercia I y el cambio de posición de la viga por la rotación $\frac{\partial \alpha(x, t)}{\partial x}$ tal que:

$$M(x, t) = EI \frac{\partial \alpha(x, t)}{\partial x} \quad (2.1)$$

La fuerza de cortante se calcula como $V(x, t) = GA_s \gamma(x, t)$, entonces se define el módulo de cortante G como una constante física que determina la resistencia de la viga a la ruptura. Suponiendo una forma de corte uniforme κ sobre el área de sección transversal A , el área efectiva de corte A_s ésta determinada por el producto $A_s = \kappa \times A$. Se define al ángulo de cortante $\gamma(x, t)$ por el formado entre el eje al centro de la viga y la tangente al arco formado por el movimiento de rotación como se ilustra en la figura 2.2a, al ser un ángulo central su valor es igual al largo del arco que abarca y se determina como $\gamma(x, t) = \alpha(x, t) - \frac{\partial r(x, t)}{\partial x}$. Por lo tanto, la fuerza de cortante $V(x, t)$ se puede expresar:

$$V(x, t) = GA_s \left(\alpha(x, t) - \frac{\partial r(x, t)}{\partial x} \right) \quad (2.2)$$

(a) Ángulos de rotación α y de cortante γ 

(b) Momento de flexión y fuerza de cortante

Figura 2.2: Sección transversal de la viga de Timoshenko

Además, por la segunda ley de Newton la sumatoria de fuerzas que actúan en dirección del eje Y es igual a:

$$\sum F_Y = \rho A dx \frac{\partial^2 r(x, t)}{\partial t^2} \quad (2.3)$$

donde $\frac{\partial^2 r(x, t)}{\partial t^2}$ es la aceleración del desplazamiento lateral, ρ es la densidad del material, A es el

área de la sección transversal y dx es el tamaño del segmento, tal que:

$$\begin{aligned} \sum F_Y = V(x, t) - (V(x, t) - \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} dx) &= \rho A dx \frac{\partial^2 r(x, t)}{\partial t^2} = 0 \\ (V(x, t) + \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} dx) - V(x, t) + \rho A dx \frac{\partial^2 r(x, t)}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Simplificando términos:

$$\frac{\partial V(x, t)}{\partial x} dx + \rho A dx \frac{\partial^2 r(x, t)}{\partial t^2} = 0 \rightarrow \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} dx = -\rho A dx \frac{\partial^2 r(x, t)}{\partial t^2} \quad (2.5)$$

Dividiendo ambos términos con respecto a la dimensión dx se obtiene la ecuación diferencial de traslación:

$$-\rho A \frac{\partial^2 r(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} \quad (2.6)$$

El momento angular sobre $\alpha(x, t)$ está determinado por $\rho I dx \frac{\partial^2 \alpha(x, t)}{\partial t^2}$. Partiendo del diagrama de cuerpo libre en la figura 2.2b, la fuerza cortante $V(x, t)$ tiene el mismo sentido que el momento angular y su par es ortogonal a la sumatoria de fuerzas sobre el eje Y por lo que se considera la mitad de la distancia del segmento de tamaño dx , el momento de flexión $M(x, t)$ gira en ambos sentidos más la variación de su incremento por el largo del segmento, por lo tanto la suma de pares en el centro de gravedad $\odot c_g$ es:

$$\frac{1}{2} dx (V(x, t) + \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} dx) + \frac{1}{2} dx V(x, t) + M(x, t) - (M(x, t) + \frac{\partial M(x, t)}{\partial x} dx) + \rho I dx \frac{\partial^2 \alpha(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (2.7)$$

Dividiendo todo entre la dimensión dx y simplificando términos:

$$\frac{1}{2} (V(x, t) + \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} dx) + \frac{1}{2} V(x, t) + \frac{M(x, t)}{dx} - \frac{M(x, t)}{dx} - \frac{\partial M(x, t)}{\partial x} + \rho I \frac{\partial^2 \alpha(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (2.8)$$

$$V(x, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} dx - \frac{\partial M(x, t)}{\partial x} + \rho I \frac{\partial^2 \alpha(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (2.9)$$

Teniendo en cuenta que el límite del cambio en el tamaño del segmento de viga es $dx \rightarrow 0$ entonces al término $\frac{1}{2} \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} dx \approx 0$ porque es muy pequeño y puede despreciarse, tal que :

$$-V(x,t) + \frac{\partial M(x,t)}{\partial x} = \rho I \frac{\partial^2 \alpha(x,t)}{\partial t^2} \quad (2.10)$$

Reordenando términos resulta la ecuación diferencial de rotación:

$$\rho I \frac{\partial^2 \alpha(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial M(x,t)}{\partial x} - V(x,t) \quad (2.11)$$

Los parámetros involucrados en el modelado de la viga se agrupan en la tabla 2.2 ¹.

Variable	Unidad	Descripción
L	m	Largo de la viga
ρ	kg/m^3	Densidad de masa
A	m^2	Área sección transversal
A_s	m^2	Área efectiva de corte
I	kg/m^2	Momento de inercia
E	GPa	Módulo de elasticidad
G	GPa	Módulo de cortante
k	s/u	Factor de forma (corte)
K_T	Kg/s^2	Coficiente de elasticidad del resorte de vaivén
K_R	Kg/s^2	Coficiente de elasticidad del resorte de balanceo
dx	m	Largo de una sección de la viga
$r(x,t)$	m	Desplazamiento lateral
$\alpha(x,t)$	\angle	Rotación
$V(x,t)$	N	Fuerza de cortante (cizallamiento)
$M(x,t)$	Nm	Momento de flexión

Tabla 2.2: Nomenclatura

¹Las unidades están formuladas en el Sistema Internacional, algunas de ellas se toman de la tabla 11 de la referencia [23]

2.1.1. Análisis puntual de los valores propios del modelo de la viga de Timoshenko

La intención de este estudio es obtener las formas modales del edificio empleando el modelo matemático de la viga de Timoshenko para lo cual se deben resolver las ecuaciones diferenciales parciales siguientes [21]:

$$\text{Ecuación diferencial de traslación.} \quad \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} = -\rho A \frac{\partial^2 r(x, t)}{\partial t^2} \quad (2.12)$$

$$\text{Ecuación diferencial de rotación.} \quad \frac{\partial M(x, t)}{\partial x} - V(x, t) = \rho I \frac{\partial^2 \alpha(x, t)}{\partial t^2} \quad (2.13)$$

$$\text{Fuerza de cortante.} \quad V(x, t) = GA_s \left(\alpha(x, t) - \frac{\partial r(x, t)}{\partial x} \right) \quad (2.14)$$

$$\text{Momento de flexión.} \quad M(x, t) = EI \frac{\partial \alpha(x, t)}{\partial x} \quad (2.15)$$

Hasta que se indique lo contrario se realizara un análisis puntual sobre el modelo de la viga Timoshenko para encontrar los respectivos valores propios del sistema de ecuaciones (2.12), (2.13), (2.14) y (2.15), primero se remplazan los términos de momento de flexión (2.15) y fuerza de cortante (2.14) en la ecuación diferencial de traslación (2.12) obteniendo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[GA_s \left(\alpha(x, t) - \frac{\partial r(x, t)}{\partial x} \right) \right] &= -\rho A \frac{\partial^2 r(x, t)}{\partial t^2} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[GA_s \alpha(x, t) - GA_s \frac{\partial r(x, t)}{\partial x} \right] &= GA_s \frac{\partial \alpha(x, t)}{\partial x} - GA_s \frac{\partial^2 r(x, t)}{\partial x^2} \\ GA_s \left[\frac{\partial \alpha(x, t)}{\partial x} - \frac{\partial^2 r(x, t)}{\partial x^2} \right] &= -\rho A \frac{\partial^2 r(x, t)}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Ahora, para la ecuación diferencial de rotación (2.13):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[EI \frac{\partial \alpha(x, t)}{\partial x} \right] - GA_s \left(\alpha(x, t) - \frac{\partial r(x, t)}{\partial x} \right) &= \rho I \frac{\partial^2 \alpha(x, t)}{\partial t^2} \\ EI \frac{\partial^2 \alpha(x, t)}{\partial x^2} - GA_s \left(\alpha(x, t) - \frac{\partial r(x, t)}{\partial x} \right) &= \rho I \frac{\partial^2 \alpha(x, t)}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Se prosigue con la solución de las ecuaciones (2.16) y (2.17), para ello se requiere separarlas en tiempo y espacio. Por lo tanto, se definen las formas modales lateral $W(x)$ y rotacional $\Theta(x)$

de la deformación en un punto x , discretizando mediante la ecuación de onda la cual se define con el vector $T(t)$ y sus derivadas en coordenadas generalizadas. Finalmente, se desacoplan las funcionales de desplazamiento lateral $r(x, t)$ y rotacional $\alpha(x, t)$ tal que:

$$r(x, t) = W(x)T(t) \quad \alpha(x, t) = \Theta(x)T(t) \quad (2.18)$$

Para resolver las ecuaciones diferenciales parciales y encontrar las formas modales se sustituye (2.18) en (2.16), obteniéndose:

$$GA_s \left[\frac{\partial \Theta(x)T(t)}{\partial x} - \frac{\partial^2 W(x)T(t)}{\partial x^2} \right] = -\rho A \frac{\partial^2 W(x)T(t)}{\partial t^2}$$

Con el objetivo de acotar la escritura se introduce la siguiente notación comúnmente usada en el estudio de ecuaciones diferenciales parciales (EDP):

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial x} = U_x(x, t), \quad \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} = U_t(x, t) \quad (2.19)$$

donde $U(x, t)$ es una funcional cualquiera. Usando la notación (2.19) en (2.1.1) resulta:

$$\begin{aligned} GA_s [\Theta_x(x)T(t) - W_{xx}(x)T(t)] &= -\rho AW(x)T_{tt}(t) \\ \rho AW(x)T_{tt}(t) - GA_s [W_{xx}(x) - \Theta_x(x)]T(t) &= 0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

Dividiendo la ecuación (2.20) entre $T(t)$ se obtiene:

$$\rho AW(x) \frac{T_{tt}(t)}{T(t)} - GA_s [W_{xx}(x) - \Theta_x(x)] = 0 \rightarrow \frac{T_{tt}(t)}{T(t)} = \frac{GA_s}{\rho AW(x)} [W_{xx}(x) - \Theta_x(x)] \quad (2.21)$$

Definiendo el término $-\omega^2 = \frac{T_{tt}(t)}{T(t)} \rightarrow T_{tt}(t) + \omega^2 T(t) = 0$ ² se prosigue:

$$\begin{aligned} -\omega^2 &= \frac{GA_s}{\rho AW(x)} [W_{xx}(x) - \Theta_x(x)] \rightarrow GA_s [W_{xx}(x) - \Theta_x(x)] = -\omega^2 \rho AW(x) \\ GA_s [W_{xx}(x) - \Theta_x(x)] + \omega^2 \rho AW(x) &= 0 \end{aligned} \quad (2.22)$$

²Salvo que se indique lo contrario se emplea ω para referirnos a la frecuencia natural no amortiguada.

Sustituyendo (2.18) en (2.17) resulta:

$$\begin{aligned}
 EI \frac{\partial^2 \Theta(x) T(t)}{\partial x^2} - GA_s (\Theta(x) T(t) - \frac{\partial W(x) T(t)}{\partial x}) &= \rho I \frac{\partial^2 \Theta(x) T(t)}{\partial t^2} \\
 EI \Theta_{xx}(x) T(t) - GA_s (\Theta(x) T(t) - W_x(x) T(t)) &= \rho I \Theta(x) T_{tt}(t) \\
 EI \Theta_{tt}(x) T(t) - GA_s (\Theta(x) - T_x(x)) T(t) &= \rho I \Theta(x) T_{tt}(t) \\
 \frac{EI}{\rho I \Theta(x)} \Theta_{xx}(x) - \frac{GA_s}{\rho I \Theta(x)} (\Theta(x) - W_x(x)) &= \frac{T_{tt}(t)}{T(t)} = -\omega^2 \\
 EI \Theta_{xx}(x) - GA_s (\Theta(x) - W_x(x)) + \omega^2 \rho I \Theta(x) &= 0
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

Con las ecuaciones (2.22) y (2.23) se forma la siguiente representación matricial:

$$\begin{bmatrix} GA_s & 0 \\ 0 & EI \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{xx}(x) \\ \Theta_{xx}(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -GA_s \\ GA_s & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_x(x) \\ \Theta_x(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega^2 \rho A & 0 \\ 0 & \omega^2 \rho I - GA_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W(x) \\ \Theta(x) \end{bmatrix} = 0 \tag{2.24}$$

y a partir de (2.24) se definen los vectores $\ddot{q} = [W_{xx}(x) \ \Theta_{xx}(x)]$, $\dot{q} = [W_x(x) \ \Theta_x(x)]$ y $q = [W(x) \ \Theta(x)]$ con las matrices M , D y K , tal que:

$$M = \begin{bmatrix} GA_s & 0 \\ 0 & EI \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & -GA_s \\ GA_s & 0 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} \omega^2 \rho A & 0 \\ 0 & \omega^2 \rho I - GA_s \end{bmatrix} \tag{2.25}$$

Debido a sus propiedades se supone que M es invertible, tal que $I\ddot{q} + M^{-1}D\dot{q} + M^{-1}Kq = 0$, entonces (2.24) se reescribe:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \ddot{q} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \frac{GA_s}{EI} & 0 \end{bmatrix} \dot{q} + \begin{bmatrix} \frac{\omega^2 \rho A}{GA_s} & 0 \\ 0 & \frac{\omega^2 \rho I - GA_s}{EI} \end{bmatrix} q = 0 \tag{2.26}$$

Seleccionando el término rotacional $\frac{\omega^2 \rho I - GA_s}{EI}$ en (2.26), se observa que se puede obtener la frecuencia natural no amortiguada ω igualando ese término a cero, tal que:

$$\frac{\omega^2 \rho I - GA_s}{EI} = 0 \tag{2.27}$$

Despejando la frecuencia natural no amortiguada ω se define la frecuencia de corte ω_c :

$$\omega^2 \rho I - GA_s = 0 \rightarrow \omega^2 \rho I = GA_s$$

$$\omega_c = \sqrt{\frac{GA_s}{\rho I}} \quad (2.28)$$

Continuando con el proceso se busca separar $r(x, t)$ en sus componentes discretizadas en la ecuación (2.16), luego si se deriva parcialmente con respecto de x y se despeja $\frac{\partial^2 \alpha(x, t)}{\partial x^2}$, tal que:

$$\begin{aligned} GA_s \left(\frac{\partial^2 \alpha(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 r(x, t)}{\partial x^3} \right) + \rho A \frac{\partial^3 r(x, t)}{\partial t^2 \partial x} &= 0 \\ -\frac{\rho A}{GA_s} \frac{\partial^3 r(x, t)}{\partial t^2 \partial x} + \frac{\partial^3 r(x, t)}{\partial x^3} &= \frac{\partial^2 \alpha(x, t)}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (2.29)$$

Ahora, derivando (2.17) dos veces con respecto a x y evaluando con la definición de $\frac{\partial^2 \alpha(x, t)}{\partial x^2}$ de (2.29), se sigue:

$$\begin{aligned} EI \frac{\partial^4 \alpha(x, t)}{\partial x^4} - GA_s \left(\frac{\partial^2 \alpha(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 r(x, t)}{\partial x^3} \right) - \rho I \frac{\partial^4 \alpha(x, t)}{\partial t^2 \partial x^2} &= 0 \\ EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[-\frac{\rho A}{GA_s} \frac{\partial^3 r(x, t)}{\partial t^2 \partial x} + \frac{\partial^3 r(x, t)}{\partial x^3} \right] - GA_s \left(-\frac{\rho A}{GA_s} \frac{\partial^3 r(x, t)}{\partial t^2 \partial x} + \frac{\partial^3 r(x, t)}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 r(x, t)}{\partial x^3} \right) \\ - \rho I \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[-\frac{\rho A}{GA_s} \frac{\partial^3 r(x, t)}{\partial t^2 \partial x} + \frac{\partial^3 r(x, t)}{\partial x^3} \right] &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[-\frac{EI \rho A}{GA_s} \frac{\partial^4 r(x, t)}{\partial t^2 \partial x^2} + EI \frac{\partial^4 r(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 r(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\rho^2 I A}{GA_s} \frac{\partial^4 r(x, t)}{\partial t^4} - \rho I \frac{\partial^4 r(x, t)}{\partial t^2 \partial x^2} \right] &= 0 \end{aligned} \quad (2.30)$$

Integrando con respecto a x se obtiene la ecuación diferencial de cuarto orden para el movimiento lateral $r(x, t)$ que se expresa como sigue:

$$\int \frac{\partial}{\partial x} \left[-\frac{EI \rho A}{GA_s} \frac{\partial^4 r(x, t)}{\partial t^2 \partial x^2} + EI \frac{\partial^4 r(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 r(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\rho^2 I A}{GA_s} \frac{\partial^4 r(x, t)}{\partial t^4} - \rho I \frac{\partial^4 r(x, t)}{\partial t^2 \partial x^2} \right] dx = 0 \quad (2.31)$$

Recordando que $A_s = \kappa \times A$, donde κ es el factor de forma de corte y A es el área transversal; simplificando parámetros en los coeficientes y acomodando términos resulta la ecuación diferencial de cuarto orden para $r(x, t)$:

$$EI \frac{\partial^4 r(x, t)}{\partial x^4} - \rho I \left(1 + \frac{E}{\kappa G} \right) \frac{\partial^4 r(x, t)}{\partial x^2 \partial t^2} + \rho A \frac{\partial^2 r(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\rho^2 I}{\kappa G} \frac{\partial^4 r(x, t)}{\partial t^4} = 0 \quad (2.32)$$

Usando las expresiones de (2.18) en (2.32) se obtiene:

$$EIT(t)W_{xxxx}(x) - \rho I \left(1 + \frac{E}{\kappa G} \right) W_{xx}(x)T_{tt}(t) + \rho AW(x)T_{tt}(t) + \frac{\rho^2 I}{\kappa G} W(x)T_{tttt}(t) = 0 \quad (2.33)$$

Dividiendo entre $EIT(t)$:

$$W_{xxxx}(x) - \frac{\rho I}{EI} \left(1 + \frac{E}{\kappa G}\right) W_{xx}(x) \frac{T_{tt}(t)}{T(t)} + \frac{\rho A}{EI} W(x) \frac{T_{tt}(t)}{T(t)} + \frac{\rho^2 I}{EI \kappa G} W(x) \frac{T_{tttt}(t)}{T(t)} = 0 \quad (2.34)$$

Por el método de separación de variables se definen las identidades $\frac{T_{tt}(t)}{T(t)} = \omega^2$ y $\frac{T_{tttt}(t)}{T(t)} = \omega^4$, finalmente se obtiene:

$$W_{xxxx}(x) - \omega^2 \frac{\rho I}{EI} \left(1 + \frac{E}{\kappa G}\right) W_{xx}(x) + \omega^2 \frac{\rho A}{EI} W(x) + \omega^4 \frac{\rho^2 I}{EI \kappa G} W(x) = 0 \quad (2.35)$$

Se realiza un proceso similar para obtener la ecuación rotacional $\alpha(x, t)$, primero se deriva parcialmente (2.17) con respecto x , resultando:

$$EI \frac{\partial^3 \alpha(x, t)}{\partial x^3} - GA_s \left(\frac{\partial \alpha(x, t)}{\partial x} - \frac{\partial^2 r(x, t)}{\partial x^2} \right) = \rho I \frac{\partial^3 \alpha(x, t)}{\partial t^2 \partial x} \quad (2.36)$$

Luego, se despeja el término $\frac{\partial^2 r(x, t)}{\partial x^2}$, obteniéndose:

$$\frac{\partial^2 r(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\rho I}{GA_s} \frac{\partial^3 \alpha(x, t)}{\partial t^2 \partial x} - \frac{EI}{GA_s} \frac{\partial^3 \alpha(x, t)}{\partial x^3} + \frac{\partial \alpha(x, t)}{\partial x} \quad (2.37)$$

Retomando (2.17) para aislar el término $GA_s(\alpha(x, t) - \frac{\partial r(x, t)}{\partial x})$, produce:

$$GA_s \left(\alpha(x, t) - \frac{\partial r(x, t)}{\partial x} \right) = -\rho I \frac{\partial^2 \alpha(x, t)}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^2 \alpha(x, t)}{\partial x^2} \quad (2.38)$$

A continuación se procede a derivar (2.16) dos veces con respecto a x :

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3} \left[GA_s \left(\alpha(x, t) - \frac{\partial r(x, t)}{\partial x} \right) \right] = -\rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial^2 r(x, t)}{\partial x^2} \quad (2.39)$$

Agrupando términos para evaluar las expresiones $\frac{\partial^2 r(x, t)}{\partial x^2}$ de (2.37) y $GA_s(\alpha(x, t) - \frac{\partial r(x, t)}{\partial x})$ de (2.38), se obtiene:

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3} \left[-\rho I \frac{\partial^2 \alpha(x, t)}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^2 \alpha(x, t)}{\partial x^2} \right] = -\rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\frac{\rho I}{GA_s} \frac{\partial^3 \alpha(x, t)}{\partial t^2 \partial x} - \frac{EI}{GA_s} \frac{\partial^3 \alpha(x, t)}{\partial x^3} + \frac{\partial \alpha(x, t)}{\partial x} \right] \quad (2.40)$$

integrando el resultado en una ocasión con respecto a x :

$$\int \frac{\partial}{\partial x} \left[-\rho I \frac{\partial^4 \alpha(x, t)}{\partial t^2 \partial x^2} + EI \frac{\partial^4 \alpha(x, t)}{\partial x^4} \right] = \int \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\rho A \rho I}{GA_s} \frac{\partial^4 \alpha(x, t)}{\partial t^4} + \frac{\rho A EI}{GA_s} \frac{\partial^4 \alpha(x, t)}{\partial t^2 \partial x^2} - \rho A \frac{\partial^2 \alpha(x, t)}{\partial t^2} \right] \quad (2.41)$$

Acomodando términos se obtiene la ecuación diferencial de cuarto orden desacoplada para el movimiento rotacional $\alpha(x, t)$:

$$EI \frac{\partial^4 \alpha(x, t)}{\partial x^4} - \rho I \left(1 + \frac{E}{\kappa G}\right) \frac{\partial^4 \alpha(x, t)}{\partial x^2 \partial t^2} + \rho A \frac{\partial^2 \alpha(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\rho^2 I}{\kappa G} \frac{\partial^4 \alpha(x, t)}{\partial t^4} = 0 \quad (2.42)$$

Se usa (2.18) en (2.42) para hallar la solución de la ecuación diferencial parcial:

$$EIT(t)\Theta_{xxxx}(x) - \rho I \left(1 + \frac{E}{\kappa G}\right) \Theta_{xx}(x)T_{tt}(t) + \rho A \Theta(x)T_{tt}(t) + \frac{\rho^2 I}{\kappa G} \Theta(x)T_{tttt}(t) = 0 \quad (2.43)$$

Nuevamente se usa como divisor a $EIT(t)$, tal que:

$$\begin{aligned} \Theta_{xxxx}(x) - \frac{\rho I}{EI} \left(1 + \frac{E}{\kappa G}\right) \Theta_{xx}(x) \frac{T_{tt}(t)}{T(t)} + \frac{\rho A}{EI} \Theta(x) \frac{T_{tt}(t)}{T(t)} + \frac{\rho^2 I}{EI \kappa G} \Theta(x) \frac{T_{tttt}(t)}{T(t)} &= 0 \\ \Theta_{xxxx}(x) - \omega^2 \frac{\rho I}{EI} \left(1 + \frac{E}{\kappa G}\right) \Theta_{xx}(x) + \omega^2 \frac{\rho A}{EI} \Theta(x) + \omega^4 \frac{\rho^2 I}{EI \kappa G} \Theta(x) &= 0 \end{aligned} \quad (2.44)$$

Para obtener las soluciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias (2.35) y (2.44) primero se calculan los valores propios asociados empleando el método del polinomio auxiliar ya que ambos sistemas tienen la misma estructura, tal que:

$$\begin{aligned} r^4 - \omega^2 \frac{\rho I}{EI} \left(1 + \frac{E}{\kappa G}\right) r^2 + \left[\omega^2 \frac{\rho A}{EI} + \omega^4 \frac{\rho^2 I}{EI \kappa G}\right] &= 0 \\ (r^2)^2 - \omega^2 \frac{\rho I}{EI} \left(1 + \frac{E}{\kappa G}\right) (r^2) + \left[\omega^2 \frac{\rho A}{EI} + \omega^4 \frac{\rho^2 I}{EI \kappa G}\right] &= 0 \end{aligned} \quad (2.45)$$

Este resultado es útil para las ecuaciones (2.35) y (2.44), se usa la formula general para ecuaciones de segundo orden:

$$\begin{aligned} r_i^2 &= \frac{1}{2} \left[\omega^2 \frac{\rho I}{EI} \left(1 + \frac{E}{\kappa G}\right)\right] \mp \frac{1}{2} \sqrt{\left([\omega^2 \frac{\rho I}{EI} \left(1 + \frac{E}{\kappa G}\right)]^2 - 4[\omega^2 \frac{\rho A}{EI} + \omega^4 \frac{\rho^2 I}{EI \kappa G}]\right)} \\ r_i &= \sqrt{\frac{1}{2} \left[\omega^2 \frac{\rho I}{EI} \left(1 + \frac{E}{\kappa G}\right)\right] \mp \frac{1}{2} \sqrt{\left([\omega^2 \frac{\rho I}{EI} \left(1 + \frac{E}{\kappa G}\right)]^2 - 4[\omega^2 \frac{\rho A}{EI} + \omega^4 \frac{\rho^2 I}{EI \kappa G}]\right)}} \\ r_i &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\left[\omega^2 \frac{\rho I}{EI} \left(1 + \frac{E}{\kappa G}\right)\right] \mp \sqrt{\left([\omega^2 \frac{\rho I}{EI} \left(1 + \frac{E}{\kappa G}\right)]^2 - 4[\omega^2 \frac{\rho A}{EI} + \omega^4 \frac{\rho^2 I}{EI \kappa G}]\right)}} \end{aligned} \quad (2.46)$$

donde $i = 1, 2, 3, 4$. A partir de (2.28) se tiene la frecuencia de corte $\omega_c = \sqrt{\frac{GA_s}{\rho I}}$, tal que las raíces del polinomio auxiliar serán reales, si $\omega \ll \omega_c$; raíces complejas conjugadas si $\omega \gg \omega_c$. El polinomio auxiliar de cuarto orden se puede expresar como:

$$(r^2 + \Upsilon^2)(r^2 - \Upsilon^2) = 0 \quad (2.47)$$

donde Υ representa los valores propios calculados en (2.46) bajo el supuesto que pueden ser de la misma magnitud. Sin embargo, estos pueden presentarse en duplas, sean reales conjugadas o complejas conjugadas dependiendo del amortiguamiento.

A partir de la identidad (2.47) se puede determinar el espacio de soluciones para $W(x)$ y $\Theta(x)$, del primer binomio se obtendrán términos sinusoidales:

$$(r^2 + \mathcal{Y}^2) = 0 \quad \rightarrow C_1 \sin(\mathcal{Y}) + C_2 \cos(\mathcal{Y}) \quad (2.48)$$

y para el segundo binomio se tienen dos casos: 1) $\omega \ll \omega_c$, los términos serán hiperbólicos, y 2) $\omega \gg \omega_c$, lo forman términos sinusoidales, es decir:

$$(r^2 - \mathcal{Y}^2) = \begin{cases} \omega \ll \omega_c, & \rightarrow C_3 \sinh(\mathcal{Y}) + C_4 \cosh(\mathcal{Y}) \\ \omega \gg \omega_c, & \rightarrow C_3 \sin(\mathcal{Y}) + C_4 \cos(\mathcal{Y}) \end{cases} \quad (2.49)$$

Las soluciones para $W(x)$ y $\Theta(x)$ con $\omega \ll \omega_c$ se escriben:

$$\begin{bmatrix} W(x) \\ \Theta(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ D_1 \end{bmatrix} \sin(px) + \begin{bmatrix} C_2 \\ D_2 \end{bmatrix} \cos(px) + \begin{bmatrix} C_3 \\ D_3 \end{bmatrix} \sinh(qx) + \begin{bmatrix} C_4 \\ D_4 \end{bmatrix} \cosh(qx) \quad (2.50)$$

y con $\omega \gg \omega_c$:

$$\begin{bmatrix} W(x) \\ \Theta(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_1 \\ \tilde{D}_1 \end{bmatrix} \sin(px) + \begin{bmatrix} \tilde{C}_2 \\ \tilde{D}_2 \end{bmatrix} \cos(px) + \begin{bmatrix} \tilde{C}_3 \\ \tilde{D}_3 \end{bmatrix} \sin(qx) + \begin{bmatrix} \tilde{C}_4 \\ \tilde{D}_4 \end{bmatrix} \cos(qx) \quad (2.51)$$

Los términos p y q son los eigenvalores calculados con la ecuación general bajo el enfoque de la frecuencia, para obtenerlos primero se separan las raíces de (2.46), tal que:

$$\begin{aligned} r_{1,2} &= \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{[\omega^2 \frac{\rho I}{EI} (1 + \frac{E}{kG})] - \sqrt{([\omega^2 \frac{\rho I}{EI} (1 + \frac{E}{kG})]^2 - 4[\omega^2 \frac{\rho A}{EI} + \omega^4 \frac{\rho^2 I}{EI kG})}} \\ r_{3,4} &= \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{[\omega^2 \frac{\rho I}{EI} (1 + \frac{E}{kG})] + \sqrt{([\omega^2 \frac{\rho I}{EI} (1 + \frac{E}{kG})]^2 - 4[\omega^2 \frac{\rho A}{EI} + \omega^4 \frac{\rho^2 I}{EI kG})}} \end{aligned} \quad (2.52)$$

donde se definen $p = |Im(r_{1,2})|$ y $q = r_{3,4}$ para $\omega \ll \omega_c$, en caso contrario $q = |Im(r_{3,4})|$ para $\omega \gg \omega_c$.

Luego se propone realizar una parametrización con respecto al largo de la viga L . Para simplificar las operaciones de los resultado de (2.46) serán premultiplicando por L , tal que: $p = |Im(L * r_{1,2})|$ y $q = L * r_{3,4}$ para $\omega \ll \omega_c$; de otra forma $q = |Im(L * r_{3,4})|$ para $\omega \gg \omega_c$. Entonces las expresiones de las soluciones (2.50) y (2.51) resultan:

para $\omega \ll \omega_c$:

$$\begin{bmatrix} W(x) \\ \Theta(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L * C_1 \\ D_1 \end{bmatrix} \sin(p \frac{x}{L}) + \begin{bmatrix} L * C_2 \\ D_2 \end{bmatrix} \cos(p \frac{x}{L}) + \begin{bmatrix} L * C_3 \\ D_3 \end{bmatrix} \sinh(q \frac{x}{L}) + \begin{bmatrix} L * C_4 \\ D_4 \end{bmatrix} \cosh(q \frac{x}{L}) \quad (2.53)$$

ahora con $\omega \gg \omega_c$:

$$\begin{bmatrix} W(x) \\ \Theta(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L * C_1 \\ D_1 \end{bmatrix} \sin(p \frac{x}{L}) + \begin{bmatrix} L * C_2 \\ D_2 \end{bmatrix} \cos(p \frac{x}{L}) + \begin{bmatrix} L * C_3 \\ D_3 \end{bmatrix} \sin(q \frac{x}{L}) + \begin{bmatrix} L * C_4 \\ D_4 \end{bmatrix} \cos(q \frac{x}{L}) \quad (2.54)$$

se emplea el método de expansión de eigenfunciones [23], y formando la matriz de coeficientes $Mc = 0$:

$$Mc = \begin{pmatrix} (\lambda_2 - p) & k_T & (\lambda_4 - q) & k_T \\ -k_R\lambda_2 & p\lambda_1 & -k_R\lambda_4 & q\lambda_3 \\ (\lambda_2 - p) \cos(p) & (\lambda_1 + p) \sin(p) & (\lambda_4 - q) \cosh(q) & (\lambda_3 + q) \sinh(q) \\ -p\lambda_2 \sin(p) & p\lambda_1 \cos(p) & q\lambda_4 \sinh(q) & q\lambda_3 \cosh(q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = 0 \quad \omega < \omega_c \quad (2.55)$$

$$Mc = \begin{pmatrix} (\lambda_2 - p) & k_T & (\lambda_4 - q) & k_T \\ -k_R\lambda_2 & p\lambda_1 & -k_R\lambda_4 & q\lambda_3 \\ (\lambda_2 - p) \cos(p) & (\lambda_1 + p) \sin(p) & (\lambda_4 - q) \cos(q) & (\lambda_3 + q) \sin(q) \\ -p\lambda_2 \sin(p) & p\lambda_1 \cos(p) & q\lambda_4 \sin(q) & q\lambda_3 \cos(q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = 0 \quad \omega > \omega_c \quad (2.56)$$

donde $k_T = \frac{K_T L}{GA_s}$ y $k_R = \frac{K_R L}{EI}$, se deduce que el sistema $Mc = 0$ tiene una solución no trivial. Al resolver el determinante de la matriz M sus valores propios están relacionados con las frecuencias naturales ω_i que dependen de los coeficientes C_i .

Retomando el cálculos de los D_i con las soluciones (2.53) y (2.54) parametrizadas usando la expresión de la solución generalizada:

$$\begin{bmatrix} W(x) \\ \Theta(x) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^4 L * U_{ki} \exp^{r_i \frac{x}{L}} \quad (2.57)$$

Se evalúa (2.24) con las respectivas derivadas de (2.57) y se obtienen las ecuaciones parametrizadas con valores propios:

$$L * (GA_s (\frac{r_i}{L})^2 + \omega^2 \rho A) C_i - GA_s \frac{r_i}{L} D_i = 0 \quad (2.58)$$

$$(GA_s \frac{r_i}{L}) C_i + (EI (\frac{r_i}{L})^2 + \omega^2 \rho I - GA_s) D_i = 0 \quad (2.59)$$

Finalmente, se elije (2.58) para realizar el cómputo de los coeficientes de D_i parametrizados, resultando:

$$\begin{aligned} D_1 &= -\frac{(GA_s p^2 - \omega^2 \rho A * L^2)}{GA_s p} C_2 = \lambda_1 C_2 \\ D_2 &= \frac{(GA_s p^2 - \omega^2 \rho A * L^2)}{GA_s p} C_1 = \lambda_2 C_1 \\ D_3 &= \begin{cases} \frac{(GA_s q^2 + \omega^2 \rho A * L^2)}{GA_s q} C_4 = \lambda_3 C_4, & \rightarrow \omega \ll \omega_c \\ -\frac{(GA_s q^2 - \omega^2 \rho A * L^2)}{GA_s q} C_4 = \lambda_3 C_4, & \rightarrow \omega \gg \omega_c \end{cases} \\ D_4 &= \begin{cases} \frac{(GA_s q^2 + \omega^2 \rho A * L^2)}{GA_s q} C_3 = \lambda_4 C_3, & \rightarrow \omega \ll \omega_c \\ \frac{(GA_s q^2 - \omega^2 \rho A * L^2)}{GA_s q} C_3 = \lambda_4 C_3, & \rightarrow \omega \gg \omega_c \end{cases} \end{aligned} \quad (2.60)$$

Por lo tanto, de acuerdo con el estudio a través de funciones con los valores propios del edificio está determinado por las ecuaciones parametrizadas (2.53) con frecuencia $\omega \ll \omega_c$ y (2.54) con frecuencia

$\omega \gg \omega_c$, obteniendo coeficientes C_i de la matriz (2.55) para $\omega \ll \omega_c$ y (2.56) para $\omega \gg \omega_c$ y coeficientes D_i a partir de (2.60).

2.1.2. Estudio dinámico generalizado para el m -ésimo modo de vibración del modelo de la viga de Timoshenko

Se continúa con el estudio del modelo de la viga de Timoshenko de la ecuación diferencial parcial (2.16). Si agregamos la aceleración relativa del suelo con respecto al tiempo $\ddot{u}_g(t)$ como una perturbación que afecta a la viga desde la base se tiene:

$$\begin{aligned} GA_s \left[\frac{\partial \alpha(x, t)}{\partial x} - \frac{\partial^2 r(x, t)}{\partial x^2} \right] &= -\rho A \left[\frac{\partial^2 r(x, t)}{\partial t^2} + \ddot{u}_g(t) \right] \\ GA_s \left[\frac{\partial \alpha(x, t)}{\partial x} - \frac{\partial^2 r(x, t)}{\partial x^2} \right] &= -\rho A \frac{\partial^2 r(x, t)}{\partial t^2} - \rho A \ddot{u}_g(t) \end{aligned} \quad (2.61)$$

Por el principio de los esfuerzos virtuales suponemos que existen una infinidad de modos de vibración. Para fines prácticos los acortamos al m -ésimo modo de vibración, entonces (2.18) se puede reescribir:

$$r(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} W_m(x) T_m(t) \quad y \quad \alpha(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \Theta_m(x) T_m(t) \quad (2.62)$$

Calculando las derivadas de (2.62):

$$\begin{aligned} \frac{\partial r(x, t)}{\partial x} &= \sum_{m=1}^{\infty} W_{m_x}(x) T_m(t), \quad \frac{\partial^2 r(x, t)}{\partial x^2} = \sum_{m=1}^{\infty} W_{m_{xx}}(x) T_m(t), \quad \frac{\partial^2 r(x, t)}{\partial t^2} = \sum_{m=1}^{\infty} W_m(x) T_{m_{tt}}(t) \\ \frac{\partial \alpha(x, t)}{\partial x} &= \sum_{m=1}^{\infty} \Theta_{m_x}(x) T_m(t), \quad \frac{\partial^2 \alpha(x, t)}{\partial x^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \Theta_{m_{xx}}(x) T_m(t), \quad \frac{\partial^2 \alpha(x, t)}{\partial t^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \Theta_m(x) T_{m_{tt}}(t) \end{aligned} \quad (2.63)$$

Posteriormente se sustituyen (2.62) y sus derivadas en (2.61) y (2.17), se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$GA_s \left[\sum_{m=1}^{\infty} \Theta_{m_x}(x) T_m(t) - \sum_{m=1}^{\infty} W_{m_{xx}}(x) T_m(t) \right] = -\rho A \sum_{m=1}^{\infty} W_m(x) T_{m_{tt}}(t) - \rho A \ddot{u}_g(t) \quad (2.64)$$

$$EI \sum_{m=1}^{\infty} \Theta_{m_{xx}}(x) T_m(t) - GA_s \left[\sum_{m=1}^{\infty} \Theta_m(x) T_m(t) - \sum_{m=1}^{\infty} W_{m_x}(x) T_m(t) \right] = \rho I \sum_{m=1}^{\infty} \Theta_m(x) T_{m_{tt}}(t) \quad (2.65)$$

Se define una nueva transformación $T_m(t) = \exp^{j\omega_m t}$, sus derivadas son $T_{m_t}(t) = j\omega_m \exp^{j\omega_m t}$ y $T_{m_{tt}}(t) = -\omega_m^2 \exp^{j\omega_m t}$. Ahora si despreciamos la aceleración relativa del suelo en (2.64), es decir $\ddot{u}_g(t) = 0$ y se evalúa la transformación $T_{m_{tt}}(t) = -\omega_m^2 \exp^{j\omega_m t}$, se sigue:

$$GA_s \left[\sum_{m=1}^{\infty} \Theta_{m_x}(x) T_m(t) - \sum_{m=1}^{\infty} W_{m_{xx}}(x) T_m(t) \right] = -\rho A \sum_{m=1}^{\infty} W_m(x) (-\omega_m^2 \exp^{j\omega_m t})$$

$$GA_s \left[\sum_{m=1}^{\infty} \Theta_{m_x}(x) T_m(t) - \sum_{m=1}^{\infty} W_{m_{xx}}(x) T_m(t) \right] = \rho A \sum_{m=1}^{\infty} \omega_m^2 W_m(x) \exp^{j\omega_m t} \quad (2.66)$$

Usando $T_m(t) = \exp^{j\omega_m t}$ en el paso anterior, tal que:

$$GA_s \left[\sum_{m=1}^{\infty} \Theta_{m_x}(x) T_m(t) - \sum_{m=1}^{\infty} W_{m_{xx}}(x) T_m(t) \right] = \rho A \sum_{m=1}^{\infty} \omega_m^2 W_m(x) T_m(t) \quad (2.67)$$

Empleando el resultado en (2.67) para sustituir al primer término en (2.64) se obtiene:

$$\begin{aligned} \rho A \sum_{m=1}^{\infty} \omega_m^2 W_m(x) T_m(t) &= -\rho A \sum_{m=1}^{\infty} W_m(x) T_{m_{tt}}(t) - \rho A \ddot{u}_g(t) \\ \rho A \sum_{m=1}^{\infty} \omega_m^2 W_m(x) T_m(t) + \rho A \sum_{m=1}^{\infty} W_m(x) T_{m_{tt}}(t) &= -\rho A \ddot{u}_g(t) \end{aligned} \quad (2.68)$$

Similarmente, para (2.65) se evalúa $T_{m_{tt}}(t) = -\omega_m^2 \exp^{j\omega_m t}$, resultando:

$$EI \sum_{m=1}^{\infty} \Theta_{m_{xx}}(x) T_m(t) - GA_s \left[\sum_{m=1}^{\infty} \Theta_m(x) T_m(t) - \sum_{m=1}^{\infty} W_{m_x}(x) T_m(t) \right] = -\rho I \sum_{m=1}^{\infty} \omega_m^2 \Theta_m(x) \exp^{j\omega_m t} \quad (2.69)$$

Nuevamente se usa la identidad $T_m(t) = \exp^{j\omega_m t}$, tal que:

$$EI \sum_{m=1}^{\infty} \Theta_{m_{xx}}(x) T_m(t) - GA_s \left[\sum_{m=1}^{\infty} \Theta_m(x) T_m(t) - \sum_{m=1}^{\infty} W_{m_x}(x) T_m(t) \right] = -\rho I \sum_{m=1}^{\infty} \omega_m^2 \Theta_m(x) T_m(t) \quad (2.70)$$

Del resultado en (2.70) se reemplaza en el primer término de (2.65), dando como resultado:

$$\begin{aligned} -\rho I \sum_{m=1}^{\infty} \omega_m^2 \Theta_m(x) T_m(t) &= \rho I \sum_{m=1}^{\infty} \Theta_m(x) T_{m_{tt}}(t) \\ -\rho I \sum_{m=1}^{\infty} \omega_m^2 \Theta_m(x) T_m(t) - \rho I \sum_{m=1}^{\infty} \Theta_m(x) T_{m_{tt}}(t) &= 0 \end{aligned} \quad (2.71)$$

A partir de las m formas modales a consecuencia de la discretización finita en función del tiempo, se definen $\omega_i^2 W_i(x) T_i(t) = \sum_m \omega_m^2 W_m(x) T_m(t)$ y $W_i(x) \ddot{T}_i(t) = \sum_m W_m(x) T_{m_{tt}}(t)$ donde el elemento n -ésimo es la cota de la forma modal.

Se prosigue reemplazando con las nuevas definiciones en (2.68), tal que:

$$\begin{aligned} \rho A \sum_{m=1}^{\infty} \omega_m^2 T_m(t) W_m(x) + \rho A \sum_{m=1}^{\infty} W_m(x) T_{m_{tt}}(t) &= -\rho A \ddot{u}_g(t) \\ \rho A \omega_i^2 W_i(x) T_i(t) + \rho A W_i(x) \ddot{T}_i(t) &= -\rho A \ddot{u}_g(t) \end{aligned} \quad (2.72)$$

Premultiplicando ambos extremos de la ecuación por $W_i(x)$, resulta:

$$W_i(x) [\rho A \omega_i^2 W_i(x) T_i(t) + \rho A W_i(x) \ddot{T}_i(t)] = -\rho A \ddot{u}_g(t) W_i(x) \quad (2.73)$$

e integrando cada sección transversal con respecto al largo de la viga:

$$\int_0^L \rho A \omega_i^2 W_i^2(x) T_i(t) dx + \int_0^L \rho A W_i^2(x) \ddot{T}_i(t) dx = \int_0^L -\rho A \ddot{u}_g(t) W_i(x) dx \quad (2.74)$$

Se agrupan elementos:

$$\begin{aligned} \rho A \omega_i^2 T_i(t) \int_0^L W_i^2(x) dx + \rho A \ddot{T}_i(t) \int_0^L W_i^2(x) dx &= -\rho A \ddot{u}_g(t) \int_0^L W_i(x) dx \\ \rho A \int_0^L W_i^2(x) dx [\ddot{T}_i(t) + \omega_i^2 T_i(t)] &= -\rho A \ddot{u}_g(t) \int_0^L W_i(x) dx \end{aligned} \quad (2.75)$$

De la ecuación (2.75) se despeja el miembro del lado derecho y se iguala a cero, resultando:

$$\rho A \int_0^L W_i^2(x) dx [\ddot{T}_i(t) + \omega_i^2 T_i(t)] + \rho A \ddot{u}_g(t) \int_0^L W_i(x) dx = 0 \quad (2.76)$$

Realizando el mismo procedimiento en (2.71), se sustituyen las cotas $\omega_i^2 \Theta_i(x) T_i(t) = \sum_m^\infty \omega_m^2 \Theta_m(x) T_m(t)$ y $\Theta_i(x) \ddot{T}_i(t) = \sum_m^\infty \Theta_m(x) T_{m\ddot{t}}(t)$, tal que:

$$-\rho I \omega_i^2 \Theta_i(x) T_i(t) - \rho I \Theta_i(x) \ddot{T}_i(t) = 0 \quad (2.77)$$

Posteriormente se multiplica por el termino $\Theta_i(t)$ formando:

$$\Theta_i(t) [-\rho I \omega_i^2 \Theta_i(x) T_n(t) - \rho I \Theta_i(x) \ddot{T}_i(t)] = 0 \quad (2.78)$$

Luego se integra con respecto del largo de la viga:

$$\int_0^L -\rho I \omega_i^2 \Theta_i^2(x) T_i(t) dx + \int_0^L -\rho I \Theta_i^2(x) \ddot{T}_i(t) dx = 0 \quad (2.79)$$

Factorizando términos semejantes:

$$\begin{aligned} -\rho I \omega_i^2 T_i(t) \int_0^L \Theta_i^2(x) dx - \rho I \ddot{T}_i(t) \int_0^L \Theta_i^2(x) dx &= 0 \\ -\rho I \int_0^L \Theta_i^2(x) dx [\ddot{T}_i(t) + \omega_i^2 T_i(t)] &= 0 \end{aligned} \quad (2.80)$$

Igualando las expresiones (2.76) y (2.80) calculadas anteriormente, se tiene:

$$-\rho I \int_0^L \Theta_i^2(x) dx [\ddot{T}_i(t) + \omega_i^2 T_i(t)] = \rho A \int_0^L W_i^2(x) dx [\ddot{T}_i(t) + \omega_i^2 T_i(t)] + \rho A \ddot{u}_g(t) \int_0^L W_i(x) dx \quad (2.81)$$

Separando el elemento con el parámetro de la aceleración relativa del suelo $\ddot{u}_g(t)$, aislándolo de la siguiente forma:

$$-\rho I \int_0^L \Theta_i^2(x) dx [\ddot{T}_i(t) + \omega_i^2 T_i(t)] - \rho A \int_0^L W_i^2(x) dx [\ddot{T}_i(t) + \omega_i^2 T_i(t)] = \rho A \ddot{u}_g(t) \int_0^L W_i(x) dx \quad (2.82)$$

Ahora, se factorizan elementos comunes en las expresiones del lado izquierdo, obteniéndose:

$$[\ddot{T}_i(t) + \omega_i^2 T_i(t)][-\rho I \int_0^L \Theta_i^2(x) dx - \rho A \int_0^L W_i^2(x) dx] = \rho A \ddot{u}_g(t) \int_0^L W_i(x) dx \quad (2.83)$$

Se prosigue con el despeje del factor con los integrandos del lado izquierdo, resultando:

$$\begin{aligned} \ddot{T}_i(t) + \omega_i^2 T_i(t) &= \frac{\rho A \ddot{u}_g(t) \int_0^L W_i(x) dx}{[-\rho I \int_0^L \Theta_i^2(x) dx - \rho A \int_0^L W_i^2(x) dx]} \\ [\ddot{T}_i(t) + \omega_i^2 T_i(t)] &= \frac{\rho A \ddot{u}_g(t) \int_0^L W_i(x) dx}{[-\rho I \int_0^L \Theta_i^2(x) dx - \rho A \int_0^L W_i^2(x) dx]} = -\frac{\rho A \ddot{u}_g(t) \int_0^L W_i(x) dx}{[\rho I \int_0^L \Theta_i^2(x) dx + \rho A \int_0^L W_i^2(x) dx]} \end{aligned} \quad (2.84)$$

Simplificando la ecuación diferencial:

$$\ddot{T}_i(t) + \omega_i^2 T_i(t) = -\Gamma_i \ddot{u}_g(t) \quad (2.85)$$

donde Γ_i es el factor de participación modal, definido como:

$$\Gamma_i = \frac{\rho A \int_0^L W_i(x) dx}{[\rho I \int_0^L \Theta_i^2(x) dx + \rho A \int_0^L W_i^2(x) dx]} \quad (2.86)$$

Las ecuaciones diferenciales calculadas hasta ahora se obtienen tomando en cuenta las propiedades de ortogonalidad de las formas modales descritas en el capítulo 10 parte A sección 10.4 pág. 409-410 de la referencia [4].

Notar que $T_i(t)$ son las coordenadas generalizadas para la n -ésima forma modal $W_i(t)$ y $\Theta_i(t)$, y las derivadas de $T_i(t)$ forman la dinámica del modelo de la viga de Timoshenko. Entonces, para amortiguar (2.85) se agrega el termino $2\xi_i \omega_i \dot{T}_i(t)$, obteniéndose:

$$\ddot{T}_i(t) + 2\xi_i \omega_i \dot{T}_i(t) + \omega_i^2 T_i(t) = -\Gamma_i \ddot{u}_g(t) \quad (2.87)$$

donde ξ_i es el coeficiente modal de amortiguamiento.

2.1.3. Formulación en el espacio de estados del modelo de la viga de Timoshenko

La representación general en el espacio de estados para un sistema lineal es la siguiente:

$$\dot{\mathbf{z}}(\mathbf{t}) = \mathbf{A}\mathbf{z}(\mathbf{t}) + \mathbf{B}\mathbf{u}(\mathbf{t}) \quad (2.88)$$

$$\mathbf{y}(\mathbf{t}) = \mathbf{C}\mathbf{z}(\mathbf{t}) + \mathbf{D}\mathbf{u}(\mathbf{t}) \quad (2.89)$$

Considerando el sistema de segundo orden de la viga de Timoshenko la ecuación (2.87), se construye la representación de estado con las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \ddot{T}_1(t) = -2\xi_1\omega_1\dot{T}_1(t) - \omega_1^2 T_1(t) - \Gamma_1\ddot{u}_g(t) \\ \vdots \\ \ddot{T}_n(t) = -2\xi_n\omega_n\dot{T}_n(t) - \omega_n^2 T_n(t) - \Gamma_n\ddot{u}_g(t) \end{cases} \quad (2.90)$$

Formando la representación matricial con el cambio de variables convencional $T(t) = z_1 \rightarrow \dot{T}(t) = z_2$, $\dot{z} = [\dot{z}_1 \dot{z}_2]$ y haciendo $u(t) = \ddot{u}_g(t)$ para cada forma modal, tal que:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\omega_1^2 & \cdots & 0 & -2\xi_1\omega_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -\omega_n^2 & 0 & \cdots & -2\xi_n\omega_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1(t) \\ \vdots \\ T_n(t) \\ \dot{T}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{T}_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\Gamma_1 \\ \vdots \\ -\Gamma_n \end{pmatrix} \ddot{u}_g(t) \quad (2.91)$$

obteniéndose las matrices **A**, **B** y **C**, en el espacio de estados:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{I}_{n \times n} \\ \begin{bmatrix} -\omega_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -\omega_n^2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -2\xi_1\omega_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -2\xi_n\omega_n \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (2.92)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times 1} \\ \begin{bmatrix} -\Gamma_1 \\ \vdots \\ -\Gamma_n \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (2.93)$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{I}_s \cdot \Phi \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -\omega_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -\omega_n^2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -2\xi_1\omega_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -2\xi_n\omega_n \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (2.94)$$

donde $\mathbf{I}_{n \times n}$ es una matriz identidad, $\mathbf{0}_{n \times n}$ es una matriz nula, \mathbf{I}_s es la matriz de ubicación del sensor, con elementos 0 y 1 que determinan la ubicación del canal de medición en el edificio. Φ es la matriz modal definida por $\Phi = [W_n(0) \ W_n(dx) \ \cdots \ W_n(L)]^T$, donde dx denota el largo de cada elemento del edificio. Por definición la matriz $D = 0$ y el sistema es sin alimentación directa ya que la salida y es medible en coordenada absoluta. Por otro lado, z_1 y z_2 representan los desplazamientos y velocidades en coordenadas generalizadas respectivamente.

2.2. Modelo perturbado del modelo de la viga de Timoshenko

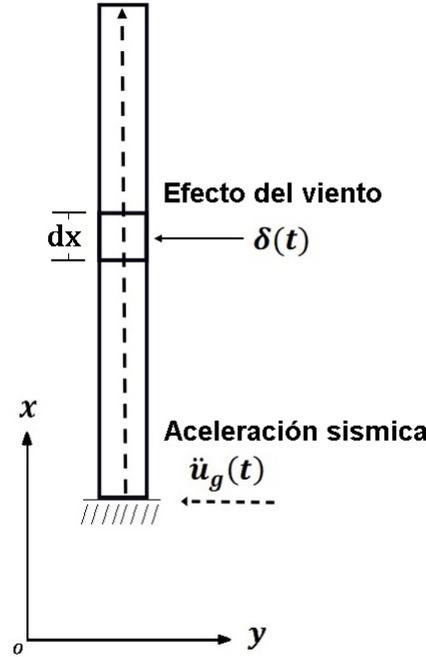


Figura 2.3: Modelo de la viga de Timoshenko bajo perturbación externa.

En este apartado se hace la consideración que en el edificio existen perturbaciones e incertidumbres parametrizadas que están acotadas, es decir, $|\delta(t)| \leq \delta_0$, tal como se observa en la figura 2.3. Por sencillez del estudio se retoman los cálculos que fueron realizados en la sección 2.1.2, partiendo de la ecuación (2.61) y añadiendo el término $\delta(t)$ resulta:

$$GA_s \left[\frac{\partial \alpha(x, t)}{\partial x} - \frac{\partial^2 r(x, t)}{\partial x^2} \right] = -\rho A \frac{\partial^2 r(x, t)}{\partial t^2} - \rho A \ddot{u}_g(t) + \delta(t) \quad (2.95)$$

donde $\delta(t)$ son las perturbaciones e incertidumbres parametrizadas. Tomando en cuenta las operaciones del estudio dinámico de la sección 2.1.2 con la adición del término $\delta(t)$ en la ecuación (2.64) se obtiene:

$$GA_s \left[\sum_{m=1}^{\infty} \Theta_{m_t}(x) T_m(t) - \sum_{m=1}^{\infty} W_{m_{xx}}(x) T_m(t) \right] = -\rho A \sum_{m=1}^{\infty} W_m(x) T_{m_{tt}}(t) - \rho A \ddot{u}_g(t) + \delta(t) \quad (2.96)$$

Se continúa con el proceso del análisis dinámico en (2.76) obteniendo se:

$$\rho A \int_0^L W_i^2(x) dx [\ddot{T}_i(t) + w_i^2 T_i(t)] + (\rho A \ddot{u}_g(t) - \delta(t)) \int_0^L W_i(x) dx = 0 \quad (2.97)$$

El resultado anterior se iguala con la expresión (2.80):

$$-\rho I \int_0^L \Theta_i^2(x) dx [\ddot{T}_i(t) + w_i^2 T_i(t)] = \rho A \int_0^L W_i^2(x) dx [\ddot{T}_i(t) + w_i^2 T_i(t)] + (\rho A \ddot{u}_g(t) - \delta(t)) \int_0^L W_i(x) dx \quad (2.98)$$

Se prosigue con la simplificación y mediante factorización de términos se obtiene:

$$\ddot{T}_i(t) + w_i^2 T_i(t) = - \frac{(\rho A \ddot{u}_g(t) - \delta(t)) \int_0^L W_i(x) dx}{[\rho I \int_0^L \Theta_i^2(x) dx + \rho A \int_0^L W_i^2(x) dx]} \quad (2.99)$$

Finalmente, se llega a la expresión equivalente a (2.85), solo que ahora contienen el término para agrupar las perturbaciones e incertidumbre parametrizadas:

$$\ddot{T}_i(t) + w_i^2 T_i(t) = - \frac{\rho A \int_0^L W_i(x) dx}{[\rho I \int_0^L \Theta_i^2(x) dx + \rho A \int_0^L W_i^2(x) dx]} \left(\ddot{u}_g(t) - \frac{\delta(t)}{\rho A} \right) \quad (2.100)$$

$$\ddot{T}_i(t) + w_i^2 T_i(t) = -\Gamma_i \left(\ddot{u}_g(t) - \frac{\delta(t)}{\rho A} \right) \quad (2.101)$$

donde Γ_i es el factor de participación modal definido en (2.86).

Esta última interpretación matemática de la dinámica del edificio es más cercana a la realidad, ya que al añadir $\delta(t)$ estamos considerando la acción de otras fuerzas naturales como el viento (en el caso de edificios altos). Para simplificar se define:

$$\delta_z = \frac{\delta(t)}{\rho A} \quad (2.102)$$

Ahora, si a la ecuación (2.101) se le añade el elemento con amortiguamiento y la identidad (2.102), se obtiene:

$$\ddot{T}_i(t) + 2\xi_n w_i \dot{T}_i(t) + w_i^2 T_i(t) = -\Gamma_i (\ddot{u}_g(t) - \delta_z) \quad (2.103)$$

La representación en el espacio de estado de la ecuación (2.103) se establece como:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}(\mathbf{t}) &= \mathbf{A}\mathbf{z}(\mathbf{t}) + \mathbf{B}\ddot{u}_g(\mathbf{t}) - \mathbf{B}\delta_z \\ \mathbf{y}(\mathbf{t}) &= \mathbf{C}\mathbf{z}(\mathbf{t}) \end{aligned}$$

donde las matrices A , B y C , están definidas en (2.92), (2.93) y (2.94) respectivamente.

2.3. Modelo de Bouc-Wen de un amortiguador magneto-reológico.

Una representación de un amortiguador no lineal se describe con el modelo de Bouc-Wen. Sea el diagrama de un amortiguador magnetoreológico (AMR) expuesto en la figura 2.4 donde F_{MRi} es la fuerza opositora a la carga externa sobre el amortiguador, se denomina $T_i(t)$ al desplazamiento del edificio producto de la acción de alguna perturbación externa. Relacionando las propiedades de un amortiguador pasivo como son la rigidez $\varsigma_2 \in \mathbb{R}^+$ y el amortiguamiento viscoso $\varsigma_1 \in \mathbb{R}^+$, adicionando un elemento no lineal definido por el término $\alpha\epsilon$, donde $\epsilon \in \mathbb{R}$ es la fuerza restauradora no lineal y $\alpha \in \mathbb{R}^+$ es el parámetro

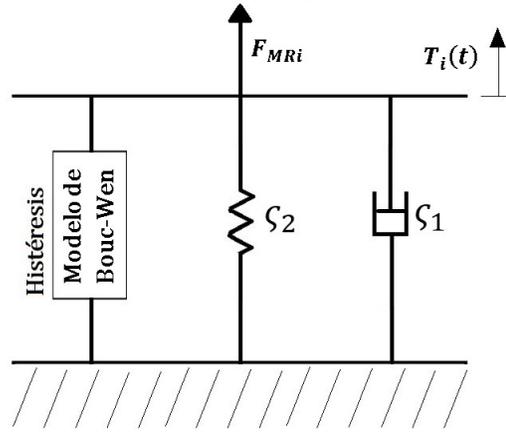


Figura 2.4: Diagrama del modelo de Bouc-Wen de un amortiguador magnetoreológico.

que relaciona la fuerza no lineal con el fluido reológico, obteniendo la sumatorias de fuerzas del diagrama de cuerpo libre de la figura 2.4. La ecuación diferencial del sistema se expresa [20]:

$$\alpha\epsilon + c_1\dot{T}_i(t) + c_2T_i(t) = F_{MRi} \quad (2.104)$$

Todos los elementos se suponen conocidos o medibles, con excepción de ϵ . Para estimarla se emplea la siguiente expresión [20]:

$$\dot{\epsilon} = A_D\dot{T}_i(t) - \beta_1\dot{T}_i(t)\|\epsilon\|^{\vartheta-1}\epsilon - \beta_2\dot{T}_i(t)\|\epsilon\|^{\vartheta} \quad (2.105)$$

donde $\beta_1 \in \mathbb{R}^+$ y $\beta_2 \in \mathbb{R}^+$ determinan el tamaño de la curva histéretica del amortiguador magnetoreológico, el término $\vartheta \in \mathbb{R}^+$ influye en la suavidad de la curva, mientras $A_D \in \mathbb{R}^+$ es una constante de amortiguamiento.

En la práctica el actuador magnetoreológico está constituido por una coraza exterior que permite el montaje y la protección de las partes móviles. En general la estructura interna cuenta con un revestimiento para contener el fluido magnetoreológico. Además inmerso en el centro se encuentra el vástago y concéntrico a éste el muelle de retorno. Dependiendo del fabricante y el modelo de amortiguador el embobinado que genera el campo magnético para modificar las propiedades físicas del fluido reológico, el cual puede hallarse en el embolo del amortiguador o seccionado al rededor del revestimiento que lo contiene.

En consecuencia, se requiere una fuente de voltaje para alimentar el embobinado interior. Entonces los parámetros de diseño de la ecuación (2.104) son dependientes del voltaje, esto de acuerdo con [25]. Por lo tanto se presentan las siguientes ecuaciones para el control por voltaje (ver ecuación (2.104)):

$$\alpha = \alpha_{0V} + \alpha_{cV}V_{ctrl} \quad (2.106)$$

$$\varsigma_1 = \varsigma_{1V} + \varsigma_{1cV}V_{ctrl} \quad (2.107)$$

donde $V_{ctrl} \in \mathbb{R}^+$ es la tensión eléctrica suministrada al embobinado que induce el campo magnético, $\alpha_{0V} \in \mathbb{R}^+$ y $\varsigma_{1V} \in \mathbb{R}^+$ son constantes de viscosidad sin tensión eléctrica, $\alpha_{cV} \in \mathbb{R}^+$ y $\varsigma_{1cV} \in \mathbb{R}^+$ son constantes de proporcionalidad para el control de viscosidad por tensión eléctrica [25]. Se debe observar en (2.104) que ς_2 es una constante de elasticidad lineal y junto con la variable ϵ son independientes del voltaje [25].

Se supone que los estados de posición $T_i(t)$ y velocidad $\dot{T}_i(t)$ del edificio son conocidos, el método para determinarlos se explica en el capítulo 4. A través de los algoritmos de control que se describirán en el capítulo 3 se estima la fuerza deseada del amortiguador magnetoreológico:

$$F_{MRi} = \mathbf{I}_{va} \mathbf{U}_t \quad (2.108)$$

donde $\mathbf{I}_{va} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ permite obtener la señal de control $\mathbf{U}_t \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ sintetizada en un solo canal de entrada debido a que solo existe un solo actuador. El control \mathbf{U}_t se estudiara más adelante en el capítulo 3.

Además, se suponen conocidos los parámetros en las ecuaciones (2.104), (2.105), (2.106) y (2.107) [25], lo que permite definir la relación entre la fuerza del amortiguador magnetoreológico y el voltaje de control. Se rempazan α y ς_1 en el modelo de Bouc-Wen (2.104) a partir de (2.106) y (2.107), resultando:

$$\begin{aligned} F_{MRi} &= (\alpha_{0V} + \alpha_{cV}V_{ctrl})\epsilon + (\varsigma_{1V} + \varsigma_{1cV}V_{ctrl})\dot{T}_i(t) + \varsigma_2 T_i(t) \\ &= (\alpha_{cV}\epsilon + \varsigma_{1cV}\dot{T}_i(t))V_{ctrl} + \alpha_{0V}\epsilon + \varsigma_{1V}\dot{T}_i(t) + \varsigma_2 T_i(t) \\ V_{ctrl} &= \frac{F_{MRi} - \alpha_{0V}\epsilon - \varsigma_{1V}\dot{T}_i(t) - \varsigma_2 T_i(t)}{\alpha_{cV}\epsilon + \varsigma_{1cV}\dot{T}_i(t)} \end{aligned} \quad (2.109)$$

En términos físicos el rango de fuerza del amortiguador magnetoreológico tiene un mínimo y un máximo nominal dependiente del voltaje de control, este siempre está indicado por el fabricante en la hoja técnica del actuador. Bajo el entendido que el voltaje de control está acotado por la tensión máxima que soporte el amortiguador magnetoreológico, cuyo valor siempre sera positivo, es decir, $V_{ctrl} \in \mathbb{R}^+$, para determinar los esfuerzos negativos de está señal de control \mathbf{U}_t de las diferentes estrategias del capítulo 3 se propone un ajuste de punto cero relativo o sesgo empleando el recorrido sobre el largo del vástago y el muelle interno del actuador el cual depende del fabricante.

Sea $L_V \in \mathbb{R}^+$ la longitud máxima del recorrido del vástago del actuador, para diseñar un cero relativo o sesgo se considera la mitad de su recorrido sobre el vástago con retorno por muelle interno, como se ilustra en la figura 2.5 se debe mencionar que el actuador se instala en la estructura del edificio para añadir amortiguamiento generando resistencia a los desplazamientos laterales de esté. En consecuencia

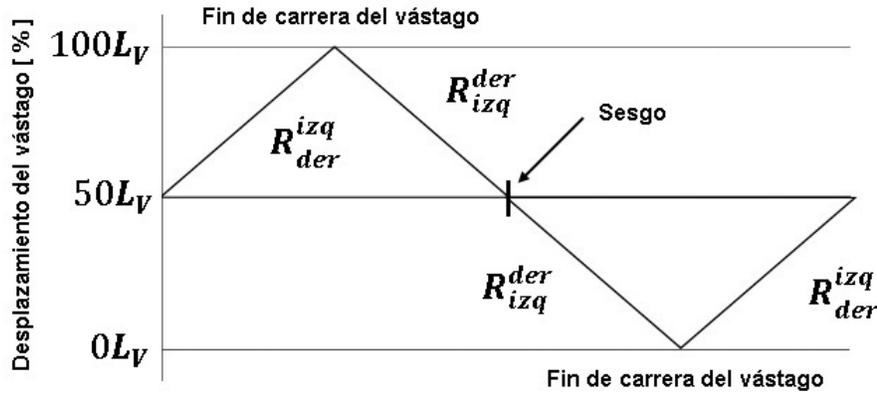


Figura 2.5: Esquema de recorridos positivos R_{izq}^{der} y negativos R_{der}^{izq} del amortiguador magneto-reológico.

no se necesita conocer los cambios en el recorrido del vástago pues depende exclusivamente de los estados del piso donde este ubicado de acuerdo a la ecuación (2.104).

Para asignar signo a los valores que toman los estados de los que depende el actuador magneto-reológico, sean de posición $T_i(t)$ y velocidad $\dot{T}_i(t)$, se asume que los desplazamientos de izquierda a derecha son positivos T_i^+ y negativos si son de derecha a izquierda T_i^- . Entonces los cambios en los recorridos del vástago se definen como:

$$\begin{aligned} R_{izq}^{der} &\in T_i^+ \\ R_{der}^{izq} &\in T_i^- \end{aligned} \quad (2.110)$$

El amortiguador magneto-reológico podrá compensar los desplazamientos laterales sin importar su sentido (ver figura 2.5). La fuerza ejercida por el actuador es dependiente del desplazamiento de la estructura y del voltaje de control como lo refieren las ecuaciones (2.104), (2.105), (2.106) y (2.107) [25].

Capítulo 3

Comparación de técnicas de control semiactivo

3.1. Control por rechazo activo de perturbaciones (CRAP)

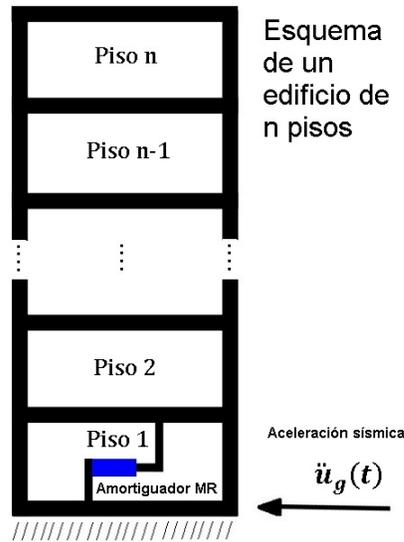


Figura 3.1: Ubicación del amortiguador magnetoreológico en el edificio.

Para implementar la estrategia de control por rechazo activo de perturbaciones se considera el modelo matemático formulado en el capítulo 2, en particular se emplea la ecuación diferencial (2.103). Por facilidad se realiza el cambio de notación de su expresión escalar en (2.103) a un modelo matemático n -dimensional resultando:

$$\ddot{\mathbf{T}}(t) + 2\mathbf{\Xi}\Omega\dot{\mathbf{T}}(t) + \Omega^2\mathbf{T}(t) = \mathbf{U}_{\text{MR}} - \mathbf{\Gamma}\mathbf{I}_{\text{CF}}\ddot{u}_g(t) + \mathbf{\Gamma}\mathbf{I}_{\text{WF}}\delta_z \quad (3.1)$$

donde

$$\mathbf{T}(t) = \begin{bmatrix} T_1(t) & T_2(t) & \cdots & T_n(t) \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{n \times 1} \quad (3.2)$$

$$\dot{\mathbf{T}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{T}_1(t) & \dot{T}_2(t) & \cdots & \dot{T}_n(t) \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{n \times 1} \quad (3.3)$$

$$\ddot{\mathbf{T}}(t) = \begin{bmatrix} \ddot{T}_1(t) & \ddot{T}_2(t) & \cdots & \ddot{T}_n(t) \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{n \times 1} \quad (3.4)$$

$$\mathbf{\Omega} = \text{diag} [\omega_1 \quad \omega_2 \quad \cdots \quad \omega_n] \geq 0 \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (3.5)$$

$$\mathbf{\Xi} = \text{diag} [\xi_1 \quad \xi_2 \quad \cdots \quad \xi_n] \geq 0 \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (3.6)$$

$$\mathbf{\Gamma} = \text{diag} [\Gamma_1 \quad \Gamma_2 \quad \cdots \quad \Gamma_n] \geq 0 \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (3.7)$$

$$\mathbf{U}_{\text{MR}} \in \mathbb{R}^{n \times 1} \quad (3.8)$$

$$\mathbf{I}_{\text{CF}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{n \times 1} \quad (3.9)$$

$$\mathbf{I}_{\text{WF}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{n \times 1} \quad (3.10)$$

$$\mathbf{I}_{\text{MR}} = \text{diag} [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0] \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (3.11)$$

$$\ddot{u}_g(t) \in \mathbb{R} \quad (3.12)$$

$$\delta_z \in \mathbb{R} \quad (3.13)$$

$$\mathbf{F}_{\text{MR}} \in \mathbb{R}^{n \times 1} \quad (3.14)$$

Suposición 2.

i. Los estados $\mathbf{T}(t)$ y $\dot{\mathbf{T}}(t)$ se suponen disponibles a través de mediciones.

ii. Las matrices de parámetros del edificio $2\mathbf{\Xi}\mathbf{\Omega}$ y $\mathbf{\Omega}^2$ se suponen conocidas.

iii. El sistema (3.1) es controlable y observable.

iv. Las perturbaciones son acotadas en magnitud y se pueden estimar por medio del control por rechazo activo de perturbaciones.

Sea la señal de control:

$$\mathbf{U}_{\text{MR}} = \mathbf{\Gamma}\mathbf{I}_{\text{MR}}\mathbf{F}_{\text{MR}} \quad (3.15)$$

donde $\mathbf{F}_{\text{MR}} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es la fuerza del amortiguador magnetoreológico, $\mathbf{I}_{\text{MR}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz para indicar la ubicación del actuador dentro del edificio (ver figura 3.1).

De la ecuación (3.15) se reemplaza el valor de \mathbf{U}_{MR} en (3.1) obteniéndose:

$$\ddot{\mathbf{T}}(t) + 2\mathbf{\Xi}\mathbf{\Omega}\dot{\mathbf{T}}(t) + \mathbf{\Omega}^2\mathbf{T}(t) = \mathbf{\Gamma}\mathbf{I}_{\text{MR}}\mathbf{F}_{\text{MR}} - \mathbf{\Gamma}\mathbf{I}_{\text{CF}}\ddot{u}_g(t) + \mathbf{\Gamma}\mathbf{I}_{\text{WF}}\delta_z \quad (3.16)$$

Luego, de (2.104) se sabe que:

$$\mathbf{F}_{\text{MR}} = \alpha\epsilon\mathbf{I}_{\text{NL}} + \varsigma_1\dot{\mathbf{T}}(t) + \varsigma_2\mathbf{T}(t) \quad (3.17)$$

donde $\mathbf{I}_{\text{NL}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}^{\mathbf{T}} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es un vector que se agrega para que concuerde la dimensión del primer término con los estados $\dot{\mathbf{T}}(t)$ y $\mathbf{T}(t)$.

Notar que el elemento $\alpha\epsilon$ es la parte no lineal del amortiguador magnetoreológico, donde ϵ representa el estado asociado a la histéresis el cual no es medible. Para estimarlo se usa la ecuación (2.105) dada por:

$$\dot{\epsilon} = \mathbf{I}_{\text{va}}(A_D\dot{\mathbf{T}}(t) - \beta_1\dot{\mathbf{T}}(t)\|\epsilon\|^{\vartheta-1}\epsilon - \beta_2\dot{\mathbf{T}}(t)\|\epsilon\|^{\vartheta}) \quad (3.18)$$

donde $\mathbf{I}_{\text{va}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ es un vector que permite sintetizar la información de los estados, ya que solo existe un actuador y por tanto un solo comportamiento histerético.

Por facilidad, la acción de control \mathbf{F}_{MR} definida en (3.17) se divide en una parte lineal $\mathbf{U}_{\text{PL}} = \varsigma_1\dot{\mathbf{T}}(t) + \varsigma_2\mathbf{T}(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ y otra no lineal $\mathbf{U}_{\eta} = \alpha\epsilon\mathbf{I}_{\text{NL}} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, donde ς_1 y α dependen del voltaje de acuerdo a (2.106) y (2.106) respectivamente. Por consiguiente, la dinámica de (3.16) se reescribe como:

$$\ddot{\mathbf{T}}(t) = -2\Xi\Omega\dot{\mathbf{T}}(t) - \Omega^2\mathbf{T}(t) + \mathbf{\Gamma}\mathbf{I}_{\text{WF}}\delta_z - \mathbf{\Gamma}\mathbf{I}_{\text{CF}}\ddot{u}_g(t) + \mathbf{\Gamma}\mathbf{I}_{\text{MR}}(\mathbf{U}_{\eta} + \mathbf{U}_{\text{PL}}) \quad (3.19)$$

Para simplificar (3.19) se definen las siguientes expresiones:

$$\mathbf{f}_{\text{d}} = 2\Xi\Omega\dot{\mathbf{T}}(t), \quad \mathbf{f}_{\text{s}} = \Omega^2\mathbf{T}(t), \quad \mathbf{f}_{\text{e}} = \mathbf{\Gamma}\mathbf{I}_{\text{CF}}\ddot{u}_g(t), \quad \mathbf{f}_{\text{w}} = \mathbf{\Gamma}\mathbf{I}_{\text{WF}}\delta_z, \quad \phi = \mathbf{\Gamma}\mathbf{I}_{\text{MR}}\mathbf{U}_{\eta}, \quad \mathbf{U}_{\text{t}} = \mathbf{\Gamma}\mathbf{I}_{\text{MR}}\mathbf{U}_{\text{PL}} \quad (3.20)$$

Sustituyendo los términos de (3.20) en (3.19) se obtiene:

$$\ddot{\mathbf{T}}(t) = -\mathbf{f}_{\text{d}} - \mathbf{f}_{\text{s}} + \mathbf{f}_{\text{w}} - \mathbf{f}_{\text{e}} + \mathbf{U}_{\text{t}} + \phi$$

Agrupando términos se lleva el sistema a la forma:

$$\ddot{\mathbf{T}}(t) = \mathbf{U}_{\text{t}} + \zeta(t) \quad (3.21)$$

$$\zeta(t) = -[\mathbf{f}_{\text{d}} + \mathbf{f}_{\text{s}} + \mathbf{f}_{\text{e}} - \mathbf{f}_{\text{w}} - \phi] \quad (3.22)$$

Note que $\zeta(t)$ engloba la perturbación sísmica suponiendo que está acotada la magnitud y de energía finita, es decir $|\ddot{u}_g(t)| \leq F_{\text{sis}} [13]$ y el efecto del viento que también se supone de magnitud acotada tal que $|\delta_z| \leq F_{\text{wind}}$. En la práctica se puede obtener F_{wind} mediante el promedio de las mediciones ambientales durante un periodo de tiempo considerable [38], mientras que el amortiguador magnetoreológico tiene un esfuerzo máximo $|\mathbf{U}_{\text{t}}| \leq F_{\text{MRmax}}$ determinado por el fabricante [25].

Finalmente las expresiones (3.21) y (3.22) constituyen el modelo para plantear la estrategia de control por rechazo activo de perturbaciones para edificios [13].

3.1.1. Observador de estados

En lo subsecuente los estados de posición $\mathbf{T}(t)$ y velocidad $\dot{\mathbf{T}}(t)$ se suponen conocidos (suposición 3). Partiendo de la ecuación (3.21) se diseña un observador de estado extendido (OEE) para estimar la perturbación, se sigue el procedimiento señalado en el capítulo 2, sección 2.2.1, pág. 15-18 de la referencia [3]. Para ello se realiza el cambio de variables $\mathbf{y}_1 = \mathbf{T}(t)$ y $\mathbf{y}_2 = \dot{\mathbf{T}}(t)$, tal que la nueva representación de la ecuación (3.21) se escribe:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{y}}_1 &= \mathbf{y}_2 \\ \dot{\mathbf{y}}_2 &= \mathbf{U}_t + \zeta(t)\end{aligned}\tag{3.23}$$

A continuación se propone:

Suposición 3.

- i. Sea el estado extendido $\mathbf{z}_e \approx \zeta(t)$ para modelar la dinámica de la perturbación que es aproximado mediante el polinomio de Taylor.
- ii. $\zeta(t)$ es uniformemente acotada del mismo modo que su primera derivada temporal. Por lo tanto, existen constantes finitas K_0 y K_1 tales que:

$$\sup_t \|\zeta(t)\| \leq K_0, \quad \sup_t \|\dot{\zeta}(t)\| \leq K_1\tag{3.24}$$

En consecuencia la expresión (3.23) puede ser reescrita mediante una cadena de integradores como sigue:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{y}}_1 &= \mathbf{y}_2 \\ \dot{\mathbf{y}}_2 &= \mathbf{U}_t + \mathbf{z}_e \\ \dot{\mathbf{z}}_e &= K_1\end{aligned}\tag{3.25}$$

La perturbación $\zeta(t)$ es estimada mediante el observador proporcional integral generalizado (OPIG) propuesto en el capítulo 2, sección 2.2.2, pág. 18-20 de la referencia [3], tal que:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\mathbf{y}}}_1 &= \hat{\mathbf{y}}_2 + \mathbf{\Lambda}_2(\mathbf{y}_1 - \hat{\mathbf{y}}_1) \\ \dot{\hat{\mathbf{y}}}_2 &= \mathbf{U}_t + \hat{\mathbf{z}}_e + \mathbf{\Lambda}_1(\mathbf{y}_1 - \hat{\mathbf{y}}_1) \\ \dot{\hat{\mathbf{z}}}_e &= \mathbf{\Lambda}_0(\mathbf{y}_1 - \hat{\mathbf{y}}_1)\end{aligned}\tag{3.26}$$

donde \mathbf{y}_1 se supone conocida ya que se obtiene del integrador numérico descrito en la sección 3.1.4, $\hat{\mathbf{y}}_1$ y $\hat{\mathbf{y}}_2$ indican la estimación de los estados \mathbf{y}_1 y \mathbf{y}_2 respectivamente, $\mathbf{\Lambda}_l \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son las matrices diagonales de ganancias del observador con $l = \{0, 1, 2\}$.

Sea el error de estimación del observador $\mathbf{e}_{y_1} = \mathbf{y}_1 - \hat{\mathbf{y}}_1$, por la suposición de que existen cotas para las perturbaciones, usando las definiciones (3.23) y (3.26) las derivadas del error del observador se expresan:

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{e}}_{y_1} &= \dot{\mathbf{y}}_1 - \dot{\hat{\mathbf{y}}}_1 \\
 \dot{\mathbf{e}}_{y_1} &= \mathbf{y}_2 - (\dot{\hat{\mathbf{y}}}_2 + \mathbf{\Lambda}_2(\mathbf{y}_1 - \hat{\mathbf{y}}_1)) = \mathbf{y}_2 - (\dot{\hat{\mathbf{y}}}_2 + \mathbf{\Lambda}_2\mathbf{e}_{y_1}) \\
 \ddot{\mathbf{e}}_{y_1} &= \dot{\mathbf{y}}_2 - \dot{\hat{\mathbf{y}}}_2 - \mathbf{\Lambda}_2\dot{\mathbf{e}}_{y_1} \\
 \ddot{\mathbf{e}}_{y_1} &= \mathbf{U}_t + \zeta(\mathbf{t}) - (\mathbf{U}_t + \dot{\hat{\mathbf{z}}}_e + \mathbf{\Lambda}_1\mathbf{e}_{y_1}) - \mathbf{\Lambda}_2\dot{\mathbf{e}}_{y_1} \\
 \ddot{\mathbf{e}}_{y_1} &= \zeta(\mathbf{t}) - \dot{\hat{\mathbf{z}}}_e - \mathbf{\Lambda}_1\mathbf{e}_{y_1} - \mathbf{\Lambda}_2\dot{\mathbf{e}}_{y_1} \\
 \mathbf{e}_{y_1}^{\text{III}} &= \dot{\zeta}(\mathbf{t}) - \dot{\hat{\mathbf{z}}}_e - \mathbf{\Lambda}_1\dot{\mathbf{e}}_{y_1} - \mathbf{\Lambda}_2\ddot{\mathbf{e}}_{y_1} \\
 \mathbf{e}_{y_1}^{\text{III}} &= \dot{\zeta}(\mathbf{t}) - \mathbf{\Lambda}_0\mathbf{e}_{y_1} - \mathbf{\Lambda}_1\dot{\mathbf{e}}_{y_1} - \mathbf{\Lambda}_2\ddot{\mathbf{e}}_{y_1} \\
 \dot{\zeta}(\mathbf{t}) &= \mathbf{e}_{y_1}^{\text{III}} + \mathbf{\Lambda}_2\ddot{\mathbf{e}}_{y_1} + \mathbf{\Lambda}_1\dot{\mathbf{e}}_{y_1} + \mathbf{\Lambda}_0\mathbf{e}_{y_1}
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

Bajo la suposición de condiciones iniciales nulas se emplea la transformada de Laplace para expresar el resultado en el dominio de la frecuencia:

$$\mathbf{e}_{y_1}(\mathbf{s})[\mathbf{I}_n\mathbf{s}^3 + \mathbf{\Lambda}_2\mathbf{s}^2 + \mathbf{\Lambda}_1\mathbf{s} + \mathbf{\Lambda}_0] = \zeta(\mathbf{s})\mathbf{s} \tag{3.28}$$

El conjunto de parámetros de las matrices $\mathbf{\Lambda}_i$ del observador se determinan con:

$$\Lambda_{2i} = 3\omega_{oi} \in \mathbb{R}^+, \quad \Lambda_{1i} = 3\omega_{oi}^2 \in \mathbb{R}^+, \quad \Lambda_{0i} = \omega_{oi}^3 \in \mathbb{R}^+ \tag{3.29}$$

donde $\omega_{oi} > 0$ es la frecuencia del observador de estados extendidos con $i = \{1, 2, \dots, n\}$ para el n -ésimo piso del edificio.

Por consiguiente, el observador (3.26) tiene como polinomio característico a (3.28). La perturbación estimada se emplea como elemento de control adicional para compensar el efecto de la perturbación real.

3.1.2. Diseño de un controlador Proporcional Derivativo

Se propone una estrategia de control proporcional derivativo (CPD).

$$\mathbf{U}_{\text{CPD}} = -k_{d_0}\dot{\mathbf{T}}(t) - k_{p_0}\mathbf{T}(t) \tag{3.30}$$

donde las ganancias derivativa k_{d_0} y la ganancia proporcional k_{p_0} son valores dependientes del voltaje de control (2.109).

Usando los estados estimados por el OEE (3.25) con la definición (3.20) del control \mathbf{U}_t , añadiendo el

control proporcional derivativo (3.30) y considerando la *suposición* 3 tal que z_e se aproxima a $\zeta(t)$ resulta:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{y}}_1 &= \mathbf{y}_2 \\
\dot{\mathbf{y}}_2 &= \mathbf{\Gamma}_{\text{MR}} \mathbf{U}_{\text{PL}} + \mathbf{\Gamma}_{\text{MR}} \mathbf{U}_{\text{CPD}} + \mathbf{z}_e \\
\dot{\mathbf{y}}_2 &= \mathbf{\Gamma}_{\text{MR}} \varsigma_1 \dot{\mathbf{T}}(t) + \mathbf{\Gamma}_{\text{MR}} \varsigma_2 \mathbf{T}(t) - \mathbf{\Gamma}_{\text{MR}} k_{d_0} \dot{\mathbf{T}}(t) - \mathbf{\Gamma}_{\text{MR}} k_{p_0} \mathbf{T}(t) - \mathbf{f}_d + \mathbf{f}_s - [\mathbf{f}_e - \mathbf{f}_w - \phi] \\
\dot{\mathbf{y}}_2 &= -\mathbf{\Gamma}_{\text{MR}}(-\varsigma_1 + k_{d_0}) \dot{\mathbf{T}}(t) - \mathbf{\Gamma}_{\text{MR}}(-\varsigma_2 + k_{p_0}) \mathbf{T}(t) - 2\mathbf{\Xi}\mathbf{\Omega}\mathbf{y}_2 - \mathbf{\Omega}^2 \mathbf{y}_1 - [\mathbf{f}_e - \mathbf{f}_w - \phi] \\
\dot{\mathbf{y}}_2 &= -\mathbf{\Gamma}_{\text{MR}} \varsigma_{d_1} \dot{\mathbf{T}}(t) - \mathbf{\Gamma}_{\text{MR}} \varsigma_{p_2} \mathbf{T}(t) - 2\mathbf{\Xi}\mathbf{\Omega}\mathbf{y}_2 - \mathbf{\Omega}^2 \mathbf{y}_1 - [\mathbf{f}_e - \mathbf{f}_w - \phi]
\end{aligned} \tag{3.31}$$

donde los términos $\varsigma_{d_1} = -\varsigma_1 + k_{d_0}$ y $\varsigma_{p_2} = -\varsigma_2 + k_{p_0}$.

Haciendo el cambio de variables $\mathbf{y}_1 = \mathbf{T}(t)$, $\mathbf{y}_2 = \dot{\mathbf{T}}(t)$ en (3.31) resulta:

$$\begin{aligned}
\ddot{\mathbf{T}}(t) &= -\mathbf{\Gamma}_{\text{MR}} \varsigma_{d_1} \dot{\mathbf{T}}(t) - \mathbf{\Gamma}_{\text{MR}} \varsigma_{p_2} \mathbf{T}(t) - 2\mathbf{\Xi}\mathbf{\Omega} \dot{\mathbf{T}}(t) - \mathbf{\Omega}^2 \mathbf{T}(t) - [\mathbf{f}_e - \mathbf{f}_w - \phi] \\
\ddot{\mathbf{T}}(t) &= -(\mathbf{\Gamma}_{\text{MR}} \varsigma_{d_1} + 2\mathbf{\Xi}\mathbf{\Omega}) \dot{\mathbf{T}}(t) - (\mathbf{\Gamma}_{\text{MR}} \varsigma_{p_2} + \mathbf{\Omega}^2) \mathbf{T}(t) - [\mathbf{f}_e - \mathbf{f}_w - \phi] \\
\ddot{\mathbf{T}}(t) + (\mathbf{\Gamma}_{\text{MR}} \varsigma_{d_1} + 2\mathbf{\Xi}\mathbf{\Omega}) \dot{\mathbf{T}}(t) + (\mathbf{\Gamma}_{\text{MR}} \varsigma_{p_2} + \mathbf{\Omega}^2) \mathbf{T}(t) &= \hat{\mathbf{z}}_e
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Notar que la perturbación estimada $\hat{\mathbf{z}}_e$ es dimensión $\mathbf{R}^{n \times 1}$ de acuerdo con el OPIG (3.26). Se modifica la definición de \mathbf{U}_t con los términos compensados por el control proporcional derivativo ς_{d_1} y ς_{p_2} . Además, se le agrega la estimación de la perturbación $\hat{\mathbf{z}}_e$, esto se expresa como:

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}_t &= \mathbf{\Gamma}_{\text{MR}}(-\varsigma_{d_1} \dot{\mathbf{T}}(t) - \varsigma_{p_2} \mathbf{T}(t) - (\mathbf{\Gamma}_{\text{MR}})^{-1} \hat{\mathbf{z}}_e) \\
\mathbf{U}_t &= \mathbf{\Gamma}_{\text{MR}} \mathbf{U}_{\text{PD}} - \hat{\mathbf{z}}_e
\end{aligned} \tag{3.33}$$

donde $\mathbf{U}_{\text{PD}} = -\varsigma_{d_1} \dot{\mathbf{T}}(t) - \varsigma_{p_2} \mathbf{T}(t)$. La matriz inversa $(\mathbf{\Gamma}_{\text{MR}})^{-1} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ es porque esta información esta implícita en la definición de $\hat{\mathbf{z}}_e$ de acuerdo a (3.31).

Cerrando el lazo en el OPIG (3.26) con el control (3.33) resulta:

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{\mathbf{y}}}_1 &= \hat{\mathbf{y}}_2 + \mathbf{\Lambda}_2(\mathbf{y}_1 - \hat{\mathbf{y}}_1) = \hat{\mathbf{y}}_2 + \mathbf{\Lambda}_2 \mathbf{e}_{y_1} \\
\dot{\hat{\mathbf{y}}}_2 &= \mathbf{\Gamma}_{\text{MR}} \mathbf{U}_{\text{PD}} - \hat{\mathbf{z}}_e + \hat{\mathbf{z}}_e + \mathbf{\Lambda}_1(\mathbf{y}_1 - \hat{\mathbf{y}}_1) = \mathbf{\Gamma}_{\text{MR}} \mathbf{U}_{\text{PD}} + \mathbf{\Lambda}_1(\mathbf{y}_1 - \hat{\mathbf{y}}_1) = \mathbf{\Gamma}_{\text{MR}} \mathbf{U}_{\text{PD}} + \mathbf{\Lambda}_1 \mathbf{e}_{y_1} \\
\dot{\hat{\mathbf{z}}}_e &= \mathbf{\Lambda}_0(\mathbf{y}_1 - \hat{\mathbf{y}}_1) = \mathbf{\Lambda}_0 \mathbf{e}_{y_1}
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Del observador (3.34) se concluye que la perturbación estimada tendrá la dinámica señalada en (3.27) de acuerdo con lo indicado en el capítulo 2, sección 2.2.4, pág. 21-23 de [3]. Para determinar el voltaje de control V_{ctrl} se emplea ecuación (2.108) con el control (3.33) para calcular la fuerza del amortiguador magnetoreológico F_{MRi} y finalmente se usa (2.109) para determinar el voltaje de control V_{ctrl} .

A manera de resumen se presenta el esquema de control por rechazo activo de perturbaciones con el observador proporcional integral generalizado en la figura 3.2, este aprecia el bloque llamado integrador

numérico para estimar las mediciones de velocidad y posición, la explicación del mismo se presenta en la sección 3.1.4.

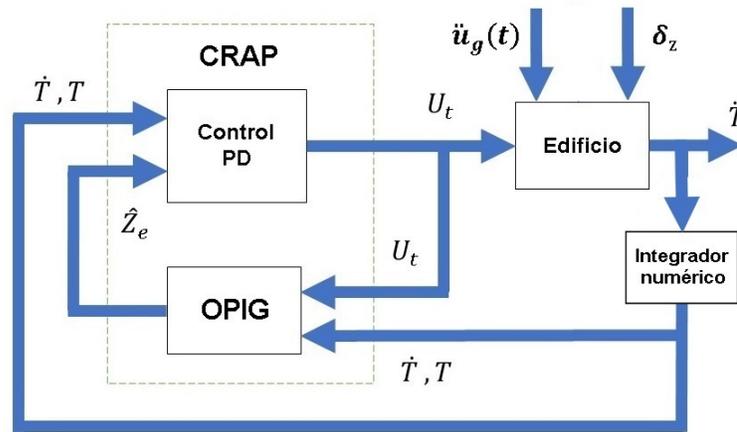


Figura 3.2: Esquema del control por rechazo activo de perturbaciones.

3.1.3. Estructura de pruebas para validación numérica

Para validar los controladores presentados en esta tesis se llevan a cabo diversas simulaciones por computadora mediante el software Matlab Simulink. Las pruebas son realizadas con un tiempo de muestro de 1 *ms*. Para efectuar las simulaciones se usan los datos de un prototipo de edificio de cinco niveles, cuyas características son extraídas de la referencia [35]:

- ♣ Está fabricado en aluminio a excepción de tres columnas que son de latón. Todas las columnas tienen una sección transversal cuadrada con dimensión de 6.35 *mm*.
- ♣ Constituido por cinco pisos, con 31.5 *cm* de separación entre el primer piso y la base, y con 36 *cm* para los cuatro restantes.
- ♣ Considerando que el adosado a la base tiene una altura de 45 *mm*, el edificio tiene una altura total de 1.80 *m* con una base simétrica de dimensión (60 × 50) *cm*.

Esta información se puede hallar en la sección 5 denominada “*Resultados experimentales*”, localizada en la pág. 11 de la referencia [35]. Los datos del prototipo experimental se presentan en la tabla 3.1 que representan un sistema discretizado de la ecuación de onda.

Al emplear los parámetros de la tabla 3.1, con la consideración de la existencia de perturbación causadas por sismos y efectos del viento, entonces el edificio se modela como sigue:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = -\mathbf{M}\mathbf{I}_{\mathbf{CF}}\ddot{u}_g(t) + \mathbf{M}\mathbf{I}_{\mathbf{WF}}\delta_z \quad (3.35)$$

Piso	Masa (Kg), m_i	Amortiguamiento ($\frac{Ns}{m}$), c_i	Rigidez (N/m), k_i
1 _{ro}	10.78	700.14	19110
2 _{do}	9.17	278.18	12108
3 _{ro}	9.14	546.84	11966
4 _{to}	9.12	372.54	11850
5 _{to}	9.08	375.97	12406

Tabla 3.1: Parámetros del prototipo de edificio de 5 niveles

Posteriormente, al usar el método de transformación modal descrito en el capítulo 10, parte C, sección 10.15 en las páginas 440-441 de la referencia [4], se obtiene la representación modal (3.1) agregando el término del controlador \mathbf{U}_t definido por cada estrategia de control, tal que:

$$\ddot{\mathbf{T}}(t) + \mathbf{2}\Xi\Omega\dot{\mathbf{T}}(t) + \Omega^2\mathbf{T}(t) = \mathbf{U}_t - \mathbf{\Gamma I}_{CF}\ddot{u}_g(t) + \mathbf{\Gamma I}_{WF}\delta_z \quad (3.36)$$

Los parámetros del amortiguador magnetoreológico se substraen de la tabla 2 del artículo referido en [25], tal es el caso de las constantes $\alpha_{0V} = 140N/cm$, $\alpha_{cV} = 695N/cmV$, $\varsigma_1 = 21Ns/cm$, $\varsigma_{1cV} = 3.50Ns/cm$ y $\varsigma_2 = 46.9N/cm$.

Por otro lado, se emplea el registro sísmico de septiembre de 1985 en la componente norte sur, tomado por la Secretaría de Comunicaciones y Transportes, el cual se usa como señal de perturbación luego de ser escalado acorde con los datos del prototipo de edificio simulado en la sección 3.1.3, como se ilustra en la figura 3.3.

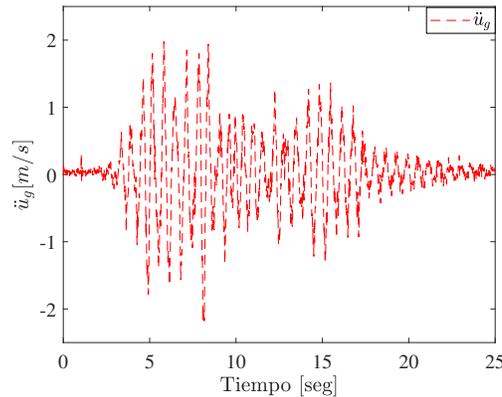


Figura 3.3: Registro sísmico escalado del sismo de 1985.

Además, para considerar los efectos del viento δ_z en el modelo (3.36), esta señal es recreada a través del método de la transformación inversa de la serie de Fourier del registro de un espectro de viento [38],

mediante las siguientes ecuaciones:

$$\delta_z = 8\pi \frac{(S_n u_\star)^2}{\omega_\delta (1 + S_n^2)^{\frac{4}{3}}} \quad (3.37)$$

$$S_n = \frac{600\omega_\delta}{\pi V_0} \quad (3.38)$$

$$u_\star = \frac{V_z K_v}{\log(\frac{h}{h_0})} \quad (3.39)$$

donde ω_δ es la frecuencia de fluctuación del viento, V_0 es la velocidad del viento conocida o promedio histórico, V_z es la velocidad del viento a la altura deseada, h/h_0 es la relación de altura sobre la longitud de asperezas y K_v es el coeficiente de arrastre.

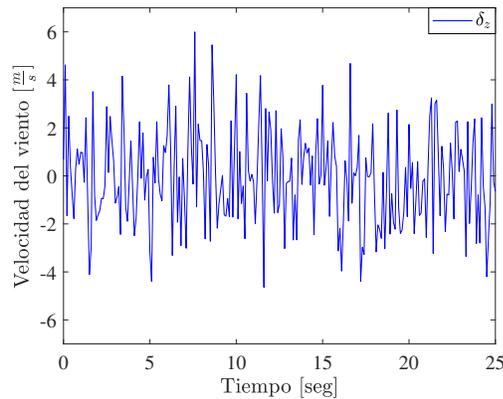


Figura 3.4: Espectro de la velocidad del viento.

Usando (3.37) y escalando los parámetros para el modelo de prueba de la sección 3.1.3, se genera la señal para emular de la velocidad del viento con una amplitud de 6 m/s como se aprecia en la figura 3.4.

3.1.4. Integrador numérico para acelerómetros

Los acelerómetros son sensores diseñados para obtener las mediciones de aceleración a través del contacto con las superficies de donde se quiere realizar la medición. Para evitar el ruido en la medición originado por los sesgos de voltaje y mejorar la estimación de las señales de desplazamiento y velocidad se emplea el integrador numérico propuesto en [37]. En la figura 3.5 se muestra el diagrama a bloques del integrador numérico [37].

Para describir el funcionamiento del integrador numérico, primero se supone que existe un ruido de alta frecuencia presente en la señal de salida del acelerómetro, el cual se atenúa mediante un filtro de pasa bajas. Esta señal de aceleración filtrada se pasa a través de un filtro de cancelación de offset (FCO) para eliminar ruido de baja frecuencia remanente generado por los componentes electrónicos. Posteriormente esta señal se integra para obtener una estimación de la velocidad y luego se envía a un filtro de pasa

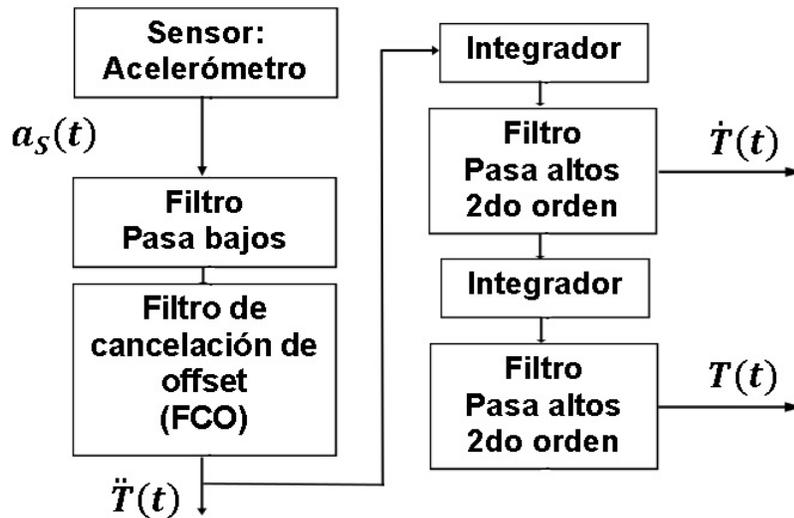


Figura 3.5: Diagrama a bloques del integrador numérico.

altas para eliminar el ruido de baja frecuencia. Se integra nuevamente para obtener una estimación de la posición y cuenta con un filtro de pasa altas en cascada para cancelar el ruido en la salida [37].

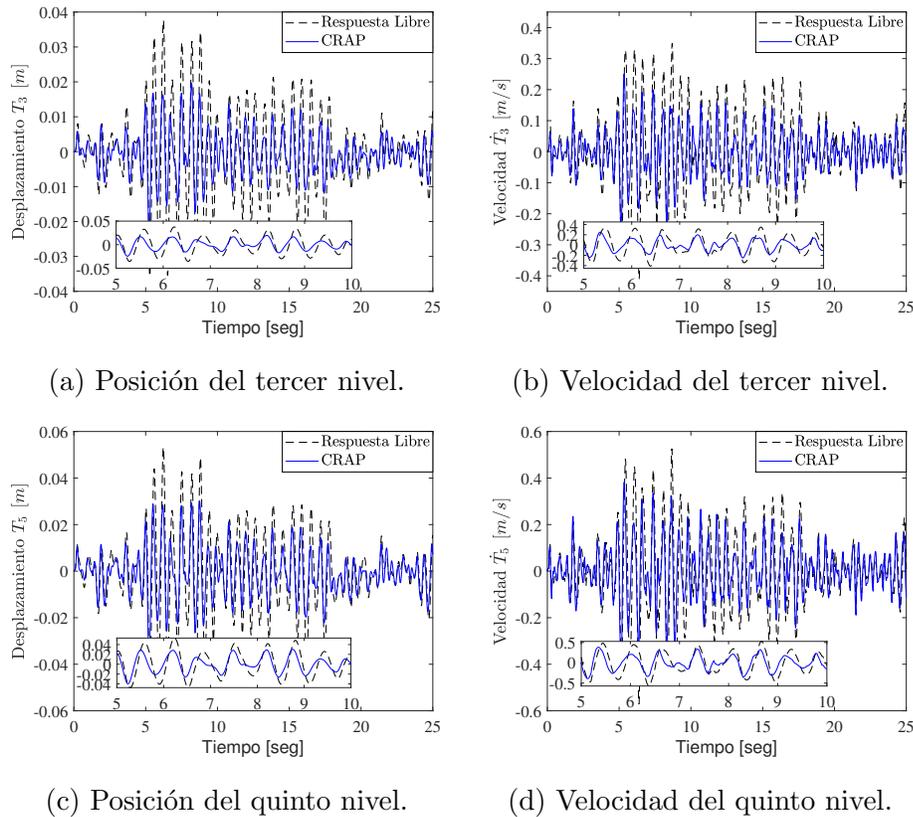
En la simulación numérica se considera el uso de integradores numéricos para obtener los estados de posición $\mathbf{T}(t)$ y velocidad $\dot{\mathbf{T}}(t)$ del edificio.

3.1.5. Validación numérica del control por rechazo activo de perturbaciones

Se realizan simulaciones numéricas empleando Matlab para verificar el desempeño del controlador \mathbf{U}_t definido por ecuación (3.33), para ello se emplean los parámetros de la estructura de pruebas y las señales de perturbación mencionadas en la sección 3.1.3.

La respuesta en posición y velocidad del edificio bajo perturbación compensada por el controlador *CRAP* se ven en la figura 3.6. En la tabla 3.2 se presentan los porcentajes de atenuación del desplazamiento lateral usando el compensador *CRAP*, estos presentan una disminución conforme se alejan del primer nivel donde tiene un resultado del 58.2164% en la reducción del desplazamiento en comparación con la respuesta libre, en el último nivel el resultado es 43.2649%. De los porcentajes de atenuación se concluye que el controlador *CRAP* logra minimizar las perturbaciones exógenas con un buen desempeño, para lo cual el amortiguador magnetoreológico requiere una fuerza estimada de 274.9265 N .

En la figura 3.7 se representan la señal de fuerza estimada a partir del controlador *CRAP* y el voltaje de control requerido por el amortiguador magnetoreológico. Para obtener la relación de voltaje para el


 Figura 3.6: Respuesta del edificio usando el controlador *CRAP*.

Piso	1_{ro}	2_{do}	3_{ro}	4_{to}	5_{to}
Atenuación %	58.2164	54.7475	47.6835	45.1102	43.2649

 Tabla 3.2: Porcentajes de atenuación del desplazamiento lateral del edificio compensado por el controlador *CRAP*.

control por rechazo activo de perturbaciones se usa la ecuación (2.109), que determina el voltaje de control V_{ctrl} requerido por el amortiguador magnetoreológico.

3.1.5.1. Índice de desempeño

Para tener una mejor evaluación del desempeño de los controles, se emplea el criterio de la integral del error cuadrático (CIEC), el cual se define:

$$CIEC = \int_{\tau_1}^{\tau_2} (k_{ISE} E_T)^2 d\tau \quad (3.40)$$

donde k_{ISE} es una constante de proporcionalidad, $E_T = R_D - Y_t$ es el error de estabilización, mientras R_D y Y_t representan respectivamente la posición deseada y relativa del edificio.

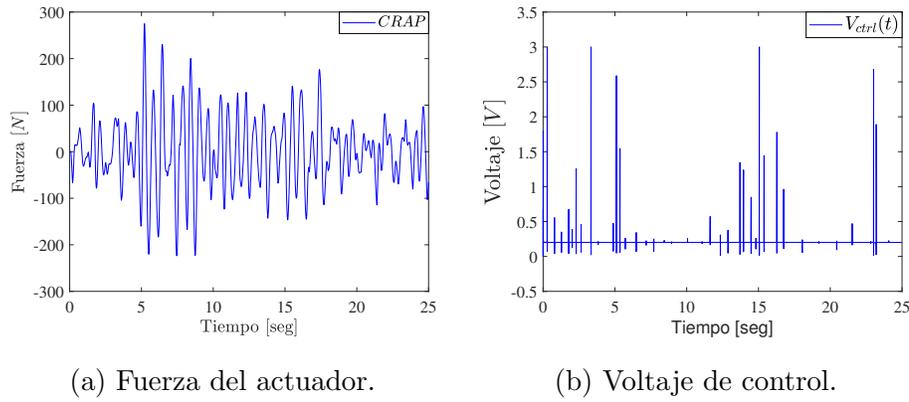


Figura 3.7: Señales de fuerza y voltaje usando el controlador $CRAP$.

Piso	1_{ro}	2_{do}	3_{ro}	4_{to}	5_{to}
CIEC	0.5912	2.8626	9.9354	19.4392	26.5773

Tabla 3.3: Índice de desempeño por el criterio de la integral del error cuadrático para el controlador $CRAP$.

Los resultados del CIEC para el control por rechazo activo de perturbaciones aparecen en la tabla 3.3. Observe que, un valor pequeño en el cálculo del CIEC indica un mejor desempeño.

3.2. Control por modos deslizantes integral (CMDI)

La segunda estrategia a considerar en este estudio comparativo es el control por modos deslizantes integral, el sistema se considera independiente de controlador $CRAP$ en igualdad de condiciones.

Suposición 4.

- i. Los puntos i , ii , y iii de la suposición 2 se satisfacen aquí también.*
- ii. Las perturbaciones se suponen acotadas en magnitud.*
- iii. Se plantea el diseño de un control por modos deslizantes integral compensar las perturbaciones o atenuar (o eliminar) su efecto y disminuir los desplazamientos laterales del edificio, al diseñar una superficie deslizante empleando una relación del desplazamiento relativo entre el n -ésimo y el primer piso, siendo esté último el lugar donde está ubicado el amortiguador magnetoreológico.*

Sea el sistema el descrito por la ecuación (3.1), reemplazando \mathbf{U}_{MR} por los términos del control por

modos deslizantes $\mathbf{\Gamma I}_{sm}(U_\eta + U_l + U_{SM})$ resulta:

$$\ddot{\mathbf{T}}(t) + \mathbf{2}\mathbf{\Xi}\mathbf{\Omega}\dot{\mathbf{T}}(t) + \mathbf{\Omega}^2\mathbf{T}(t) = \mathbf{\Gamma I}_{WF}\delta_z - \mathbf{\Gamma I}_{CF}\ddot{u}_g(t) + \mathbf{\Gamma I}_{sm}(U_\eta + U_l + U_{SM}) \quad (3.41)$$

donde

$$U_l = \mathbf{I}_{va}(\varsigma_{p2}\mathbf{T}(t) + \varsigma_{d1}\dot{\mathbf{T}}(t)) \in \mathbb{R} \quad (3.42)$$

$$U_\eta = \alpha\epsilon \in \mathbb{R} \quad (3.43)$$

$$U_{SM} \in \mathbb{R} \quad (3.44)$$

$$\mathbf{I}_{sm} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{n \times 1} \quad (3.45)$$

Notar que ς_{d1} y ς_{p2} son los términos lineales del actuador compensados por el control proporcional derivativo (CPD) definido en (3.31), ϵ es la no linealidad calculada con (3.18) y \mathbf{I}_{sm} es el vector de acción del modo deslizante con un solo actuador.

Para facilitar el diseño del control por modos deslizantes integral U_{SM} se propone la representación en variables de estado $\mathbf{z}_1 = \mathbf{T}(t)$ y $\mathbf{z}_2 = \dot{\mathbf{T}}(t)$ resultando:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{z}}_1 \\ \dot{\mathbf{z}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{I}_{n \times n} \\ -\mathbf{\Omega}_{n \times n}^2 & -\mathbf{2}\mathbf{\Xi}_{n \times n}\mathbf{\Omega}_{n \times n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times 1} \\ \mathbf{\Gamma I}_{WF} \end{bmatrix} \delta_z - \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times 1} \\ \mathbf{\Gamma I}_{CF} \end{bmatrix} \ddot{u}_g(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times 1} \\ \mathbf{\Gamma I}_{sm} \end{bmatrix} (U_\eta + U_l + U_{SM}) \quad (3.46)$$

Generalizando (3.46) se tiene:

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{B}_1\delta_z - \mathbf{B}_2\ddot{u}_g(t) + \mathbf{B}_3U_l + \phi + \mathbf{B}_3U_{SM} \quad (3.47)$$

donde $\phi = \mathbf{B}_3U_\eta$ representa la incertidumbre no lineal del amortiguador magnetoreológico.

Se plantea como objetivo de control la reducción de los desplazamientos laterales a lo largo del edificio. Para un edificio de n pisos se define el vector siguiente [27]:

$$\mathbf{D}_T = \begin{bmatrix} T_1 - T_0 \\ T_2 - T_1 \\ T_3 - T_2 \\ \vdots \\ T_{n-1} - T_{n-2} \\ T_n - T_{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

La meta es que los elementos del vector D_T tiendan a cero, para sustentar esta idea se parte del modelo de la viga de Timoshenko sección 2.1 idealmente el edificio de n pisos es equivalente a una viga rígida discretizada por la cantidad de acelerómetros que se instalen en correspondencia a los n pisos, la

hipótesis es que la viga esta en reposo y no existe una perturbación que genere un desplazamiento lateral $r(x, t)$, en este caso el desplazamiento relativo entre pisos del edificio señalado por el vector D_T es cercano a cero.

En el caso general de que exista una perturbación habrá un desplazamiento lateral $r(x, t)$ y el vector $D_T \neq 0$. Además, se debe considerar que se trata de un sistema subactuado, es decir, la acción de control tiene influencia directa únicamente en el primer piso donde se encuentra instalado el actuador, en consecuencia su efectividad se reduce en los elementos ajenos ha ese piso. Por esta razón, se define un modelo escalar a partir de la suma de los elementos del vector D_T [27]:

$$X_T = \sum_{i=1}^n \alpha_{D_i} D_{T_i} \approx 0 \quad (3.49)$$

donde X_T es el desplazamiento relativo total del edificio, α_{D_i} es una constante de proporcionalidad, en este caso se considera $\alpha_{D_i} = 1$.

Suponiendo $D_T \approx 0$, esto implica que $T_1 - T_0 = 0$, a su vez $T_2 - T_1 = 0$ y consecutivamente hasta $T_n - T_{n-1} = 0$. De lo anterior se puede observar que para minimizar los elementos de todo el vector la mejor opción es minimizar los desplazamientos relativos entre el último piso del edificio y la base del mismo. Sin embargo, tomando en cuenta que el actuador está instalado en el primer piso, la minimización se lleva a cabo respecto de ésta ubicación, resultando:

$$X_T = T_n - T_1 \quad \dot{X}_T = \dot{T}_n - \dot{T}_1 \quad \ddot{X}_T = \ddot{T}_n - \ddot{T}_1 \quad (3.50)$$

Usando los valores de las ecuación (3.46) y (3.47) se definen:

$$\begin{aligned} T_n &= z_{1,n} & \dot{T}_n &= z_{2,n} & \ddot{T}_n(t) &= \dot{z}_{2,n} \\ T_1 &= z_{1,1} & \dot{T}_1 &= z_{2,1} & \ddot{T}_1(t) &= \dot{z}_{2,1} \end{aligned} \quad (3.51)$$

3.2.1. Diseño de una superficie deslizante basado en error de posición

Sea el sistema de la forma (3.47), donde el edificio está sometido a una acción sísmica, la intención del control es estabilizar al edificio en su posición de reposo. Usando las consideraciones del error de estimación relativo, el error de posición y de velocidad se definen:

$$e = X_T - X_{T_d} \quad (3.52)$$

$$\dot{e} = \dot{X}_T - \dot{X}_{T_d} \quad (3.53)$$

Bajo la suposición anterior, la superficie deslizante integral se define [28]:

$$\sigma(z) = c_1 e + c_2 \dot{e} - c_3 \int_0^t e d\tau \quad (3.54)$$

Recordando que $X_{T_d} = \dot{X}_{T_d} = 0$ y de acuerdo con las variables de estado, las ecuaciones (3.52) y (3.53) se simplifican tal que $e = z_{1,n} - z_{1,1}$ y $\dot{e} = z_{2,n} - z_{2,1}$. La variable deslizante se puede reescribir como sigue:

$$\sigma(z) = c_1(z_{1,n} - z_{1,1}) + c_2(z_{2,n} - z_{2,1}) - c_3 \int_0^t (z_{1,n} - z_{1,1}) d\tau \quad (3.55)$$

tal que $\sigma = 0$ es la superficie deslizante integral y los c_i con $i = \{1, 2, 3\}$ son ganancias de esta superficie. Por lo tanto, el control por modo deslizante integral U_{SM} se propone:

$$U_{SM} = -\varrho_1 \text{sign}(\sigma(z)) \quad (3.56)$$

donde ϱ_1 es una ganancia positiva. Agregando la acción lineal del amortiguador magnetoreológico (3.42), el control por modos deslizantes integral se define:

$$\mathbf{U}_t = \mathbf{\Gamma} \mathbf{I}_{sm} (U_l + U_{SM}) \quad (3.57)$$

Tal que ϱ_1 satisface la desigualdad $|\varrho_1| > \frac{\|\rho + c_2(\Gamma_n - \Gamma_1)(\delta_z - \ddot{u}_g(t)) - c_2\Gamma_1 U_l - c_2\phi_1\|}{\|c_2\Gamma_1\|}$. La demostración correspondiente se puede encontrar más adelante en la sección 3.2.2.

En la figura 3.8 se visualiza el esquema general del control por modo deslizante integral basado en el error de posición en lazo cerrado ¹.

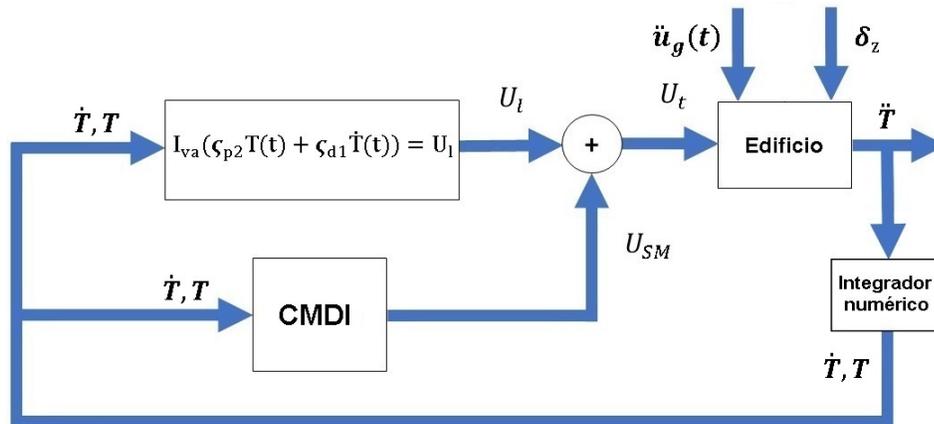


Figura 3.8: Esquema de control por modos deslizantes integral (CMDI).

3.2.2. Análisis de estabilidad de la superficie deslizante

Se verifica la estabilidad asintótica del control por modos deslizantes integral con diseño basado en error de posición (ver sección 3.2), empleando la función de Lyapunov:

$$V(\sigma) = \frac{1}{2} \sigma(z)^2 \quad (3.58)$$

¹La función del bloque integrador numérico se encuentra en la sección 3.1.4

tal que $V(0) = 0$, entonces su derivada es:

$$\dot{V} = \sigma \dot{\sigma} \quad (3.59)$$

Se tiene que $\dot{\sigma} = c_1 \dot{e} + c_2 \ddot{e} - c_3 e$, entonces se define $\ddot{e} = \dot{z}_{2,n} - \dot{z}_{2,1}$, por consiguiente:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \sigma [c_1 \dot{e} + c_2 \ddot{e} - c_3 e] \\ \dot{V} &= \sigma [c_1 (z_{2,n} - z_{2,1}) + c_2 (\dot{z}_{2,n} - \dot{z}_{2,1}) - c_3 (z_{1,n} - z_{1,1})] \end{aligned} \quad (3.60)$$

Al usar las variables (3.51) para definir:

$$\dot{z}_{2,n} = -\omega_n^2 z_{1,n} - 2\xi_n \omega_n z_{2,n} + \Gamma_n \delta_z - \Gamma_n \ddot{u}_g(t) \quad (3.61)$$

$$\dot{z}_{2,1} = -\omega_1^2 z_{1,1} - 2\xi_1 \omega_1 z_{2,1} + \Gamma_1 \delta_z - \Gamma_1 \ddot{u}_g(t) + \Gamma_1 U_l - \Gamma_1 (\varrho_1 \text{sign}(\sigma)) + \phi_1 \quad (3.62)$$

Luego al sustituir (3.61) y (3.62) en la ecuación (3.60) al simplificar los términos resulta:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \sigma [-(c_3 + c_2 \omega_n^2) z_{1,n} + (c_3 + c_2 \omega_1^2) z_{1,1} \\ &\quad + (c_1 - 2c_2 \xi_n \omega_n) z_{2,n} + (-c_1 + 2c_2 \xi_1 \omega_1) z_{2,1} \\ &\quad + c_2 (\Gamma_n - \Gamma_1) \delta_z - c_2 (\Gamma_n - \Gamma_1) \ddot{u}_g(t) + c_2 \varrho_1 \Gamma_1 \text{sign}(\sigma) - c_2 \Gamma_1 U_l - c_2 \phi_1] \end{aligned} \quad (3.63)$$

Definiendo $\rho = -(c_3 + c_2 \omega_n^2) z_{1,n} + (c_3 + c_2 \omega_1^2) z_{1,1} + (c_1 - 2c_2 \xi_n \omega_n) z_{2,n} + (-c_1 + 2c_2 \xi_1 \omega_1) z_{2,1}$, el cual representa el sistema en lazo cerrado.

$$\dot{V} = \sigma [\rho + c_2 (\Gamma_n - \Gamma_1) (\delta_z - \ddot{u}_g(t)) + c_2 \varrho_1 \Gamma_1 \text{sign}(\sigma) - c_2 \Gamma_1 U_l - c_2 \phi_1] \quad (3.64)$$

Para asegurar la estabilidad asintótica se debe cumplir que $\dot{V} < 0$, obteniendo los casos:

$$\begin{cases} \rho + c_2 (\Gamma_n - \Gamma_1) (\delta_z - \ddot{u}_g(t)) + c_2 \varrho_1 \Gamma_1 \text{sign}(\sigma) - c_2 \Gamma_1 U_l - c_2 \phi_1 < 0, & \sigma > 0 \\ \rho + c_2 (\Gamma_n - \Gamma_1) (\delta_z - \ddot{u}_g(t)) + c_2 \varrho_1 \Gamma_1 \text{sign}(\sigma) - c_2 \Gamma_1 U_l - c_2 \phi_1 > 0, & \sigma < 0 \end{cases}$$

Debido a que $\text{sign}(\sigma(z)) = \pm 1$, entonces por la definición de valor absoluto $\sigma(z) \text{sign}(\sigma(z)) = |\sigma(z)|$, se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \sigma [\rho + c_2 (\Gamma_n - \Gamma_1) (\delta_z - \ddot{u}_g(t)) - c_2 \Gamma_1 U_l - c_2 \phi_1] + c_2 \varrho_1 \Gamma_1 \sigma^T \text{sign}(\sigma) < 0 \\ \dot{V} &= \sigma [\rho + c_2 (\Gamma_n - \Gamma_1) (\delta_z - \ddot{u}_g(t)) - c_2 \Gamma_1 U_l - c_2 \phi_1] + c_2 \varrho_1 \Gamma_1 |\sigma^T| < 0 \end{aligned} \quad (3.65)$$

Se realiza la siguiente mayorización:

$$\sigma^T [\rho + c_2 (\Gamma_n - \Gamma_1) (\delta_z - \ddot{u}_g(t)) - c_2 \Gamma_1 U_l - c_2 \phi_1] < -c_2 \varrho_1 \Gamma_1 |\sigma| \quad (3.66)$$

Empleando la norma euclidiana en ambos extremos de (3.66) para despejar ϱ_1 , resulta:

$$\|c_2\varrho_1\Gamma_1|\sigma^T|\| > \|\sigma^T[\rho + c_2(\Gamma_n - \Gamma_1)(\delta_z - \ddot{u}_g(t)) - c_2\Gamma_1U_l - c_2\phi_1]\| \quad (3.67)$$

Usando las propiedades de norma, tal que:

$$|\varrho_1|\|c_2\Gamma_1|\sigma(z)|\| > \|\sigma^T[\rho + c_2(\Gamma_n - \Gamma_1)(\delta_z - \ddot{u}_g) - c_2\Gamma_1U_l - c_2\phi_1]\| \quad (3.68)$$

$$|\varrho_1| > \frac{\|\rho + c_2(\Gamma_n - \Gamma_1)(\delta_z - \ddot{u}_g(t)) - c_2\Gamma_1U_l - c_2\phi_1\|}{\|c_2\Gamma_1\|} \quad (3.69)$$

Sea \varkappa_0 un escalar definido por $\varkappa_0 = \frac{\|\rho + c_2(\Gamma_n - \Gamma_1)(\delta_z - \ddot{u}_g(t)) - c_2\Gamma_1U_l - c_2\phi_1\|}{\|c_2\Gamma_1\|}$.

Por lo tanto, si se cumple el diseño de $\varrho_1 > \varkappa_0 > 0$, implica que $\dot{V}(\sigma) < 0$, lo que garantiza la convergencia asintótica del control por modos deslizantes integral.

3.2.3. Validación numérica del control por modos deslizantes integral

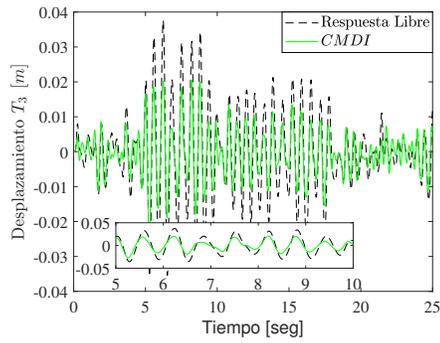
Se verifica el funcionamiento del *CMDI* de la ecuación (3.57) mediante simulación partiendo de los datos presentados en la sección 3.1.3. Los resultados obtenidos se pueden apreciar en la figura 3.9.

Los porcentajes de atenuación se ven en la tabla 3.4, el mejor resultado se obtiene en el primer piso con 74.6688 %, mientras el rendimiento va decreciendo en pisos superiores, como sucede con el quinto piso donde su nivel de atenuación es de 37.6397 %. En comparación con los resultados del controlador *CRAP* el cual tiene menor porcentaje de atenuación en el primer piso, pero supera al *CMDI* en los pisos superiores. En cuanto a la fuerza ejercida por el amortiguador magnetoreológico es de 231.3094 N, la cual es menor a la generada con el controlador *CRAP*.

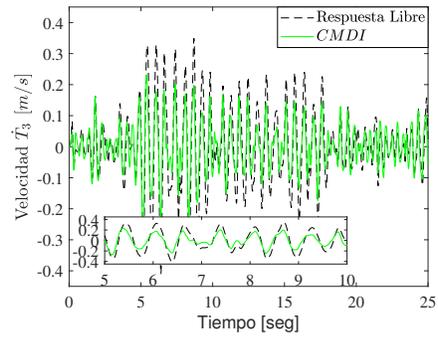
Piso	1 _{ro}	2 _{do}	3 _{ro}	4 _{to}	5 _{to}
Atenuación %	74.6688	53.0390	45.6200	40.8850	37.6397
CIEC	0.3503	4.1191	12.6324	23.1456	30.7296

Tabla 3.4: Porcentajes de atenuación e índice del desempeño del controlador *CMDI*.

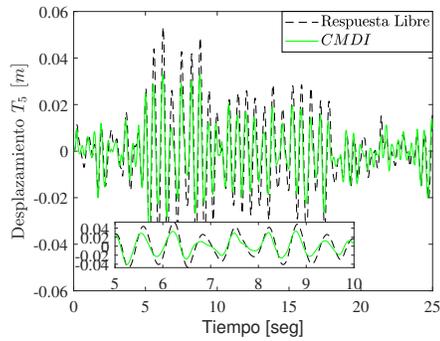
Parte de los resultados obtenidos de la simulación son los valores del CIEC calculados como se indicó la sección 3.1.5.1, estos se enlistan en la tabla 3.4. Los valores por piso del CIEC correspondientes al *CMDI* son mayores a los pisos ajenos al primero en comparación con los obtenidos por el controlador *CRAP*.



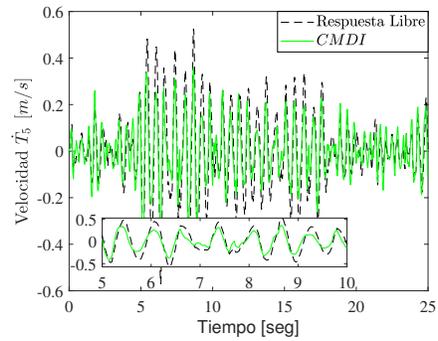
(a) Posición del tercer nivel.



(b) Velocidad del tercer nivel.



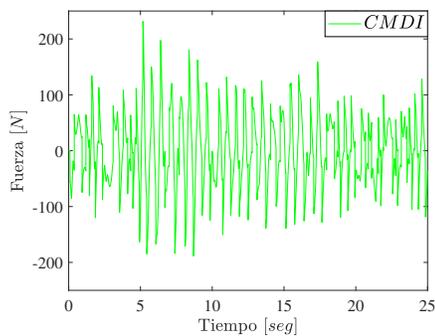
(c) Posición del quinto nivel.



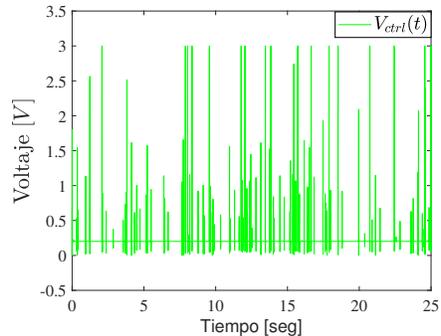
(d) Velocidad del quinto nivel.

Figura 3.9: Respuesta del edificio usando el controlador *CMDI*.

Para determinar el voltaje de control V_{ctrl} que se suministra al actuador AMR, se usa la equivalencia (2.108) junto con la ecuación (2.109). Las señales de voltaje y fuerza del amortiguador estimada con controlador U_t definido por la ecuación (3.57) se aprecian en la figura 3.10.



(a) Fuerza del actuador.



(b) Voltaje de control.

Figura 3.10: Señales de fuerza y voltaje usando el controlador *CMDI*.

3.3. Control por rechazo activo de perturbaciones con modos deslizantes integral

En este estudio comparativo se plantea combinar las estrategias de control por rechazo activo de perturbaciones y control por modos deslizantes integral. Con la premisa de que el control por modos deslizantes compensará las perturbaciones remanentes derivado del *CRAP* debido a una deficiente estimación de las perturbaciones como consecuencia de una mala selección de los parámetros del OPIG. Esto puede significar un avance en el control semiactivo en estructuras.

Suposición 5.

- i. Los puntos i, ii, y iii de la suposición 2 se satisfacen aquí también.*
- ii. Existe un error de estimación de la perturbación remanente del control por rechazo activo de perturbaciones.*
- iii. Se propone agregar en paralelo un control por modos deslizantes integral diseñado como se explica en la sección 3.2, para cancelar las perturbaciones remanentes del controlador *CRAP* y robustecer al mismo.*

Sea el control combinado *CRAP* + *CMDI*, tal que:

$$\mathbf{U}_t = \mathbf{U}_{\text{crap}} + \mathbf{U}_{\text{cmdi}} \quad (3.70)$$

Para definir los términos en la ecuación (3.70), primero se selecciona el controlador *CRAP* a partir de la expresión (3.33) tal que $\mathbf{U}_{\text{crap}} = \mathbf{\Gamma I}_{\text{MR}} \mathbf{U}_{\text{PD}} - \hat{\mathbf{z}}_e$, ahora sigue el control *CMDI* a partir de la ecuación (3.56) tal que $\mathbf{U}_{\text{cmdi}} = -\mathbf{\Gamma I}_{\text{MR}} \rho_1 \text{sign}(\sigma)$.

Posteriormente, se expresa la ley de control \mathbf{U}_t planteada en la ecuación (3.70) sobre el sistema abreviado (3.21), resultando:

$$\ddot{\mathbf{T}}(t) = \mathbf{U}_{\text{crap}} + \mathbf{U}_{\text{cmdi}} + \zeta(t) \quad (3.71)$$

A continuación se desarrolla $\zeta(t)$ con las definiciones en (3.22), lo que produce:

$$\ddot{\mathbf{T}}(t) = \mathbf{U}_{\text{crap}} + \mathbf{U}_{\text{cmdi}} - 2\mathbf{\Xi}\mathbf{\Omega}\dot{\mathbf{T}}(t) - \mathbf{\Omega}^2\mathbf{T}(t) + \mathbf{\Gamma I}_{\text{WF}}\delta_z - \mathbf{\Gamma I}_{\text{CF}}\ddot{u}_g(t) + \phi \quad (3.72)$$

Luego se desarrolla \mathbf{U}_{crap} usando (3.33), resultando:

$$\ddot{\mathbf{T}}(t) + \mathbf{K}_P\mathbf{T}(t) + \mathbf{K}_D\dot{\mathbf{T}}(t) = \mathbf{U}_{\text{cmdi}} - \hat{\mathbf{z}}_e + \zeta(t) \quad (3.73)$$

donde las matrices compensadas $\mathbf{K}_D = (\mathbf{\Gamma I}_{\text{MR}}\varsigma_{d_1} + 2\mathbf{\Xi}\mathbf{\Omega}) > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $\mathbf{K}_P = (\mathbf{\Gamma I}_{\text{MR}}\varsigma_{p_2} + \mathbf{\Omega}^2) > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, mientras las perturbaciones son agrupadas en el término $\zeta(t)$. La estrategia *CRAP* agrega

amortiguamiento para aislarlo de las perturbaciones y con ello minimizar los desplazamientos laterales de acuerdo con la ecuación (3.73).

Por el inciso *ii*, de la suposición 5 el error de estimación de la perturbación satisface $\zeta(t) - \hat{\mathbf{z}}_e \neq 0$, por consiguiente se agrega la acción del control por modos deslizantes integral $\mathbf{U}_{cmdi} = -\mathbf{\Gamma I}_{MR} \rho_1 \text{sign}(\sigma)$ desarrollando en (3.73), tal que:

$$\ddot{\mathbf{T}}(t) + \mathbf{K}_D \dot{\mathbf{T}}(t) + \mathbf{K}_P \mathbf{T}(t) = \zeta(t) - \hat{\mathbf{z}}_e - \mathbf{\Gamma I}_{MR} \rho_1 \text{sign}(\sigma) \quad (3.74)$$

En conclusión las perturbaciones remanentes son canceladas por la acción del control por modos deslizantes integral. En la figura 3.11 se visualiza la configuración del control por rechazo activo de perturbaciones más el control por modos deslizante integral basado en error estimado de la posición en lazo cerrado ².

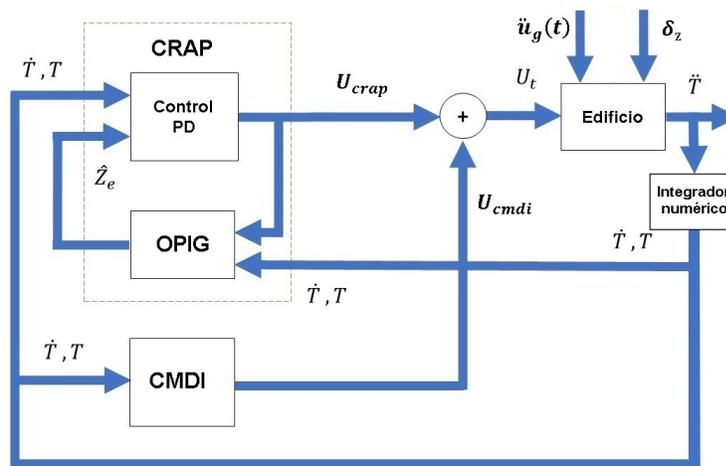


Figura 3.11: Esquema de control $CRAP + CMDI$.

3.3.1. Validación numérica del control por rechazo activo de perturbaciones con modos deslizantes integral

Para verificar el funcionamiento del controlador combinado $CRAP + CMDI$ se usa la información de la estructura de ensayos de la sección 3.1.3, al igual que las señales de excitación descritas en la misma sección.

La respuesta del edificio compensada se puede ver en la figura 3.12, los porcentajes de atenuación son 50.1316 % para el primer nivel y 42.7285 % para el quinto nivel, en comparación con la respuesta libre del edificio bajo perturbación del sismo y efecto del viento.

²La función del bloque “Integrador numérico” se encuentra en el sección 3.1.4

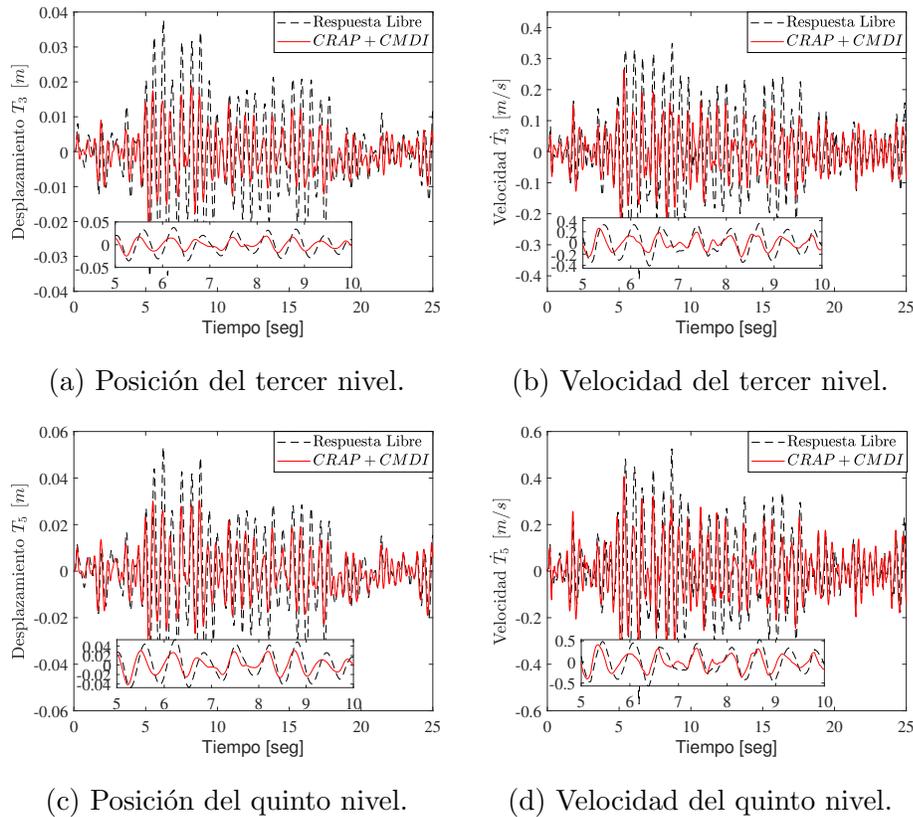


Figura 3.12: Respuesta del edificio usando el controlador $CRAP + CMDI$.

La estrategia $CRAP + CMDI$ atenúa un poco más así lo refleja el CIEC sobre las técnicas originales y la fuerza estimada del actuador es 306.0620 N , resultando levemente menor que el $CRAP$ pero mayor que el $CMDI$.

Piso	1_{ro}	2_{do}	3_{ro}	4_{to}	5_{to}
Atenuación %	50.1316	58.0763	49.9581	46.5109	42.7285
CIEC	0.9055	2.8860	9.9351	19.8141	27.2907

Tabla 3.5: Porcentajes de atenuación e índice de desempeño del controlador $CRAP + CMDI$.

Las señales de fuerza requerida con el controlador combinado (3.70) y su voltaje de control se visualizan en la figura 3.13. Los resultados del CIEC para el $CRAP + CMDI$ aparecen en la tabla 3.5.

3.4. Discusión

Para comparar el rendimiento de los controladores se evalúan los porcentajes de atenuación. En la tabla 3.6 se resumen los resultados, siendo el controlador $CRAP + CMDI$ el que presenta el mejor desempeño,

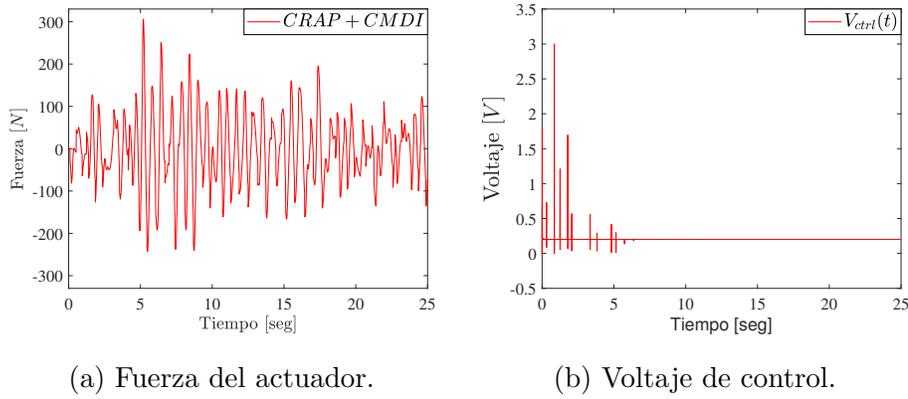


Figura 3.13: Señales de fuerza y voltaje requeridas por el $CRAP + CMDI$.

con excepción del primer nivel. Significa que el control $CRAP$ pierde eficiencia debido al error en la estimación de la perturbación, y que al diseñar el controlador $CMDI$ con la consideración del error de posición relativo entre el primer y último nivel provee la información faltante sobre el comportamiento de la estructura, además de que el control proporcional derivativo lo robustece.

Piso	1_{ro}	2_{do}	3_{ro}	4_{to}	5_{to}
$CMDI$	74.6688	53.0390	45.6200	40.8850	37.6397
$CRAP$	58.2164	54.7475	47.6835	45.1102	43.2649
$CRAP + CMDI$	50.1316	58.0763	49.9581	46.5109	42.7285

Tabla 3.6: Porcentajes de atenuación del desplazamiento lateral por estrategia de control.

Estrategia	$CMDI$	$CRAP$	$CRAP + CMDI$
Fuerza N	231.3094	274.9265	306.0620

Tabla 3.7: Fuerza del amortiguador magnetoreológico por estrategia de control.

Piso	1_{ro}	2_{do}	3_{ro}	4_{to}	5_{to}
$CMDI$	0.3503	4.1191	12.6324	23.1456	30.7296
$CRAP$	0.5912	2.8626	9.9354	19.4392	26.5773
$CRAP + CMDI$	0.9055	2.8860	9.9351	19.8141	27.2907

Tabla 3.8: Índice de desempeño por el criterio de la integral del error cuadrático.

Al combinar las estrategias $CRAP + CMDI$, el controlador mejora su desempeño al reducir los desplazamientos en la misma magnitud en todos los pisos de manera uniforme. Sin embargo, aumenta su

complejidad en el diseño por la cantidad de parámetros a considerar, aún así sigue siendo un controlador viable por la relación de fuerza máxima empleada y atenuación efectiva, lo que se refleja en el índice de desempeño al resultar con los valores más pequeños de CIEC (ver tabla 3.8).

Capítulo 4

Control Continuo con Observadores

4.1. Observador algebraico

Tomando en cuenta que en los edificios no se pueden medir la velocidad y el desplazamiento debido a que no existe un marco de referencia inercial fijo, es por ello que se utilizan acelerómetros para realizar mediciones de la aceleración relativa del edificio. Una manera de obtener la información no disponible es a través de observadores de estados.

En esta tesis se usa un observador algebraico cuya ventaja es que, reconstruye los estados desconocidos sin necesidad de recurrir a un modelo matemático representativo del edificio. La metodología propuesta emplea únicamente mediciones de aceleración, y con base en un desarrollo puramente algebraico permite estimar las señales de desplazamiento y velocidad [26].

Se debe tener presente que los parámetros del edificio son previamente conocidos o adquiridos mediante algún método de identificación paramétrica, como en [35], [36], donde los autores proponen un sistema de identificación de parámetros a partir de señales de aceleración empleando filtros integrales lineales.

Partiendo de la ecuación diferencial que describe la dinámica del sistema (3.16) se plantea el caso escalar siguiente:

$$\ddot{T}_i(t) + 2\xi_i\omega_i\dot{T}_i(t) + \omega_i^2T_i(t) = \Gamma_i\delta_z - \Gamma_i\ddot{u}_g(t) + \Gamma_iF_{MRi} \quad (4.1)$$

donde Γ_iF_{MRi} es el término de control, Γ_i es el factor de participación modal, F_{MRi} es la fuerza generada por actuador en una ubicación de la estructura, con $i = \{1, \dots, n\}$ para la n -ésima forma modal.

Reescribiendo (4.1) a partir de la salida, resulta:

$$\begin{aligned} \ddot{T}_i(t) &= -2\xi_i\omega_i\dot{T}_i(t) - \omega_i^2T_i(t) + u_i(t) \\ y_i(t) &= \dot{T}_i \end{aligned} \quad (4.2)$$

El término $y_i(t)$ describe la salida del sistema que es medible, $u_i(t) = -\Gamma_i(\ddot{u}_g(t) - \delta_z) + \Gamma_i F_{MRi}$ representa la entrada del sistema y definiendo $\delta_i(t) = y_i(t) - u_i(t)$ podemos replantear (4.2) como sigue:

$$\begin{aligned}\delta_i(t) &= -2\xi_i\omega_i\dot{T}_i(t) - \omega_i^2 T_i(t) \\ y_i(t) &= \ddot{T}_i\end{aligned}\quad (4.3)$$

Ahora, se desea estimar los estados $\dot{T}_i(t)$ y $T_i(t)$ a partir de las variables medibles. Para ello se deriva $\delta_i(t)$ respecto al tiempo, tal que:

$$\dot{\delta}_i(t) = -2\xi_i\omega_i\ddot{T}_i(t) - \omega_i^2\dot{T}_i(t) \quad (4.4)$$

Suponiendo que el término $-\omega_i^2$ es invertible, se despeja $\dot{T}_i(t)$ de la ecuación (4.4) para obtener la expresión que permite estimar la velocidad:

$$\dot{T}_i(t) = [-\omega_i^2]^{-1}[\dot{\delta}_i + 2\xi_i\omega_i\ddot{T}_i(t)] = [-\omega_i^2]^{-1}[\dot{\delta}_i + 2\xi_i\omega_i y_i(t)] \quad (4.5)$$

Luego se despeja $T_i(t)$ de la ecuación (4.3):

$$T_i(t) = [-\omega_i^2]^{-1}[\delta_i + 2\xi_i\omega_i\dot{T}_i] \quad (4.6)$$

y sustituyendo $\dot{T}_i(t)$ en (4.6) se obtiene la expresión que permite calcular el desplazamiento:

$$T_i(t) = [-\omega_i^2]^{-1}[\delta_i + 2\xi_i\omega_i[(-\omega_i^2)^{-1}(\dot{\delta}_i + 2\xi_i\omega_i y_i(t))]] \quad (4.7)$$

Sin embargo, el sistema es observable si ω^2 es invertible. Además, las estimaciones pueden no ser satisfactorias si las mediciones no son suficientemente suaves. Se sabe también que todos esos métodos son muy sensibles al ruido de medición y las incertidumbres. Por ello, a continuación se proporciona un algoritmo basado únicamente en operaciones integrales de medida para superar estos problemas [26].

Para realizar la estimación de los estados se requiere construir un conjunto de variables en tiempo a partir de las integración de la entrada $u_i(t)$ y salida $y_i(t)$, las cuales se consideran medibles. Para ello, primero se multiplica la salida $y_i(t)$ por las funciones t^2 y t^3 y posteriormente se integra con respecto al tiempo τ obteniéndose las siguientes dos expresiones:

$$\begin{aligned}F_1(t, y) &\triangleq \int_0^t \tau^2 y_i(\tau) d\tau = \int_0^t \tau^2 \ddot{T}_i(\tau) d\tau = t^2 \dot{T}_i(t) - 2 \int_0^t \tau \dot{T}_i(\tau) d\tau \\ F_1(t, y) &= t^2 \dot{T}_i(t) - 2tT_i(t) + 2 \int_0^t T_i(\tau) d\tau\end{aligned}\quad (4.8)$$

y

$$F_2(t, y) \triangleq \int_0^t \tau^3 y_i(\tau) d\tau = \int_0^t \tau^3 \ddot{T}_i(\tau) d\tau = t^3 \dot{T}_i(t) - 3t^2 T_i(t) + 6 \int_0^t \tau T_i(\tau) d\tau$$

$$F_2(t, y) = t^3 \dot{T}_i(t) - 3t^2 T_i(t) + 6 \int_0^t \tau T_i(\tau) d\tau \quad (4.9)$$

Una tercera ecuación es obtenida $F_3(t, z)$ y se calcula multiplicando la entrada del sistema $\delta_i(t)$ por t e integrando con respecto al tiempo, tal que:

$$F_3(t, \delta) \triangleq \int_0^t \tau \delta_i(\tau) d\tau$$

$$F_3(t, \delta) = (-2\xi_i \omega_i)(tT_i(t) - \int_0^t T_i(\tau) d\tau) - \omega_i^2 \int_0^t T_i(\tau) d\tau \quad (4.10)$$

Para obtener la cuarta ecuación del observador se selecciona (4.4) y se multiplica por la función t , posteriormente se integra como sigue a continuación:

$$F_4(t, \delta, y) \triangleq \int_0^t \int_0^{\tau_1} \tau_2 \dot{\delta}_i(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 = (-2\xi_i \omega_i) \int_0^t \int_0^{\tau_1} \tau_2 y_i(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 - \omega_i^2 \int_0^t \int_0^{\tau_1} \tau_2 \dot{T}_i d\tau_2 d\tau_1$$

$$F_4(t, \delta, y) = \int_0^t \int_0^{\tau_1} \tau_2 \dot{\delta}_i(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 + (2\xi_i \omega_i) \int_0^t \int_0^{\tau_1} \tau_2 y_i(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 = -\omega_i^2 \int_0^t \int_0^{\tau_1} \tau_2 \dot{T}_i d\tau_2 d\tau_1 \quad (4.11)$$

Se igualan los extremos de (4.11) y posteriormente se resuelve la integral para obtener:

$$F_4(t, \delta, y) = -\omega_i^2 \int_0^t \int_0^{\tau_1} \tau_2 \dot{T}_i(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1$$

$$F_4(t, \delta, y) = -\omega_i^2 \int_0^t \tau_1 T_i(\tau_1) d\tau_1 + \omega_i^2 \int_0^t \int_0^{\tau_1} T_i(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 \quad (4.12)$$

Posteriormente se integran por partes cada expresión de (4.12), y se obtiene:

$$\int_0^t \tau_1 T_i(\tau_1) d\tau_1 = t \int_0^t T_i(\tau_1) d\tau_1 - \int_0^t \int_0^{\tau_1} T_i(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 \quad (4.13)$$

$$\int_0^t \int_0^{\tau_1} T_i(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 = t \int_0^t T_i(\tau_1) d\tau_1 - \int_0^t \tau_1 T_i(\tau_1) d\tau_1 \quad (4.14)$$

Al remplazar los resultados de la integrales (4.13) y (4.14) en (4.12), se obtiene:

$$F_4(t, \delta, y) = -2\omega_i^2 \int_0^t \tau_1 T_i(\tau_1) d\tau_1 + \omega_i^2 t \int_0^t T_i(\tau_1) d\tau_1 \quad (4.15)$$

A partir del conjunto de ecuaciones (4.8), (4.9), (4.10) y (4.15) se obtienen cuatro variables desconocidas definidas en el siguiente vector $\nu(t)$:

$$\nu(t) = \begin{bmatrix} \dot{T}_i(t) \\ \hat{T}_i(t) \\ \int_0^t T_i(\tau) d\tau \\ \int_0^t \tau T_i(\tau) d\tau \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

Además, se definen la matriz de parámetros $P(t)$ de la siguiente forma:

$$P(t) = \begin{bmatrix} t^2 & -2t & 2 & 0 \\ t^3 & -3t^2 & 0 & 6 \\ 0 & -2\xi_i\omega_i t & 2\xi_i\omega_i & -\omega_i^2 \\ 0 & 0 & \omega_i^2 t & -2\omega_i^2 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

y el sistema de ecuaciones lineales se representa:

$$P(t)\nu(t) = \mu(t) \quad (4.18)$$

donde $\mu(t)$ es el vector de variables medibles:

$$\mu(t) = \begin{bmatrix} F_1(t, y) \\ F_2(t, y) \\ F_3(t, \delta) \\ F_4(t, \delta, y) \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Si $\det(P(t)) \neq 0$ entonces existe un $P(t)^{-1}$ para un $t > 0$, con $\omega_i^2 \neq 0$ tal que

$$\nu(t) = P(t)^{-1}\mu(t) \quad (4.20)$$

en caso contrario, el sistema es no observable cuando $\omega_i^2 = 0$. Entonces, si se cumplen las condiciones antes señaladas, la ecuación (4.20) es nuestro observador algebraico y los estados estimados $\hat{T}_i(t) = \nu_{1,i}(t)$ y $\hat{T}_i(t) = \nu_{2,i}(t)$. La demostración del observador se puede consultar en [26].

Para el caso multidimensional con n número de estados se hace la siguiente afirmación: Dado que los valores frecuenciales para la n -ésima forma modal están definidos por $2\xi_i\omega_i$ y ω_i^2 , los cuales son parámetros del observador algebraico, entonces la matriz $P_i(t)$ tiene la misma estructura para cada vector $\mu_i(t)$ ya que representa el canal de señales medibles, generando un conjunto de señales deseadas representadas por el vector $\nu_i(t)$ con $i = \{1, 2, \dots, n\}$, es decir:

$$\nu = \begin{bmatrix} \nu_1(t) & \nu_2(t) & \dots & \nu_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1(t)^{-1}\mu_1(t) & P_2(t)^{-1}\mu_2(t) & \dots & P_n(t)^{-1}\mu_n(t) \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

donde cada matriz $P_i(t)^{-1} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ y los n vectores columna $\mu_i \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$, resultando en una matriz $\nu \in \mathbb{R}^{4 \times n}$.

Para verificar el desempeño del observador algebraico estudiado anteriormente, se realizan pruebas en simulación numérica con el modelo (4.22) sin control, y sometido a una acción sísmica, que corresponde al registro del sismo de septiembre de 1985 en la componente Norte Sur, como se indicó anteriormente en la sección 3.1.3, figura 3.3.

$$\ddot{\mathbf{T}}(t) + \mathbf{2}\Xi\Omega\dot{\mathbf{T}}(t) + \Omega^2\mathbf{T}(t) = -\mathbf{\Pi}\mathbf{I}_{\mathbf{CF}}\ddot{u}_g(t) \quad (4.22)$$

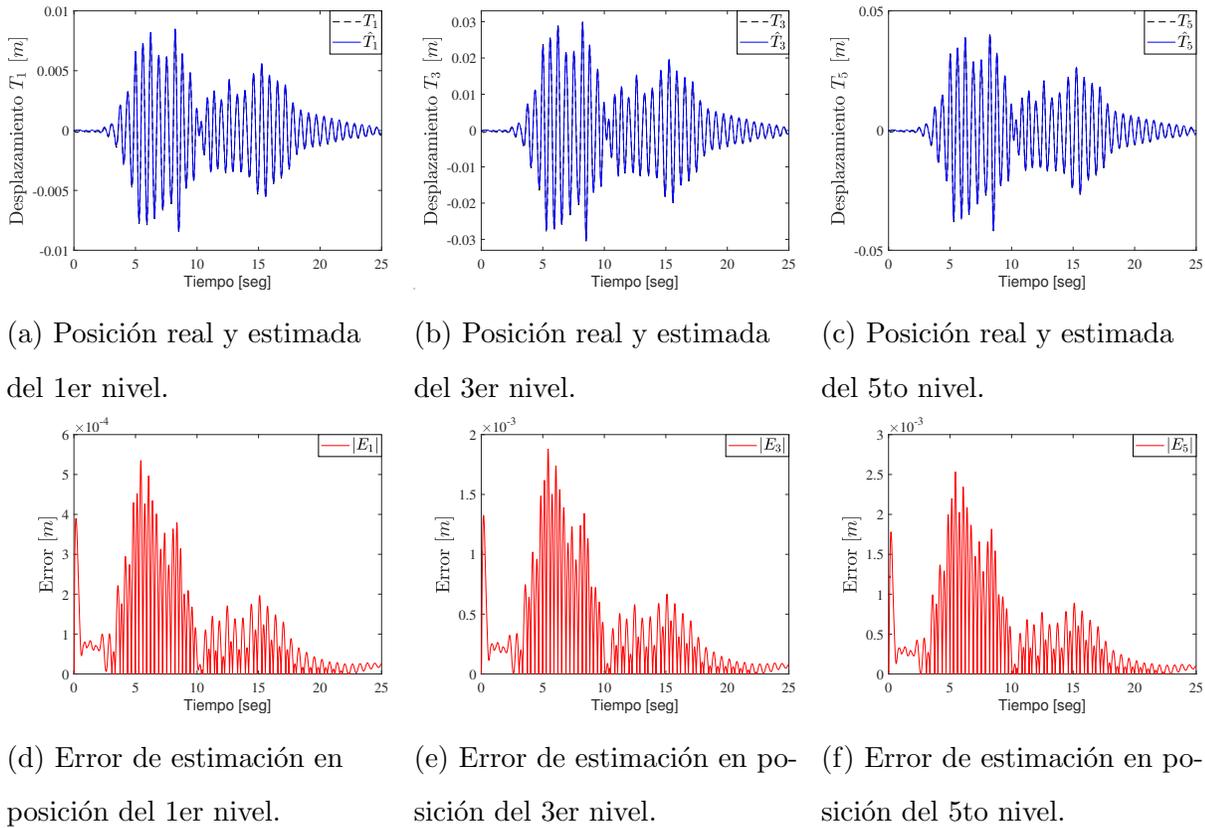


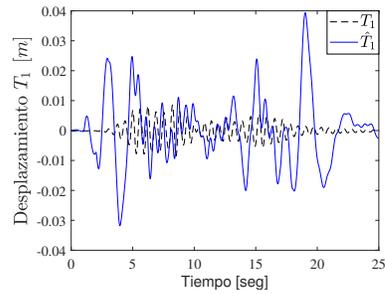
Figura 4.1: Gráficas de la posición

Las gráficas de comparación entre los estados de posición estimados y reales se aprecian la figura 4.1. También se incluyen las gráficas del error cuadrático medio de la estimación.

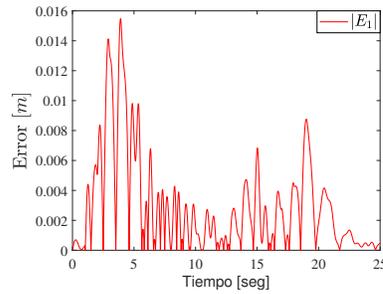
Se nota en la figura 4.1 el error de observación existente es muy pequeño, su ponderación está en el orden de milésimas $1 \times 10^{-3} m$ y decae asintóticamente tal que $t \rightarrow \infty$.

A continuación se evalúa la respuesta del estimador algebraico bajo la hipótesis de ruido de medición presente en alguno de los instrumentos. Para ello, se introduce en la simulación del modelo (4.22) una fuente de ruido blanco ajustado a una frecuencia de $1 Hz$ y una potencia de salida de $0.15 dB/Hz$.

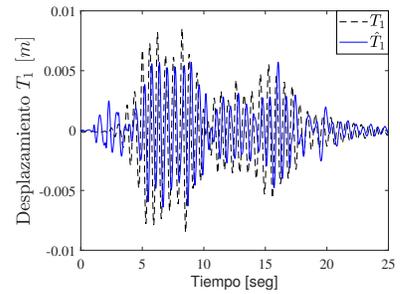
El ruido de medición produce en los estados estimados por el observador algebraico el efecto de deriva, lo que ocasiona que no converjan como en el caso sin ruido de medición, esto era de esperarse porque al integrar el ruido se incrementa su valor. Se puede corregir el error de estimación con la colocación de filtros y la adecuada selección de las frecuencias de corte, esto se puede ver en la figura 4.2. Para este caso se implementó un filtro rechaza banda con frecuencias de corte 0.05 y $15 Hz$, para eliminar el ruido de medición.



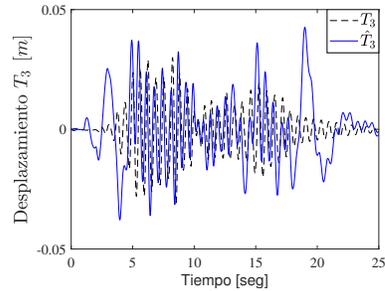
(a) Posición real y estimada del primer nivel con ruido.



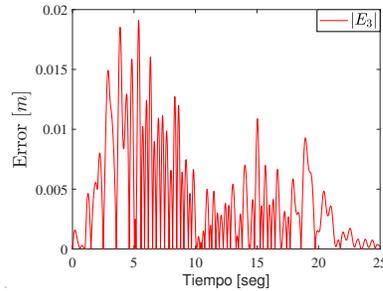
(b) Error de estimación en posición del primer nivel.



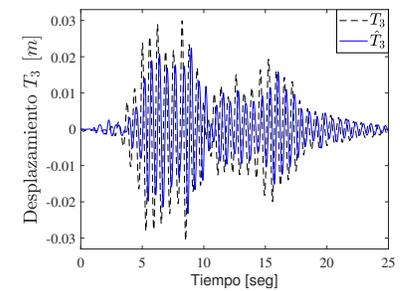
(c) Posición real y estimada del primer nivel con filtro.



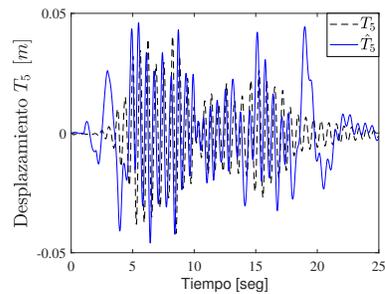
(d) Posición real y estimada del tercer nivel con ruido.



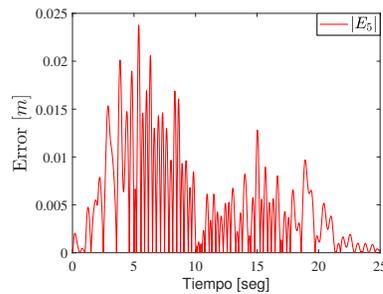
(e) Error de estimación en posición del tercer nivel.



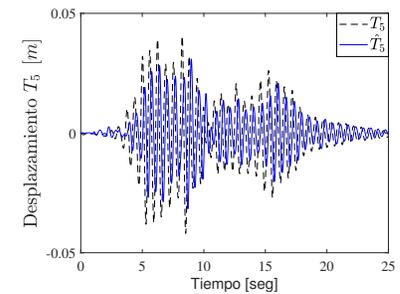
(f) Posición real y estimada del tercer nivel con filtro.



(g) Posición real y estimada del quinto nivel con ruido.



(h) Error de estimación posición del quinto nivel.



(i) Posición real y estimada del quinto nivel con filtro.

Figura 4.2: Gráficas de la posición con ruido de medición y corrección con filtro.

4.2. Control por rechazo activo de perturbaciones con modos deslizantes integral con observador algebraico

En esta sección se verifica el funcionamiento del controlador formado por el control por rechazo activo de perturbaciones más control por modos deslizantes integral y se le añade el observador algebraico ($CRAP + CMDI + OA$), éste último para estimar los estados de posición y velocidad del edificio, a diferencia de los trabajos de Álvarez-Icaza donde usan integradores numéricos [31], [32]. La simulación se realiza con la información de la estructura de pruebas y señales de excitación de las sección 3.1.3.

La respuesta del edificio se visualiza en la figura 4.3, donde es posible apreciar la disminución en los desplazamientos laterales. Los porcentajes de atenuación por nivel del edificio se presentan en la tabla 4.1, si se hace una comparación con el control $CRAP + CMDI$ sin observador, notar que el primer piso pierde rendimiento con 44.0826 %, pero los niveles superiores mantienen su porcentaje de atenuación presentados en la sección 3.3, por lo que su índice de desempeño es semejante de acuerdo a la tabla 3.5.

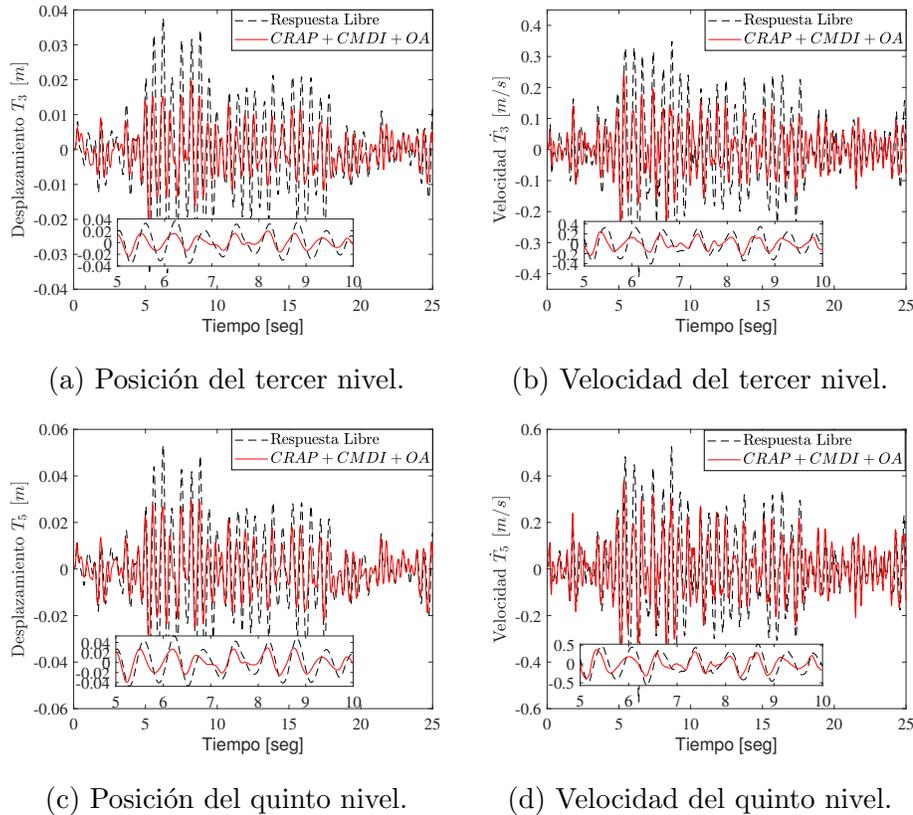


Figura 4.3: Respuesta del edificio usando el controlador $CRAP + CMDI + OA$.

Piso	1_{ro}	2_{do}	3_{ro}	4_{to}	5_{to}
Atenuación %	44.0826	54.8127	47.8005	44.9516	44.7598
CIEC	1.0866	2.7812	9.3939	18.6775	25.7439

Tabla 4.1: Porcentajes de atenuación e índice de desempeño del compensado por el $CRAP + CMDI + OA$.

La fuerza máxima generada por el amortiguador magnetoreológico es 299.5993 N , siendo suficiente para reducir los desplazamientos laterales. Las señales de fuerza y voltaje de control del amortiguador magnetoreológico se visualizan en la figura 4.4.

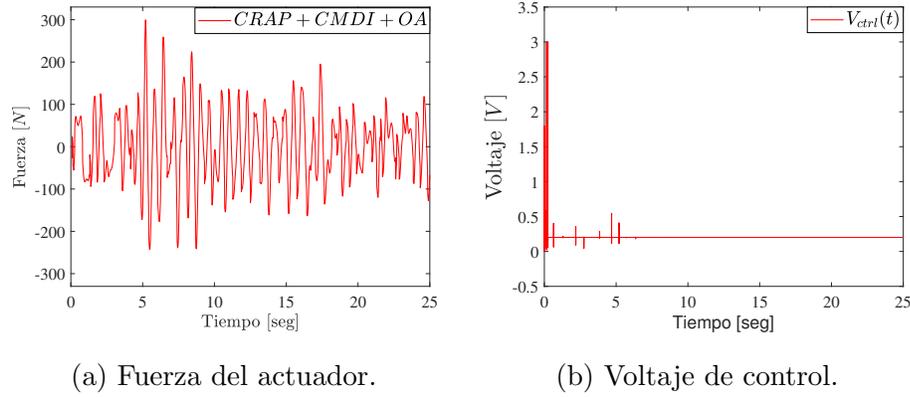


Figura 4.4: Señales de fuerza y voltaje usando el controlador $CRAP + CMDI + OA$.

En esta sección se analiza el comportamiento del edificio en lazo cerrado bajo la presencia de ruido de medición. Se analizan los efectos del ruido en el desempeño del controlador combinado con el observador algebraico $CRAP + CMDI + OA$. Para esto se emplea una fuente de ruido blanco con potencia de salida $0.15 \text{ dB}/\text{Hz}$ a una frecuencia de 1 Hz .

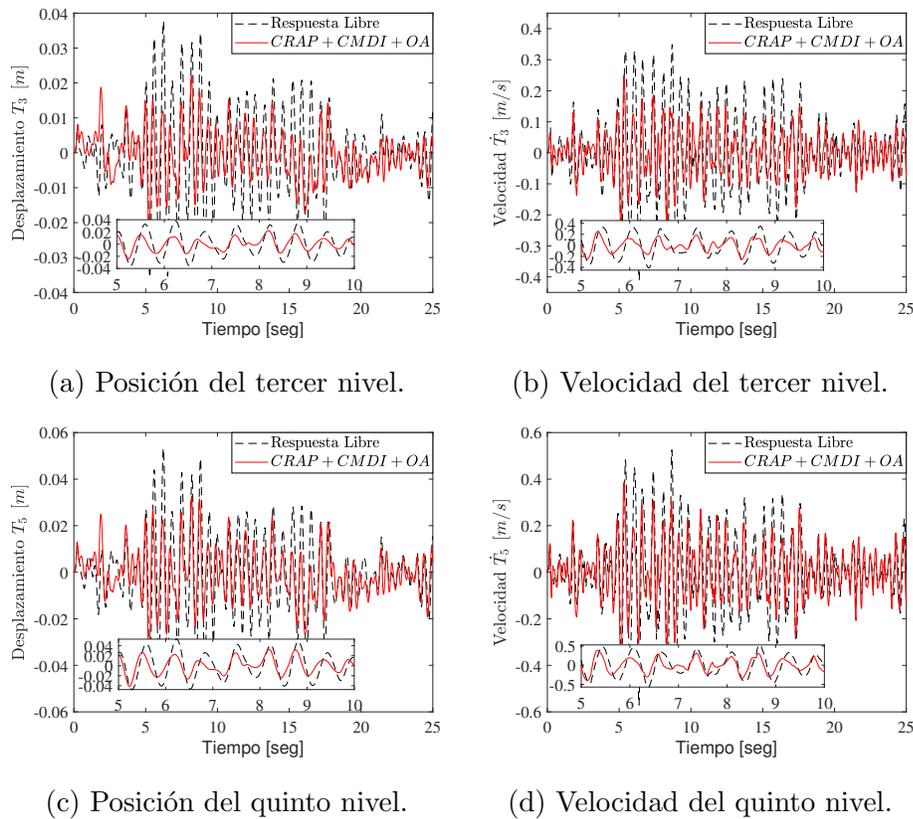


Figura 4.5: Respuesta del edificio usando el controlador $CRAP + CMDI + OA$ con ruido de medición.

Las señales del comportamiento estructural con el controlador $CRAP + CMDI + OA$ bajo efecto del

Piso	1 _{ro}	2 _{do}	3 _{ro}	4 _{to}	5 _{to}
Atenuación %	31.1585	48.2284	41.5066	38.7911	38.7498
CIEC	1.7349	4.2757	12.1029	22.4766	30.1130

Tabla 4.2: Porcentajes de atenuación e índice de desempeño del controlador $CRAP + CMDI + OA$ con ruido de medición.

ruido de medición se presentan en la figura 4.5. El porcentaje de atenuación es levemente menor como se aprecia en la tabla 4.2 comparando contra el caso sin ruido (ver tabla 4.1).

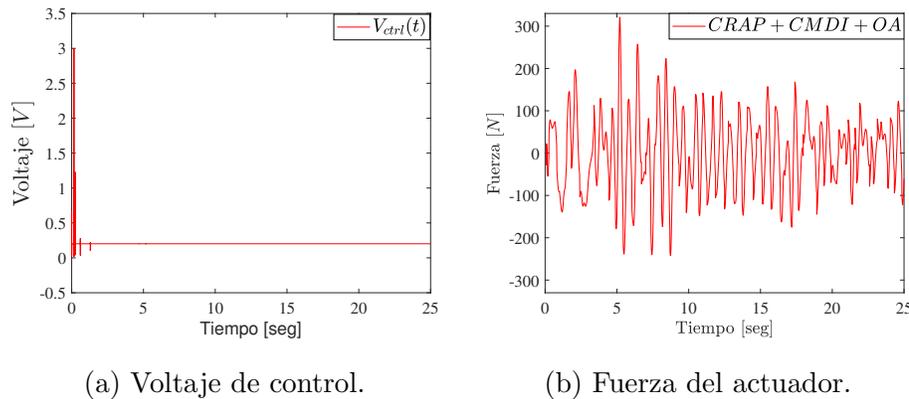


Figura 4.6: Señales del amortiguador magnetoreológico usando el controlador $CRAP + CMDI + OA$ con ruido de medición.

Se calculan los valores de los índices de desempeño los cuales se muestran en la tabla 4.2, estos son mayores en comparación con la tabla 4.1. La fuerza usada por el actuador fue 321.0568 N , las gráficas de voltaje y fuerza del actuador se presentan en la figura 4.6.

4.3. Discusión

En este apartado se presenta una comparación de los controladores vistos en el capítulo 3 puestos a prueba con una señal de ruido de medición para analizar su desempeño. También, se consideran los resultados de la sección 4.2 sobre el controlador $CRAP + CMDI + OA$. Los sistemas en lazo cerrado son evaluados con la misma fuente de ruido blanco ajustada a potencia de salida de 0.15 dB/Hz y a una frecuencia de 1 Hz .

Los resultados de los controladores del capítulo 3 afectados por ruido se pueden ver en las figuras 4.7, 4.8 y 4.9. Este fenómeno repercute directamente en los porcentajes de atenuación como se puede ver en

la tabla 4.3. De estos resultados el controlador combinado $CRAP + CMDI$ tienen el mejor desempeño general solo superado en el primer piso por las estrategias originales.

En lo que se refiere al índice de desempeño el mejor resultado lo presenta el controlador $CRAP + CMDI$ (ver tabla 4.5). Para obtener estos resultados la estrategia $CRAP + CMDI$ ejerce un esfuerzo de $325.5877 N$ (ver tabla 4.4), siendo el control que más fuerza usa.

El ruido de medición es un fenómeno que se presenta en casi todos los acelerómetros que son los dispositivos para adquirir la información de todo tipo de estructuras como se muestra en la sección 3.1.4. En consecuencia la presencia del ruido de medición se tiene que considerar en el diseño del controlador. Con base en los resultados analizados anteriormente la estrategia que mantiene su desempeño a pesar del ruido es el controlador combinado $CRAP + CMDI$ siendo favorecido por el CIEC, además mantiene una buena relación entre la fuerza requerida y el porcentaje de atenuación.

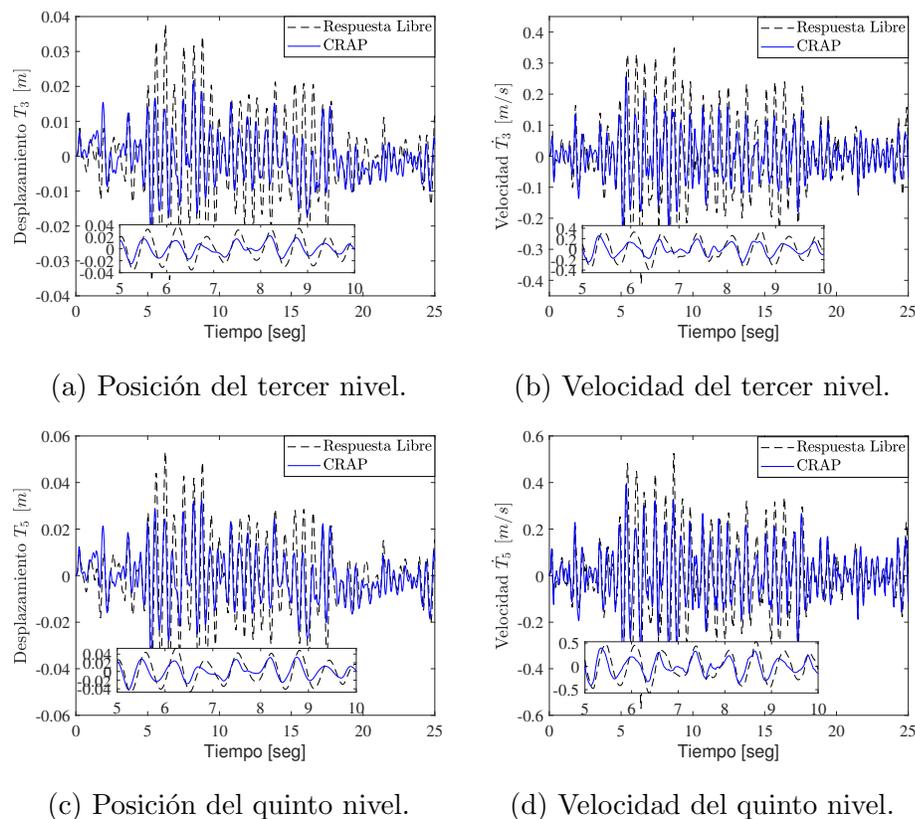


Figura 4.7: Respuesta del edificio usando el controlador $CRAP$ con ruido de medición.

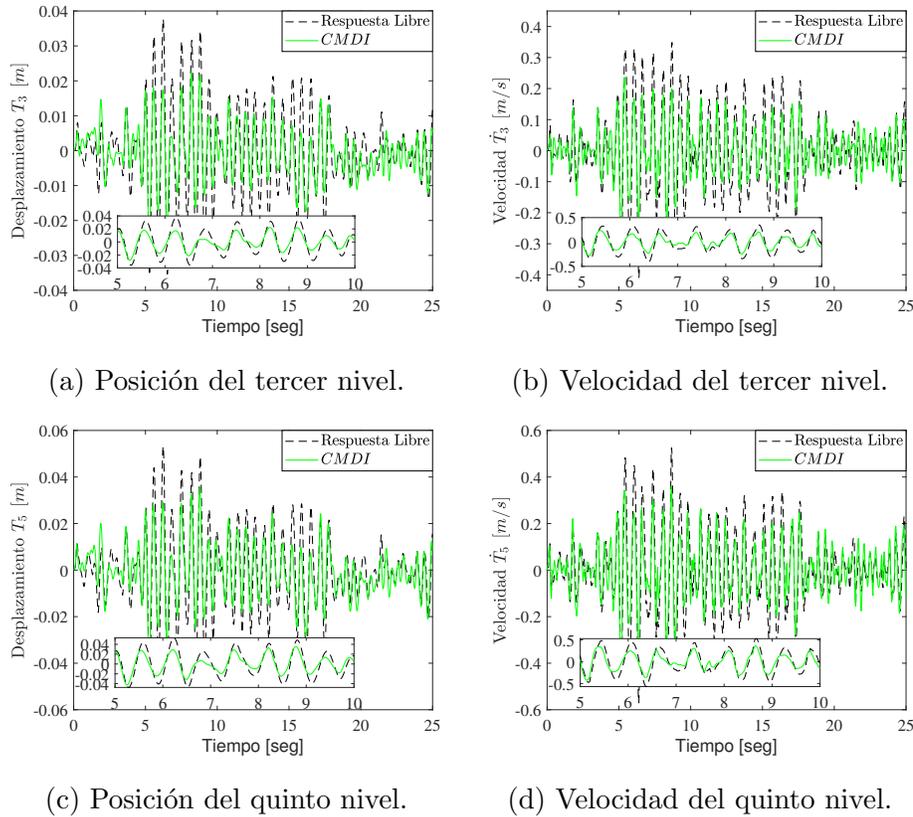


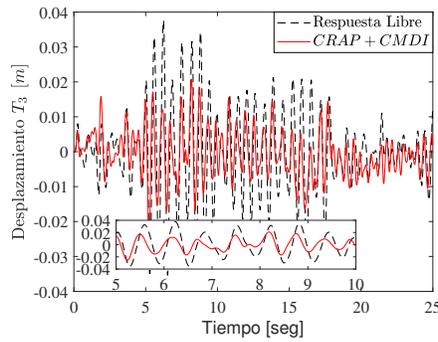
Figura 4.8: Respuesta del edificio usando el controlador *CMDI* con ruido de medición.

Piso	1_{ro}	2_{do}	3_{ro}	4_{to}	5_{to}
<i>CMDI</i>	67.3573	48.4008	40.7319	36.4217	33.3555
<i>CRAP</i>	54.2441	49.7368	42.4800	39.8663	38.8091
<i>CRAP + CMDI</i>	49.0310	53.7087	44.7154	41.0336	38.0728
<i>CRAP + CMDI + OA</i>	31.1585	48.2284	41.5066	38.7911	38.7498

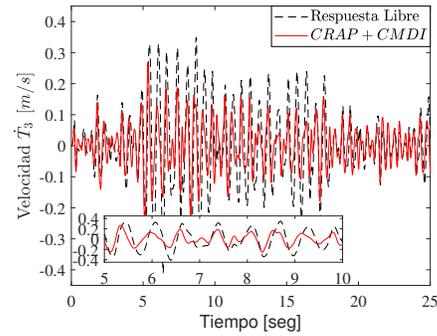
Tabla 4.3: Porcentajes de atenuación por controlador con ruido de medición.

Estrategia	<i>CMDI</i>	<i>CRAP</i>	<i>CRAP + CMDI</i>	<i>CRAP + CMDI + OA</i>
Fuerza N	242.6037	298.9062	325.5877	321.0568

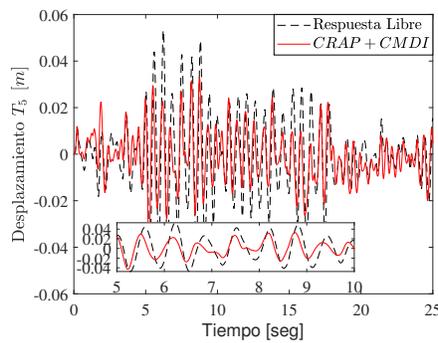
Tabla 4.4: Fuerza por estrategia de control con efecto de ruido de medición



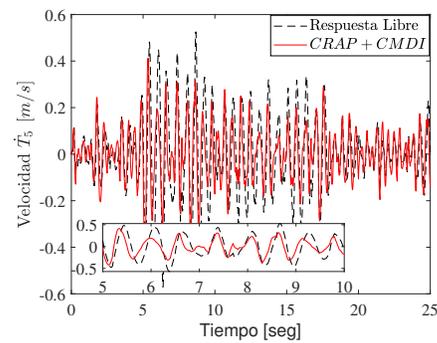
(a) Posición del tercer nivel.



(b) Velocidad del tercer nivel.



(c) Posición del quinto nivel.



(d) Velocidad del quinto nivel.

Figura 4.9: Respuesta del edificio compensado por $CRAP + CMDI$ con ruido de medición.

Piso	1_{ro}	2_{do}	3_{ro}	4_{to}	5_{to}
$CMDI$	0.4513	4.9476	14.6137	26.2228	34.4399
$CRAP$	0.8477	3.9700	12.3243	23.0597	30.8951
$CRAP + CMDI$	1.0897	3.8338	12.0817	23.1160	31.2395
$CRAP + CMDI + OA$	1.7349	4.2757	12.1029	22.4766	30.1130

Tabla 4.5: Índice de desempeño de los controladores con ruido de medición.

Capítulo 5

Conclusiones

En esta tesis se presentó el estudio comparativo de varias estrategias de control en estructuras para reducir los desplazamientos laterales en edificios causado por acción sísmica y vientos fuertes. Resultando que, la estrategia combinada $CRAP+CMDI$ es mejor que las técnicas originales de forma independiente, está presenta mayor porcentaje de atenuación, en especial pisos ajenos a la ubicación del actuador.

Con respecto al observador algebraico los resultados obtenidos en simulación muestran un desempeño satisfactorio para el caso sin ruido de medición, de lo contrario presentará deriva y la estimación no convergerá a los estados esperados. Para mejorar el desempeño del observador se pueden implementar filtros para cancelar el efecto del ruido de medición, pero podría generarse desfasamiento y error en la estimación de los estados.

Por otro lado, el modelo de la viga de Timoshenko fue seleccionado para estudiar el comportamiento dinámico de edificios debido a que modela todas las deformaciones posibles, esta información es importante al momento de discretizar los desplazamientos laterales por piso, lo cual se refleja en el vector de participación modal y la matriz de ubicación de sensores. Además, se eligió el modelo de Bouc-Wen para interpretar matemáticamente el comportamiento del amortiguador magnetoreológico, la ventaja que aportó este modelo fue el desacople de su comportamiento en componentes no lineal y lineal.

5.1. Trabajo futuro

Finalmente, algunas formas en que se podría extender este trabajo de tesis son:

- 1) Desarrollar la demostración formal de estabilidad en lazo cerrado del controlador combinado $CRAP+CMDI$ con el observador algebraico.

- 2) Llevar a cabo la validación experimental con el actuador magnetoreológico y la estructura de ensayos para validar la teoría desarrollada.
- 3) Desarrollar un observador algebraico que no requiera de la transformación modal y matrices diagonales para su diseño.
- 4) Aplicar los esquemas de control desarrollados al modelo continuo de la viga de Timoshenko para evitar la transformación modal y evaluar su desempeño respecto al modelo discretizado presentado en este trabajo.
- 5) Explorar el problema de detección de daño a través del modelo de la viga de Timoshenko y observadores intervalo.

Bibliografía

- [1] WOODCROFT B. *The pneumatics of hero of Alexandria*, Taylor Walton and Maberly; London, UK, 1851.
- [2] DAVID WAGG, SIMON NEILD, *Nonlinear Vibration with Control For Flexible and Adaptive Structures*, 2do Edición, Springer, 2015.
- [3] HEBERTT SIRA-RAMÍREZ AND ALBERTO LUVIANO-JUÁREZ, MARIO RAMÍREZ-NERIA AND ERIC WILLIAM ZURITA-BUSTAMANTE, *Active disturbance rejection control of dynamic systems: a flatness based approach*, Elsevier Inc., (2017), <https://doi.org/10.1016/C2016-0-01983-6>
- [4] ANIL K. CHOPRA, *Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering*, 4th Edition, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 2014.
- [5] SINAN KORKMAZ, *A review of active structural control: challenges for engineering informatics*, Computers & Structures, Volume 89, Issues 23–24, Elsevier, December 2011, Pag 2113-2132.
- [6] T.K. DATTA, *A state-of-the-art review on active control of structures*, ISET Journal of Earthquake Technology, Paper no. 430, Vol. 40, No. 1, pag. 1-17 March 2003
- [7] B.F. SPENCER JR., S. NAGARAJAIAH, *State of the art of structural control*, Journal of structural engineering, vol. 129, issue 7, 2003.
- [8] G.W. HOUSNER, *Structural control: past, present, and future*, Member ASCE, L. A. Bergman, Journal of engineering mechanics, vol. 123 Issue 9 September 1997
- [9] KAZUHIKO HIRAMOTO, *Cooperative control method of active and semiactive control: New framework for vibration control*, Hindawi publishing corporation, mathematical problems in engineering, vol. 2014, Article ID 518276, pag 11.
- [10] DAVORIN HROVAT, FINHAS BARAK, MICHAEL RABINS, *Semiactive versus passive or active tuned mass dampers for structural control*, ASCE Library, Journal of engineering mechanics vol. 109, Issue 03-08-1983.

-
- [11] NICOLA CATERINO, MARIA CRISTINA SPIZZUOCO, ANTONIO OCCHIUZZI, AND ANTONIO BONATI, *Experimental Assessment of a Skyhook Semiactive Strategy for Seismic Vibration Control of a Steel Structure*, Shock and Vibration Volume 2018, Article ID 6460259, 12 pag, Hindawi 22 February 2018.
- [12] OLIVEIRA FERNANDO, AYALA BOTTO MIGUEL, MORAIS PAULO, SULEMAN AFZAL, *Semiactive structural vibration control of base-isolated buildings using magnetorheological dampers*, Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control 2018, Vol. 37(3) pag. 565–576, 2017
- [13] RAMÍREZ NERIA MARIO, MORALES VALDEZ JESÚS AND YU WEN, *Active vibration control of building structure using active disturbance rejection control*, Journal of Vibration and Control 2021
- [14] MAKEXIMUI, LI SUN, DONGHAI LI AND MIN ZHU, *Active disturbance rejection control for structural vibration*, 2014 14th International Conference on Control, Automation and Systems (ICCAS 2014), IEEE, 2014.
- [15] ELHAM KHOSHBIN¹, AMIR HOSSEIN ABOLMASOUMI, MEHDI SOLEYMANI AND ARASH KHALATBARI, *Generalized active disturbance rejection control of structures under seismic disturbance considering time delays*, Structural Control and Health Monitoring 25.1 (2018): e2029.
- [16] KOU MIYAMOTO, JINHUA SHE, JUNYA IMANI, XIN XIN AND DAIKI SATO, *Equivalent-input-disturbance approach to active structural control for seismically excited buildings*, Engineering Structures 125 (2016): 392-399.
- [17] KOU MIYAMOTO, JINHUA SHE, SATOSHI NAKANO, DAIKI SATO AND YINLI CHEN, *Active Structural Control of Base-Isolated Building Using Equivalent-Input-Disturbance Approach With Reduced-Order State Observer*, Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Pub. July 19, 2022, ID: 144.9 091006, pag 14.
- [18] ANDRES RODRIGUEZ-TORRES, JESUS MORALES-VALDEZ AND WEN YU, *Active vibration control for building structures based on H_∞ Synthesis Problem*, 2020 17th International conference on electrical engineering, computing science and automatic control (CCE) Mexico city, Mexico, november 11-13, 2020
- [19] ARCAN YANIK, *Absolute Instantaneous Optimal Control Performance Index for Active Vibration Control of Structures under Seismic Excitation*, Hindawi Shock and Vibration Vol 2019, Article ID 4207427, 13 pag.
- [20] LUIS C. FÉLIX-HERRÁN, JOSÉ DE JESÚS RODRÍGUEZ-ORTIZ, RICARDO A. RAMÍREZ-MENDOZA, *Modelo de una Suspensión Semiactiva con un Amortiguador Magnetoreológico*, Congreso Nacional de Control Automático, UNAM (2006)

- [21] PARISA ROSTAMI, MOJTABA MAHSULI, S. FARID GHAHARI, AND ERTUGRUL TACIROGLU, *Bayesian Joint State-Parameter-Input Estimation of Flexible-Base Buildings from Sparse Measurements Using Timoshenko Beam Models*, J. Struct. Eng., 2021, 147(10): 04021151
- [22] TIMOSHENKO, S. P., *On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars*, J. Sci. 41 (245): pag. 744–746, (1921).
- [23] SEON M. HAN, HAYM BENAROYA, TIMOTHY WEI *Dynamics of transversely vibrating beams using four engineering theories*, Journal of Sound and Vibration (1999) 225(5), pag. 935-988, Article No. jsvi.1999.2257.
- [24] JINGQING HAN, *From pid to active disturbance rejection control*, IEEE TRANSACTIONS ON INDUSTRIAL ELECTRONICS, VOL. 56, NO. 3, 900–906 pag, MARCH, 2009.
- [25] B.F. SPENCER, S.J. DYKE, M.K. SAIN AND J.D. CARLSON, *Phenomenological model for magnetorheological dampers*, ASCE Journal of Engineering Mechanics 123(3) (1997), 230–238.
- [26] DELPOUX, R., FLOQUET, T., SIRA-RAMÍREZ, H., *Finite-Time Trajectory Tracking of Second-Order Systems Using Acceleration Feedback Only*, Automation 2021, 2, 266–277. <https://doi.org/10.3390/automation2040017>
- [27] FRANCISCO J. CAMPOS ARIZMENDI Y LUIS A. ÁLVAREZ-ICAZA LONGORIA, *Control semiactivo de estructuras utilizando amortiguadores magnetoreológicos*, Tesis de Maestría, Ingeniería Eléctrica-Control, Universidad Nacional Autónoma de México, México D.F., Diciembre 2017. pág 25,26.
- [28] GUANGWEI WAN, BO WANG, JIN ZHAO AND MENG TAG, *Robust tracking for nanopositioning stages using sliding mode control with active disturbance rejection: design and implementation*, Journal of vibration and control, JVC-22-0028, (2022)
- [29] LUYU LI, NAIBANG WANG, AND HAN QIN, *Adaptive Model Reference Sliding Mode Control of Structural Nonlinear Vibration*, Hindawi, Shock and Vibration, Volume 2019, Article ID 3612516, 13 pag, <https://doi.org/10.1155/2019/3612516>
- [30] JIANHUI WANG, WENLI CHEN, ZICONG CHEN, YUNCHANG HUANG, XING HUANG, WENQIANG WU, BIAOTAO HE, AND CHUNLIANG ZHANG, *Neural Terminal Sliding-Mode Control for Uncertain Systems with Building Structure Vibration*, Hindawi, Complexity, Volume 2019, Article ID 1507051, 9 pag, <https://doi.org/10.1155/2019/1507051>
- [31] MIGUEL ANGEL GARCIA Y LUIS ALVAREZ-ICAZA, *Control de vibraciones en edificios con base en estimadores*, Universidad Nacional Autónoma de México, 04510 Coyoacán DF, México

-
- [32] R. JIMENEZ AND L. ALVAREZ-ICAZA, *Civil structures semi-active control with limited measurements*, Proceedings of the 2004 American Control Conference, 2004, pp. 5467-5471 vol.6, doi: 10.23919/ACC.2004.1384724
- [33] L. ALVAREZ AND R. JIMENEZ, *Semi-active control of civil structures using magnetorheological dampers*, Proceedings of the 2003 American Control Conference, 2003., 2003, pp. 1428-1433, doi: 10.1109/ACC.2003.1239791.
- [34] FU YI, SHIRLEY J. DYKE, AND JUAN M. CAICEDO, AND J. DAVID CARLSON, *Experimental Verification of Multi-Input Seismic Control Strategies for Smart Dampers*, 2001/11/01, doi: 10.1061/(ASCE)0733-9399(2001)127:11(1152), Journal of Engineering Mechanics, American Society of Civil Engineers
- [35] JESÚS MORALES VALDEZ, LUIS ALVAREZ-ICAZA AND ANTONIO CONCHA, *On-line adaptive observer for buildings based on wave propagation approach*, Journal of Vibration and Control, pag 1–21, (2017), sagepub.co.uk/journalsPermissions.nav, DOI: 10.1177/1077546317711309
- [36] ANTONIO CONCHA, LUIS ALVAREZ-ICAZA AND RÚBEN GARRIDO, *Simultaneous parameter and state estimation of shear buildings*, Mechanical Systems and Signal Processing, Volumes 70–71, (2016), pages 788-810, ISSN 0888-3270, <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2015.08.031>
- [37] SURESH THENOZHI, WEN YU AND RUBEN GARRIDO, *A novel numerical integrator for velocity and position estimation*, Transactions of the Institute of Measurement and Control, 2013-08-01, DOI : 10.1177/0142331213476987
- [38] YIFAN LUO, HONGXIN SUN, XIUYONG WANG, LEI ZUO, AND NING CHEN, *Wind Induced Vibration Control and Energy Harvesting of Electromagnetic Resonant Shunt Tuned Mass-Damper-Inerter for Building Structures*, Hindawi, Shock and Vibration, Volume 2017, Article ID 4180134, 13 pags, <https://doi.org/10.1155/2017/4180134>
- [39] SNN, *Servicio Sismológico Nacional*, Septiembre 2021, <http://www2.ssn.unam.mx:8080/estadisticas/>