

**CENTRO de INVESTIGACIÓN  
y de ESTUDIOS AVANZADOS  
del IPN**

---

---

**DEPARTAMENTO DE CONTROL  
AUTOMÁTICO**

***Visual Servoing con compensación utilizando  
Redes Neuronales***

*Tesis que Presenta el*

Ing. Gerardo Loreto Gómez<sup>1</sup>

*para obtener el grado de Maestro en Ciencias en la especialidad de Control Automático*

Directores de la tesis

Dr. Rubén Garrido Moctezuma  
Dr. Wen Yu Liu

*México, D.F.*

*Junio de 2002*

<sup>1</sup>Becario de CONACYT no. 144325

# RESUMEN

El objetivo de esta tesis es diseñar un compensador basado en una red neuronal de funciones radiales básicas (RBF) de tal manera que el sistema visual en lazo cerrado sea estable en presencia de incertidumbres en los pares gravitacionales.

La ley de control propuesta se encuentra basada en el trabajo desarrollado por Kelly [32] en el cual se utiliza una compensación exacta de la gravedad. Se presenta el análisis de estabilidad uniformemente, finalmente acotada (UUB) para los casos cuando se conocen todos los parámetros de la ley de control PD visual y cuando existe incertidumbre en la matriz jacobiana. El desempeño de estas leyes de control será mostrado a través de resultados experimentales obtenidos al implementar las leyes de control en una plataforma de *visual servoing* que se encuentra constituida por un robot manipulador de dos grados de libertad con articulaciones rotacionales y un sistema de visión que se encuentra integrado por una cámara analógica que captura tanto al robot como a su ambiente de trabajo, la arquitectura que será utilizada es *look and move basada en imagen* con una configuración de cámara fija para el caso de control en posición (*set point regulation*).

La ley de aprendizaje de la red neuronal será obtenida directamente del análisis de estabilidad y será modificada utilizando una herramienta del control adaptable que ha sido aplicada a redes neuronales y que fue denominada como modificación-e en [47], dicha modificación nos permitirá establecer que los pesos de la red se encuentran acotados sin la necesidad de utilizar la condición de excitación persistente.

La mayor aportación de este trabajo es la prueba de estabilidad en lazo cerrado del sistema conformado por un robot manipulador y las leyes de control visual propuestas con una compensación por medio de una red neuronal RBF, cuya eficiencia es comparada con los casos donde no existe compensación de gravedad y cuando ésta se realiza por el método descrito en [17].

# Índice General

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
1.1	<i>visual servoing</i> (retroalimentación visual)	1
1.2	Redes neuronales	3
1.3	Control visual	5
1.4	Objetivo de la tesis	6
1.5	Organización de la tesis	6
1.6	Publicaciones	7
<b>2</b>	<b><i>Visual servoing</i></b>	<b>9</b>
2.1	Introducción	9
2.2	Configuraciones de la cámara	9
2.3	Arquitecturas en <i>visual servoing</i>	11
2.4	Extracción de características	14
2.5	Transformación de coordenadas	15
2.6	Modelo de la cámara	16
2.6.1	Proyección perspectiva	16
2.6.2	Distorsiones geométricas	17
2.6.3	Modelo <i>pinhole</i>	19
2.7	Error de posicionamiento de imagen	20
2.8	Controlador visual basado en el <i>Jacobiano</i> transpuesto	22

<b>3</b>	<b>Redes neuronales</b>	<b>23</b>
3.1	Introducción . . . . .	23
3.2	Modelo matemático de una neurona . . . . .	24
3.3	Arquitecturas de las redes neuronales . . . . .	26
3.4	Redes neuronales basadas en funciones radiales básicas . . . . .	29
3.5	Función radial básica del tipo gaussiano . . . . .	31
3.6	Aproximación de funciones . . . . .	32
3.7	Compensador neuronal . . . . .	32
<b>4</b>	<b>Análisis de estabilidad</b>	<b>35</b>
4.1	Introducción . . . . .	35
4.2	Características de un robot manipulador . . . . .	36
4.2.1	Cinemática y jacobiano . . . . .	36
4.2.2	Dinámica y propiedades . . . . .	37
4.3	Planteamiento del problema de control. . . . .	38
4.4	Análisis de estabilidad. . . . .	39
4.5	Análisis de estabilidad con incertidumbre en el jacobiano. . . . .	47
<b>5</b>	<b>Resultados experimentales</b>	<b>55</b>
5.1	Implementación de la ley de control . . . . .	56
5.2	Control visual PD - 1 . . . . .	58
5.3	Control visual PD - 2 . . . . .	64
<b>6</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>71</b>
6.1	Trabajos futuros . . . . .	73
<b>A</b>	<b>Función candidata de Lyapunov</b>	<b>75</b>
A.1	Caso Ideal . . . . .	76
<b>B</b>	<b>Fundamentos matemáticos</b>	<b>81</b>
B.1	Desigualdades . . . . .	81
B.2	Estabilidad Uniformemente, finalmente acotada . . . . .	83

ÍNDICE GENERAL	iii
B.3 Valor óptimo de $K_w$ . . . . .	84
<b>C Plataforma de <i>visual servoing</i></b>	<b>87</b>
C.1 Operación de la plataforma de <i>visual servoing</i> . . . . .	88
C.1.1 Sistema de visión . . . . .	89
C.1.2 Operación del cliente . . . . .	91
C.1.3 Operación del servidor . . . . .	91
<b>D Fundamentos experimentales</b>	<b>95</b>
D.1 Centros de la red neuronal . . . . .	95
D.2 Gráficas del compensador de gravedad . . . . .	96
<b>E Diagramas de simulink</b>	<b>101</b>



# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1 *visual servoing* (retroalimentación visual)

Hoy en día, los robots operan en industrias en donde el ambiente de trabajo altamente estructurado contribuye a un buen desempeño de éstos. Por otro lado, los robots tienen un bajo impacto en aplicaciones donde el ambiente de trabajo y la colocación de objetos no puede ser completamente controlada, esto es debido a la capacidad limitada de los sensores utilizados para obtener información referente al entorno de trabajo. Los robots industriales actuales generalmente tienen la gran desventaja de no poder observar las tareas que realizan, además de requerirse tiempos de puesta a punto largos debido a la programación manual de las tareas a realizar.

Es conocido que la capacidad de los sensores utilizados incrementan o disminuyen la versatilidad y el campo de aplicación de los robots. La visión es un sensor muy práctico ya que dentro de ciertos límites imita la visión humana y permite una medición del ambiente de trabajo sin un contacto directo con éste. Tradicionalmente, el uso de los sensores de visión y la manipulación del robot se combinan en un modelo de lazo abierto, esto es, la posición del objeto a manipular en el espacio de trabajo se obtiene a través del sistema de visión, posteriormente, una secuencia de movimientos es planeada y ejecutada. Este modelo es conocido como *Look then Move* (ver y después mover). Las desventajas de éste pueden resumirse en las desventajas de los esquemas en lazo abierto (i.e. sensibilidad a la incertidumbre paramétrica y a las perturbaciones). Una alternativa para mejorar el desempeño y exactitud de este tipo de subsistemas es utilizar retroalimentación visual.



Una de las primeras clasificaciones para las estructuras de *visual servoing* fue propuesta por Sanderson y Weiss [53], la cual depende del tipo de retroalimentación (basada en imagen o basada en posición), de la estructura del controlador (control en lazo abierto o control en lazo cerrado), del tiempo de procesamiento de la imagen y del control del robot (estático o dinámico). Recientemente han sido desarrollados una gran variedad de trabajos relacionados con *visual servoing* en los cuales se pueden encontrar rigurosas pruebas de estabilidad [13, 18, 32, 37, 53, 60].

## 1.2 Redes neuronales

Los sistemas convencionales de control son tradicionalmente diseñados usando modelos matemáticos de sistemas físicos. Los modelos matemáticos que describen el comportamiento dinámico del sistema son primeramente desarrollados para posteriormente aplicar técnicas de diseño para concebir controladores apropiados para el sistema. Más aún, los modelos matemáticos deben ser lo suficientemente simples para poder ser analizados con los métodos disponibles y la precisión debe ser suficiente para describir el comportamiento dinámico del sistema. Sin embargo, en la realidad el modelo y sus parámetros son con frecuencia desconocidos; cambios en el ambiente de trabajo, dinámicas no modeladas y la presencia de no linealidades e incertidumbres son difíciles de tratar con los controladores convencionales que no son capaces de aprender o de adaptarse a nuevas situaciones.

Por ejemplo, un control estándar adaptable [50] es una selección natural cuando solamente existe incertidumbre en los parámetros de la estructura pero no son capaces de compensar cambios en la estructura del sistema o bien, no pueden implementarse si la estructura no es conocida perfectamente; la linealidad en los parámetros requerida por estos controladores asume una estructura conocida.

Las redes neuronales han sido aplicadas a una variedad de sistemas de control y constituyen una clase de aproximadores no lineales cuya arquitectura ha sido inspirada en el funcionamiento del sistema nervioso humano el cual utiliza múltiples elementos de procesamiento interconectados. Una red neuronal puede ser descrita como sigue [40]:

*Una red neuronal es un sistema compuesto de muchos elementos de procesamiento simples operando en paralelo cuya función es determinada por la estructura de la red, por las conexiones y por el desempeño del procesamiento de los elementos de cómputo o nodos.*

Las redes neuronales se encuentran muy unidas a disciplinas como: neurociencia, matemáticas, estadística, física, ciencia de la computación e ingeniería. Estas se encuentran en aplicaciones de diferentes campos como el modelado, análisis de series de tiempo, reconocimiento de patrones, procesamiento de señales y control debido a su habilidad de aprendizaje. Un sistema de control con redes neuronales se dice que es un *control inteligente* [40].

El procedimiento usado para desarrollar el proceso de aprendizaje en las redes neuronales es conocido como *algoritmo de aprendizaje*. Generalmente, este entrenamiento o aprendizaje en un sistema de control puede ser desarrollado en línea o fuera de línea. El aprendizaje en línea siempre es necesario para aplicaciones de control en lazo cerrado, un largo tiempo de aprendizaje y una lenta convergencia de los algoritmos de aprendizaje implicarían un desempeño pobre, especialmente, durante la primera etapa del aprendizaje. Por lo anterior, el entrenamiento debe realizarse exclusivamente en línea, con una rápida velocidad de aprendizaje para cualquier condición inicial de los pesos, para poder hacer del control neuronal una alternativa viable para aplicaciones industriales.

Algunas de las ventajas de las redes neuronales son que pueden realizar un mapeo no lineal, tienen la habilidad de adaptación y aprendizaje, una implementación relativamente fácil y capacidad de auto organización. Desde el punto de vista de la teoría de control, la habilidad de las redes neuronales de tratar con sistemas no lineales y la propiedad de aproximación de funciones son quizás las más importantes. Narendra en sus trabajos ha expuesto como utilizar las redes para propósitos de identificación y control [45, 46]. Aplicaciones de las redes neuronales se han hecho sobre robots modelados con fricción [28, 29]. En [29] se utiliza una red neuronal multicapa con una función de activación del tipo sigmoide para realizar la compensación de incertidumbres en un robot manipulador.

En esta tesis en el marco del control visual de robots se realizará una compensación de los pares gravitacionales, mediante el uso de una red neuronal, la cual no requieren información referente a la dinámica del robot. En lugar de utilizar el aprendizaje *back-propagation* o la regla de aprendizaje delta [19], comúnmente usados en la literatura para ajustar los pesos de la red neuronal, se desarrollarán reglas de aprendizaje que se obtendrán directamente mediante el análisis de estabilidad por el método de Lyapunov, ambos, la estabilidad del sistema y la convergencia del error de posicionamiento deben ser garantizados. La estabilidad de todo el sistema es seguramente el primer requerimiento que debe ser demostrado antes de pensar en aplicaciones prácticas.

## 1.3 Control visual

Varios diseños de controladores han sido desarrollados en la literatura para el control de los robots basados en la medición de sus estados, esto es, medición de la posición y la velocidad. La medición de la posición puede ser realizada por medio de decodificadores de posición ópticos que pueden dar una medición de la posición angular con una buena precisión o también mediante sensores de visión en los cuales la medición de la posición se realiza en coordenadas imagen; las mediciones de la velocidad angular son obtenidas por medio de tacómetros, las cuales con frecuencia están contaminadas con ruido. Esta circunstancia reduce el desempeño del manipulador debido a que en la práctica los valores de las ganancias del controlador son limitadas por la presencia de ruido en las mediciones de la velocidad. Para eliminar la necesidad de usar tacómetros y para mantener un alto desempeño del control, una opción es el uso de filtros pasa altas [2] o de observadores [61] para obtener un estimado de la velocidad. En esta tesis se asume para propósitos de análisis de estabilidad que la velocidad puede ser medida o estimada por algún método.

Varios diseños de controladores proporcional - derivativo visual (PDV) junto con sus pruebas experimentales han sido publicados [13, 14, 32]. Sin embargo, éstos muestran un pobre desempeño cuando existen pares gravitacionales que no sean exactamente compensados, más aún no puede garantizarse que el error de posicionamiento en estado estable converga a cero. Además, es bien sabido que la gravedad tienen influencia en la estabilidad y en las propiedades dinámicas de un controlador PDV.

En [32], un controlador PDV asintóticamente estable con compensación exacta de la gravedad fue desarrollado, en éste se consideran los casos de incertidumbre en la orientación de la cámara y de distorsiones radiales en la imagen introducidas por el lente de la cámara. Si el vector de los pares gravitacionales es desconocido, un control PDV con una compensación adaptable de la gravedad puede ser utilizado como en [13, 14], en donde se demuestra que este controlador es asintóticamente estable cuando existe incertidumbre en la matriz jacobiana. En [60] se aborda el caso cuando existe incertidumbre tanto en la matriz jacobiana como en el regresor que es utilizado para realizar la compensación de la gravedad.

En todos estos casos [13, 14, 32, 60] se necesita de un cierto conocimiento de los pares gravitacionales, para evitar este requerimiento en [12] se propone un controlador del tipo proporcional - derivativo - integral visual (PDIV).

Existen varios trabajos publicados donde se desarrollan rigurosas pruebas de estabilidad de controladores PD articulares que utilizan redes neuronales como compensadores de los pares gravitacionales [29, 42, 61], para el caso de controladores PDV las redes neuronales han sido utilizadas para aproximar el mapeo del espacio imagen al espacio articular [21, 34].

## 1.4 Objetivo de la tesis

El objetivo de esta tesis, es demostrar estabilidad en el sentido de Lyapunov de un robot manipulador en lazo cerrado con retroalimentación visual usando una compensación de los pares gravitacionales por medio de una red neuronal de funciones radiales básicas. Será analizado también el caso cuando existe incertidumbre en la matriz jacobiana del robot.

El desempeño del controlador propuesto será mostrado a nivel experimental estudiando el caso de control de posición (*set-point regulation*). Se utilizará una plataforma de *visual servoing* [16] constituida de un robot manipulador con articulaciones rotacionales de dos grados de libertad y un sistema de visión que está constituido por una cámara analógica fija que captura tanto al robot como a su ambiente de trabajo.

A lo largo de esta tesis se utilizará la arquitectura *look and move* basada en imagen donde el sistema de visión proveerá una medición directa del error de posicionamiento de la imagen, además, utilizaremos la configuración de cámara fija.

## 1.5 Organización de la tesis

El material de la presente tesis está organizado de la siguiente forma: El capítulo 2 introduce los conceptos básicos de *visual servoing* y el modelo utilizado que describe la proyección del espacio de trabajo del robot al espacio de la cámara. El capítulo 3 muestra los conceptos básicos referentes a las redes neuronales. En el capítulo 4 se desarrollan las pruebas de estabilidad y se obtienen los diferentes algoritmos de aprendizaje para la red neuronal. Los resultados obtenidos de los experimentos realizados al implementar prácticamente la ley de control visual con los diferentes algoritmos de aprendizaje obtenidos para la red neuronal son mostrados en el capítulo 5. Finalmente se presentan las conclusiones y los trabajos a futuro en el capítulo 6.

## 1.6 Publicaciones

El trabajo de esta tesis fue presentado en el congreso de aplicaciones de control realizado en la ciudad de México mediante el artículo que lleva por título *Stable Visual Servoing with Neural Network Compensation* [43]



## Capítulo 2

# *Visual servoing*

### 2.1 Introducción

*Visual servoing* es una solución atractiva para el posicionamiento del órgano terminal de un robot en un ambiente no estructurado y tiene el potencial de proveer un bajo costo y un bajo mantenimiento para la automatización en una industria.

*Visual servoing* es el resultado de fusionar varias áreas entre las cuales podemos mencionar: procesamiento de imágenes, cinemática, dinámica, teoría de control y cómputo en tiempo real. La tarea de *visual servoing* es el control de robots usando información visual haciéndolos capaces de manipular su ambiente de trabajo en lugar de únicamente observar. El sistema de visión se encuentra integrado en forma física por una o más cámaras, una interfaz electrónica (*frame grabber*, tarjeta de interface) y una unidad de procesamiento (PC, *hardware* especial).

### 2.2 Configuraciones de la cámara

En el mercado existen dos tipos de cámaras que pueden ser empleadas en *visual servoing*: cámaras digitales y cámaras analógicas. Las cámaras analógicas son susceptibles a ruidos e interferencias debido a la conexión entre la cámara y el *frame grabber* en el cual se realiza la conversión analógica - digital, el ancho de banda es limitado por los estándares comerciales de vídeo, utiliza típicamente *pixels* rectangulares y generalmente son de bajo costo.

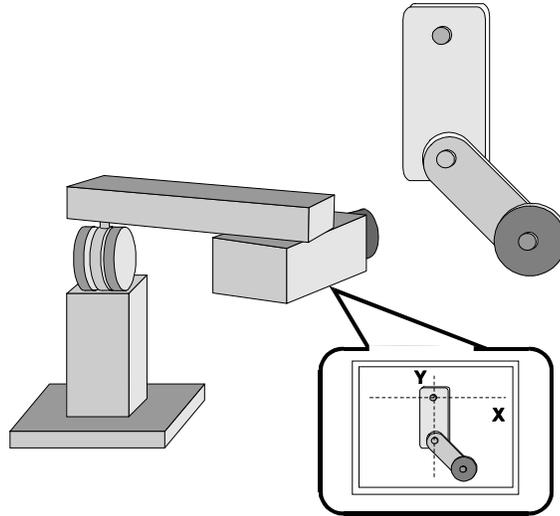


Figura 2.1: Configuración Cámara Fija

En las cámaras digitales la conversión analógica - digital es realizada en la misma cámara, esto implica que existe poco ruido, generalmente maneja *pixels* cuadrados, por lo cual es relativamente más fácil realizar mediciones, la velocidad de captura de imágenes puede ser mayor que en una cámara analógica y es de un costo más elevado.

Las configuraciones utilizadas para la posición de la cámara en *visual servoing* pueden ser: cámara en mano o cámara fija. En la primera configuración llamada cámara en mano, la cámara se encuentra montada sobre el órgano terminal del robot, suministrando información del espacio de trabajo. En ésta existe una relación conocida y generalmente constante entre la posición de la cámara y el órgano terminal del robot. La segunda configuración es cámara fija, mostrada en la figura 2.1, la cámara es fijada de tal forma que pueda captar al robot y a su espacio de trabajo. En este caso, la imagen del objetivo es independiente de la imagen del robot en movimiento, una variante que es encontrada en este tipo de configuración es cuando la cámara se encuentra montada en otro robot. Para cualquiera de las configuraciones mencionadas debe realizarse primeramente una calibración de la cámara que consiste en determinar su geometría interna y las características ópticas (parámetros intrínsecos), así como también su orientación y posición (parámetros extrínsecos) [38].

## 2.3 Arquitecturas en *visual servoing*

El control visual puede ser clasificado como *estático* o *dinámico*. En el control visual estático la información visual es utilizada solamente una vez para determinar la posición deseada del extremo del robot (*look then move*), mientras que en el control dinámico la información visual es continuamente empleada para controlar el robot [20].

Los controladores visuales estáticos y dinámicos son diferentes de los controladores con retroalimentación de estado estática o dinámica que se encuentran en la literatura clásica de control. Un controlador con retroalimentación de estado estática es aquel que depende de los valores del estado del sistema y de señales de referencia externas, un control con retroalimentación de estado dinámica además de las anteriores depende de variables de estado adicionales las cuales involucran la dinámica del sistema [30].

En 1980, Sanderson y Weiss [53] introdujeron una clasificación para los sistemas de control visual dinámico, esto es, la arquitectura *look and move* (ver y mover) y la arquitectura *visual servoing puro*. En la arquitectura del tipo *look and move* el sistema de visión es usado para proveer un conjunto de datos como entrada de referencia para el controlador a nivel articular, siendo la retroalimentación articular la que realiza la estabilización interna del robot a diferencia de la arquitectura *visual servoing puro* donde se elimina el control interno del robot remplazándolo por un control a nivel visual, es decir, solamente el lazo de retroalimentación visual estabiliza al robot calculandose directamente las consignas para las articulaciones sin emplear información articular.

Una segunda clasificación depende de la información que reciba el controlador, ésta puede ser *control basado en posición* y *control basado en imagen*. En el control basado en posición, las características  $\mathbf{x}_s$  son extraídas de la imagen y usadas en conjunción con modelos conocidos de la cinemática del robot, de la cámara y del modelo geométrico del objeto a manipular para determinar de éste último su posición  $\mathbf{x}$  con respecto al órgano terminal del robot en el espacio de trabajo; la retroalimentación es proporcionada para reducir el error de posicionamiento o seguimiento, según sea el caso.

El requerimiento de información *a priori* hace a este diseño inapropiado para ambientes no estructurados. Las figuras 2.2 y 2.4 muestran las estructuras *look and move* y *visual servoing* respectivamente del control basado en posición.

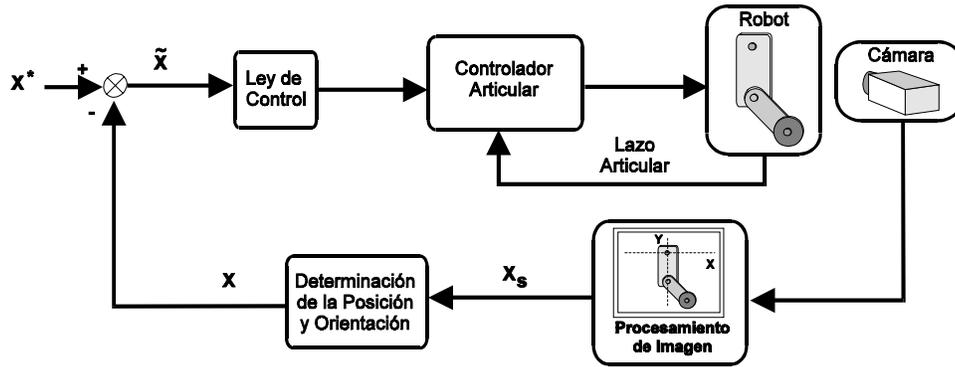


Figura 2.2: Arquitectura *Look and Move* Basada en Posición

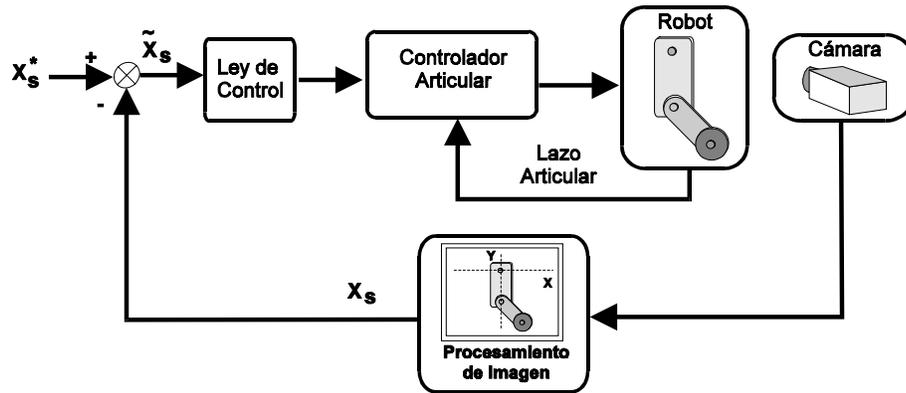
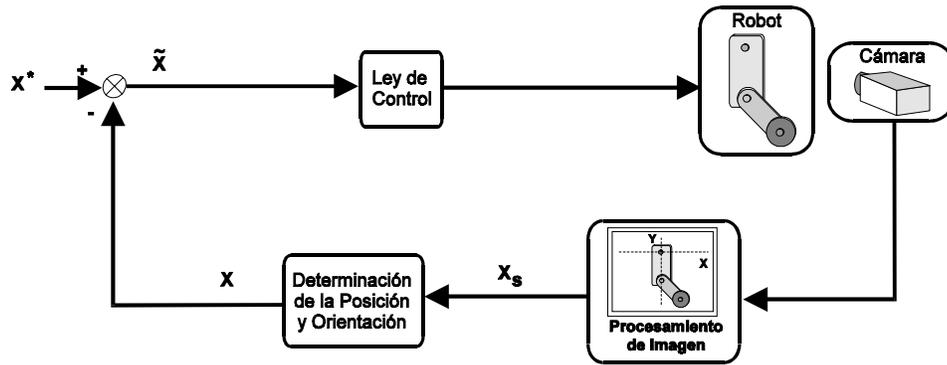
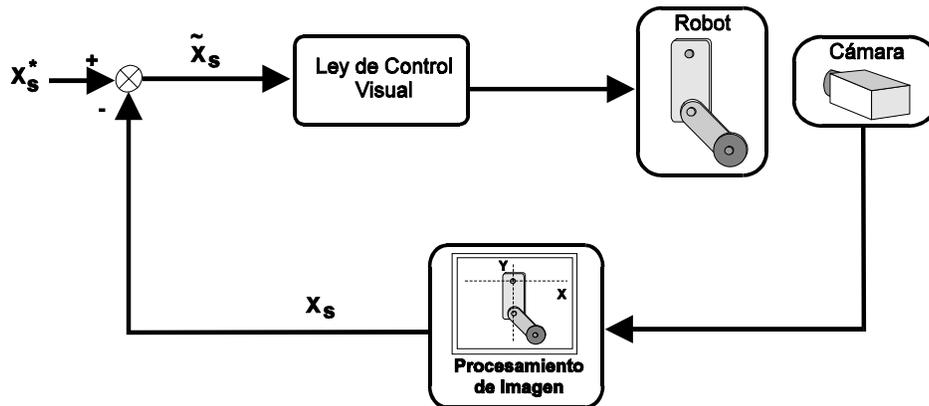


Figura 2.3: Arquitectura *Look and Move* Basada en Imagen

Figura 2.4: *Visual Servoing puro* Basado en PosiciónFigura 2.5: *Visual Servoing puro* Basado en Imagen

Para el caso de control basado en imagen, las mediciones para calcular la ley de control son obtenidas directamente de las características  $\mathbf{x}_s$  de la imagen, es decir, el objetivo de control es alcanzado cuando el error de imagen  $\tilde{\mathbf{x}}_s$  es cero. Este tipo de control reduce el tiempo de cómputo, elimina la necesidad de una interpretación detallada de la imagen, elimina los errores debidos al modelo geométrico del objeto a manipular, además, se ha demostrado que este diseño posee cierto grado de robustez respecto a errores en la calibración de la cámara. En las figuras 2.3 y 2.5 se muestran las estructuras *look and move* y *visual servoing* respectivamente del control basado en imagen.

Las desventajas que pueden encontrarse en un sistema de visión son: produce una gran cantidad de datos y dependiendo de los algoritmos de tratamiento empleados, es sensible a pequeños cambios en la información visual lo cual puede producir ruido, además, el procesamiento de datos genera retardos de tiempo. Los retardos pueden producir inestabilidad y un pobre desempeño del robot, éstos son debidos a la adquisición y procesamiento de imágenes y a las interfaces electrónicas, además, tienen como consecuencia que las ganancias del controlador deban ser reducidas produciendo una respuesta lenta y un pobre rechazo de perturbaciones. Otra fuente generadora de retardos que podemos encontrar es cuando el control visual y el articular son ejecutados en procesadores independientes debido a que la comunicación entre éstos produce un retardo de tiempo.

## 2.4 Extracción de características

La secuencia de operaciones de un sistema de visión se inicia con la detección, localización y representación de partes especiales de una imagen, llamadas características de la imagen, usualmente éstas corresponden a elementos de interés de la escena. En visión, el término características de imagen se refiere a dos posibles entidades: propiedades globales de una imagen o parte de una imagen con algunas propiedades especiales, algunas características de imagen pueden ser, por ejemplo, un círculo, orillas, bordes, líneas, curvas o superficies. En el control visual, la extracción de características de una imagen es un paso intermedio, no es el objetivo del sistema de visión y son utilizadas para realizar el control en el movimiento de un robot y para la calibración de la cámara(s). En *visual servoing* se utilizan las coordenadas de un punto de cierta característica de la imagen, que frecuentemente es el centroide de una región para realizar el posicionamiento del órgano terminal del robot.

El cálculo del centroide puede ser realizado por medio de algún tipo de *software*, resultando más lento que si se realizara con algún *hardware* especializado. Sin embargo, el tiempo de cómputo puede ser reducido al utilizar una pequeña ventana que contenga la imagen, cuya localización fue determinada por el cálculo previo del centroide, de esta forma, la tarea de localizar el centroide de la región seleccionada resulta relativamente fácil debido a que solamente existirán pequeños cambios de una imagen a la siguiente, por lo tanto, la interpretación de toda la imagen no es requerida.

## 2.5 Transformación de coordenadas

El espacio de trabajo del robot es el conjunto de posiciones y orientaciones que el órgano terminal o la herramienta del robot puede alcanzar. Típicamente, las tareas del robot se encuentran especificadas con respecto a uno o más sistemas de coordenadas, por lo tanto, en muchos de los casos es necesario realizar una transformación de un espacio de coordenadas a otro.

Definamos las coordenadas de un punto  $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n$  con respecto a un sistema coordenado  $k$  con la siguiente notación:

$$\mathbf{x}_k = [x_{k1} \quad x_{k2} \quad \cdots \quad x_{kn}]^T$$

Sean  $j, k$  dos sistemas coordenados dados, la matriz de rotación que representa la orientación de  $k$  con respecto a  $j$  es denotada como  $\mathbf{R}(\theta) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  donde  $\theta \in \mathfrak{R}^n$ . La ubicación del origen de  $k$  con respecto a  $j$  la denotaremos como el vector  $\mathbf{t}_k \in \mathfrak{R}^n$ , por lo tanto, dado el punto  $\mathbf{x}_k$ , podemos obtener sus coordenadas con respecto al sistema coordenado  $j$  aplicando la siguiente regla de transformación [26]:

$$\mathbf{x}_j = \mathbf{R}(\theta)\mathbf{x}_k + \mathbf{t}_k$$

o bien,

$$\begin{bmatrix} x_{j1} \\ \vdots \\ x_{jn} \end{bmatrix} = \mathbf{R}(\theta) \begin{bmatrix} x_{k1} \\ \vdots \\ x_{kn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_{k1} \\ \vdots \\ t_{kn} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

con  $n = 1, 2, \dots$

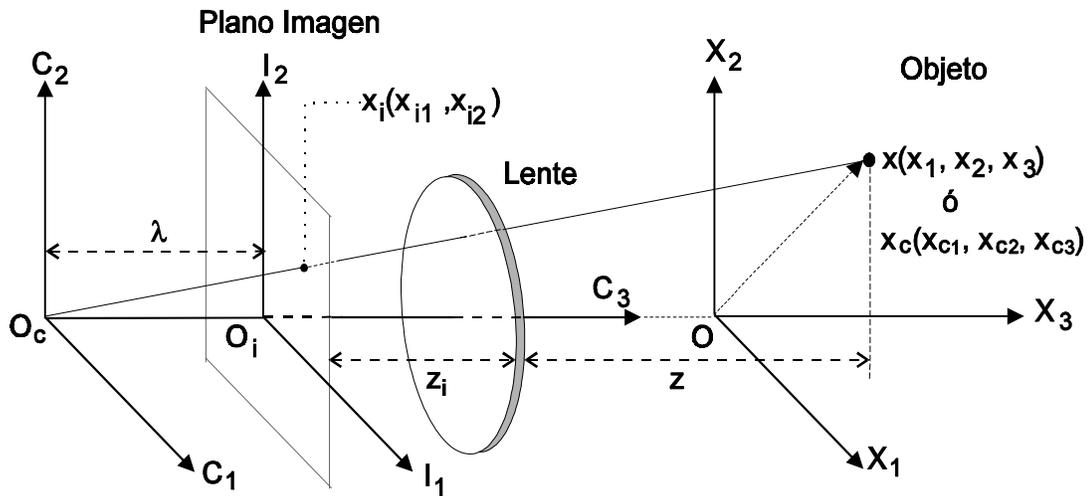


Figura 2.6: Estructura de la proyección perspectiva.

## 2.6 Modelo de la cámara

Para realizar el control de la posición del órgano terminal de un robot utilizando información visual es necesario entender los aspectos de la geometría del procesamiento de imágenes. Cada cámara contiene un lente que realiza una proyección en  $2D$  de la escena sobre el plano imagen, lugar en donde el sensor de la cámara está localizado, esta proyección causa la pérdida de información de profundidad.

*Visual servoing* involucra el análisis de imágenes del espacio de trabajo del robot, debido a ésto, es necesario establecer un modelo que describa la proyección  $3D$  al plano  $2D$ . En éste, deberá tomarse en cuenta la geometría de proyección que determine donde un punto del espacio real será proyectado en el plano imagen.

### 2.6.1 Proyección perspectiva

La proyección perspectiva es un mapeo no lineal del sistema coordenado cartesiano  $3D$  al sistema coordenado de la imagen  $2D$ . La figura 2.6 muestra la geometría básica de la proyección perspectiva, donde  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^T$  son las coordenadas en  $3D$  de un objeto (punto  $\mathbf{x}$ ) en el sistema coordenado de trabajo,  $\mathbf{x}_c = [x_{c1}, x_{c2}, x_{c3}]^T$  son las coordenadas  $3D$  del mismo objeto en el sistema

coordinado de la cámara, el cual está centrado en el punto  $O_c$  que es el centro óptico. El eje óptico está normalmente alineado con el eje  $C_3$ ,  $\mathbf{x}_i = [x_{i1}, x_{i2}]^T$  son las coordenadas de un punto en el sistema coordinado del plano imagen, centrado en el punto  $O_i$  el cual está formado por la intersección entre el eje  $C_3$  y el plano imagen. Este último es paralelo al plano formado por los ejes  $C_1$  y  $C_2$ . La distancia entre el centro óptico y el plano imagen es denominada distancia focal  $\lambda$ .

Utilizando la ley [11]:

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{z_i} = \frac{1}{\lambda}$$

donde  $z$  es la distancia del objeto al plano del lente y  $z_i$  es la distancia de la imagen al plano del lente y usando la Geometría, tenemos que las coordenadas de un punto sobre el plano imagen  $\mathbf{x}_i = [x_{i1}, x_{i2}]^T$  están relacionadas con las coordenadas de trabajo  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^T$  de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \end{bmatrix} = h \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

donde  $h$  es un factor de magnificación definido como:

$$h = \frac{\lambda}{\lambda - z} \quad (2.3)$$

La ecuación (2.2) es conocida como *proyección perspectiva*.

### 2.6.2 Distorsiones geométricas

El lente de la cámara introduce distorsiones geométricas en la imagen, las distorsiones geométricas se encuentran clasificadas como distorsiones radiales y tangenciales. Las distorsiones radiales causan que los puntos de la imagen se trasladen a lo largo de una línea radial desde el origen  $O_i$  en el plano imagen (las distorsiones hacia afuera se consideran positivas), ésto es mostrado en la figura 2.7 en donde el punto  $\mathbf{x}_i = [x_{i1}, x_{i2}]^T$  es desplazado al punto  $\mathbf{x}_d = [x_{d1}, x_{d2}]^T$ .

Las distorsiones tangenciales ocurren por un incorrecto valor del radio, pero son generalmente de menor significancia que las distorsiones radiales. Estas últimas son modeladas por polinomios de la siguiente forma [11, 32, 38]:

$$\Delta r = k_1 r_i^3 + k_2 r_i^5 + k_3 r_i^7 + \dots$$

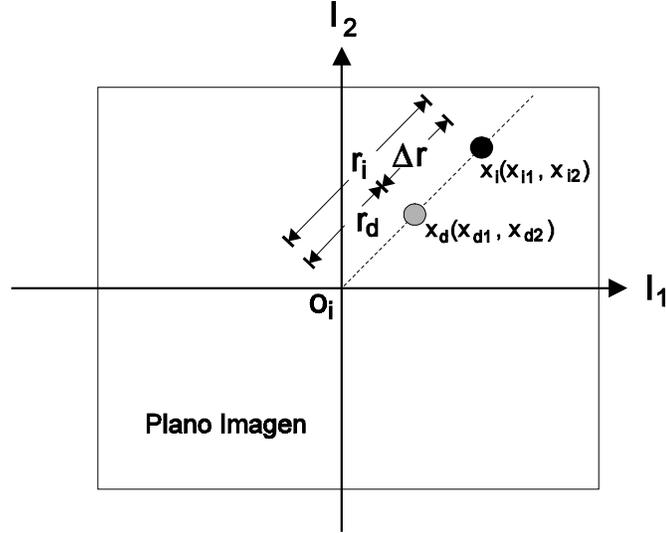


Figura 2.7: Distorsión Radial

donde  $r_i$  es la distancia entre el punto imagen  $\mathbf{x}_i$  y el origen  $O_i$ , ésto es:

$$r_i^2 = x_{i1}^2 + x_{i2}^2$$

El valor correcto del radio desde el origen  $O_i$  al punto en la imagen debido a la distorsión geométrica radial está dado por:

$$r_d = r_i - \Delta r$$

Para un punto  $\mathbf{x}$  en coordenadas del plano imagen  $[x_{i1}, x_{i2}]^T$ , la distorsión radial se encuentra dada por las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \Delta x_{i1} &= \Delta r \frac{x_{i1}}{r_i} = x_{i1} (k_1 r_i^2 + k_2 r_i^4 + \dots) \\ \Delta x_{i2} &= \Delta r \frac{x_{i2}}{r_i} = x_{i2} (k_1 r_i^2 + k_2 r_i^4 + \dots) \end{aligned} \quad (2.4)$$

El valor de los coeficientes  $k_l$  (con  $l = 1, 2, \dots$ ) del polinomio en (2.4), pueden ser determinados mediante procedimientos de calibración [11, 38, 55].

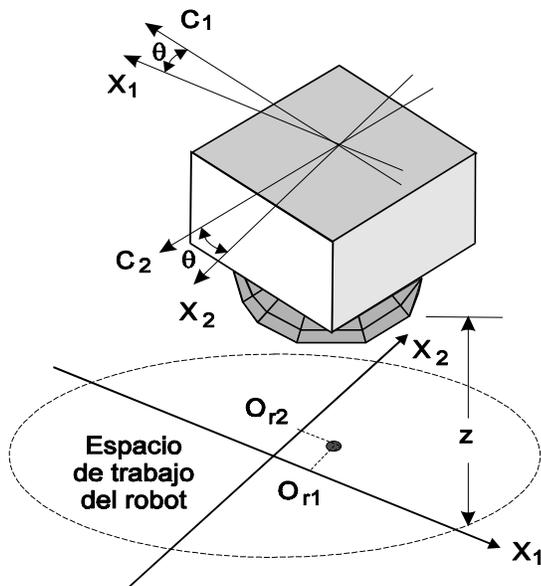


Figura 2.8: Sistema Coordinado de la Cámara y el Robot

### 2.6.3 Modelo *pinhole*

A continuación describiremos el modelo *pinhole* que será utilizado a lo largo de esta tesis para modelar el proceso de formación de una imagen. Asumiremos que el plano imagen es paralelo al plano donde el robot se mueve.

El modelo para la transformación de las coordenadas de un punto  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^T$  a las coordenadas en pantalla  $\mathbf{x}_s = [x_{s1}, x_{s2}]^T$ , las cuales serán utilizadas por la computadora, consiste en un procedimiento de 4 pasos los cuales se enuncian a continuación:

1) *Transformación de cuerpo rígido*: de las coordenadas del punto  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^T$  a las coordenadas  $\mathbf{x}_c = [x_{c1}, x_{c2}, x_{c3}]^T$ , que se encuentra definida por la ecuación (2.1), asumiendo que no existe traslación y que los ejes  $X_3$  y  $C_3$  no coinciden, obtenemos:

$$\begin{bmatrix} x_{c1} \\ x_{c2} \end{bmatrix} = \mathbf{R}(\theta) \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} O_1 \\ O_2 \end{bmatrix} \right\} \quad (2.5)$$

donde  $[O_1, O_2]^T$  son las coordenadas del punto de intersección del eje  $C_3$  en el plano  $X_1 - X_2$  (ver figura 2.8).

2) *Transformación perspectiva*: dada por la ecuación (2.2):

$$\begin{bmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \end{bmatrix} = \frac{\lambda}{\lambda - z} \begin{bmatrix} x_{c1} \\ x_{c2} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

3) *Modelo de distorsiones radiales*: éstas se consideran despreciables, es decir, que en la ecuación (2.4) tenemos:

$$(k_1 r_i^2 + k_2 r_i^4 + \dots) = 0$$

esto significa que:

$$\begin{bmatrix} x_{d1} \\ x_{d2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \end{bmatrix}$$

4) *Conversión de coordenadas*: La cual es realizada de las coordenadas imagen  $\mathbf{x}_i = [x_{i1}, x_{i2}]^T$  a las coordenadas de pantalla  $\mathbf{x}_s = [x_{s1}, x_{s2}]^T$ :

$$\begin{bmatrix} x_{s1} \\ x_{s2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_x & 0 \\ 0 & \alpha_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{d1} \\ x_{d2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_x \\ C_y \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

donde  $[C_x, C_y]^T$  son las coordenadas del centro de la imagen y  $\alpha_x, \alpha_y$  son los factores de escala en unidades de longitud correspondientes a la distancia entre *pixels* sobre la pantalla en la dirección horizontal y vertical respectivamente.

Este modelo del sistema de visión depende de forma no lineal de los parámetros intrínsecos y extrínsecos de la cámara.

## 2.7 Error de posicionamiento de imagen

De (2.7), podemos definir la posición del órgano terminal de un robot de dos grados de libertad que se mueve en el plano en coordenadas de pantalla, realizando la suposición de que tenemos *pixels* cuadrados, es decir  $\alpha_x = \alpha_y = \alpha$ , como:

$$\begin{bmatrix} x_{s1} \\ x_{s2} \end{bmatrix} = \alpha h \mathbf{R}(\theta) \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} O_1 \\ O_2 \end{bmatrix} \right\} + \begin{bmatrix} C_x \\ C_y \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

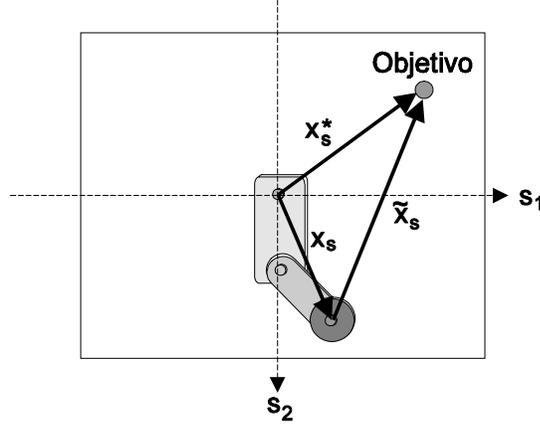


Figura 2.9: Definición del Error de Posicionamiento de Imagen

De la misma forma, definamos la posición del objetivo como:

$$\begin{bmatrix} x_{s1}^* \\ x_{s2}^* \end{bmatrix} = \alpha h \mathbf{R}(\theta) \left\{ \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} O_1 \\ O_2 \end{bmatrix} \right\} + \begin{bmatrix} C_x \\ C_y \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

donde  $[x_1^*, x_2^*]^T$  denota la posición del objetivo expresada en el sistema de coordenadas del robot,  $h$  definida como en (2.3) y  $\mathbf{R}(\theta)$  está dada de la siguiente forma [32, 54]:

$$\mathbf{R}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

En la figura 2.9 se ilustra el error de posicionamiento de imagen  $\tilde{\mathbf{x}}_s$ , que está definido como la distancia entre la posición del órgano terminal del robot y del objetivo, ésto es:

$$\tilde{\mathbf{x}}_s = \mathbf{x}_s^* - \mathbf{x}_s = \begin{bmatrix} x_{s1}^* \\ x_{s2}^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_{s1} \\ x_{s2} \end{bmatrix}$$

De (2.8) y (2.9), el error de posicionamiento de imagen puede reescribirse como:

$$\tilde{\mathbf{x}}_s = \alpha h \mathbf{R}(\theta) \{ \mathbf{x}^* - \mathbf{x} \} \quad (2.11)$$

o bien,

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_{s1} \\ \tilde{x}_{s2} \end{bmatrix} = \alpha h \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right\}$$

Es necesario para propósitos de análisis de estabilidad, realizar las siguientes suposiciones sobre el objetivo.

**Suposición 1** *El objetivo a manipular es estático, esto es, la derivada con respecto al tiempo de la posición del objetivo es cero:*

$$\frac{d\mathbf{x}^*}{dt} = 0 \quad (2.12)$$

**Suposición 2** *El objetivo se encuentra localizado dentro del espacio de trabajo del robot, es decir, existe por lo menos un vector constante de la posición  $\mathbf{x} = [x_1, x_2]$ , para ciertos ángulos en los eslabones  $\mathbf{q}(t) \in \mathfrak{R}^n$  tal que el órgano terminal del robot se encuentra sobre el objetivo.*

Si la anterior suposición no se cumple, significa que no es posible posicionar el robot en  $\mathbf{x}$ .

## 2.8 Controlador visual basado en el *Jacobiano* transpuesto

La ley de control visual propuesta en la presente tesis se basa en el controlador desarrollado en [32], el cual tiene la siguiente forma:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}(\mathbf{q})^T \mathbf{R}(\theta)^T \mathbf{K}_p \tilde{\mathbf{x}}_s - \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) \quad (2.13)$$

donde  $\mathbf{K}_p$  y  $\mathbf{K}_d$  son matrices definidas positivas, las cuales corresponden a las ganancias proporcional y derivativa respectivamente,  $\mathbf{R}(\theta)$  es la matriz de rotación definida en (2.10),  $\tilde{\mathbf{x}}_s \in \mathfrak{R}^n$  es el error de posicionamiento de imagen y  $\mathbf{G}(\mathbf{q})$  es el vector de los pares gravitacionales.

La función candidata de Lyapunov propuesta para realizar la prueba de estabilidad es:

$$\mathbf{V}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{x}}_s^T \mathbf{K}_p \mathbf{H}^{-1} \tilde{\mathbf{x}}_s \quad (2.14)$$

donde:

$$\mathbf{H} = \frac{\lambda}{\lambda - z} \begin{bmatrix} \alpha_x & 0 \\ 0 & \alpha_y \end{bmatrix}$$

con  $\alpha_x$  y  $\alpha_y$  los factores de escala en la dirección horizontal y vertical respectivamente,  $z$  la distancia del objeto al plano del lente y  $\lambda$  la distancia focal.

## Capítulo 3

# Redes neuronales

### 3.1 Introducción

Los nuevos problemas para el control de sistemas que son consecuencia de los avances tecnológicos y científicos sugieren la necesidad de nuevas herramientas para ser abordados. Entre éstas encontramos el control basado en redes neuronales artificiales inspiradas en la arquitectura del sistema nervioso humano. Fundamentalmente, el cerebro humano está constituido de billones de celdas nerviosas llamadas neuronas, las cuales se encuentran interconectadas para constituir una red neuronal biológica. Nuestro proceso de pensamiento es generado por la acción de estas redes biológicas.

Las redes neuronales artificiales o simplemente redes neuronales simulan el funcionamiento de las redes biológicas mediante modelos matemáticos, los cuales son implementados usando componentes electrónicos o mediante algún *software* en una computadora. Las redes neuronales tienen las siguientes características: habilidad de aprendizaje, habilidad de procesamiento en paralelo y la propiedad de aproximar cualquier función suave. Los elementos apropiados para las redes neuronales, tales como su arquitectura, la funcionalidad de los nodos, el aprendizaje y las reglas de adaptación, así como los datos de entrenamiento a utilizar, son especificados de acuerdo con la aplicación que se le da a éstas.

Las redes neuronales han sido estudiadas por muchos años y sus propiedades de aprendizaje y adaptación, clasificación, aproximación de funciones, extracción de características y de más,

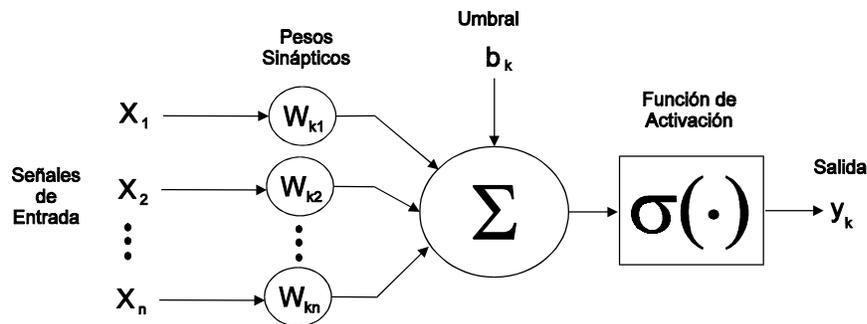


Figura 3.1: Modelo Matemático de una Neurona

han sido extremadamente usadas en aplicaciones de procesamiento de señales e identificación de sistemas, éstas son aplicaciones en lazo abierto [5, 19]. En aplicaciones de control en lazo cerrado [39, 40], se han iniciado recientemente algunos análisis matemáticos de pruebas rigurosas, donde debe de garantizarse el acotamiento tanto de los pesos de la red como el del error de regulación o de seguimiento.

### 3.2 Modelo matemático de una neurona

Una neurona es la unidad básica de procesamiento de información de una red neuronal y se muestra en la figura 3.1. En términos matemáticos, la salida  $y_k$  de una neurona puede ser escrita como:

$$y_k = \sigma \left( \sum_{j=1}^n w_{kj} x_j + b_k \right)$$

donde  $x_1, x_2, \dots, x_n$  son las señales de entrada,  $w_{k1}, w_{k2}, \dots, w_{kn}$  son los pesos sinápticos correspondientes a la neurona  $k$ ,  $b_k$  es el umbral y  $\sigma(\cdot)$  es la función de activación. Este modelo fue denominado como el perceptrón por Rosenblatt en 1959 [19].

La salida  $y_k$  puede ser expresada en forma equivalente como:

$$y_k = \sigma(\mathbf{w}^T \mathbf{x}) \quad (3.1)$$

donde  $\mathbf{x} \equiv [1, x_1, x_2, \dots, x_n]^T$  y  $\mathbf{w} \equiv [b_k, w_{k1}, w_{k2}, \dots, w_{kn}]^T$ . Las funciones de activación  $\sigma(\cdot)$  más comúnmente utilizadas se muestran en la figura 3.2.

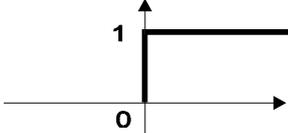
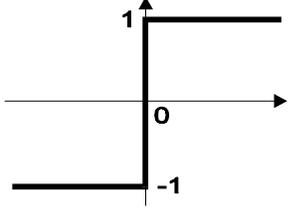
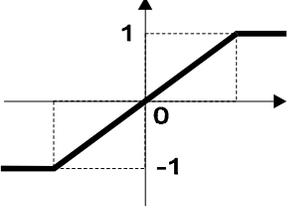
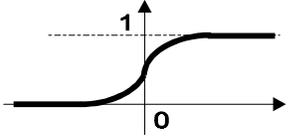
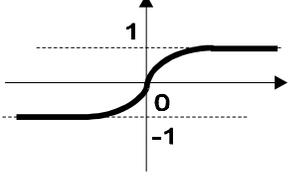
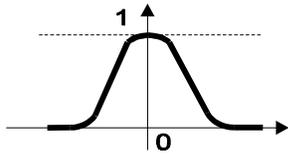
Función de activación	Gráfico
Escalón ( <i>Hard Limit</i> )	
Escalón Simétrico	
Umbral Lineal	
Sigmoide $\frac{1}{1 + e^{-x}}$	
Tangente Hiperbólica $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$	
Gaussiana $e^{-x^2/p^2}$	

Figura 3.2: Funciones de Activación

### 3.3 Arquitecturas de las redes neuronales

La forma en que se realiza la conexión entre las neuronas de una red neuronal permiten clasificarlas en tres diferentes tipos: redes neuronales de una capa con conexiones hacia adelante (*feedforward*), redes neuronales multicapa con conexiones hacia adelante y redes neuronales multicapa recurrentes (*feedback*) donde existen lazos de retroalimentación entre las neuronas. La estructura de estas redes neuronales se muestran en las figuras 3.3, 3.4 y 3.5.

Con base en la ecuación (3.1), la salida de una red de una capa tipo *feedforward* está dada de la siguiente forma:

$$\mathbf{y} = \sigma(\mathbf{W}^T \mathbf{x}) \quad (3.2)$$

donde:

$$\mathbf{y} \equiv \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{N_2} \end{bmatrix} \quad \sigma(\mathbf{z}) \equiv \begin{bmatrix} \sigma(z_1) \\ \sigma(z_2) \\ \vdots \\ \sigma(z_{N_2}) \end{bmatrix} \quad \mathbf{W}^T \equiv \begin{bmatrix} b_1 & w_{11} & w_{12} & \cdots & w_{1N_1} \\ b_2 & w_{21} & w_{22} & \cdots & w_{2N_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{N_2} & w_{N_21} & w_{N_22} & \cdots & w_{N_2N_1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{N_1} \end{bmatrix}$$

con  $\mathbf{z} = \mathbf{W}^T \mathbf{x}$ .

Para el caso de una red multicapa con conexiones hacia adelante (*feedforward*), su salida se encuentra dada por la siguiente ecuación:

$$y_k = \phi \left( \sum_{j=1}^{N_2} w_{kj} \sigma \left( \sum_{i=1}^{N_1} v_{ji} x_i + v_{j0} \right) + w_{k0} \right) \quad k = 1, 2, \dots, N_3 \quad (3.3)$$

donde  $\sigma(\cdot)$  y  $\phi(\cdot)$  son las funciones de activación de la capa oculta y la capa de salida respectivamente,  $v_{ji}$  son los pesos de interconexión entre la señal de entrada y la capa oculta,  $w_{kj}$  son los pesos de interconexión entre la capa oculta y la capa de salida y  $v_{j0}, w_{k0}$  son los umbrales (*thresholds*) de la capa oculta y la de salida, respectivamente.

En notación matricial tenemos que (3.3) puede ser escrita como:

$$y = \phi(\mathbf{W}^T \sigma(\mathbf{V}^T \mathbf{x})) \quad (3.4)$$

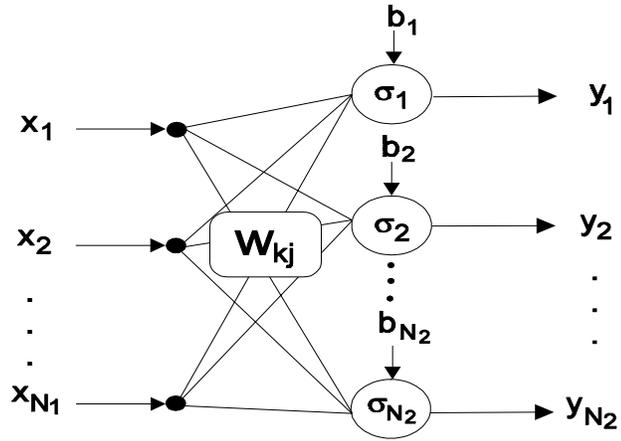


Figura 3.3: Red Neuronal de una Capa

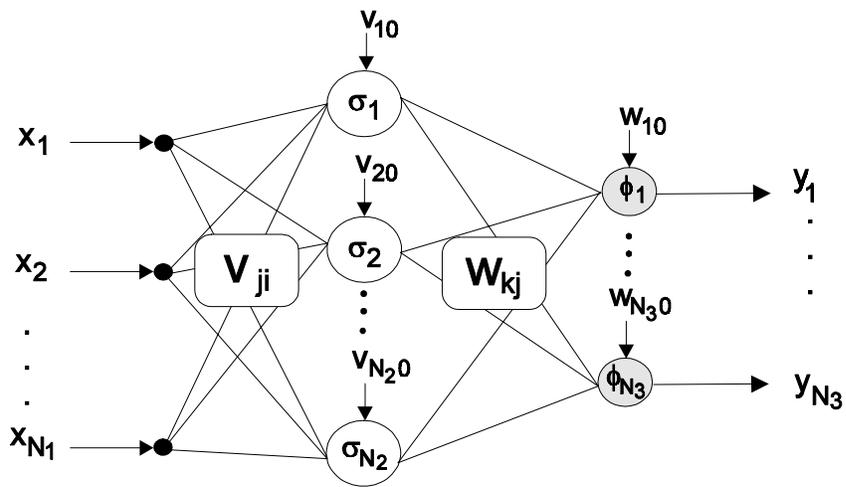
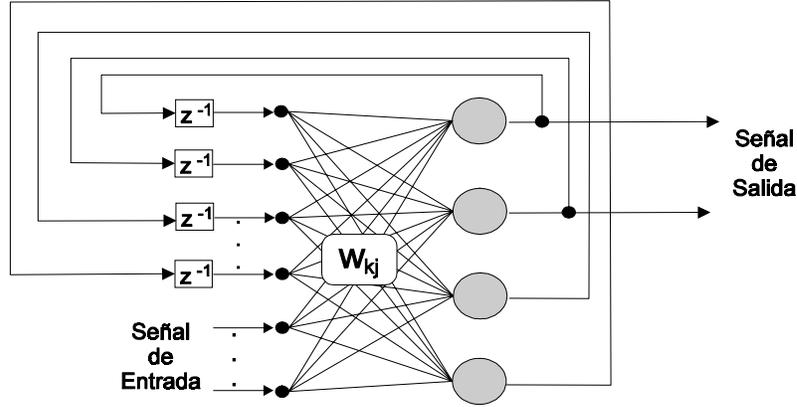


Figura 3.4: Red Neuronal Multicapa *Feedforward*

Figura 3.5: Red Neuronal *Feedback* Discreta

donde:

$$\mathbf{y} \equiv \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{N_3} \end{bmatrix} \quad \phi(\mathbf{z}_1) \equiv \begin{bmatrix} \phi(z_{11}) \\ \phi(z_{12}) \\ \vdots \\ \phi(z_{1N_3}) \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{z}_2) \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ \sigma(z_{21}) \\ \sigma(z_{22}) \\ \vdots \\ \sigma(z_{2N_2}) \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{N_1} \end{bmatrix}$$

con  $\mathbf{z}_1 = \mathbf{W}^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{z}_2)$ ,  $\mathbf{z}_2 = \mathbf{V}^T \mathbf{x}$  y las matrices de pesos definidas como:

$$\mathbf{W}^T = \begin{bmatrix} w_{10} & w_{11} & \cdots & w_{1N_2} \\ w_{20} & w_{21} & \cdots & w_{2N_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_{N_3 0} & w_{N_3 1} & \cdots & w_{N_3 N_2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{V}^T = \begin{bmatrix} v_{10} & v_{11} & \cdots & v_{1N_1} \\ v_{20} & v_{21} & \cdots & v_{2N_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{N_2 0} & v_{N_2 1} & \cdots & v_{N_2 N_1} \end{bmatrix}$$

Cuando la función de activación de la capa de salida  $\phi(\cdot)$  es lineal y la primera capa de pesos junto con sus umbrales contenidos en la matriz  $\mathbf{V}$  son predeterminados por algún método *a priori*, entonces solamente la segunda capa de pesos y sus umbrales, representados por la matriz  $\mathbf{W}$  son considerados para definir a la red neuronal, esto es, la red neuronal (3.4) puede describirse como:

$$\mathbf{y} = \mathbf{W}^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{z}_2)$$

esta red es conocida como *functional link neural net* (FLNN) [39].

### 3.4 Redes neuronales basadas en funciones radiales básicas

Una función radial básica (RBF) es una función multidimensional la cual depende de la distancia  $d = \|\mathbf{x} - \mathbf{c}\|$  (donde  $\|\cdot\|$  representa una norma vectorial apropiada que generalmente es la norma euclidiana) entre el vector de entrada  $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n$  y el centro  $\mathbf{c} \in \mathfrak{R}^n$ . Uno de los enfoques más simples para la aproximación de una función no lineal es representar ésta por una combinación lineal de funciones básicas no lineales fijas  $\sigma_i(\mathbf{x})$ , esto es:

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n w_i \sigma_i(\mathbf{x})$$

El propósito de asociarlo con una red neuronal es que ésta realice la estimación del conjunto de coeficientes  $w_i$ . La red neuronal RBF fue propuesta por Broomhead y Lowe [3] en 1988, ésta puede ser considerada como una red neuronal de dos capas especial, en la cual la capa oculta realiza una transformación no lineal mapeando el espacio de entrada en un nuevo espacio y la capa de salida implementa una combinación lineal en este nuevo espacio. La figura 3.6 muestra la estructura básica de una red neuronal RBF que contiene una capa oculta pero a diferencia con el perceptrón, ésta no puede extenderse a más capas, además, la conexión de la capa oculta con la entrada de la red no tiene pesos sinápticos, esto es, cada neurona recibe el vector de entrada sin alteración.

La salida de la red neuronal RBF se encuentra dada por la siguiente expresión:

$$\mathbf{y} = \mathbf{W}^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$$

donde:

$$\mathbf{x} \equiv \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{N_1} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ \sigma_1(x) \\ \sigma_2(x) \\ \vdots \\ \sigma_{N_2}(x) \end{bmatrix} \quad \mathbf{W}^T = \begin{bmatrix} w_{10} & w_{11} & \cdots & w_{1N_2} \\ w_{20} & w_{21} & \cdots & w_{2N_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_{N_3 0} & w_{N_3 1} & \cdots & w_{N_3 N_2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{y} \equiv \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{N_3} \end{bmatrix}$$

Las redes neuronales RBF han sido ampliamente utilizadas para la aproximación de funciones no lineales y para la clasificación de datos en varias áreas entre las cuales tenemos procesamiento de señales [9], modelado de sistemas [15] y control [25, 28].

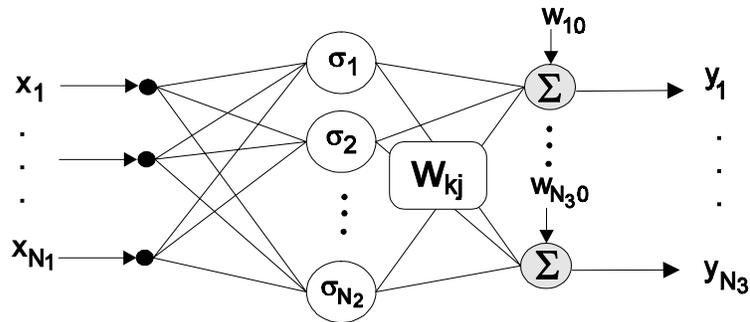


Figura 3.6: Red Neuronal de Funciones Radiales Básicas

Existe una amplia gama de funciones radiales básicas que son utilizadas como funciones de activación para una red neuronal, las siguientes funciones son de particular interés en el estudio de redes neuronales RBF:

1.- Lineal

$$\sigma(d) = d \quad \forall d \in \mathfrak{R}$$

2.- Cúbica

$$\sigma(d) = d^3 \quad \forall d \in \mathfrak{R}$$

3.- Función Gaussiana

$$\phi(d) = \exp\left(-\frac{d^2}{2p^2}\right) \quad \forall p > 0 \text{ y } d \in \mathfrak{R}$$

4.- Multicuadrática

$$\phi(d) = (d^2 + p^2)^{\frac{1}{2}} \quad \forall p > 0 \text{ y } d \in \mathfrak{R}$$

5.- Inversa multicuadrática

$$\phi(d) = \frac{1}{(d^2 + p^2)^{\frac{1}{2}}} \quad \forall p > 0 \text{ y } d \in \mathfrak{R}$$

De las anteriores definiciones la más popular y extensamente usada es la función gaussiana.

Lo importante en una red RBF es la selección de los parámetros de la función de activación, el número de neuronas en la capa oculta para alguna aplicación específica de la red y la determinación del método de ajuste de los pesos sinápticos. Ha sido mostrado experimentalmente que si un número suficiente de unidades ocultas es usado y si los centros son apropiadamente distribuidos en el dominio de entrada, entonces, la red RBF es capaz de aproximar una gran variedad de funciones no lineales multidimensionales, sin embargo, se ha encontrado que la selección de la RBF no es tan crucial para el desempeño de la red como lo es la selección de sus centros [48].

### 3.5 Función radial básica del tipo gaussiano

La función de activación usada para la red neuronal RBF a lo largo de esta tesis será la función gaussiana, la cual está dada por la siguiente ecuación cuando  $x$  es escalar:

$$\sigma(x) = e^{-(x-c)^2/p^2} \quad (3.5)$$

donde  $c$  es el centro y  $p$  la varianza. Para el caso en el cual  $\mathbf{x}$  es vector tenemos que la  $j$ -ésima función gaussiana puede ser escrita como:

$$\sigma_j(\mathbf{x}) = e^{-(\mathbf{x}-\mathbf{c}_j)^T \mathbf{P}_j^{-1} (\mathbf{x}-\mathbf{c}_j)} \quad (3.6)$$

con  $\mathbf{x}, \mathbf{c}_j \in \mathbb{R}^{N_1}$  y  $\mathbf{P}_j \in \mathbb{R}^{N_1 \times N_1}$  la matriz de varianza. Definamos el vector de la función de activación como:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \equiv [\sigma_1(\mathbf{x}), \sigma_2(\mathbf{x}), \dots, \sigma_{N_2}(\mathbf{x})]^T$$

Si la matriz de varianza es diagonal, esto es,  $\mathbf{P}_j = \text{diag}\{p_{jk}^2\}$ , entonces, (3.6), puede descomponerse como:

$$\sigma_j(\mathbf{x}) = e^{-\sum_{k=1}^{N_1} (x_k - c_{jk})^2 / p_{jk}^2} = \prod_{k=1}^{N_1} e^{-(x_k - c_{jk})^2 / p_{jk}^2} \quad (3.7)$$

donde  $x_k, c_{jk}$  son las  $k$ -ésimas componentes de  $\mathbf{x}, \mathbf{c}$ . Por lo tanto, la función gaussiana de dimensión  $N_1$  es el producto de  $N_1$  funciones escalares.

En la práctica, los centros  $c_{jk}$  son con frecuencia seleccionados aleatoriamente como un subconjunto representativo del dominio de entrada y posteriormente éstos y su varianza  $p_{jk}$  se mantienen

fijos [15, 28, 43], éste será el criterio de selección de los centros en la presente tesis. En [1, 8, 36, 58] podemos encontrar algunos métodos alternativos para la selección de los centros de las funciones radiales básicas.

### 3.6 Aproximación de funciones

De importancia fundamental en aplicaciones de control en lazo cerrado con redes neuronales es su propiedad de aproximación de funciones que se cumple para el caso de una red neuronal de una capa siempre y cuando la función  $\sigma(\cdot)$  sea seleccionada como una base [6, 23, 27, 49, 51]. Esta propiedad se enuncia a continuación:

**Propiedad 1** Sea  $S$  un conjunto compacto de  $\mathfrak{R}^{N_1}$  y  $\varphi(\cdot) : S \rightarrow \mathfrak{R}^{N_3}$  una función suave, definase  $C^{N_3}(S)$  como el espacio de funciones continuas  $\varphi(\cdot)$ , entonces, para toda  $\varphi(\cdot) \in C^{N_3}(S)$ , tenemos que:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{W}^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\varepsilon} \quad \forall \mathbf{x} \in S$$

para algunos pesos ideales  $W$  y para un número  $N_2$  de neuronas en la capa oculta, con:

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}\| < k_\varepsilon$$

donde  $k_\varepsilon > 0$ .

La constante  $\varepsilon$  es conocida como *error de reconstrucción de la red* y ésta decrece conforme crece el número  $N_2$  de neuronas en la capa oculta. Es importante notar que los pesos de la red son desconocidos pero la anterior propiedad garantiza que éstos existen.

### 3.7 Compensador neuronal

En esta sección se desarrollará un compensador neuronal por medio de una red neuronal RBF. Esta red representa una alternativa atractiva para atenuar el efecto debido a los pares gravitacionales en un robot manipulador con respecto a una red de dos o más capas, ya que su aprendizaje es más sencillo y es de fácil implementación.

Algunas suposiciones referentes a la red neuronal serán requeridas para el análisis de estabilidad del controlador PD visual con compensación neuronal, estas suposiciones son razonables en cualquier situación práctica y son estándar en la literatura referente a redes neuronales.

**Suposición 3** *Los pesos ideales de la red neuronal son constantes y acotados [39]:*

$$\|\mathbf{W}\|_F \leq k_w$$

donde  $\|\cdot\|_F$  es la norma de Frobenius y  $k_w > 0$ .

**Suposición 4** *La función radial básica definida por la ecuación (3.5) que será utilizada como función de activación  $\sigma(\cdot)$  para la red neuronal RBF forma una base.*

**Suposición 5** *El error de reconstrucción de la red neuronal se encuentra acotado por:*

$$\|\varepsilon\| < k_\varepsilon \quad (3.8)$$

con  $k_\varepsilon > 0$ .

La suposición 4 permite que la propiedad 1 se mantenga para cualquier función suave.

Consideremos ahora que una red neuronal RBF es usada para aproximar los efectos de la gravedad  $\mathbf{G}(\mathbf{q})$  en un robot manipulador, esto es:

$$\mathbf{G}(\mathbf{q}) = \mathbf{W}^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{q}) + \varepsilon \quad (3.9)$$

con  $\mathbf{W} \in \mathfrak{R}^{N_3 \times N_2}$  los pesos ideales, los cuales son desconocidos y pueden no ser únicos y  $\mathbf{q}$  es el vector de la posición angular de los eslabones del manipulador, entonces, un estimado de  $\mathbf{G}(\mathbf{q})$  denotado como  $\widehat{\mathbf{G}}(\mathbf{q})$  está dado por la siguiente expresión:

$$\widehat{\mathbf{G}}(\mathbf{q}) = \widehat{\mathbf{W}}^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{q}) \quad (3.10)$$

con  $\widehat{\mathbf{W}} \in \mathfrak{R}^{N_3 \times N_2}$  los valores actuales de los pesos, los cuales serán ajustados por algún algoritmo de aprendizaje.

Definamos la desviación de los pesos o el error de estimación de los pesos como:

$$\widetilde{\mathbf{W}} = \mathbf{W} - \widehat{\mathbf{W}} \quad (3.11)$$

Utilizando el estimado  $\widehat{\mathbf{G}}(\mathbf{q})$  en (2.13) para realizar la compensación de los pares gravitacionales, obtenemos la siguiente ley de control visual:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}(\mathbf{q})^T \mathbf{R}(\theta)^T \mathbf{K}_p \widetilde{\mathbf{x}}_s - \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{q}} + \widehat{\mathbf{W}}^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{q})$$

donde será necesario demostrar que el ajuste en línea de los pesos de la red neuronal  $\widehat{\mathbf{W}}$  garantizan la estabilidad de posicionamiento del órgano terminal del robot sobre algún objetivo dado.



# Capítulo 4

## Análisis de estabilidad

### 4.1 Introducción

En el análisis de estabilidad del problema de regulación en robots manipuladores, generalmente se hace uso de una función de Lyapunov que está compuesta de la energía cinética total y de la energía potencial deseada, esta última es usada junto con el principio de invariancia de LaSalle para demostrar estabilidad asintótica de un controlador PD [31, 56]. Este tipo de funciones de Lyapunov proveen una herramienta muy poderosa para analizar las propiedades de robustez con respecto a incertidumbres y perturbaciones.

Nuevos trabajos han sido desarrollados para establecer tanto estabilidad asintótica como exponencial de un controlador PD sin el uso del teorema de LaSalle. Esto se realiza mediante el uso de un término cruzado en la función de Lyapunov [33, 52, 59]. Este tipo de funciones fueron nombradas como *funciones estrictas de Lyapunov* en [52], éstas se encuentran compuestas de la suma de la energía cinética y potencial mas un término cruzado entre la velocidad y el error de posición el cual puede estar normalizado.

Motivados por estos trabajos, en este capítulo se realizará un análisis riguroso para demostrar que el sistema compuesto por un robot manipulador y un sistema de visión en lazo cerrado con compensación neuronal es uniformemente, finalmente acotado (*uniform, ultimate boundedness*) utilizando una función de Lyapunov que contiene un término cruzado entre el error de posición de imagen y la velocidad articular.

## 4.2 Características de un robot manipulador

### 4.2.1 Cinemática y jacobiano

La cinemática de un robot manipulador considera solamente el posicionamiento relativo y no los efectos del movimiento, ésta se divide en cinemática inversa y cinemática directa.

La cinemática inversa nos permite obtener el valor de los ángulos en los eslabones de un robot manipulador a partir de la posición deseada, mientras que la cinemática directa nos proporciona las coordenadas del órgano terminal del robot  $\mathbf{x}(t) \in \mathfrak{R}^m$  en el espacio de trabajo, con respecto a las variables angulares de los eslabones  $\mathbf{q}(t) \in \mathfrak{R}^n$ , por medio de un producto de transformaciones homogéneas que pueden ser obtenidas mediante la metodología de Denavit Hartenberg [41, 54]. Esta se encuentra definida de la siguiente manera:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}_x(\mathbf{q}) \quad (4.1)$$

donde  $\mathbf{f}_x : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^m$ .

Con base en esta definición, el error de posicionamiento de imagen (2.11) puede ser escrito como:

$$\tilde{\mathbf{x}}_s = \alpha h \mathbf{R}(\theta) [\mathbf{f}_x(\mathbf{q}_d) - \mathbf{f}_x(\mathbf{q})] \quad (4.2)$$

donde  $\mathbf{q}_d$  corresponde a una configuración articular del robot deseada.

La matriz Jacobiana de un robot  $\mathbf{J}(\mathbf{q}) \in \mathfrak{R}^{m \times n}$  que permite la transformación de velocidades angulares a velocidades en espacio de trabajo del robot se encuentra definida por la siguiente expresión:

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{f}_x(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \quad (4.3)$$

Para propósitos de análisis de estabilidad se hace uso de las siguientes suposiciones referentes a la matriz jacobiana.

**Suposición 6** La matriz Jacobiana  $\mathbf{J}(\mathbf{q})$  es cuadrada e invertible.

**Suposición 7** [12, 54] La matriz Jacobiana  $\mathbf{J}(\mathbf{q})$  se encuentra acotada para toda  $\mathbf{q}(t) \in \mathfrak{R}^n$ , es decir, existe una constante finita  $b_J > 0$  tal que:

$$\|\mathbf{J}(\mathbf{q})\| \leq b_J \quad \forall \mathbf{q} \in \mathfrak{R}^n \quad (4.4)$$

### 4.2.2 Dinámica y propiedades

La dinámica del robot corresponde a las ecuaciones de movimiento, el medio por el cual, el robot se mueve en respuesta a los pares aplicados por el actuador o fuerzas externas. La dinámica considera los efectos debidos a las inercias, fuerzas de Coriolis, gravedad, perturbaciones y otros. Esta revela la relación entre la señal de control  $\boldsymbol{\tau}(t)$  y las variables articulares  $\mathbf{q}(t)$ , la cual es requerida para propósitos de diseño de un sistema de control.

La dinámica de un robot manipulador con eslabones rígidos, se encuentra dada por la siguiente ecuación [54]:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau}(t) \quad (4.5)$$

donde el vector  $\mathbf{q}(t) \in \mathfrak{R}^n$  representa la posición angular de los eslabones, el vector  $\dot{\mathbf{q}}(t) \in \mathfrak{R}^n$  es la velocidad angular de los eslabones,  $\mathbf{M}(\mathbf{q}) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  es la matriz de inercia,  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  es la matriz de las fuerzas de Coriolis y centrífugas,  $\mathbf{G}(\mathbf{q}) \in \mathfrak{R}^n$  es el vector de la fuerza de gravedad y el vector  $\boldsymbol{\tau}(t) \in \mathfrak{R}^n$  representa los pares aplicados a las juntas del robot.

La dinámica de un robot puede ser obtenida mediante varias técnicas, incluyendo los métodos Euler-Lagrange y Newton-Euler [41, 54], los cuales pueden ser generalmente descritos con respecto a los parámetros de Denavit Hartenberg.

Del capítulo anterior tenemos que el término de la gravedad puede ser aproximado mediante una red neuronal RBF (3.9), por lo tanto, la ecuación (4.5) puede ser reescrita de la siguiente manera:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{W}^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{q}) + \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\tau}(t) \quad (4.6)$$

La dinámica de un robot satisface algunas importantes propiedades físicas, éstas se describen a continuación [41, 54].

**Propiedad 2** *La matriz de Coriolis está acotada por:*

$$\|\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\| \leq k_c \|\dot{\mathbf{q}}\| \quad \forall \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} \in \mathfrak{R}^n$$

la cota  $k_c$  es una constante positiva.

**Propiedad 3** *La matriz de Coriolis puede ser seleccionada de forma tal que  $\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  sea antisimétrica, es decir:*

$$\dot{\mathbf{q}}^T (\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}))\dot{\mathbf{q}} = 0 \quad \forall \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}$$

La anterior propiedad implica que las fuerzas ficticias en el sistema del robot no disipan energía, esta propiedad es vital para la demostración de estabilidad en el sentido de Lyapunov. La siguiente definición sobre la selección de los elementos de la matriz de coriolis  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  [50], permite que se mantenga dicha propiedad.

$$C_{ij}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \left[ \dot{\mathbf{q}}^T \frac{\partial M_{ij}}{\partial \mathbf{q}} + \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial M_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial M_{jk}}{\partial q_i} \right) \dot{q}_k \right], \quad (4.7)$$

$$i, j = 1, \dots, n.$$

donde  $M_{ij}$  son los elementos de la matriz de inercia. Esta definición implica que [56]:

$$\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) = \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T \quad (4.8)$$

**Propiedad 4** La matriz de inercia  $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ , es simétrica, definida positiva y acotada por:

$$m_1 \mathbf{I} \leq \mathbf{M}(\mathbf{q}) \leq m_2 \mathbf{I} \quad \forall \mathbf{q}(\mathbf{t})$$

donde  $\mathbf{I}$  es la matriz identidad.

### 4.3 Planteamiento del problema de control.

El problema de regulación en el espacio visual consiste en diseñar una ley de control tal que para cualquier condición inicial  $\mathbf{x}_s(t_o)$  en un tiempo  $T(B, \mathbf{x}_s(0))$  se tenga:

$$\|\mathbf{x}_s(t) - \mathbf{x}_s^*\| \leq B \quad \forall t \geq t_o + T$$

donde  $\mathbf{x}_s^*$  es la posición deseada y  $B$  es una constante positiva.

Para *visual servoing* con compensación neuronal, suponiendo que se encuentran disponibles las mediciones de la posición  $\mathbf{q}$  y la velocidad articular  $\dot{\mathbf{q}}$ , la ley de control propuesta en el capítulo anterior tiene la siguiente forma:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}(\mathbf{q})^T \mathbf{R}(\theta)^T \mathbf{K}_p \tilde{\mathbf{x}}_s - \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{q}} + \widehat{\mathbf{W}}^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{q}) \quad (4.9)$$

donde  $\mathbf{q} = [q_1, q_2]^T \in \mathfrak{R}^{N_1}$  es el vector de entrada para la red neuronal,  $\widehat{\mathbf{W}}^T = [w_{kj}] \in \mathfrak{R}^{N_3 \times N_2}$  es la matriz de pesos de la red,  $\boldsymbol{\sigma}(\cdot) \in \mathfrak{R}^{N_2}$  es la función de activación definida en (3.5),  $\mathbf{K}_p$  y

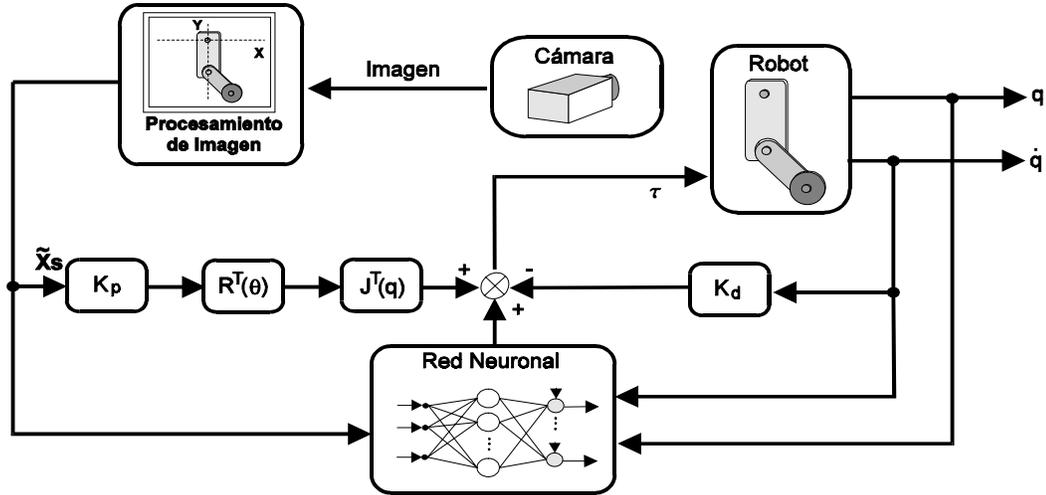


Figura 4.1: Diagrama a Bloques

$\mathbf{K}_d$  son matrices definidas positivas las cuales corresponden a las ganancias proporcional y derivativa respectivamente,  $\mathbf{R}(\theta)$  es la matriz de rotación definida en (2.10),  $\tilde{\mathbf{x}}_s \in \mathfrak{R}^n$  es el error de posicionamiento de imagen.

#### 4.4 Análisis de estabilidad.

La función candidata de Lyapunov usada durante el siguiente análisis consiste de tres términos: el término de la energía cinética, el error de la energía potencial y un término cruzado entre el error de posicionamiento de imagen y la velocidad angular. Debido al error de reconstrucción de la red neuronal  $\varepsilon$  es imposible demostrar que la derivada de la función de Lyapunov  $\dot{V}(\cdot)$  es definida negativa para todos los valores de los estados  $\tilde{\mathbf{x}}_s$ ,  $\dot{\mathbf{q}}$  y  $\tilde{\mathbf{W}}$ , en realidad, solamente es posible demostrar que  $\dot{V}(\cdot)$  es negativa fuera de un conjunto compacto en el espacio de estados, esto sin embargo nos permite concluir acotamiento del error de posicionamiento de imagen y de la velocidad articular, el caso cuando no existe error de reconstrucción de la red neuronal es tratado en el apéndice A.

La ley de aprendizaje utilizada para la actualización de los pesos de la red neuronal nos permitirá determinar que el error de estimación de los pesos  $\tilde{\mathbf{W}}$  se encuentra acotado sin la necesidad de utilizar la condición de excitación persistente.

El siguiente teorema utiliza la extensión de la teoría estándar de Lyapunov (ver apéndice B), para concluir que el sistema en lazo cerrado formado por (4.6) y (4.9) es *uniformemente, finalmente acotado* (*uniform, ultimate boundedness*), su diagrama de bloques es mostrado en la figura 4.1.

**Teorema 1** *Considere el sistema (4.6) en lazo cerrado con la ley de control (4.9), donde la actualización de los pesos para la red neuronal se encuentra dada por la siguiente ley de aprendizaje:*

$$\dot{\widehat{\mathbf{W}}} = -\mathbf{K}_w \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{q}) \left[ \dot{\mathbf{q}} - \mu \mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{R}(\boldsymbol{\theta})^T \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s) \right]^T - \frac{\mu \beta \mathbf{K}_w}{\lambda_{\max}(\mathbf{K}_w)} \|\tilde{\mathbf{x}}_s\| \widehat{\mathbf{W}} \quad (4.10)$$

con  $\mathbf{K}_w > 0$ , la función  $\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s)$  definida como:

$$\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s) = \beta \tilde{\mathbf{x}}_s \quad (4.11)$$

donde:

$$\beta = \frac{1}{1 + \|\tilde{\mathbf{x}}_s\|}$$

Si la constante  $\mu$  es seleccionada de la siguiente forma:

$$\min \left\{ \sqrt{\frac{\lambda_{\min}\{\mathbf{K}_p\}}{\alpha h \lambda_{\max}\{\Lambda\}}}, \frac{\lambda_{\min}\{\mathbf{K}_d\}}{\sqrt{8}[b_1 \gamma_1 + b_2 \lambda_{\max}\{\mathbf{M}(\mathbf{q})\} + b_1 k_c]}, \frac{2\lambda_{\min}\{\mathbf{K}_p\}}{\lambda_{\max}\{\Lambda_K\}} \right\} > \mu > 0 \quad (4.12)$$

donde:

$$\begin{aligned} \Lambda &= [\mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{R}(\boldsymbol{\theta})^T]^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{R}(\boldsymbol{\theta})^T \\ \Lambda_K &= [\mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{R}(\boldsymbol{\theta})^T]^T \mathbf{K}_d \mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{R}(\boldsymbol{\theta})^T \end{aligned} \quad (4.13)$$

$\gamma_1$ ,  $b_1$  y  $b_2$  constantes positivas definidas más adelante,  $\lambda_{\max}(\cdot)$  y  $\lambda_{\min}(\cdot)$  el máximo y mínimo valor propio respectivamente de una matriz, entonces, el sistema en lazo cerrado es *uniformemente, finalmente acotado* (UUB).

**Demostración.** Consideremos la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$\begin{aligned} V(\tilde{\mathbf{x}}_s, \dot{\mathbf{q}}, \widetilde{\mathbf{W}}) &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2\alpha h} \tilde{\mathbf{x}}_s^T \mathbf{K}_p \tilde{\mathbf{x}}_s - \mu \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{J}^*(\mathbf{q}) \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \\ &\quad + \frac{1}{2} \text{tr}(\widetilde{\mathbf{W}}^T \mathbf{K}_w^{-1} \widetilde{\mathbf{W}}) \end{aligned} \quad (4.14)$$

donde  $\mathbf{J}^*(\mathbf{q}) = (\mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1})^T$ . En el apéndice A se prueba que  $V(\tilde{\mathbf{x}}_s, \dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{W}}) > 0$ .

La derivada de la ecuación (4.14) con respecto al tiempo es:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\mathbf{x}}_s, \dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{W}}) &= \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{\alpha h} \frac{d\tilde{\mathbf{x}}_s^T}{dt} \mathbf{K}_p \tilde{\mathbf{x}}_s - \mu \dot{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{R}(\theta) \mathbf{J}^*(\mathbf{q}) \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \\ &\quad - \mu \dot{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{R}(\theta) \mathbf{J}^*(\mathbf{q}) \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \mu \dot{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{R}(\theta) \mathbf{J}^*(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \\ &\quad - \mu \dot{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{R}(\theta) \mathbf{J}^*(\mathbf{q}) \mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + tr(\tilde{\mathbf{W}}^T \mathbf{K}_w^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{W}}}) \end{aligned} \quad (4.15)$$

en la cual la derivada de  $\tilde{\mathbf{x}}_s$  con respecto al tiempo se encuentra dada de la siguiente forma:

$$\frac{d\tilde{\mathbf{x}}_s}{dt} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}_s}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = \frac{\partial \{\alpha h \mathbf{R}(\theta) [\mathbf{f}_x(\mathbf{q}_d) - \mathbf{f}_x(\mathbf{q})]\}}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = -\alpha h \mathbf{R}(\theta) \mathbf{J}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (4.16)$$

donde la definición del error de posicionamiento de imagen (4.2) fue utilizado.

Sustituyendo la dinámica del manipulador con la aproximación de las incertidumbres mediante una red neuronal (4.6), la derivada de  $\tilde{\mathbf{x}}_s$  con respecto al tiempo (4.16) y la definición (4.8) para  $\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q})$ , la ecuación (4.15) queda:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\mathbf{x}}_s, \dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{W}}) &= \dot{\mathbf{q}}^T \left[ \boldsymbol{\tau} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{W}^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{q}) - \boldsymbol{\varepsilon} \right] + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{J}(\mathbf{q})^T \mathbf{R}(\theta)^T \mathbf{K}_p \tilde{\mathbf{x}}_s \\ &\quad - \mu \dot{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{R}(\theta) \mathbf{J}^*(\mathbf{q}) \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \mu \dot{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{R}(\theta) \mathbf{J}^*(\mathbf{q}) \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \\ &\quad - \mu \dot{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{R}(\theta) \mathbf{J}^*(\mathbf{q}) \left[ \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T \right] \dot{\mathbf{q}} \\ &\quad - \mu \dot{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{R}(\theta) \mathbf{J}^*(\mathbf{q}) \left[ \boldsymbol{\tau} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{W}^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{q}) - \boldsymbol{\varepsilon} \right] + tr(\tilde{\mathbf{W}}^T \mathbf{K}_w^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{W}}}) \end{aligned}$$

Agrupando y eliminando términos de la ecuación anterior tenemos:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\mathbf{x}}_s, \dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{W}}) &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \left[ \mathbf{M}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right] \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \left[ \boldsymbol{\tau} - \mathbf{W}^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{q}) - \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{J}(\mathbf{q})^T \mathbf{R}(\theta)^T \mathbf{K}_p \tilde{\mathbf{x}}_s \right] \\ &\quad - \mu \dot{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{R}(\theta) \mathbf{J}^*(\mathbf{q}) \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \mu \dot{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{R}(\theta) \mathbf{J}^*(\mathbf{q}) \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \\ &\quad - \mu \dot{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{R}(\theta) \mathbf{J}^*(\mathbf{q}) \left[ \boldsymbol{\tau} - \mathbf{W}^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{q}) - \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T \dot{\mathbf{q}} \right] + tr(\tilde{\mathbf{W}}^T \mathbf{K}_w^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{W}}}) \end{aligned}$$

Usando la propiedad 3 y sustituyendo la ley de control (4.9), obtenemos:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\tilde{\mathbf{x}}_s, \dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{W}}) &= \dot{\mathbf{q}}^T \left[ \mathbf{J}(\mathbf{q})^T \mathbf{R}(\theta)^T \mathbf{K}_p \tilde{\mathbf{x}}_s - \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{q}} - \left( \mathbf{W}^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{q}) - \widehat{\mathbf{W}}^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{q}) \right) - \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{J}(\mathbf{q})^T \mathbf{R}(\theta)^T \mathbf{K}_p \tilde{\mathbf{x}}_s \right] \\
&\quad - \mu \dot{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{R}(\theta) \mathbf{J}^*(\mathbf{q}) \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \mu \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{R}(\theta) \dot{\mathbf{J}}^*(\mathbf{q}) \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \\
&\quad - \mu \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{R}(\theta) \mathbf{J}^*(\mathbf{q}) \left[ \mathbf{J}(\mathbf{q})^T \mathbf{R}(\theta)^T \mathbf{K}_p \tilde{\mathbf{x}}_s - \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{q}} - \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T \dot{\mathbf{q}} \right] \\
&\quad - \mu \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{R}(\theta) \mathbf{J}^*(\mathbf{q}) \left[ - \left( \mathbf{W}^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{q}) - \widehat{\mathbf{W}}^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{q}) \right) \right] + \text{tr}(\tilde{\mathbf{W}}^T \mathbf{K}_w^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{W}}})
\end{aligned}$$

Usando la definición del error de estimación de los pesos (3.11), eliminando y agrupando términos tenemos:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\tilde{\mathbf{x}}_s, \dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{W}}) &= -\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{q}} - \mu \dot{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{R}(\theta) \mathbf{J}^*(\mathbf{q}) \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \mu \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{R}(\theta) \dot{\mathbf{J}}^*(\mathbf{q}) \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (4.17) \\
&\quad - \mu \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{K}_p \tilde{\mathbf{x}}_s + \mu \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{R}(\theta) \mathbf{J}^*(\mathbf{q}) \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{q}} - \mu \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{R}(\theta) \mathbf{J}^*(\mathbf{q}) \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T \dot{\mathbf{q}} \\
&\quad - \left[ \dot{\mathbf{q}}^T - \mu \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{R}(\theta) \mathbf{J}^*(\mathbf{q}) \right] \boldsymbol{\varepsilon} \\
&\quad + \text{tr} \left\{ \tilde{\mathbf{W}}^T \left[ \mathbf{K}_w^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{W}}} - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}^T + \mu \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{q}) \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{R}(\theta) \mathbf{J}^*(\mathbf{q}) \right] \right\}
\end{aligned}$$

donde las siguientes propiedades fueron utilizadas [24, 44]:

$$\begin{aligned}
\text{tr}(\mathbf{AB}) &= \text{tr}(\mathbf{BA}) \\
(\mathbf{A}^{-1})^T &= (\mathbf{A}^T)^{-1}
\end{aligned} \tag{4.18}$$

con  $\mathbf{A} \in \mathfrak{R}^{m \times n}$  y  $\mathbf{B} \in \mathfrak{R}^{n \times m}$ , además tenemos que la matriz de rotación  $\mathbf{R}(\theta)$  cumple:

$$\mathbf{R}(\theta) \mathbf{R}(\theta)^T = \mathbf{I} \tag{4.19}$$

Consideremos ahora cotas superiores de los siguientes términos :

$$\begin{aligned}
-\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{q}} &\leq -\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2} \lambda_{\min} \{ \mathbf{K}_d \} \left\| \dot{\mathbf{q}} \right\|^2 \\
-\mu \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{R}(\theta) \mathbf{J}^*(\mathbf{q}) \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} &\leq \mu \sqrt{2} b_1 \gamma_1 \left\| \dot{\mathbf{q}} \right\|^2 \\
-\mu \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{R}(\theta) \dot{\mathbf{J}}^*(\mathbf{q}) \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} &\leq \mu \sqrt{2} b_2 \lambda_{\max} \{ \mathbf{M}(\mathbf{q}) \} \left\| \dot{\mathbf{q}} \right\|^2 \\
-\mu \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{R}(\theta) \mathbf{J}^*(\mathbf{q}) \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T \dot{\mathbf{q}} &\leq \mu \sqrt{2} b_1 k_c \left\| \dot{\mathbf{q}} \right\|^2
\end{aligned} \tag{4.20}$$

donde:

$$\gamma_1 = \sqrt{8} \alpha h b_J \lambda_{\max} \{ \mathbf{M}(\mathbf{q}) \}$$

$b_J$  y  $b_1$  cotas superiores de  $\mathbf{J}(\mathbf{q})$  y  $\mathbf{J}^*(\mathbf{q})$  respectivamente [12, 13, 14, 60], utilizándose la propiedad 2, las siguientes cotas superiores:

$$\| \mathbf{R}(\theta) \|_F^2 = \text{tr} \{ \mathbf{R}(\theta)^T \mathbf{R}(\theta) \} = 2 \tag{4.21}$$

$$\left\| \dot{\mathbf{J}}^*(\mathbf{q}) \right\| \leq b_2 \left\| \dot{\mathbf{q}} \right\| \tag{4.22}$$

y las siguientes propiedades de  $\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s)$  (ver apéndice B):

$$\begin{aligned}
\left\| \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s) \right\| &\leq 1 \\
\left\| \dot{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}_s) \right\| &\leq 2 \left\| \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_s \right\| \leq \sqrt{8} \alpha h b_J \left\| \dot{\mathbf{q}} \right\|
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Utilizando las cotas (4.20) en la ecuación (4.17) tenemos:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\tilde{\mathbf{x}}_s, \dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{W}}) &\leq -\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{q}} - \left[ \frac{1}{2} \lambda_{\min} \{ \mathbf{K}_d \} - \mu \sqrt{2} b_1 \gamma_1 - \mu \sqrt{2} b_2 \lambda_{\max} \{ \mathbf{M}(\mathbf{q}) \} - \mu \sqrt{2} b_1 k_c \right] \left\| \dot{\mathbf{q}} \right\|^2 \\
&\quad - \mu \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{K}_p \tilde{\mathbf{x}}_s + \mu \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{R}(\theta) \mathbf{J}^*(\mathbf{q}) \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{q}} - \left[ \dot{\mathbf{q}}^T - \mu \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{R}(\theta) \mathbf{J}^*(\mathbf{q}) \right] \boldsymbol{\varepsilon} \\
&\quad + \text{tr} \left\{ \tilde{\mathbf{W}}^T \left[ \mathbf{K}_w^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{W}}} - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}^T + \mu \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{q}) \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{R}(\theta) \mathbf{J}^*(\mathbf{q}) \right] \right\}
\end{aligned} \tag{4.24}$$

El término:

$$\gamma_2 = \frac{1}{2}\lambda_{\min} \{\mathbf{K}_d\} - \mu\sqrt{2}b_1\gamma_1 - \mu\sqrt{2}b_2\lambda_{\max} \{\mathbf{M}(\mathbf{q})\} - \mu\sqrt{2}b_1k_c \quad (4.25)$$

es positivo siempre y cuando la constante  $\mu$  satisfaga la siguiente condición:

$$\frac{\lambda_{\min} \{\mathbf{K}_d\}}{\sqrt{8} [b_1\gamma_1 + b_2\lambda_{\max} \{\mathbf{M}(\mathbf{q})\} + b_1k_c]} \geq \mu \quad (4.26)$$

La desigualdad (4.24) puede reescribirse como:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\mathbf{x}}_s, \dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{W}}) &\leq -\frac{1}{2} \left[ \dot{\mathbf{q}} - \mu\mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1}\mathbf{R}(\theta)^T\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s) \right]^T \mathbf{K}_d \left[ \dot{\mathbf{q}} - \mu\mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1}\mathbf{R}(\theta)^T\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s) \right] - \gamma_2 \left\| \dot{\mathbf{q}} \right\|^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}\mu^2\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T [\mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1}\mathbf{R}(\theta)^T]^T \mathbf{K}_d \mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1}\mathbf{R}(\theta)^T\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s) - \mu\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{K}_p \tilde{\mathbf{x}}_s \\ &\quad - \left[ \dot{\mathbf{q}}^T - \mu\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{R}(\theta) \mathbf{J}^*(\mathbf{q}) \right] \boldsymbol{\varepsilon} \\ &\quad + tr \left\{ \tilde{\mathbf{W}}^T \left[ \mathbf{K}_w^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{W}}} - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}^T + \mu\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{q})\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{R}(\theta) \mathbf{J}^*(\mathbf{q}) \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.27)$$

Consideremos las cotas superiores de los siguientes términos :

$$\frac{1}{2}\mu^2\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T [\mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1}\mathbf{R}(\theta)^T]^T \mathbf{K}_d \mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1}\mathbf{R}(\theta)^T\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s) = \frac{1}{2}\mu^2\beta^2\tilde{\mathbf{x}}_s^T \Lambda_K \tilde{\mathbf{x}}_s \leq \frac{1}{2}\mu^2\beta\lambda_{\max} \{\Lambda_K\} \left\| \tilde{\mathbf{x}}_s \right\|^2$$

$$-\mu\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{K}_p \tilde{\mathbf{x}}_s = -\mu\beta\tilde{\mathbf{x}}_s^T \mathbf{K}_p \tilde{\mathbf{x}}_s \leq -\mu\beta\lambda_{\min} \{\mathbf{K}_p\} \left\| \tilde{\mathbf{x}}_s \right\|^2$$

$$-\dot{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\varepsilon} \leq \left\| \dot{\mathbf{q}} \right\| \left\| \boldsymbol{\varepsilon} \right\| \leq k_\varepsilon \left\| \dot{\mathbf{q}} \right\|$$

$$\mu\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{R}(\theta) \mathbf{J}^*(\mathbf{q}) \boldsymbol{\varepsilon} = \mu\beta\tilde{\mathbf{x}}_s^T \mathbf{R}(\theta) \mathbf{J}^*(\mathbf{q}) \boldsymbol{\varepsilon} \leq \mu\beta\sqrt{2}b_1k_\varepsilon \left\| \tilde{\mathbf{x}}_s \right\|$$

donde (3.8) y las definiciones (4.11) y (4.13) fueron utilizadas.

Utilizando las cotas anteriores en la desigualdad (4.27) tenemos:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\mathbf{x}}_s, \dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{W}}) &\leq -\frac{1}{2} \left[ \dot{\mathbf{q}} - \mu\mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1}\mathbf{R}(\theta)^T\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s) \right]^T \mathbf{K}_d \left[ \dot{\mathbf{q}} - \mu\mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1}\mathbf{R}(\theta)^T\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s) \right] - \gamma_2 \left\| \dot{\mathbf{q}} \right\|^2 \\ &\quad - \left[ \lambda_{\min} \{\mathbf{K}_p\} - \frac{1}{2}\mu\lambda_{\max} \{\Lambda_K\} \right] \mu\beta \left\| \tilde{\mathbf{x}}_s \right\|^2 + k_\varepsilon \left\| \dot{\mathbf{q}} \right\| + \mu\beta\sqrt{2}b_1k_\varepsilon \left\| \tilde{\mathbf{x}}_s \right\| \\ &\quad + tr \left\{ \tilde{\mathbf{W}}^T \left[ \mathbf{K}_w^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{W}}} - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}^T + \mu\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{q})\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{R}(\theta) \mathbf{J}^*(\mathbf{q}) \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.28)$$

El término:

$$\gamma_3 = \lambda_{\min} \{ \mathbf{K}_p \} - \frac{1}{2} \mu \lambda_{\max} \{ \Lambda_K \} \quad (4.29)$$

es positivo siempre y cuando la constante  $\mu$  satisfaga la siguiente condición:

$$\frac{2\lambda_{\min} \{ \mathbf{K}_p \}}{\lambda_{\max} \{ \Lambda_K \}} \geq \mu \quad (4.30)$$

por lo anterior y seleccionando:

$$\dot{\widetilde{\mathbf{W}}} = \mathbf{K}_w \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{q}) \left[ \dot{\mathbf{q}} - \mu \mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{R}(\theta)^T \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s) \right]^T + \frac{\mu \beta \mathbf{K}_w}{\lambda_{\max}(\mathbf{K}_w)} \|\tilde{\mathbf{x}}_s\| \widehat{\mathbf{W}}$$

la desigualdad (4.28) puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\mathbf{x}}_s, \dot{\mathbf{q}}, \widetilde{\mathbf{W}}) &\leq -\frac{1}{2} \left[ \dot{\mathbf{q}} - \mu \mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{R}(\theta)^T \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s) \right]^T \mathbf{K}_d \left[ \dot{\mathbf{q}} - \mu \mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{R}(\theta)^T \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s) \right] \\ &\quad - \left[ \gamma_2 \|\dot{\mathbf{q}}\| - k_\varepsilon \right] \|\dot{\mathbf{q}}\| - \left[ \gamma_3 \|\tilde{\mathbf{x}}_s\| - \sqrt{2} b_1 k_\varepsilon \right] \mu \beta \|\tilde{\mathbf{x}}_s\| \\ &\quad + \frac{\mu \beta}{\lambda_{\max}(\mathbf{K}_w)} \|\tilde{\mathbf{x}}_s\| \operatorname{tr} \left\{ \widetilde{\mathbf{W}}^T (\mathbf{W} - \widetilde{\mathbf{W}}) \right\} \end{aligned} \quad (4.31)$$

debido a que  $\mathbf{W}$  es una matriz constante, de (3.11) se deriva que  $\dot{\widetilde{\mathbf{W}}} = -\dot{\widehat{\mathbf{W}}}$  de donde se obtiene la ley de aprendizaje (4.10) para la actualización de los pesos de la red neuronal.

Aplicando la siguiente desigualdad [39, 40, 42] a (4.31):

$$\operatorname{tr} \{ \widetilde{\mathbf{W}}^T (\mathbf{W} - \widetilde{\mathbf{W}}) \} = \langle \widetilde{\mathbf{W}}, \mathbf{W} \rangle_F - \|\widetilde{\mathbf{W}}\|_F^2 \leq \|\widetilde{\mathbf{W}}\|_F \|\mathbf{W}\|_F - \|\widetilde{\mathbf{W}}\|_F^2 \leq \|\widetilde{\mathbf{W}}\|_F \left( k_w - \|\widetilde{\mathbf{W}}\|_F \right) \quad (4.32)$$

donde  $\|\cdot\|_F$  es la norma de Frobenius y  $k_w$  es la cota de los pesos  $\mathbf{W}$ , se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\mathbf{x}}_s, \dot{\mathbf{q}}, \widetilde{\mathbf{W}}) &\leq -\frac{1}{2} \left[ \dot{\mathbf{q}} - \mu \mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{R}(\theta)^T \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s) \right]^T \mathbf{K}_d \left[ \dot{\mathbf{q}} - \mu \mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{R}(\theta)^T \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s) \right] \\ &\quad - \left[ \gamma_2 \|\dot{\mathbf{q}}\| - k_\varepsilon \right] \|\dot{\mathbf{q}}\| \\ &\quad - \left[ \gamma_3 \|\tilde{\mathbf{x}}_s\| - \sqrt{2} b_1 k_\varepsilon + \frac{1}{\lambda_{\max}(\mathbf{K}_w)} \|\widetilde{\mathbf{W}}\|_F \left( \|\widetilde{\mathbf{W}}\|_F - k_w \right) \right] \mu \beta \|\tilde{\mathbf{x}}_s\| \end{aligned}$$

Completando cuadrados para el tercer término de la desigualdad anterior se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\mathbf{x}}_s, \dot{\mathbf{q}}, \widetilde{\mathbf{W}}) &\leq -\frac{1}{2} \left[ \dot{\mathbf{q}} - \mu \mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{R}(\theta)^T \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s) \right]^T \mathbf{K}_d \left[ \dot{\mathbf{q}} - \mu \mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{R}(\theta)^T \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s) \right] - \left[ \gamma_2 \|\dot{\mathbf{q}}\| - k_\varepsilon \right] \|\dot{\mathbf{q}}\| \\ &\quad - \left[ \gamma_3 \|\tilde{\mathbf{x}}_s\| - \sqrt{2} b_1 k_\varepsilon + \frac{1}{\lambda_{\max}(\mathbf{K}_w)} \left( \|\widetilde{\mathbf{W}}\|_F - \frac{k_w}{2} \right)^2 - \frac{k_w^2}{4\lambda_{\max}(\mathbf{K}_w)} \right] \mu \beta \|\tilde{\mathbf{x}}_s\| \end{aligned}$$

La derivada  $\dot{V}(\tilde{\mathbf{x}}_s, \dot{\mathbf{q}}, \widetilde{\mathbf{W}})$  es negativa siempre y cuando los términos entre paréntesis sean positivos, por lo tanto, podemos decir que la función es definida negativa siempre y cuando la condición (4.12) se cumpla y además:

$$\|\tilde{\mathbf{x}}_s\| > \frac{1}{\gamma_3} \left( \sqrt{2}b_1k_\varepsilon + \frac{k_w^2}{4\lambda_{max}(\mathbf{K}_w)} \right), \quad \|\dot{\mathbf{q}}\| > \frac{k_\varepsilon}{\gamma_2} \quad (4.33)$$

o equivalentemente:

$$\|\widetilde{\mathbf{W}}\|_F > \frac{k_w}{2} + \sqrt{\sqrt{2}b_1k_\varepsilon\lambda_{max}(\mathbf{K}_w) + \frac{k_w^2}{4}}, \quad \|\dot{\mathbf{q}}\| > \frac{k_\varepsilon}{\gamma_2} \quad (4.34)$$

De acuerdo con la extensión de la teoría estándar de Lyapunov [39, 41] ésto demuestra que los estados  $\tilde{\mathbf{x}}_s$ ,  $\dot{\mathbf{q}}$  y  $\widetilde{\mathbf{W}}$  están uniformemente, finalmente acotados (UUB), por lo tanto, el sistema formado por (4.6) y (4.9) es UUB. ■

El comportamiento dinámico inducido por este controlador se explica del modo siguiente. Las desigualdades (4.33) y (4.34) pueden ser tomadas como cotas practicas para los estados del sistema, debido a que  $\tilde{\mathbf{x}}_s$ ,  $\dot{\mathbf{q}}$  y  $\widetilde{\mathbf{W}}$  permanecerán muy cercanas a éstas en un tiempo finito (ver teorema 5, apéndice B).

Las cotas inferiores de las ganancias proporcional y derivativa del controlador pueden ser obtenidas directamente de (4.25) y (4.29) respectivamente, más aún, se puede observar que seleccionando  $\mu$  suficientemente pequeña se cumple la condición (4.12) y además los valores requeridos de las ganancias  $\mathbf{K}_p$  y  $\mathbf{K}_d$  para estabilizar el sistema en lazo cerrado no necesitan ser valores muy altos.

Se observa de (4.33) que la cota del error de reconstrucción de la red  $k_\varepsilon$  y la cota de los pesos  $k_w$  incrementan el error de posicionamiento de imagen  $\|\tilde{\mathbf{x}}_s\|$ , este error puede ser reducido mediante el incremento de la ganancia  $\mathbf{K}_w$  y de la constante  $\gamma_3$ . Esta última depende directamente del valor de la ganancia proporcional del controlador.

El término  $\lambda_{max}(\mathbf{K}_w)$  es un parámetro de cambio entre las magnitudes de  $\|\tilde{\mathbf{x}}_s\|$  y  $\|\widetilde{\mathbf{W}}\|_F$ , es decir, para un valor grande de  $\lambda_{max}(\mathbf{K}_w)$  se obtiene un valor pequeño de  $\|\tilde{\mathbf{x}}_s\|$  y un valor grande de  $\|\widetilde{\mathbf{W}}\|_F$  y viceversa, por lo tanto existira un valor de  $\lambda_{max}(\mathbf{K}_w)$  para el cual el valor de las normas  $\|\tilde{\mathbf{x}}_s\|$  y  $\|\widetilde{\mathbf{W}}\|_F$  sea mínimo (ver apéndice B). El segundo término en la ley de aprendizaje de la red neuronal es conocido como *modificación-e* en control adaptable y tiene la propiedad de hacer robusta la ley de aprendizaje en presencia de dinámicas no modeladas [47].

En este análisis la condición de excitación persistente no es necesaria para establecer que los pesos  $\mathbf{W}$  están acotados. Es importante notar que no se requiere una fase de aprendizaje fuera de línea para la red neuronal utilizada, los pesos de ésta pueden ser inicializados con un valor de cero para los cuales se observa de la figura 4.1 que el controlador es simplemente un control PD. En la literatura estándar de control [39] se demuestra que un controlador PD proporciona un error de posicionamiento acotado cuando las ganancias de éste son seleccionadas suficientemente grandes. Por lo anterior, el sistema en lazo cerrado es estable hasta que la red neuronal inicie su aprendizaje.

## 4.5 Análisis de estabilidad con incertidumbre en el jacobiano.

La matriz jacobiana que es utilizada por la ley de control (4.9) no puede ser exactamente calculada cuando no se conocen los parámetros de la cinemática del robot tal como la longitud de los eslabones, más aún cuando el robot es utilizado para realizar una tarea de transportar varios objetos cuyas longitudes son desconocidas, la cinemática y la matriz jacobiana no pueden ser exactamente calculadas aún si las longitudes de los eslabones son conocidas. Este problema puede ser atenuado mediante procedimientos de calibración que consumen demasiado tiempo pero tratan de identificar los parámetros cinemáticos reales para un robot en particular.

Ahora, se considerará el caso cuando existe incertidumbre en la matriz Jacobiana debido a errores de calibración en los parámetros del robot (i.e. longitud de los eslabones).

La estimación de  $\mathbf{J}(\mathbf{q})$  en la ley de control (4.9) la denotaremos como  $\widehat{\mathbf{J}}(\mathbf{q})$ , ésto implica que:

$$\widetilde{\mathbf{J}}(\mathbf{q}) = \mathbf{J}(\mathbf{q}) - \widehat{\mathbf{J}}(\mathbf{q}) \quad (4.35)$$

donde  $\widetilde{\mathbf{J}}(\mathbf{q})$  lo llamaremos *error de estimación de la matriz Jacobiana*, para el cual se realizará la siguiente suposición.

**Suposición 8** *El error de estimación de la matriz Jacobiana  $\widetilde{\mathbf{J}}(\mathbf{q})$  está acotado por:*

$$\|\widetilde{\mathbf{J}}(\mathbf{q})\| \leq k_J \quad (4.36)$$

con  $k_J > 0$ .

El siguiente teorema también hace uso de la extensión en la teoría estándar de Lyapunov y establece que la siguiente ley de control:

$$\boldsymbol{\tau} = \widehat{\mathbf{J}}(\mathbf{q})^T \mathbf{R}(\theta)^T \mathbf{K}_p \widetilde{\mathbf{x}}_s - \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{q}} + \widehat{\mathbf{W}}^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{q}) \quad (4.37)$$

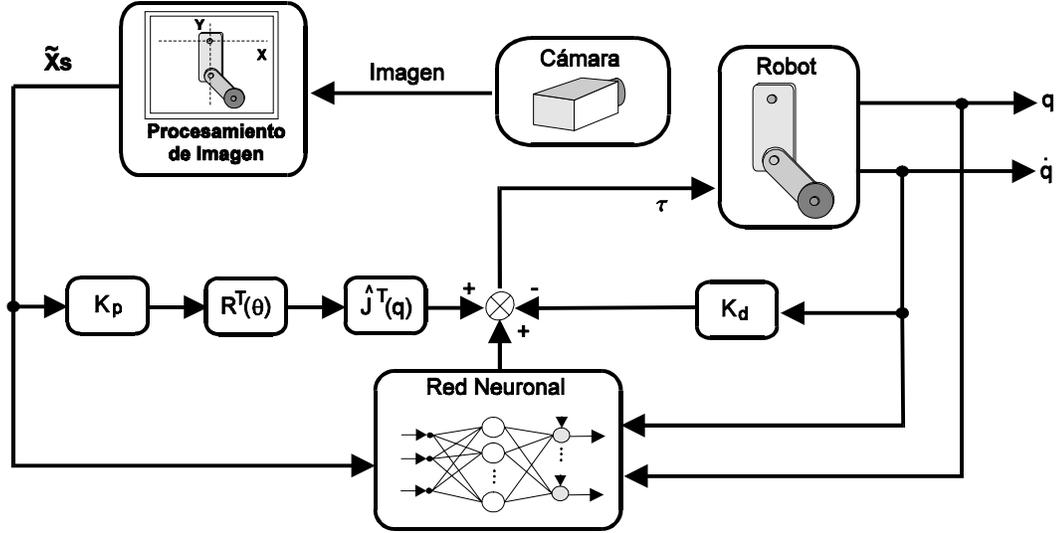


Figura 4.2: Diagrama a Bloques

en lazo cerrado con el sistema (4.6) es UUB, su diagrama de bloques es mostrado en la figura 4.2.

**Teorema 2** Considere el sistema (4.6) en lazo cerrado con la ley de control (4.37), donde la actualización de los pesos para la red neuronal se encuentra dada por la siguiente ley de aprendizaje:

$$\dot{\widehat{\mathbf{W}}} = -\mathbf{K}_w \sigma(\mathbf{q}) \left[ \dot{\mathbf{q}} - \mu \widehat{\mathbf{J}}(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{R}(\theta)^T \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s) \right]^T - \kappa \mathbf{K}_w \left\| \tilde{\mathbf{x}}_s \right\| \left\| \dot{\mathbf{q}} \right\| \widehat{\mathbf{W}} \quad (4.38)$$

con la función  $\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s)$  definida como en (4.11),  $\mathbf{K}_w > 0$ ,  $\kappa > 0$ .

Si la constante  $\mu$  es seleccionada de forma tal que:

$$\min \left\{ \sqrt{\frac{\lambda_{\min}\{\mathbf{K}_p\}}{\alpha h \lambda_{\max}\{\Lambda\}}}, \frac{\lambda_{\min}\{\mathbf{K}_d\}}{\sqrt{8} [b_1 \gamma_1 + b_2 \lambda_{\max}\{\mathbf{M}(\mathbf{q})\} + b_1 k_c]}, \frac{2\lambda_{\min}\{\mathbf{K}_p\}}{\lambda_{\max}\{\Lambda_K\}} \right\} > \mu > 0 \quad (4.39)$$

donde:

$$\begin{aligned} \Lambda &= \left[ \widehat{\mathbf{J}}(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{R}(\theta)^T \right]^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \widehat{\mathbf{J}}(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{R}(\theta)^T \\ \Lambda_K &= \left[ \widehat{\mathbf{J}}(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{R}(\theta)^T \right]^T \mathbf{K}_d \widehat{\mathbf{J}}(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{R}(\theta)^T \end{aligned} \quad (4.40)$$

$b_1$ ,  $b_2$  y  $\gamma_1$  constantes positivas definidas más adelante, entonces, el sistema en lazo cerrado es uniformemente, finalmente acotado (UUB).

**Demostración.** Consideremos la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$\begin{aligned} V(\tilde{\mathbf{x}}_s, \dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{W}}) &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2\alpha h} \tilde{\mathbf{x}}_s^T \mathbf{K}_p \tilde{\mathbf{x}}_s - \mu \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{R}(\theta) \hat{\mathbf{J}}^*(\mathbf{q}) \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \\ &\quad + \frac{1}{2} \text{tr}(\tilde{\mathbf{W}}^T \mathbf{K}_w^{-1} \tilde{\mathbf{W}}) \end{aligned} \quad (4.41)$$

la cual fue usada en la prueba del teorema 1, donde  $\hat{\mathbf{J}}^*(\mathbf{q}) = \left(\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{q})^{-1}\right)^T$ .

La derivada de la ecuación (4.41) con respecto al tiempo es:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\mathbf{x}}_s, \dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{W}}) &= \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{\alpha h} \frac{d\tilde{\mathbf{x}}_s^T}{dt} \mathbf{K}_p \tilde{\mathbf{x}}_s - \mu \dot{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{R}(\theta) \hat{\mathbf{J}}^*(\mathbf{q}) \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \\ &\quad - \mu \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{R}(\theta) \dot{\hat{\mathbf{J}}^*}(\mathbf{q}) \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \mu \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{R}(\theta) \hat{\mathbf{J}}^*(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \\ &\quad - \mu \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{R}(\theta) \hat{\mathbf{J}}^*(\mathbf{q}) \mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \text{tr}(\tilde{\mathbf{W}}^T \mathbf{K}_w^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{W}}}) \end{aligned} \quad (4.42)$$

Sustituyendo la dinámica del manipulador con la aproximación de las incertidumbres mediante una red neuronal (4.6), la derivada de  $\tilde{\mathbf{x}}_s$  con respecto al tiempo (4.16) y la definición (4.8) para  $\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q})$ , la ecuación (4.42) queda:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\mathbf{x}}_s, \dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{W}}) &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T [\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})] \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T [\boldsymbol{\tau} - \mathbf{W}^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{q}) - \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{J}(\mathbf{q})^T \mathbf{R}(\theta)^T \mathbf{K}_p \tilde{\mathbf{x}}_s] \\ &\quad - \mu \dot{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{R}(\theta) \hat{\mathbf{J}}^*(\mathbf{q}) \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \mu \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{R}(\theta) \dot{\hat{\mathbf{J}}^*}(\mathbf{q}) \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \\ &\quad - \mu \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{R}(\theta) \hat{\mathbf{J}}^*(\mathbf{q}) [\boldsymbol{\tau} - \mathbf{W}^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{q}) - \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T \dot{\mathbf{q}}] \\ &\quad + \text{tr}(\tilde{\mathbf{W}}^T \mathbf{K}_w^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{W}}}) \end{aligned}$$

Usando la propiedad 3 y sustituyendo la ley de control (4.37), obtenemos:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\mathbf{x}}_s, \dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{W}}) &= \dot{\mathbf{q}}^T \left[ - \left( \mathbf{J}(\mathbf{q})^T - \hat{\mathbf{J}}(\mathbf{q})^T \right) \mathbf{R}(\theta)^T \mathbf{K}_p \tilde{\mathbf{x}}_s - \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{q}} - \left( \mathbf{W}^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{q}) - \hat{\mathbf{W}}^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{q}) \right) - \boldsymbol{\varepsilon} \right] \\ &\quad - \mu \dot{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{R}(\theta) \hat{\mathbf{J}}^*(\mathbf{q}) \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \mu \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{R}(\theta) \dot{\hat{\mathbf{J}}^*}(\mathbf{q}) \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \\ &\quad - \mu \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{R}(\theta) \hat{\mathbf{J}}^*(\mathbf{q}) \left[ \hat{\mathbf{J}}(\mathbf{q})^T \mathbf{R}(\theta)^T \mathbf{K}_p \tilde{\mathbf{x}}_s - \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{q}} - \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T \dot{\mathbf{q}} \right] \\ &\quad - \mu \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{R}(\theta) \hat{\mathbf{J}}^*(\mathbf{q}) \left[ - \left( \mathbf{W}^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{q}) - \hat{\mathbf{W}}^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{q}) \right) \right] + \text{tr}(\tilde{\mathbf{W}}^T \mathbf{K}_w^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{W}}}) \end{aligned}$$

Usando las definiciones del error de estimación de los pesos (3.11) y del error de estimación de la matriz Jacobiana (4.35) tenemos:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\tilde{\mathbf{x}}_s, \dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{W}}) &= -\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{q}} - \mu \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{R}(\theta) \hat{\mathbf{J}}^*(\mathbf{q}) \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \mu \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{R}(\theta) \dot{\hat{\mathbf{J}}^*}(\mathbf{q}) \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \\
&\quad - \mu \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{K}_p \tilde{\mathbf{x}}_s + \mu \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{R}(\theta) \hat{\mathbf{J}}^*(\mathbf{q}) \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{q}} - \mu \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{R}(\theta) \hat{\mathbf{J}}^*(\mathbf{q}) \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T \dot{\mathbf{q}} \\
&\quad - \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \mathbf{J}(\mathbf{q})^T \mathbf{R}(\theta)^T \mathbf{K}_p \tilde{\mathbf{x}}_s - \left[ \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T - \mu \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{R}(\theta) \hat{\mathbf{J}}^*(\mathbf{q}) \right] \boldsymbol{\varepsilon} \\
&\quad + tr \left\{ \tilde{\mathbf{W}}^T \left[ \mathbf{K}_w^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{W}}} - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}^T + \mu \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{q}) \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{R}(\theta) \hat{\mathbf{J}}^*(\mathbf{q}) \right] \right\}
\end{aligned} \tag{4.43}$$

donde las propiedades (4.18) y (4.19) fueron utilizadas.

Consideremos ahora cotas superiores de los siguientes términos :

$$\begin{aligned}
-\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{q}} &\leq -\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2} \lambda_{min} \{ \mathbf{K}_d \} \left\| \dot{\mathbf{q}} \right\|^2 \\
-\mu \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{R}(\theta) \hat{\mathbf{J}}^*(\mathbf{q}) \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} &\leq \mu \sqrt{2} b_1 \gamma_1 \left\| \dot{\mathbf{q}} \right\|^2 \\
-\mu \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{R}(\theta) \dot{\hat{\mathbf{J}}^*}(\mathbf{q}) \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} &\leq \mu \sqrt{2} b_2 \lambda_{max} \{ \mathbf{M}(\mathbf{q}) \} \left\| \dot{\mathbf{q}} \right\|^2 \\
-\mu \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{R}(\theta) \hat{\mathbf{J}}^*(\mathbf{q}) \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T \dot{\mathbf{q}} &\leq \mu \sqrt{2} b_1 k_c \left\| \dot{\mathbf{q}} \right\|^2 \\
-\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{q})^T \mathbf{R}(\theta)^T \mathbf{K}_p \tilde{\mathbf{x}}_s &\leq \sqrt{2} k_J \lambda_{max} \{ \mathbf{K}_p \} \left\| \tilde{\mathbf{x}}_s \right\| \left\| \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \right\|
\end{aligned} \tag{4.44}$$

donde  $k_J$  es la cota del error de estimación de la matriz Jacobiana,  $\gamma_1$  es:

$$\gamma_1 = \sqrt{8} \alpha h b_J \lambda_{max} \{ \mathbf{M}(\mathbf{q}) \}$$

$b_1$  es la cota superior de  $\hat{\mathbf{J}}^*(\mathbf{q})$ , utilizándose la propiedad 2, las propiedades (4.23) de  $\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s)$ , la cota (4.21) y la cota:

$$\left\| \dot{\hat{\mathbf{J}}^*}(\mathbf{q}) \right\| \leq b_2 \left\| \dot{\mathbf{q}} \right\|$$

Utilizando las cotas (4.44) en la ecuación (4.43) tenemos:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\tilde{\mathbf{x}}_s, \dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{W}}) &\leq -\frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{q}} - \left[ \frac{1}{2} \lambda_{\min} \{ \mathbf{K}_d \} - \mu \sqrt{2} b_1 \gamma_1 - \mu \sqrt{2} b_2 \lambda_{\max} \{ \mathbf{M}(\mathbf{q}) \} - \mu \sqrt{2} b_1 k_c \right] \left\| \dot{\mathbf{q}} \right\|^2 \\
&\quad - \mu \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{K}_p \tilde{\mathbf{x}}_s + \mu \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{R}(\theta) \hat{\mathbf{J}}^*(\mathbf{q}) \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{q}} + \sqrt{2} k_J \lambda_{\max} \{ \mathbf{K}_p \} \left\| \tilde{\mathbf{x}}_s \right\| \left\| \dot{\mathbf{q}} \right\| \\
&\quad - \left[ \dot{\mathbf{q}}^T - \mu \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{R}(\theta) \hat{\mathbf{J}}^*(\mathbf{q}) \right] \boldsymbol{\varepsilon} \\
&\quad + \text{tr} \left\{ \tilde{\mathbf{W}}^T \left[ \mathbf{K}_w^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{W}}} - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}^T + \mu \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{q}) \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{R}(\theta) \hat{\mathbf{J}}^*(\mathbf{q}) \right] \right\}
\end{aligned} \tag{4.45}$$

El término:

$$\gamma_2 = \frac{1}{2} \lambda_{\min} \{ \mathbf{K}_d \} - \mu \sqrt{2} b_1 \gamma_1 - \mu \sqrt{2} b_2 \lambda_{\max} \{ \mathbf{M}(\mathbf{q}) \} - \mu \sqrt{2} b_1 k_c \tag{4.46}$$

es positivo siempre y cuando la constante  $\mu$  se seleccione de forma tal que:

$$\frac{\lambda_{\min} \{ \mathbf{K}_d \}}{\sqrt{8} [b_1 \gamma_1 + b_2 \lambda_{\max} \{ \mathbf{M}(\mathbf{q}) \} + b_1 k_c]} \geq \mu \tag{4.47}$$

La desigualdad (4.45) puede reescribirse como:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\tilde{\mathbf{x}}_s, \dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{W}}) &\leq -\frac{1}{2} \left[ \dot{\mathbf{q}} - \mu \hat{\mathbf{J}}(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{R}(\theta)^T \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s) \right]^T \mathbf{K}_d \left[ \dot{\mathbf{q}} - \mu \hat{\mathbf{J}}(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{R}(\theta)^T \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s) \right] - \gamma_2 \left\| \dot{\mathbf{q}} \right\|^2 \\
&\quad + \frac{1}{2} \mu^2 \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T \left[ \hat{\mathbf{J}}(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{R}(\theta)^T \right]^T \mathbf{K}_d \hat{\mathbf{J}}(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{R}(\theta)^T \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s) - \mu \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{K}_p \tilde{\mathbf{x}}_s \\
&\quad + \sqrt{2} k_J \lambda_{\max} \{ \mathbf{K}_p \} \left\| \tilde{\mathbf{x}}_s \right\| \left\| \dot{\mathbf{q}} \right\| - \left[ \dot{\mathbf{q}}^T - \mu \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{R}(\theta) \hat{\mathbf{J}}^*(\mathbf{q}) \right] \boldsymbol{\varepsilon} \\
&\quad + \text{tr} \left\{ \tilde{\mathbf{W}}^T \left[ \mathbf{K}_w^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{W}}} - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}^T + \mu \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{q}) \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{R}(\theta) \hat{\mathbf{J}}^*(\mathbf{q}) \right] \right\}
\end{aligned} \tag{4.48}$$

Consideremos las cotas superiores de los siguientes términos :

$$\frac{1}{2}\mu^2\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T \left[ \widehat{\mathbf{J}}(\mathbf{q})^{-1}\mathbf{R}(\theta)^T \right]^T \mathbf{K}_d \widehat{\mathbf{J}}(\mathbf{q})^{-1}\mathbf{R}(\theta)^T \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s) = \frac{1}{2}\mu^2\beta^2\tilde{\mathbf{x}}_s^T \Lambda_K \tilde{\mathbf{x}}_s \leq \frac{1}{2}\mu^2\beta\lambda_{max} \{ \Lambda_K \} \left\| \tilde{\mathbf{x}}_s \right\|^2$$

$$-\mu\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{K}_p \tilde{\mathbf{x}}_s = -\mu\beta\tilde{\mathbf{x}}_s^T \mathbf{K}_p \tilde{\mathbf{x}}_s \leq -\mu\beta\lambda_{min} \{ \mathbf{K}_p \} \left\| \tilde{\mathbf{x}}_s \right\|^2$$

$$-\dot{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\varepsilon} \leq \left\| \dot{\mathbf{q}} \right\| \left\| \boldsymbol{\varepsilon} \right\| \leq k_\varepsilon \left\| \dot{\mathbf{q}} \right\|$$

$$\mu\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{R}(\theta) \widehat{\mathbf{J}}^*(\mathbf{q}) \boldsymbol{\varepsilon} = \mu\beta\tilde{\mathbf{x}}_s^T \mathbf{R}(\theta) \widehat{\mathbf{J}}^*(\mathbf{q}) \boldsymbol{\varepsilon} \leq \mu\beta\sqrt{2}b_1k_\varepsilon \left\| \tilde{\mathbf{x}}_s \right\|$$

donde (3.8) y las definiciones (4.11) y (4.40) fueron utilizadas.

Utilizando las cotas anteriores en la desigualdad (4.48) tenemos:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\mathbf{x}}_s, \dot{\mathbf{q}}, \widetilde{\mathbf{W}}) &\leq -\frac{1}{2} \left[ \dot{\mathbf{q}} - \mu\widehat{\mathbf{J}}(\mathbf{q})^{-1}\mathbf{R}(\theta)^T \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s) \right]^T \mathbf{K}_d \left[ \dot{\mathbf{q}} - \mu\widehat{\mathbf{J}}(\mathbf{q})^{-1}\mathbf{R}(\theta)^T \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s) \right] - \gamma_2 \left\| \dot{\mathbf{q}} \right\|^2 \\ &\quad - \left[ \lambda_{min} \{ \mathbf{K}_p \} - \frac{1}{2}\mu\lambda_{max} \{ \Lambda_K \} \right] \mu\beta \left\| \tilde{\mathbf{x}}_s \right\|^2 + \mu\beta\sqrt{2}b_1k_\varepsilon \left\| \tilde{\mathbf{x}}_s \right\| + k_\varepsilon \left\| \dot{\mathbf{q}} \right\| \\ &\quad + \sqrt{2}k_J\lambda_{max} \{ \mathbf{K}_p \} \left\| \tilde{\mathbf{x}}_s \right\| \left\| \dot{\mathbf{q}} \right\| \\ &\quad + tr \left\{ \widetilde{\mathbf{W}}^T \left[ \mathbf{K}_w^{-1} \dot{\widetilde{\mathbf{W}}} - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}^T + \mu\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{q})\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{R}(\theta) \widehat{\mathbf{J}}^*(\mathbf{q}) \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.49)$$

El término:

$$\gamma_3 = \lambda_{min} \{ \mathbf{K}_p \} - \frac{1}{2}\mu\lambda_{max} \{ \Lambda_K \} \quad (4.50)$$

es positivo siempre y cuando la constante  $\mu$  satisfaga la siguiente condición:

$$\frac{2\lambda_{min} \{ \mathbf{K}_p \}}{\lambda_{max} \{ \Lambda_K \}} \geq \mu \quad (4.51)$$

por lo anterior y usando la ley de aprendizaje (4.38) para la actualización de los pesos de la red neuronal, la desigualdad (4.49) puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\mathbf{x}}_s, \dot{\mathbf{q}}, \widetilde{\mathbf{W}}) &\leq -\frac{1}{2} \left[ \dot{\mathbf{q}} - \mu\widehat{\mathbf{J}}(\mathbf{q})^{-1}\mathbf{R}(\theta)^T \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s) \right]^T \mathbf{K}_d \left[ \dot{\mathbf{q}} - \mu\widehat{\mathbf{J}}(\mathbf{q})^{-1}\mathbf{R}(\theta)^T \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s) \right] \\ &\quad - \left[ \gamma_2 \left\| \dot{\mathbf{q}} \right\| - k_\varepsilon \right] \left\| \dot{\mathbf{q}} \right\| + \sqrt{2}k_J\lambda_{max} \{ \mathbf{K}_p \} \left\| \tilde{\mathbf{x}}_s \right\| \left\| \dot{\mathbf{q}} \right\| \\ &\quad - \left[ \gamma_3 \left\| \tilde{\mathbf{x}}_s \right\| - \sqrt{2}b_1k_\varepsilon \right] \mu\beta \left\| \tilde{\mathbf{x}}_s \right\| + \kappa \left\| \tilde{\mathbf{x}}_s \right\| \left\| \dot{\mathbf{q}} \right\| tr \left\{ \widetilde{\mathbf{W}}^T \left( \mathbf{W} - \widetilde{\mathbf{W}} \right) \right\} \end{aligned} \quad (4.52)$$

Aplicando la desigualdad (4.32), se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\mathbf{x}}_s, \dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{W}}) &\leq -\frac{1}{2} \left[ \dot{\mathbf{q}} - \mu \hat{\mathbf{J}}(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{R}(\theta)^T \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s) \right]^T \mathbf{K}_d \left[ \dot{\mathbf{q}} - \mu \hat{\mathbf{J}}(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{R}(\theta)^T \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s) \right] \\ &\quad - \left[ \gamma_2 \left\| \dot{\mathbf{q}} \right\| - k_\varepsilon \right] \left\| \dot{\mathbf{q}} \right\| - \left[ \gamma_3 \left\| \tilde{\mathbf{x}}_s \right\| - \sqrt{2} b_1 k_\varepsilon \right] \mu \beta \left\| \tilde{\mathbf{x}}_s \right\| \\ &\quad - \left[ \kappa \left\| \tilde{\mathbf{W}} \right\|_F \left( \left\| \tilde{\mathbf{W}} \right\|_F - k_w \right) - \sqrt{2} k_J \lambda_{\max} \{ \mathbf{K}_p \} \right] \left\| \tilde{\mathbf{x}}_s \right\| \left\| \dot{\mathbf{q}} \right\| \end{aligned}$$

Completando cuadrados para el cuarto término de la desigualdad anterior tenemos:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\mathbf{x}}_s, \dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{W}}) &\leq -\frac{1}{2} \left[ \dot{\mathbf{q}} - \mu \hat{\mathbf{J}}(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{R}(\theta)^T \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s) \right]^T \mathbf{K}_d \left[ \dot{\mathbf{q}} - \mu \hat{\mathbf{J}}(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{R}(\theta)^T \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s) \right] \\ &\quad - \left[ \gamma_2 \left\| \dot{\mathbf{q}} \right\| - k_\varepsilon \right] \left\| \dot{\mathbf{q}} \right\| - \left[ \gamma_3 \left\| \tilde{\mathbf{x}}_s \right\| - \sqrt{2} b_1 k_\varepsilon \right] \mu \beta \left\| \tilde{\mathbf{x}}_s \right\| \\ &\quad - \left[ \kappa \left( \left\| \tilde{\mathbf{W}} \right\|_F - \frac{k_w}{2} \right)^2 - \kappa \frac{k_w^2}{4} - \sqrt{2} k_J \lambda_{\max} \{ \mathbf{K}_p \} \right] \left\| \tilde{\mathbf{x}}_s \right\| \left\| \dot{\mathbf{q}} \right\| \end{aligned}$$

La derivada  $\dot{V}(\tilde{\mathbf{x}}_s, \dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{W}})$  es negativa siempre y cuando los términos entre paréntesis sean positivos, por lo tanto, podemos decir que la función es definida negativa siempre y cuando la condición (4.39) se cumpla y además:

$$\left\| \tilde{\mathbf{x}}_s \right\| > \frac{\sqrt{2} b_1 k_\varepsilon}{\gamma_3}, \quad \left\| \dot{\mathbf{q}} \right\| > \frac{k_\varepsilon}{\gamma_2}, \quad \left\| \tilde{\mathbf{W}} \right\|_F > \frac{k_w}{2} + \sqrt{\frac{\sqrt{2} k_J \lambda_{\max} \{ \mathbf{K}_p \}}{\kappa} + \frac{k_w^2}{4}} \quad (4.53)$$

De acuerdo con la extensión de la teoría estándar de Lyapunov [39, 41] ésto demuestra que los estados  $\tilde{\mathbf{x}}_s$ ,  $\dot{\mathbf{q}}$  y  $\tilde{\mathbf{W}}$  están uniformemente, finalmente acotados (UUB), por lo tanto el sistema formado por (4.6) y (4.37) es UUB. ■

En este segundo caso las desigualdades (4.53) pueden ser tomadas nuevamente como cotas practicas para los estados del sistema, además, podemos observar que los valores mínimos de las ganancias  $\mathbf{K}_p$  y  $\mathbf{K}_d$  pueden ser obtenidos de (4.46) y (4.50) las cuales son muy similares a (4.25) y (4.29) con la diferencia de que ahora (4.50) depende del valor del Jacobiano estimado  $\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{q})$ . Al igual que con el Teorema 1 podemos concluir que el valor de las ganancias del controlador están directamente relacionadas con el valor de la contante  $\mu$  la cual debe ser seleccionada suficientemente pequeña para cumplir la condición (4.39).

Es importante notar de (4.53) que al haber sido seleccionada la ley de aprendizaje de la red como (4.38) permitió que el error de posicionamiento de imagen  $\tilde{\mathbf{x}}_s$  no dependa de la cota de los pesos  $k_w$

ni del error de aproximación de la matriz jacobiana  $k_J$  sino solamente del error de reconstrucción de la red  $k_\varepsilon$ , el cual puede ser reducido mediante el incremento de la constante  $\gamma_3$  que depende directamente del valor de la ganancia proporcional del controlador de la misma forma que en el Teorema 1.

El término  $\kappa$  de la ley de aprendizaje nos permite disminuir el efecto que tiene el error de aproximación de la matriz Jacobiana  $k_J$  y la ganancia  $\mathbf{K}_p$  sobre el valor de  $\left\| \widetilde{\mathbf{W}} \right\|_F$ .

## Capítulo 5

# Resultados experimentales

En este capítulo se muestran los resultados experimentales correspondientes a una consigna de posicionamiento a nivel visual obtenidos al implementar las leyes de control (4.9) y (4.37) junto con sus respectivas leyes de aprendizaje, para la red neuronal desarrolladas en el capítulo anterior, en la plataforma de *visual servoing* cuyo funcionamiento se encuentra en el apéndice C .

Los experimentos realizados se dividieron dentro de dos grupos. En el primero se muestra el desempeño obtenido por la ley (4.9), la cual será denominada como *ley de control visual PD-1* y en el segundo será mostrado el desempeño de la ley de control (4.37), siendo esta última nombrada como *ley de control visual PD-2*, en ambos grupos se analizarán los siguientes casos:

- Sin incertidumbre en el jacobiano  $\mathbf{J}(\mathbf{q})$  y con ganancias  $\mathbf{K}_p$  y  $\mathbf{K}_d$  bajas.
- Sin incertidumbre en el jacobiano  $\mathbf{J}(\mathbf{q})$  y con ganancias  $\mathbf{K}_p$  y  $\mathbf{K}_d$  altas.
- Con incertidumbre en el jacobiano  $\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{q})$  y con ganancias  $\mathbf{K}_p$  y  $\mathbf{K}_d$  bajas.
- Con incertidumbre en el jacobiano  $\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{q})$  y con ganancias  $\mathbf{K}_p$  y  $\mathbf{K}_d$  altas.

Los resultados obtenidos son comparados con los casos cuando no existe compensación de gravedad y cuando se realiza la compensación de gravedad descrita en [17] y utilizada en [57], cuyas gráficas se encuentran en el apéndice D y será denominada como *compensación*  $\hat{\mathbf{G}}(\mathbf{q})$ .

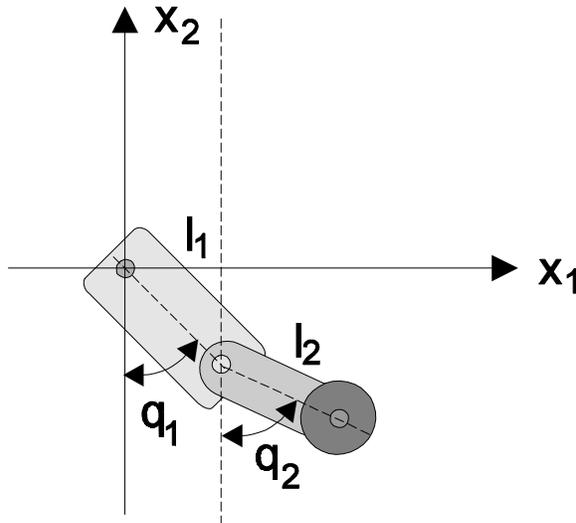


Figura 5.1: Sistema de Coordenas de Referencia

## 5.1 Implementación de la ley de control

Para llevar a cabo la implementación práctica de las leyes 4.9 y 4.37 es necesario conocer o tener un estimado de algunos parámetros como son la matriz jacobiana  $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ , la matriz de rotación  $\mathbf{R}(\theta)$  y la velocidad articular  $\dot{\mathbf{q}}$ .

En la figura 5.1 se muestra el diagrama del robot manipulador de dos grados de libertad que será utilizado en conjunción con el sistema coordinado de referencia adoptado, la cinemática directa de éste se encuentra dada por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_1 &= l_1 \text{sen}(q_1) + l_2 \text{sen}(q_2) \\ x_2 &= -l_1 \cos(q_1) - l_2 \cos(q_2) \end{aligned} \quad (5.1)$$

Aplicando la definición (4.3) a las ecuaciones (5.1) para el cálculo del jacobiano tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial q_1} &= l_1 \cos(q_1), & \frac{\partial x_1}{\partial q_2} &= l_2 \cos(q_2) \\ \frac{\partial x_2}{\partial q_1} &= l_1 \text{sen}(q_1), & \frac{\partial x_2}{\partial q_2} &= l_2 \text{sen}(q_2) \end{aligned} \quad (5.2)$$

De (5.2) tenemos que la matriz jacobiana es:

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} l_1 \cos(q_1) & l_2 \cos(q_2) \\ l_1 \text{sen}(q_1) & l_2 \text{sen}(q_2) \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

En (5.3) es necesario el conocimiento de las longitudes de los eslabones del robot en cuestión, los valores utilizados a lo largo de los experimentos para éstos son  $l_1 = 0.21 \text{ m}$  y  $l_2 = 0.21 \text{ m}$ .

Para la obtención de la matriz de rotación  $\mathbf{R}(\theta)$  se debe realizar la suposición de que la cámara se encuentra perfectamente alineada, es decir; no existe rotación en el sentido de las manecillas del reloj de la cámara sobre su eje óptico, por lo tanto de (2.10) tenemos:

$$\mathbf{R}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Finalmente, la velocidad  $\dot{\mathbf{q}}$  será estimada usando un filtro pasa altas que tiene la siguiente forma [2, 57]:

$$G(s) = \frac{as}{s+a}$$

donde  $a$  es el parámetro del filtro y el valor utilizado para éste fue de 150.

En los experimentos realizados con las leyes de control desarrolladas en esta tesis, el robot manipulador fue primeramente colocado en la siguiente posición  $x_{s_1} = 50 \text{ pixels}$  y  $x_{s_2} = 0 \text{ pixels}$ , la cual corresponde a un ángulo de  $160^\circ$  para el eslabón 1 y de  $30^\circ$  para el eslabón 2. Posteriormente se dicta una consigna de posicionamiento la cual es una señal del tipo escalón con una amplitud de  $15 \text{ pixels}$  a una frecuencia de  $0.05 \text{ Hertz}$ .

En el caso de la red neuronal los pesos fueron inicializados con un valor de cero para todos los experimentos y se seleccionaron 20 neuronas en la capa oculta de la red cuyos centros  $\mathbf{c}_j$  ( $j = 1, 2, \dots, 20$ ) se encuentran espaciados en el intervalo de  $\mathbf{c}_1 = [3.6, 3.6]^T$  a  $\mathbf{c}_{20} = [-2.4, 0.1]^T$  que corresponden a los valores máximos y mínimos de los ángulos en radianes que puede tomar  $\mathbf{q}$  para dicha consigna de posicionamiento (ver apéndice D). La varianza se seleccionó como  $p_{jk} = 10$  con  $k = 1, 2$  (ver sección 3.5).

## 5.2 Control visual PD - 1

Primeramente se obtendrá el comportamiento del robot manipulador a la consigna de posicionamiento descrita anteriormente sobre la coordenada  $x_{s_1}$ , esto es,  $x_{s_1}^* = 50 \pm 15 \text{ pixels}$  y  $x_{s_2}^* = 0 \text{ pixels}$ . La Figura 5.2 muestra el comportamiento del robot con y sin red neuronal para las ganancias más bajas del controlador que la plataforma de *visual servoing* permite para estabilizar el sistema, éstas fueron  $\mathbf{K}_p = \text{diag}\{0.12, 0.12\}$  y  $\mathbf{K}_d = \text{diag}\{0.15, 0.15\}$ , los parámetros de la red neuronal RBF fueron  $\mathbf{K}_w = \text{diag}\{0.25\}$  y  $\mu = 0.00001$ . En la figura 5.4 se muestra el comportamiento cambiando las ganancias del controlador al valor más alto antes de que empiece una oscilación muy notoria, esto es  $\mathbf{K}_p = \text{diag}\{0.35, 0.35\}$  y  $\mathbf{K}_d = \text{diag}\{0.45, 0.45\}$ , donde los parámetros de la red RBF fueron  $\mathbf{K}_w = \text{diag}\{0.19\}$  y  $\mu = 0.00001$ .

Ahora se analizará el comportamiento a la consigna de posicionamiento para la coordenada  $x_{s_2}$ , esto es,  $x_{s_1}^* = 50 \text{ pixels}$  y  $x_{s_2}^* = 0 \pm 15 \text{ pixels}$ .

La figura 5.3 muestra el comportamiento para ganancias bajas del controlador, las cuales fueron  $\mathbf{K}_p = \text{diag}\{0.45, 0.45\}$  y  $\mathbf{K}_d = \text{diag}\{0.3, 0.3\}$ , los parámetros de la red fueron  $\mathbf{K}_w = \text{diag}\{0.3\}$  y  $\mu = 0.00001$ . En la figura 5.5 se muestra el comportamiento a la consigna de posicionamiento para ganancias altas del controlador, esto es  $\mathbf{K}_p = \text{diag}\{0.85, 0.85\}$  y  $\mathbf{K}_d = \text{diag}\{0.45, 0.45\}$ , los parámetros de la red RBF fueron  $\mathbf{K}_w = \text{diag}\{0.29\}$  y  $\mu = 0.00001$ .

Como puede observarse de las figuras 5.2-5.5, la compensación neuronal permite eliminar el *offset* que el controlador PD sin compensación no es capaz de eliminar, aún cuando en este último se manejen ganancias más altas. Los pequeños picos que se aprecian en las coordenadas  $x_{s_1}$  ó  $x_{s_2}$ , en el caso cuando la posición deseada es constante, muestran la interacción presentada entre los ejes  $S_1$  y  $S_2$  debido al movimiento de los eslabones. Comparando la respuesta de la red neuronal con la *compensación*  $\hat{\mathbf{G}}(\mathbf{q})$  (ver figuras D.1-D.4), esta última elimina el *offset* siempre y cuando las ganancias del controlador PD sean grandes, en otro caso no es posible eliminarlo, con respecto al tiempo de respuesta tanto la *compensación*  $\hat{\mathbf{G}}(\mathbf{q})$  y la compensación con red neuronal presentan un comportamiento muy similar. Es importante notar que el valor de la ganancia  $\mathbf{K}_w$  está relacionado con el tamaño del *offset*, es decir, para *offset* grande ganancia  $\mathbf{K}_w$  grande, lo cual concuerda con la demostración que indica que al aumentar dicha ganancia el error de posicionamiento  $\tilde{\mathbf{x}}_s$  disminuirá.

En conclusión, la compensación neuronal propuesta presenta un mejor comportamiento para los valores utilizados de las ganancias del controlador PD con respecto a la *compensación*  $\hat{\mathbf{G}}(\mathbf{q})$ .

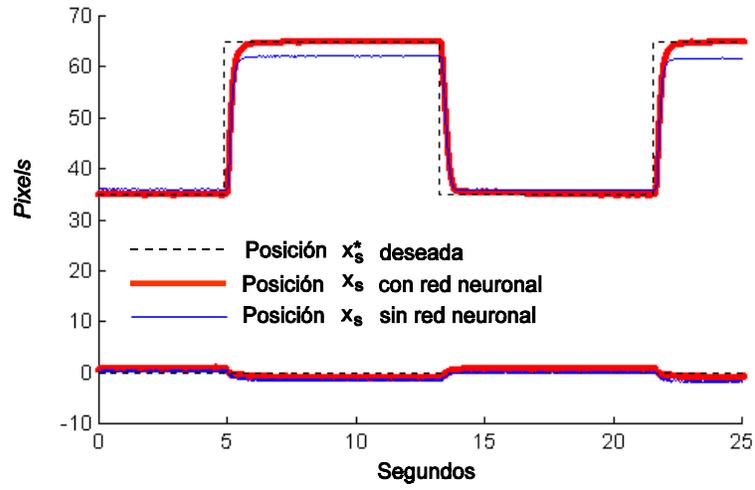


Figura 5.2: Desplazamiento en  $x_{s1}$  con ganancias bajas para el PD-1

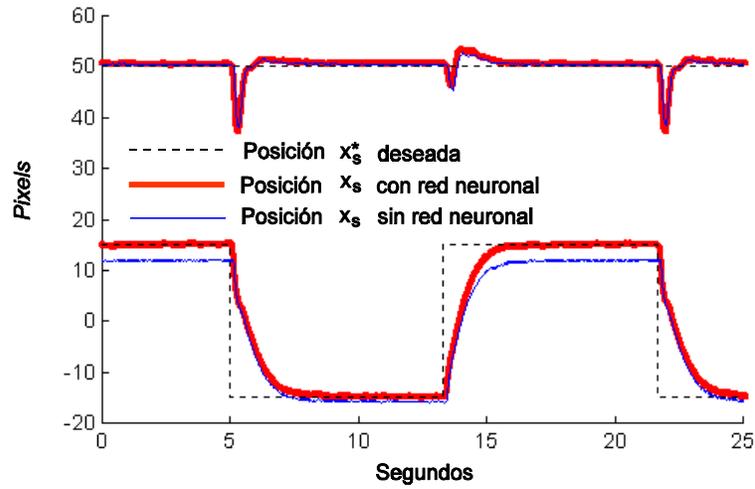


Figura 5.3: Desplazamiento sobre  $x_{s2}$  con ganancias bajas para el PD-1

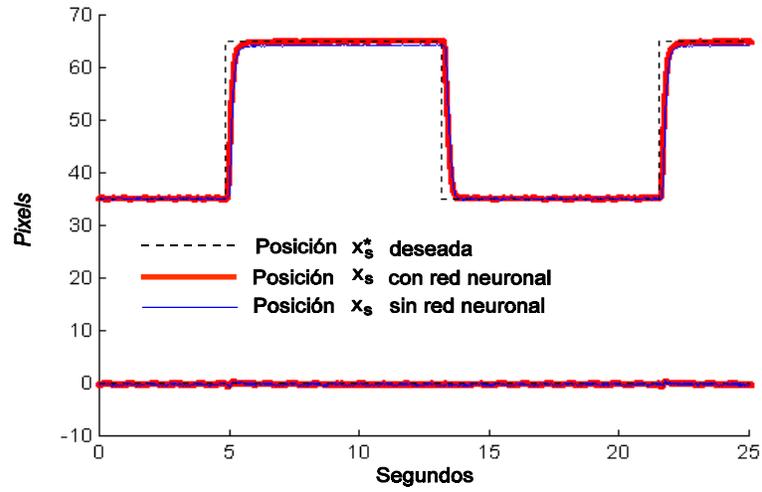


Figura 5.4: Desplazamiento sobre  $x_{s1}$  con ganancias altas para el PD-1

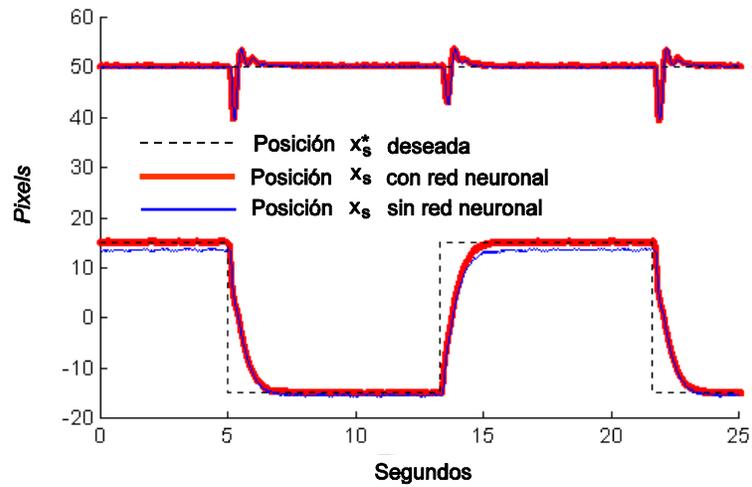


Figura 5.5: Desplazamiento sobre  $x_{s2}$  con ganancias altas para el PD-1

Ahora consideremos el caso cuando existe incertidumbre en la matriz jacobiana. Para realizar lo anterior, esta matriz fue calculada con una reducción del 50% en la longitud de los eslabones, es decir,  $l_1 = 0.105 \text{ m}$  y  $l_2 = 0.105 \text{ m}$ , al igual que en los experimentos anteriores se considerará primeramente la consigna de posicionamiento en la coordenada  $x_{s_1}$  donde  $x_{s_1}^* = 50 \pm 15 \text{ pixels}$  y  $x_{s_2}^* = 0 \text{ pixels}$ . La figura 5.6 muestra el comportamiento bajo dichas condiciones y con ganancias bajas para el controlador, las cuales fueron  $\mathbf{K}_p = \text{diag}\{0.12, 0.12\}$ ,  $\mathbf{K}_d = \text{diag}\{0.15, 0.15\}$  y los parámetros de la red neuronal RBF fueron  $\mathbf{K}_w = \text{diag}\{0.33\}$  y  $\mu = 0.00001$ .

En la figura 5.8 se muestra el comportamiento cambiando las ganancias del controlador a un valor más alto, esto es  $\mathbf{K}_p = \text{diag}\{0.35, 0.35\}$  y  $\mathbf{K}_d = \text{diag}\{0.45, 0.45\}$ , donde los parámetros de la red neuronal RBF fueron  $\mathbf{K}_w = \text{diag}\{0.28\}$  y  $\mu = 0.00001$ .

Ahora se analizará el comportamiento a la consigna de posicionamiento para la coordenada  $x_{s_2}$  donde  $x_{s_1}^* = 50 \text{ pixels}$  y  $x_{s_2}^* = 0 \pm 15 \text{ pixels}$ , manteniendo la misma condición de incertidumbre en la matriz jacobiana.

La figura 5.7 muestra el comportamiento del robot bajo las condiciones establecidas, donde los parámetros del controlador fueron  $\mathbf{K}_p = \text{diag}\{0.45, 0.45\}$  y  $\mathbf{K}_d = \text{diag}\{0.3, 0.3\}$ , los parámetros de la red RBF fueron  $\mathbf{K}_w = \text{diag}\{0.33\}$  y  $\mu = 0.00001$ .

La figura 5.9 muestra el comportamiento a la consigna de posicionamiento para ganancias altas del controlador, las cuales fueron  $\mathbf{K}_p = \text{diag}\{0.85, 0.85\}$  y  $\mathbf{K}_d = \text{diag}\{0.45, 0.45\}$ , los parámetros de la red RBF fueron  $\mathbf{K}_w = \text{diag}\{0.31\}$  y  $\mu = 0.00001$ .

Con base en las figuras 5.6 - 5.9, podemos decir que el efecto de la incertidumbre en la matriz jacobiana recae sobre el tiempo de respuesta a la consigna dada, ésto se puede interpretar como un amortiguamiento excesivo, pero a pesar de ésto, la compensación neuronal permite eliminar casi por completo el *offset*, ya que éste se encuentra todavía presente sobre la coordenada que se mantiene constante y que es más notorio para ganancias bajas del controlador.

Lo cual no sucede en el caso cuando se utiliza la *compensación*  $\hat{\mathbf{G}}(\mathbf{q})$ , cuya respuesta puede observarse en las figuras D.5 - D.8, es decir, este tipo de compensación no elimina el *offset* cuando existe incertidumbre en la matriz jacobina en ninguna de las dos coordenadas, siendo menor dicho *offset* siempre y cuando las ganancias del controlador PD sean grandes. Con respecto al tiempo de respuesta, tanto la *compensación*  $\hat{\mathbf{G}}(\mathbf{q})$  y la compensación con la red neuronal no lo afectan en forma significativa.

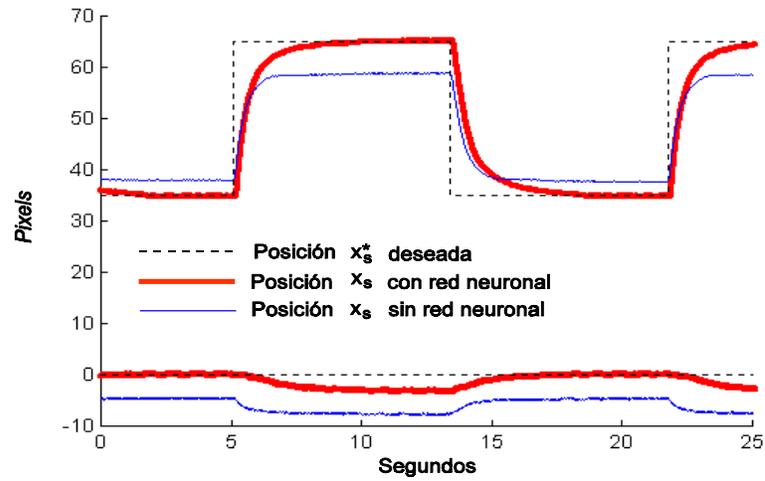


Figura 5.6: Desplazamiento sobre  $x_{s1}$  con ganancias bajas para el PD-1 e incertidumbre en  $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ .

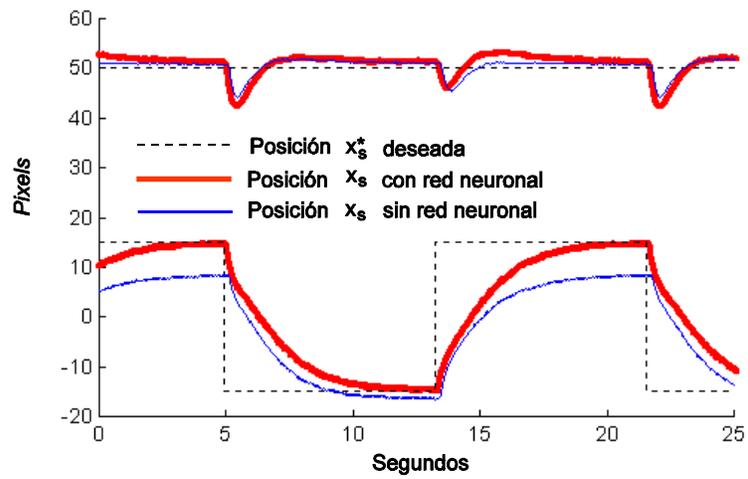


Figura 5.7: Desplazamiento sobre  $x_{s2}$  con ganancias bajas para el PD-1 e incertidumbre en  $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ .

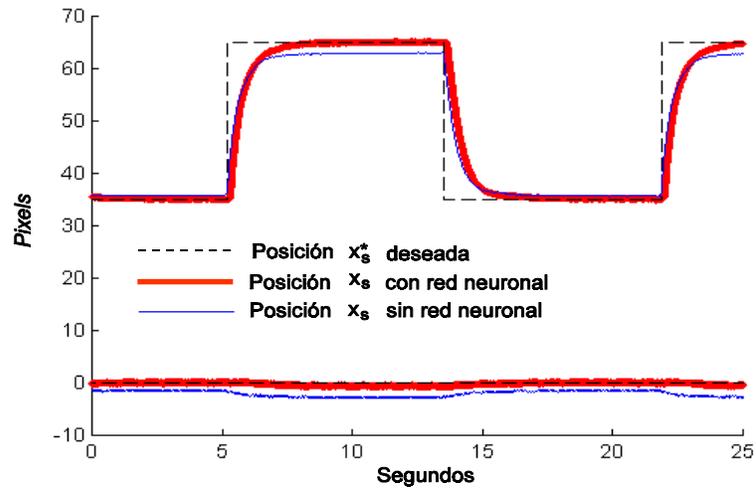


Figura 5.8: Desplazamiento sobre  $x_{s1}$  con ganancias altas para el PD-1 e incertidumbre en  $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ .

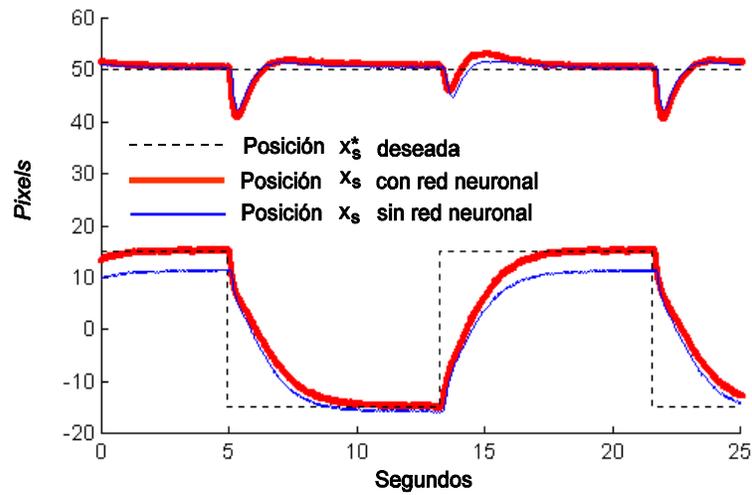


Figura 5.9: Desplazamiento sobre  $x_{s2}$  con ganancias altas para el PD-1 e incertidumbre en  $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ .

### 5.3 Control visual PD - 2

Para esta segunda ley de control se realizaran los mismos experimentos que para la *ley de control visual PD-1*, esto es, primeramente se obtendrá el comportamiento a una consigna de posicionamiento en la coordenada  $x_{s_1}$  donde  $x_{s_1}^* = 50 \pm 15 \text{ pixels}$  y  $x_{s_2}^* = 0 \text{ pixels}$  y se considerará que no existe incertidumbre en la matriz jacobiana. En la figura 5.10 se ve el comportamiento a dicha consigna con las siguientes ganancias bajas para el controlador  $\mathbf{K}_p = \text{diag}\{0.12, 0.12\}$  y  $\mathbf{K}_d = \text{diag}\{0.15, 0.15\}$ , los parámetros de la red neuronal RBF fueron  $\mathbf{K}_w = \text{diag}\{0.32\}$ ,  $\mu = 0.00001$  y  $\kappa = 0.001$ .

En la figura 5.12 se muestra el comportamiento cambiando las ganancias del controlador a un valor más alto, esto es,  $\mathbf{K}_p = \text{diag}\{0.35, 0.35\}$  y  $\mathbf{K}_d = \text{diag}\{0.45, 0.45\}$ , donde los parámetros de la red neuronal RBF fueron  $\mathbf{K}_w = \text{diag}\{0.29\}$ ,  $\mu = 0.00001$  y  $\kappa = 0.001$ .

Ahora se analizará el comportamiento a la consigna de posicionamiento para la coordenada  $x_{s_2}$  donde  $x_{s_1}^* = 50 \text{ pixels}$  y  $x_{s_2}^* = 0 \pm 15 \text{ pixels}$ .

La figura 5.11 muestra el comportamiento para ganancias bajas del controlador, las cuales fueron  $\mathbf{K}_p = \text{diag}\{0.45, 0.45\}$  y  $\mathbf{K}_d = \text{diag}\{0.3, 0.3\}$ , los parámetros de la red neuronal RBF fueron  $\mathbf{K}_w = \text{diag}\{0.31\}$ ,  $\mu = 0.00001$  y  $\kappa = 0.001$ .

En la figura 5.13 se muestra el comportamiento a la consigna de posicionamiento para ganancias altas del controlador, esto es,  $\mathbf{K}_p = \text{diag}\{0.85, 0.85\}$  y  $\mathbf{K}_d = \text{diag}\{0.45, 0.45\}$ , los parámetros de la red neuronal RBF fueron  $\mathbf{K}_w = \text{diag}\{0.29\}$ ,  $\mu = 0.00001$  y  $\kappa = 0.001$ .

Al comparar la respuesta a la consigna de posicionamiento obtenida por la *ley de control PD-1* que se encuentra en las figuras 5.2-5.5 con respecto a la presentada por la *ley de control PD-2* que está en las figuras 5.10-5.13, podemos observar que es muy similar, es decir, ambas permiten eliminar el *offset* casi con el mismo desempeño.

Comparando la *ley de control PD-2* con la *compensación*  $\hat{\mathbf{G}}(\mathbf{q})$ , cuya respuesta para estos casos se encuentra en las figuras D.1-D.4, el *control PD-2* muestra un mejor desempeño tanto a ganancias bajas como a ganancias altas para eliminar los *offsets* en las coordenadas  $x_{s_1}$  y  $x_{s_2}$ . Con respecto al tiempo de respuesta, tanto la *compensación*  $\hat{\mathbf{G}}(\mathbf{q})$  y la compensación utilizada en la *ley de control PD-2* no lo afectan en forma significativa.

Finalmente, podemos concluir que tanto la *ley de control PD-1* como la *ley de control PD-2* presentan un comportamiento muy similar a una consigna de posicionamiento a nivel visual para ganancias bajas y altas del controlador visual PD cuando la matriz jacobina es conocida.

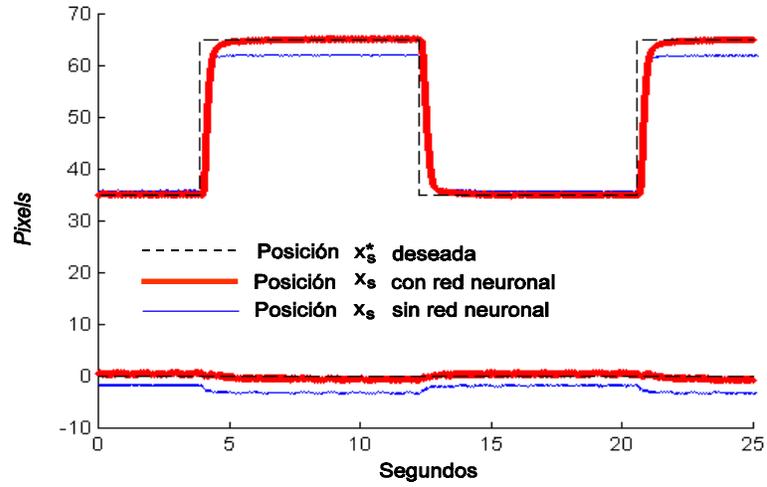


Figura 5.10: Desplazamiento sobre  $x_{s1}$  con ganancias bajas para el PD-2.

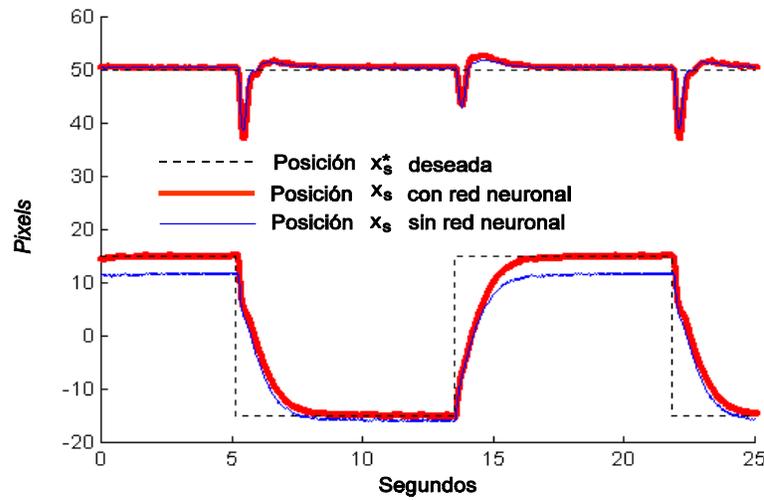


Figura 5.11: Desplazamiento sobre  $x_{s2}$  con ganancias bajas para el PD-2.

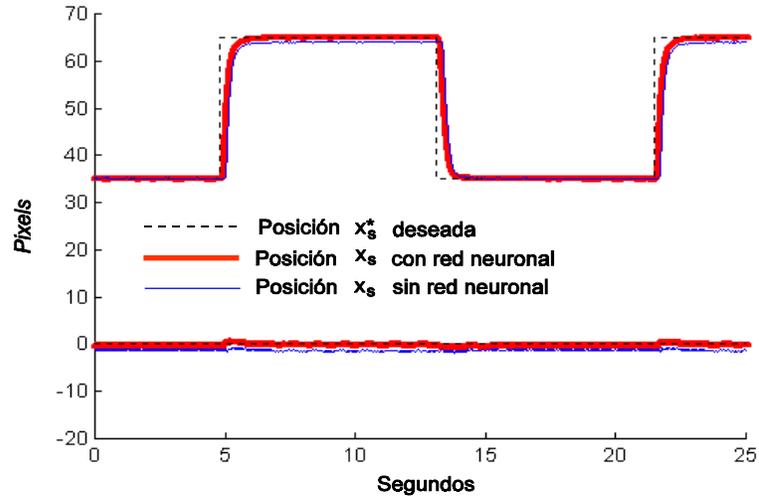


Figura 5.12: Desplazamiento sobre  $x_{s1}$  con ganancias altas para el PD-2.

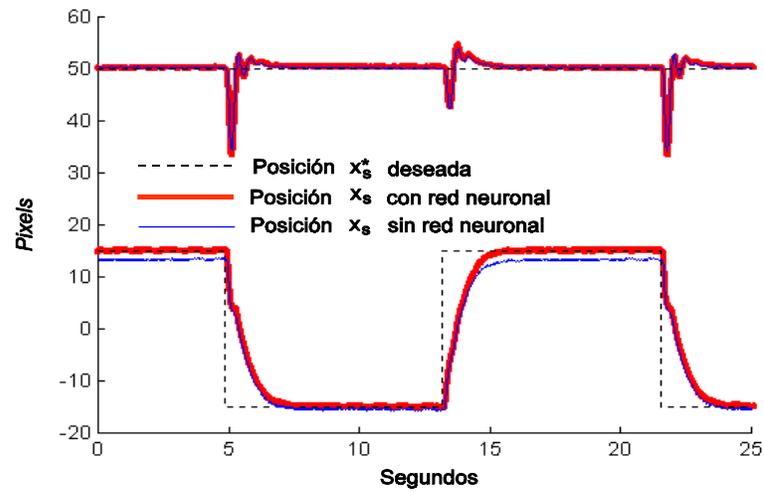


Figura 5.13: Desplazamiento sobre  $x_{s2}$  con ganancias altas para el PD-2.

Ahora consideraremos nuevamente el caso cuando existe incertidumbre en la matriz jacobiana mediante una reducción del 50% en la longitud de los eslabones, esto es,  $l_1 = 0.105 \text{ m}$  y  $l_2 = 0.105 \text{ m}$ , al igual que en los experimentos anteriores se considerará primeramente la consigna de posicionamiento en la coordenada  $x_{s_1}$  donde  $x_{s_1}^* = 50 \pm 15 \text{ pixels}$  y  $x_{s_2}^* = 0 \text{ pixels}$ .

La figura 5.14 muestra el comportamiento bajo dichas condiciones con ganancias bajas para el controlador, las cuales fueron  $\mathbf{K}_p = \text{diag}\{0.12, 0.12\}$  y  $\mathbf{K}_d = \text{diag}\{0.15, 0.15\}$ , los parámetros de la red neuronal RBF fueron  $\mathbf{K}_w = \text{diag}\{0.36\}$ ,  $\mu = 0.00001$  y  $\kappa = 0.001$ .

En la figura 5.16 se muestra el comportamiento cambiando las ganancias del controlador a un valor más alto, esto es  $\mathbf{K}_p = \text{diag}\{0.35, 0.35\}$  y  $\mathbf{K}_d = \text{diag}\{0.45, 0.45\}$ , donde los parámetros de la red neuronal RBF fueron  $\mathbf{K}_w = \text{diag}\{0.28\}$ ,  $\mu = 0.00001$  y  $\kappa = 0.001$ .

Ahora se analizará el comportamiento a la consigna de posicionamiento para la coordenada  $x_{s_2}$  donde  $x_{s_1}^* = 50 \text{ pixels}$  y  $x_{s_2}^* = 0 \pm 15 \text{ pixels}$ , manteniendo la misma condición de incertidumbre en la matriz jacobiana.

La figura 5.15 muestra el comportamiento del robot bajo las condiciones establecidas, donde los parámetros del controlador fueron  $\mathbf{K}_p = \text{diag}\{0.45, 0.45\}$  y  $\mathbf{K}_d = \text{diag}\{0.3, 0.3\}$ , los parámetros de la red neuronal RBF fueron  $\mathbf{K}_w = \text{diag}\{0.35\}$ ,  $\mu = 0.00001$  y  $\kappa = 0.001$ .

La figura 5.17 muestra el comportamiento a la consigna de posicionamiento para ganancias altas del controlador, las cuales fueron  $\mathbf{K}_p = \text{diag}\{0.85, 0.85\}$  y  $\mathbf{K}_d = \text{diag}\{0.45, 0.45\}$ , los parámetros de la red neuronal RBF fueron  $\mathbf{K}_w = \text{diag}\{0.33\}$ ,  $\mu = 0.00001$  y  $\kappa = 0.001$ .

Al comparar la respuesta del *control PD-1* (figuras 5.6-5.9) con respecto a la presentada por el *control PD-2* (figuras 5.14-5.17) podemos observar que presentan comportamientos similares con la diferencia de que el *offset* presente sobre la coordenada que se mantiene constante es menor para este último.

Finalmente, podemos concluir que el desempeño del *control PD-2* para el caso cuando existe incertidumbre en la matriz jacobiana es un poco mejor que el del *control PD -1* y por consiguiente mejor que cuando se utiliza la *compensación*  $\hat{\mathbf{G}}(\mathbf{q})$  (figuras D.5-D.8), lo cual era de esperarse debido a que el *control PD-2* fue diseñado para el caso de incertidumbre en la matriz jacobiana.

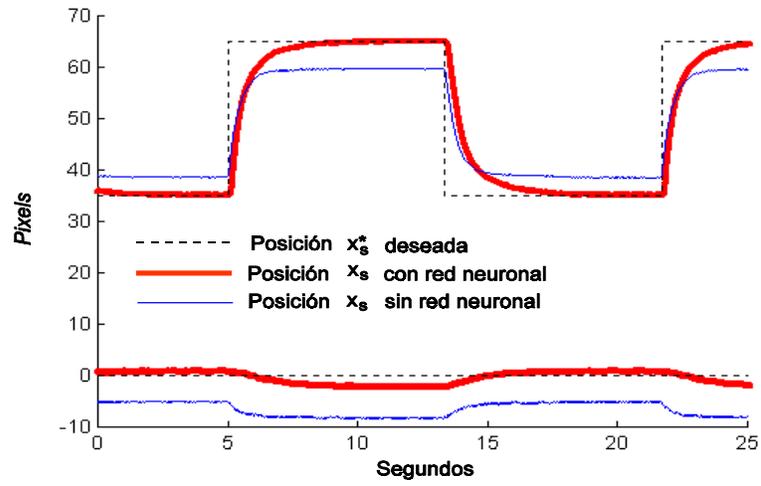


Figura 5.14: Desplazamiento sobre  $x_{s1}$  con ganancias bajas para el PD-2 e incertidumbre en  $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ .

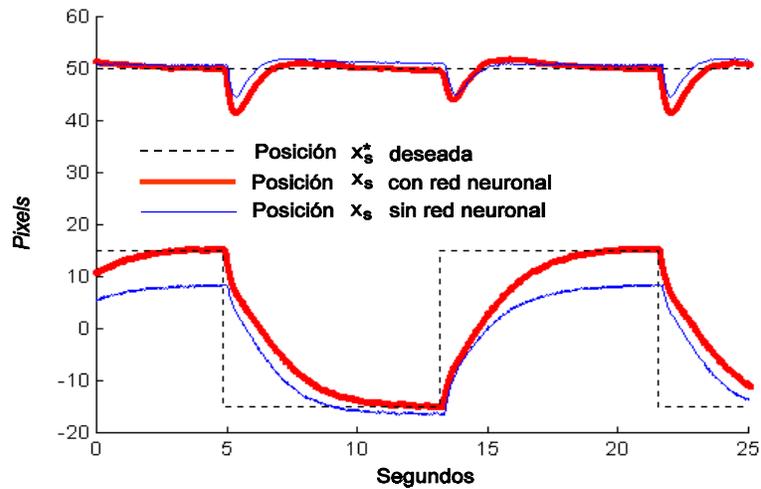


Figura 5.15: Desplazamiento sobre  $x_{s2}$  con ganancias bajas para el PD-2 e incertidumbre en  $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ .

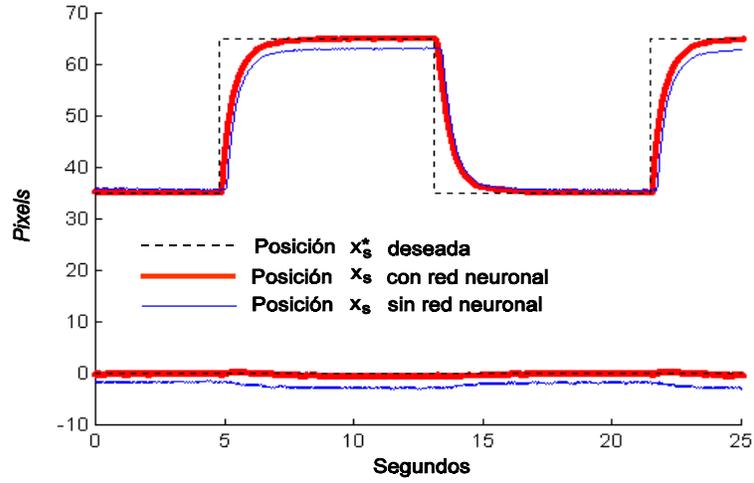


Figura 5.16: Desplazamiento sobre  $x_{s1}$  con ganancias altas para el PD-2 e incertidumbre en  $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ .

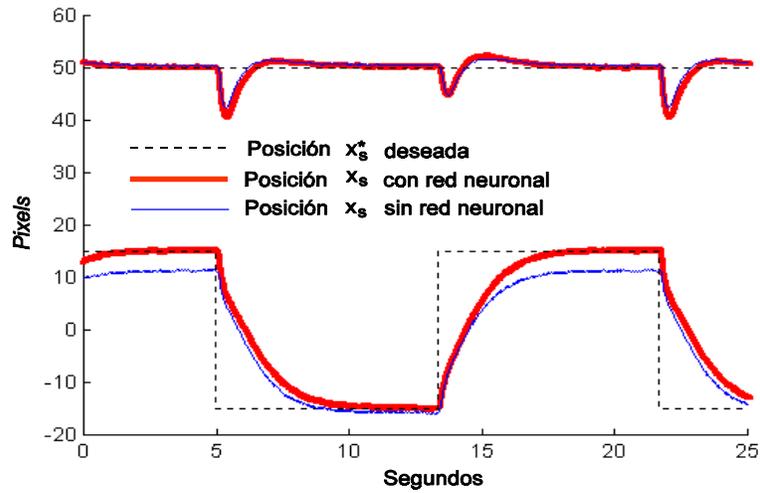


Figura 5.17: Desplazamiento sobre  $x_{s2}$  con ganancias altas para el PD-2 e incertidumbre en  $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ .



# Capítulo 6

## Conclusiones

En la presente tesis se trató el problema de analizar la estabilidad de un sistema de control visual que contiene una compensación de los pares gravitacionales por medio de una red neuronal RBF para un robot planar de dos grados de libertad, cuyo desempeño fue mostrado mediante la implementación práctica de éste en una plataforma experimental la cual se describe ampliamente en el apéndice C.

Para lograr lo anterior fue necesario introducir los fundamentos básicos de *visual servoing* en el capítulo 2, como son la clasificación de las cámaras dependiendo de la forma en que se encuentren con respecto al robot y la clasificación de Sanderson y Weiss de las estructuras de *visual servoing*. Además, se establecen los fundamentos básicos de las redes neuronales en el capítulo 3 que incluyen los modelos matemáticos y las arquitecturas de éstas. En el capítulo 4 se realizó el análisis de estabilidad del sistema conformado por el robot manipulador de dos grados de libertad y las leyes de control propuestas, las cuales presentan las siguientes características: solamente requiere la orientación de la cámara de los parámetros extrínsecos de ésta, no requiere de los parámetros intrínsecos y no utiliza ni la cinemática inversa ni el Jacobiano inverso del robot. Para este análisis se consideraron dos casos, en el primero se supuso que todos los parámetros en la ley de control son conocidos perfectamente y en el segundo se consideró incertidumbre en la matriz jacobiana. Para establecer estabilidad se utilizó una función candidata de Lyapunov que estuvo conformada por la energía cinética total, la energía potencial y un término cruzado entre el error de posición de imagen y la velocidad articular, además, se utilizó el concepto de estabilidad uniformemente, finalmente

acotado (*uniform, ultimate boundedness*) ampliamente utilizado en la literatura de control [39, 40].

La ley de aprendizaje de la red neuronal fue obtenida directamente de este análisis de estabilidad y fue modificada utilizando una herramienta del control adaptable que ha sido aplicada a redes neuronales y que fue denominada como *modificación-e* en [47], esta modificación nos permitió establecer que los pesos de la red se encuentran acotados sin la necesidad de utilizar la condición de excitación persistente.

Es importante notar que las cotas que resultaron para los estados  $\tilde{\mathbf{x}}_s$ ,  $\dot{\mathbf{q}}$  y  $\widetilde{\mathbf{W}}$  de estos análisis de estabilidad pueden ser de cierta forma controladas por los parámetros del control PD y de la red neuronal. Otro punto importante que debe mencionarse es para el caso del Teorema 2 donde a la *modificación-e* se le agrego el término  $\|\dot{\mathbf{q}}\|$ , con lo cual se logró que el error de posicionamiento no dependa de la cota de los pesos  $k_w$  ni del error de aproximación de la matriz jacobiana  $k_J$ .

Estos controladores fueron probados experimentalmente en un robot planar de dos grados de libertad diseñado por el Centro de Servicios Experimentales del Departamento de Control Automático, cuyos resultados fueron mostrados en el capítulo 5.

Los resultados obtenidos por la ley de control propuesta en esta tesis fueron comparados con un compensador utilizado en [57], el cual presento el mejor comportamiento cuando en la ley de control son conocidos todos los parámetros y además las ganancias del controlador PD son grandes, lo cual no ocurrió con el *control PD-1* y con el *control PD-2* que mostraron un buen desempeño cuando las ganancias del controlador son tanto bajas como altas, esto es, lograron eliminar los *offsets* que el control PD sin compensación no es capaz de realizar. Sin embargo en el caso en el cual la matriz jacobiana no es conocida perfectamente se matuvieron pequeños *offsets* en el posicionamiento del robot sobre una de las coordenadas cuando se utilizo el *control PD-1*, pero que se lograron atenuar cuando fue utilizado el *control PD-2* como era de esperarse debido a que este controlador fue diseñado para este caso.

Finalmente, podemos concluir que la mayor aportación de este trabajo fue la prueba de estabilidad en lazo cerrado del sistema conformado por un robot manipulador y las leyes de control visual propuestas con una compensación por medio de una red neuronal RBF y cuya eficiencia es mostrada a través de resultados experimentales.

## 6.1 Trabajos futuros

En el área de *visual servoing* existen aún muchas preguntas abiertas sobre los diferentes tópicos de investigación. Tomando en cuenta la línea de investigación elaborada en la presente tesis se tiene contemplado los siguientes trabajos para ser realizados a corto y mediano plazo:

- Analisis de estabilidad del sistema propuesto en esta tesis cuando existe incertidumbre en la matriz de rotación.
- Comparar los resultados experimentales obtenidos en esta tesis utilizando un sistema de visión que esté compuesto por una cámara digital de alta velocidad.
- Comparar la compensación mediante una red neuronal con respecto a un controlador PID.
- Estimar la matriz Jacobiana mediante una red neuronal.
- Analizar la estabilidad del sistema presentado en esta tesis cuando la estimación del vector de velocidad articular se realiza mediante una red neuronal.
- Analiza el caso cuando la ley de control visual PD no contiene información articular, esto es, *visual servoing* puro con compensación neuronal.
- Analizar la estabilidad de *visual servoing* puro con compensación neuronal cuando el vector de velocidad a nivel visual es estimado con otra red neuronal.
- Abordar el caso de visión estereo.



## Apéndice A

# Función candidata de Lyapunov

Consideremos la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$\begin{aligned} V(\tilde{\mathbf{x}}_s, \dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{W}}) &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2\alpha h} \tilde{\mathbf{x}}_s^T \mathbf{K}_p \tilde{\mathbf{x}}_s - \mu \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{R}(\theta) \mathbf{J}^*(\mathbf{q}) \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \\ &\quad + \frac{1}{2} \text{tr}(\tilde{\mathbf{W}}^T \mathbf{K}_w^{-1} \tilde{\mathbf{W}}) \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

la ecuación (A.1) puede reescribirse como:

$$\begin{aligned} V(\tilde{\mathbf{x}}_s, \dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{W}}) &= \frac{1}{2} \left[ \dot{\mathbf{q}} - \mu \mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{R}(\theta)^T \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s) \right]^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \left[ \dot{\mathbf{q}} - \mu \mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{R}(\theta)^T \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s) \right] + \frac{1}{2\alpha h} \tilde{\mathbf{x}}_s^T \mathbf{K}_p \tilde{\mathbf{x}}_s \\ &\quad - \frac{1}{2} \mu^2 \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T \Lambda \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s) + \frac{1}{2} \text{tr}(\tilde{\mathbf{W}}^T \mathbf{K}_w^{-1} \tilde{\mathbf{W}}) \end{aligned}$$

donde:

$$\Lambda = (\mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{R}(\theta)^T)^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{R}(\theta)^T \quad (\text{A.2})$$

esta función es definida positiva, siempre y cuando el término:

$$\frac{1}{2\alpha h} \tilde{\mathbf{x}}_s^T \mathbf{K}_p \tilde{\mathbf{x}}_s - \frac{1}{2} \mu^2 \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T \Lambda \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s) > 0$$

para probar lo anterior, usaremos las siguientes desigualdades:

$$\frac{1}{2\alpha h} \tilde{\mathbf{x}}_s^T \mathbf{K}_p \tilde{\mathbf{x}}_s \geq \frac{1}{2\alpha h} \lambda_{\min}\{\mathbf{K}_p\} \|\tilde{\mathbf{x}}_s\|^2$$

$$\frac{1}{2} \mu^2 \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T \Lambda \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s) = \frac{\mu^2}{2(1+\|\tilde{\mathbf{x}}_s\|)^2} \tilde{\mathbf{x}}_s^T \Lambda \tilde{\mathbf{x}}_s \leq \frac{1}{2} \mu^2 \lambda_{\max}\{\Lambda\} \|\tilde{\mathbf{x}}_s\|^2$$

de lo anterior tenemos que si la constante  $\mu$  satisfase la siguiente condición:

$$\sqrt{\frac{\lambda_{\min}\{\mathbf{K}_p\}}{\alpha h \lambda_{\max}\{\Lambda\}}} > \mu$$

entonces:

$$\frac{1}{2\alpha h} \lambda_{\min}\{\mathbf{K}_p\} \|\tilde{\mathbf{x}}_s\|^2 \geq \frac{1}{2} \mu^2 \lambda_{\max}\{\Lambda\} \|\tilde{\mathbf{x}}_s\|^2$$

lo cual nos permite concluir que:

$$V(\tilde{\mathbf{x}}_s, \dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{W}}) > 0$$

y la ecuación (A.1) es una función candidata de Lyapunov definida positiva.

## A.1 Caso Ideal

**Corolario 3** *Considere el sistema (4.6) en lazo cerrado con la ley de control (4.9), donde la red neuronal es capaz de aproximar el vector de la gravedad sin el error de reconstrucción, esto es  $\varepsilon = 0$  en (3.9), la actualización de los pesos para la red neuronal se encuentra dada por la siguiente ley de aprendizaje:*

$$\dot{\tilde{\mathbf{W}}} = -\mathbf{K}_w \sigma(\mathbf{q}) \left[ \dot{\mathbf{q}} - \mu \mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{R}(\theta)^T \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s) \right]^T \quad (\text{A.3})$$

con la función  $\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s)$  definida como en (4.11),  $\mathbf{K}_w > 0$ .

Si la constante  $\mu$  es seleccionada de forma tal que:

$$\min \left\{ \sqrt{\frac{\lambda_{\min}\{\mathbf{K}_p\}}{\alpha h \lambda_{\max}\{\Lambda\}}}, \frac{\lambda_{\min}\{\mathbf{K}_d\}}{\sqrt{8} [b_1 \gamma_1 + b_2 \lambda_{\max}\{\mathbf{M}(\mathbf{q})\} + b_1 k_c]}, \frac{2\lambda_{\min}\{\mathbf{K}_p\}}{\lambda_{\max}\{\Lambda_K\}} \right\} > \mu > 0 \quad (\text{A.4})$$

donde:

$$\begin{aligned} \Lambda &= [\mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{R}(\theta)^T]^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{R}(\theta)^T \\ \Lambda_K &= [\mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{R}(\theta)^T]^T \mathbf{K}_d \mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{R}(\theta)^T \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

$\gamma_1$ ,  $b_1$  y  $b_2$  constantes positivas definidas más adelante, entonces, el sistema en lazo cerrado es localmente, asintóticamente estable.

**Demostración.** Consideremos la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V(\tilde{\mathbf{x}}_s, \dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{W}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2\alpha h} \tilde{\mathbf{x}}_s^T \mathbf{K}_p \tilde{\mathbf{x}}_s - \mu \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{R}(\theta) \mathbf{J}^*(\mathbf{q}) \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \text{tr}(\tilde{\mathbf{W}}^T \mathbf{K}_w^{-1} \tilde{\mathbf{W}}) \quad (\text{A.6})$$

la cual fue usada en la prueba del teorema 1 y del teorema 2, donde  $\mathbf{J}^*(\mathbf{q}) = (\mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1})^T$ .

La derivada de la ecuación (A.6) con respecto al tiempo es (ver Capítulo 4):

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\mathbf{x}}_s, \dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{W}}) &= -\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{q}} - \mu \dot{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{R}(\theta) \mathbf{J}^*(\mathbf{q}) \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \mu \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{R}(\theta) \dot{\mathbf{J}}^*(\mathbf{q}) \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \\ &\quad - \mu \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{K}_p \tilde{\mathbf{x}}_s + \mu \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{R}(\theta) \mathbf{J}^*(\mathbf{q}) \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{q}} - \mu \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{R}(\theta) \mathbf{J}^*(\mathbf{q}) \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T \dot{\mathbf{q}} \\ &\quad + \text{tr} \left\{ \tilde{\mathbf{W}}^T \left[ \mathbf{K}_w^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{W}}} - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}^T + \mu \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{q}) \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{R}(\theta) \mathbf{J}^*(\mathbf{q}) \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Consideremos ahora cotas superiores de los siguientes términos :

$$\begin{aligned} -\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{q}} &\leq -\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2} \lambda_{\min} \{ \mathbf{K}_d \} \left\| \dot{\mathbf{q}} \right\|^2 \\ -\mu \dot{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{R}(\theta) \mathbf{J}^*(\mathbf{q}) \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} &\leq \mu \sqrt{2} b_1 \gamma_1 \left\| \dot{\mathbf{q}} \right\|^2 \\ -\mu \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{R}(\theta) \dot{\mathbf{J}}^*(\mathbf{q}) \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} &\leq \mu \sqrt{2} b_2 \lambda_{\max} \{ \mathbf{M}(\mathbf{q}) \} \left\| \dot{\mathbf{q}} \right\|^2 \\ -\mu \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{R}(\theta) \mathbf{J}^*(\mathbf{q}) \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T \dot{\mathbf{q}} &\leq \mu \sqrt{2} b_1 k_c \left\| \dot{\mathbf{q}} \right\|^2 \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

donde:

$$\gamma_1 = \sqrt{8} \alpha h b_J \lambda_{\max} \{ \mathbf{M}(\mathbf{q}) \}$$

$b_J$  y  $b_1$  son las cotas superiores de  $\mathbf{J}(\mathbf{q})$  y  $\mathbf{J}^*(\mathbf{q})$  respectivamente [12, 13, 14, 60], utilizándose la propiedad 2, las cotas (4.21) y (4.22) y las propiedades (4.23) de  $\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s)$ .

Sustituyendo las cotas (A.8) en la ecuación (A.7) tenemos:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\mathbf{x}}_s, \dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{W}}) &\leq -\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{q}} - \left[ \frac{1}{2} \lambda_{\min} \{ \mathbf{K}_d \} - \mu \sqrt{2} b_1 \gamma_1 - \mu \sqrt{2} b_2 \lambda_{\max} \{ \mathbf{M}(\mathbf{q}) \} - \mu \sqrt{2} b_1 k_c \right] \left\| \dot{\mathbf{q}} \right\|^2 \\ &\quad - \mu \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{K}_p \tilde{\mathbf{x}}_s + \mu \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{R}(\theta) \mathbf{J}^*(\mathbf{q}) \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{q}} \\ &\quad + \text{tr} \left\{ \tilde{\mathbf{W}}^T \left[ \mathbf{K}_w^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{W}}} - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}^T + \mu \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{q}) \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{R}(\theta) \mathbf{J}^*(\mathbf{q}) \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

El término:

$$\gamma_2 = \frac{1}{2}\lambda_{\min}\{\mathbf{K}_d\} - \mu\sqrt{2}b_1\gamma_1 - \mu\sqrt{2}b_2\lambda_{\max}\{\mathbf{M}(\mathbf{q})\} - \mu\sqrt{2}b_1k_c \quad (\text{A.10})$$

es positivo siempre y cuando la constante  $\mu$  satisfaga la siguiente condición:

$$\frac{\lambda_{\min}\{\mathbf{K}_d\}}{\sqrt{8}[b_1\gamma_1 + b_2\lambda_{\max}\{\mathbf{M}(\mathbf{q})\} + b_1k_c]} \geq \mu \quad (\text{A.11})$$

La desigualdad (A.9) puede reescribirse como:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\mathbf{x}}_s, \dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{W}}) &\leq -\frac{1}{2}\left[\dot{\mathbf{q}} - \mu\mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1}\mathbf{R}(\theta)^T\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s)\right]^T \mathbf{K}_d \left[\dot{\mathbf{q}} - \mu\mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1}\mathbf{R}(\theta)^T\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s)\right] - \gamma_2 \left\|\dot{\mathbf{q}}\right\|^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}\mu^2\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T \left[\mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1}\mathbf{R}(\theta)^T\right]^T \mathbf{K}_d \mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1}\mathbf{R}(\theta)^T\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s) - \mu\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{K}_p \tilde{\mathbf{x}}_s \quad (\text{A.12}) \\ &\quad + \text{tr} \left\{ \tilde{\mathbf{W}}^T \left[ \mathbf{K}_w^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{W}}} - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}^T + \mu \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{q}) \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{R}(\theta) \mathbf{J}^*(\mathbf{q}) \right] \right\} \end{aligned}$$

Consideremos las cotas superiores de los siguientes términos :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\mu^2\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T \left[\mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1}\mathbf{R}(\theta)^T\right]^T \mathbf{K}_d \mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1}\mathbf{R}(\theta)^T\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s) &= \frac{1}{2}\mu^2\beta^2\tilde{\mathbf{x}}_s^T \Lambda_K \tilde{\mathbf{x}}_s \leq \frac{1}{2}\mu^2\beta\lambda_{\max}\{\Lambda_K\} \left\|\tilde{\mathbf{x}}_s\right\|^2 \\ -\mu\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{K}_p \tilde{\mathbf{x}}_s &= -\mu\beta\tilde{\mathbf{x}}_s^T \mathbf{K}_p \tilde{\mathbf{x}}_s \leq -\mu\beta\lambda_{\min}\{\mathbf{K}_p\} \left\|\tilde{\mathbf{x}}_s\right\|^2 \end{aligned}$$

donde las definiciones (4.11) y (A.5) fueron utilizadas.

Utilizando las cotas anteriores en la desigualdad (A.12) tenemos:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\mathbf{x}}_s, \dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{W}}) &\leq -\frac{1}{2}\left[\dot{\mathbf{q}} - \mu\mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1}\mathbf{R}(\theta)^T\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s)\right]^T \mathbf{K}_d \left[\dot{\mathbf{q}} - \mu\mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1}\mathbf{R}(\theta)^T\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s)\right] \quad (\text{A.13}) \\ &\quad - \gamma_2 \left\|\dot{\mathbf{q}}\right\|^2 - \left[\lambda_{\min}\{\mathbf{K}_p\} - \frac{1}{2}\mu\lambda_{\max}\{\Lambda_K\}\right] \mu\beta \left\|\tilde{\mathbf{x}}_s\right\|^2 \\ &\quad + \text{tr} \left\{ \tilde{\mathbf{W}}^T \left[ \mathbf{K}_w^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{W}}} - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}^T + \mu \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{q}) \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{R}(\theta) \mathbf{J}^*(\mathbf{q}) \right] \right\} \end{aligned}$$

El término:

$$\gamma_3 = \lambda_{\min}\{\mathbf{K}_p\} - \frac{1}{2}\mu\lambda_{\max}\{\Lambda_K\} \quad (\text{A.14})$$

es positivo siempre y cuando la constante  $\mu$  satisfaga la siguiente condición:

$$\frac{2\lambda_{\min}\{\mathbf{K}_p\}}{\lambda_{\max}\{\Lambda_K\}} \geq \mu \quad (\text{A.15})$$

por lo anterior y usando la ley de aprendizaje (A.3) para la actualización de los pesos de la red neuronal, la desigualdad (A.13) puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\mathbf{x}}_s, \dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{W}}) \leq & -\frac{1}{2} \left[ \dot{\mathbf{q}} - \mu \mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{R}(\theta)^T \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s) \right]^T \mathbf{K}_d \left[ \dot{\mathbf{q}} - \mu \mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{R}(\theta)^T \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s) \right] \\ & - \gamma_2 \left\| \dot{\mathbf{q}} \right\|^2 - \gamma_3 \mu \beta \left\| \tilde{\mathbf{x}}_s \right\|^2 \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

la cual es una función semidefinida negativa, de acuerdo con la teoría estandar de Lyapunov y usando el teorema de invarianza de LaSalle tenemos que  $\mathbf{x}_s^* - \mathbf{x}_s \rightarrow 0$ ,  $\dot{\mathbf{q}} \rightarrow 0$  conforme  $t \rightarrow \infty$  para cualquier estado inicial  $\mathbf{x}_s(0)$  y  $\dot{\mathbf{q}}(0)$ , por lo tanto, el sistema (4.6) en lazo cerrado con la ley de control (4.9) es localmente, asintóticamente estable. ■



## Apéndice B

# Fundamentos matemáticos

### B.1 Desigualdades

Para la función:

$$\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s) = \left( \frac{1}{1 + \|\tilde{\mathbf{x}}_s\|} \right) \tilde{\mathbf{x}}_s \quad (\text{B.1})$$

como  $1 + \|\tilde{\mathbf{x}}_s\| \geq \|\tilde{\mathbf{x}}_s\|$  implica que la norma de  $\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s)$  cumple:

$$\|\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s)\| = \left\| \frac{\tilde{\mathbf{x}}_s}{1 + \|\tilde{\mathbf{x}}_s\|} \right\| \leq \frac{\|\tilde{\mathbf{x}}_s\|}{\|\tilde{\mathbf{x}}_s\|} \leq 1 \quad (\text{B.2})$$

La derivada con respecto al tiempo de la función (B.1) está definida como:

$$\dot{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}_s) = \left[ \frac{\partial \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s)}{\partial \tilde{\mathbf{x}}_s} \right] \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}_s}{\partial t} \quad (\text{B.3})$$

en donde el primer término de (B.3) es:

$$\frac{\partial \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_s)}{\partial \tilde{\mathbf{x}}_s} = \frac{1}{1 + \|\tilde{\mathbf{x}}_s\|} \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}_s}{\partial \tilde{\mathbf{x}}_s} + \frac{\partial \left( \frac{1}{1 + \|\tilde{\mathbf{x}}_s\|} \right)}{\partial \tilde{\mathbf{x}}_s} \tilde{\mathbf{x}}_s \quad (\text{B.4})$$

donde:

$$\frac{\partial \left( \frac{1}{1 + \|\tilde{\mathbf{x}}_s\|} \right)}{\partial \tilde{\mathbf{x}}_s} = \frac{(1 + \|\tilde{\mathbf{x}}_s\| * 0) - \left( 1 * \frac{\partial(1 + \|\tilde{\mathbf{x}}_s\|)}{\partial \tilde{\mathbf{x}}_s} \right)}{(1 + \|\tilde{\mathbf{x}}_s\|)^2} \quad (\text{B.5})$$

si:

$$\frac{\partial(1 + \|\tilde{\mathbf{x}}_s\|)}{\partial \tilde{\mathbf{x}}_s} = \frac{\partial \|\tilde{\mathbf{x}}_s\|}{\partial \tilde{\mathbf{x}}_s} = \frac{\partial \sqrt{(\tilde{x}_{s1}^2 + \dots + \tilde{x}_{sn}^2)}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}_s} = \frac{\tilde{\mathbf{x}}_s^T}{\|\tilde{\mathbf{x}}_s\|} \quad (\text{B.6})$$

de aquí tenemos que (B.5) es:

$$\frac{\partial \left( \frac{1}{1 + \|\tilde{\mathbf{x}}_s\|} \right)}{\partial \tilde{\mathbf{x}}_s} = - \frac{\tilde{\mathbf{x}}_s^T}{(1 + \|\tilde{\mathbf{x}}_s\|)^2 \|\tilde{\mathbf{x}}_s\|} \quad (\text{B.7})$$

finalmente, sustituyendo (B.7) y (B.4) en (B.3) obtenemos:

$$\dot{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}_s) = \frac{\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_s}{1 + \|\tilde{\mathbf{x}}_s\|} - \frac{\tilde{\mathbf{x}}_s^T \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_s}{(1 + \|\tilde{\mathbf{x}}_s\|)^2 \|\tilde{\mathbf{x}}_s\|} \tilde{\mathbf{x}}_s \quad (\text{B.8})$$

La norma de  $\dot{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}_s)$  cumple:

$$\left\| \dot{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}_s) \right\| \leq \left\| \frac{\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_s}{1 + \|\tilde{\mathbf{x}}_s\|} \right\| + \left\| - \frac{\tilde{\mathbf{x}}_s^T \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_s}{(1 + \|\tilde{\mathbf{x}}_s\|)^2 \|\tilde{\mathbf{x}}_s\|} \tilde{\mathbf{x}}_s \right\| \quad (\text{B.9})$$

como:

$$\begin{aligned} 1 + \|\tilde{\mathbf{x}}_s\| &\geq 1 \\ (1 + \|\tilde{\mathbf{x}}_s\|)^2 &= 1 + 2\|\tilde{\mathbf{x}}_s\| + \|\tilde{\mathbf{x}}_s\|^2 \geq \|\tilde{\mathbf{x}}_s\| \end{aligned}$$

se cumplen las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_s}{1 + \|\tilde{\mathbf{x}}_s\|} \right\| &\leq \left\| \frac{\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_s}{1} \right\| \leq \left\| \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_s \right\| \\ \left\| - \frac{\tilde{\mathbf{x}}_s^T \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_s}{(1 + \|\tilde{\mathbf{x}}_s\|)^2 \|\tilde{\mathbf{x}}_s\|} \tilde{\mathbf{x}}_s \right\| &\leq \frac{\|\tilde{\mathbf{x}}_s\|^2 \|\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_s\|}{\|\tilde{\mathbf{x}}_s\|^2} \leq \left\| \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_s \right\| \end{aligned}$$

de lo anterior (B.9) es:

$$\left\| \dot{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}_s) \right\| \leq 2 \left\| \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_s \right\| \quad (\text{B.10})$$

si  $\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_s$  está definida como:

$$\frac{d\tilde{\mathbf{x}}_s}{dt} = \frac{\partial \{ \alpha h \mathbf{R}(\theta) [\mathbf{f}_x(\mathbf{q}_d) - \mathbf{f}_x(\mathbf{q})] \}}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = -\alpha h \mathbf{R}(\theta) \mathbf{J}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$$

y además:

$$-\alpha h \mathbf{R}(\theta) \mathbf{J}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \leq \alpha h \left\| \mathbf{R}(\theta) \right\| \left\| \mathbf{J}(\mathbf{q}) \right\| \left\| \dot{\mathbf{q}} \right\| \leq \alpha h b_J \left\| \mathbf{R}(\theta) \right\| \left\| \dot{\mathbf{q}} \right\|$$

donde  $b_J$  es la cota superior de  $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ , y la norma de Frobenius de la matriz de rotación es:

$$\left\| \mathbf{R}(\theta) \right\|_F^2 = \text{tr} \left( \mathbf{R}^T(\theta) \mathbf{R}(\theta) \right) = 2$$

entonces, (B.10) queda :

$$\left\| \dot{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}_s) \right\| \leq \sqrt{8} \alpha h b_J \left\| \dot{\mathbf{q}} \right\|$$

## B.2 Estabilidad Uniformemente, finalmente acotada

**Definición 4** [39, 35] *Un punto de equilibrio  $x_e$  se dice que es uniformemente, finalmente acotado (Uniform ultimate boundedness UUB) si existe un conjunto compacto  $\mathbf{S} \subset \mathbb{R}^n$  que para todo  $x_o \in \mathbf{S}$  se tiene una cota  $B$  y un tiempo  $T(B, x_o)$  tal que:*

$$\|x(t) - x_e\| \leq B \quad \forall t \geq t_o + T$$

La figura B.1 ilustra la definición anterior, la idea de UUB es que para todos los estados iniciales en el conjunto compacto  $\mathbf{S}$ , las trayectorias del sistema eventualmente alcanzan después de un lapso de tiempo  $T$ , una vecindad acotada de  $x_e$ . El término *uniformemente (uniform)* indica que  $T$  no depende del tiempo inicial  $t_o$  y el término *finalmente (ultimate)* indica que la propiedad de acotamiento se mantiene después del tiempo  $T$ .

El siguiente teorema muestra las condiciones necesarias para establecer que un sistema de la forma:

$$\dot{x} = f(x, t) + d(t) \tag{B.11}$$

con  $d(t)$  una perturbación desconocida, es uniformemente, finalmente acotado (UUB) si la derivada de la función de Lyapunov es negativa fuera de una región acotada de  $\mathbb{R}^n$ .

**Teorema 5** [39] *Si para el sistema B.11, existe una función  $L(x, t)$  con derivadas parciales continuas tal que para toda  $x$  perteneciente a un conjunto compacto  $\mathbf{S} \subset \mathbb{R}^n$ ,  $L(x, t)$  es definida positiva,*

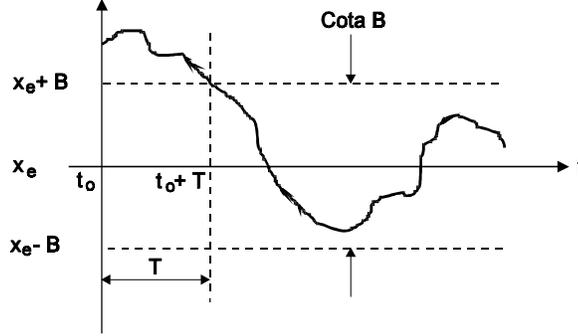


Figura B.1: Uniformemente, Finalmente Acotado

$L(x, t) > 0$  y  $\dot{L}(x, t) < 0$  con  $\|x\| > B$ , para algún  $B > 0$ , donde la esfera de radio  $B$  está contenida en  $S$ , entonces el sistema es UUB y la norma del estado  $x$  esta acotada dentro de la vecindad de  $B$ .

Para este resultado  $\dot{L}(x, t)$  debe ser estrictamente menor que cero fuera de la esfera de radio  $B$ , si solamente tenemos que  $\dot{L}(x, t) \leq 0$  para  $\|x\| > B$  no es posible concluir nada acerca de la estabilidad del sistema.

Para los sistemas que satisfacen este teorema, pueden existir algunas perturbaciones que fuercen al estado fuera del equilibrio, sin embargo, si el estado llega a alejarse demasiado la dinámica del sistema regresa el estado al equilibrio, debido a estos dos efectos que se balancean cuando  $\|x\| \approx B$  las trayectorias del sistema tienden a permanecer en una vecindad de  $\|x\| = B$  en un tiempo finito [7, 10], por lo tanto, la norma del estado esta acotada por  $B$ .

### B.3 Valor óptimo de $\mathbf{K}_w$

En el teorema 1 se obtienen las siguientes cotas las cuales dependen del valor de la ganancia  $\mathbf{K}_w$ :

$$g_1(\lambda_{max}(\mathbf{K}_w)) = \frac{\sqrt{2}b_1k_\varepsilon}{\gamma_3} + \frac{k_w^2}{4\gamma_3\lambda_{max}(\mathbf{K}_w)} \quad (\text{B.12})$$

$$g_2(\lambda_{max}(\mathbf{K}_w)) = \frac{k_w}{2} + \sqrt{\sqrt{2}b_1k_\varepsilon\lambda_{max}(\mathbf{K}_w) + \frac{k_w^2}{4}}$$

éstas pueden ser reescritas como:

$$g_1(x) = a_1 + \frac{a_2}{x} \quad (\text{B.13})$$

$$g_2(x) = a_3 + \sqrt{a_4x + a_5}$$

donde:

$$x = \lambda_{max}(\mathbf{K}_w), \quad a_1 = \frac{\sqrt{2}b_1k_\varepsilon}{\gamma_3}, \quad a_2 = \frac{k_w^2}{4\gamma_3}, \quad a_3 = \frac{k_w}{2}, \quad a_4 = \sqrt{2}b_1k_\varepsilon, \quad a_5 = \frac{k_w^2}{4}$$

Para seleccionar el valor de la ganancia  $\mathbf{K}_w$  tal que las cotas B.12 sean mínimas, es necesario encontrar las raíces reales positivas de la derivada de la siguiente función:

$$h(x) = g_1(x) + g_2(x) = a_1 + \frac{a_2}{x} + a_3 + \sqrt{a_4x + a_5} \quad (\text{B.14})$$

es decir para:

$$h'(x) = -\frac{a_2}{x^2} + \frac{a_4}{2\sqrt{a_4x + a_5}} = 0$$

la cual puede escribirse como el siguiente polinomio:

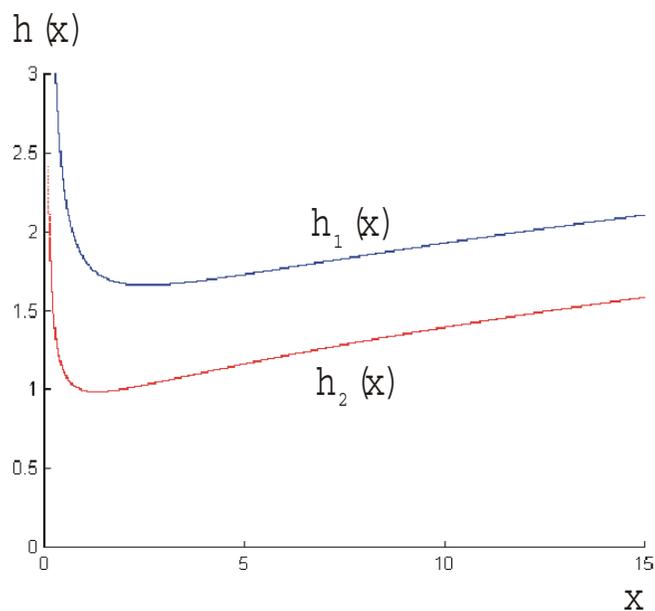
$$a_4^2x^4 - 4a_2^2a_4x - 4a_2^2a_5 = 0$$

existirán cuatro raíces de la forma:

$$(x \pm c_1)(x \pm c_2)(x \pm c_3)(x \pm c_4) = 0$$

con  $c_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) las raíces del polinomio, donde es necesario conocer las constantes  $a_j$  ( $j = 1, 2, 3, 4, 5$ ) que en la práctica son desconocidas.

En la figura B.2 se muestra el efecto de aumentar la constante  $\gamma_3$  la cual depende de la ganancia

Figura B.2: Función  $h(x)$ 

$\mathbf{K}_p$  (ver 4.29) sobre el mínimo de la función B.14, los valores para obtener esta gráfica son:

Función	$h_1(x)$	$h_2(x)$
$a_1$	0.7	0.2
$a_2$	0.5	0.17
$a_3$	0.25	0.25
$a_4$	0.08	0.08
$a_5$	0.06	0.06
$\gamma_3$	0.11	0.35
valor mínimo	1.66	0.98
$x$	2.3	1.3

En conclusión al aumentar  $\gamma_3$  se hace más pequeño el valor mínimo de la función  $h(x)$  para una  $x$  más pequeña.

## Apéndice C

# Plataforma de *visual servoing*

En este apéndice se presenta la plataforma de *visual servoing* empleada para realizar el control de un robot manipulador de dos grados de libertad [16], el ambiente de programación se encuentra basado en el programa de *Matlab/Simulink*<sup>®</sup> el cual tiene la ventaja de permitir una programación de las leyes de control a nivel gráfico.

La plataforma de *visual servoing* está compuesta de tres elementos básicos los cuales son mostrados en la figura C.1. El primero es *el componente de programación y acceso de datos*, en el cual una computadora denominada *servidor* es utilizada para el acceso de los datos y para la programación de los algoritmos de control en el ambiente de *Matlab/Simulink*<sup>®</sup>.

En la computadora *servidor* el programa *Wincon*<sup>®</sup> se encarga de compilar y bajar el código del algoritmo de control en tiempo real a otra computadora denominada como *cliente*, una vez que el código ha sido descargado es posible iniciar el experimento, además posee la flexibilidad de poder cambiar los parámetros del controlador en línea. La interconexión entre el *servidor* y el *cliente* es realizada a través de una red *ethernet*.

El segundo componente es *el de control* que es capaz de interactuar tanto con el componente de visión como con el sistema a controlar, en éste se utiliza una computadora conocida como *cliente*, donde *Wincon*<sup>®</sup> es empleado para correr el código generado por el *servidor*. La adquisición de los datos es a través de una tarjeta *Servotogo S8*, la cual es capaz de manejar decodificadores ópticos y voltajes analógicos de entrada y salida. El periodo de muestreo utilizado en la presente tesis el cual depende del procesador de la computadora fue de 1 mseg.

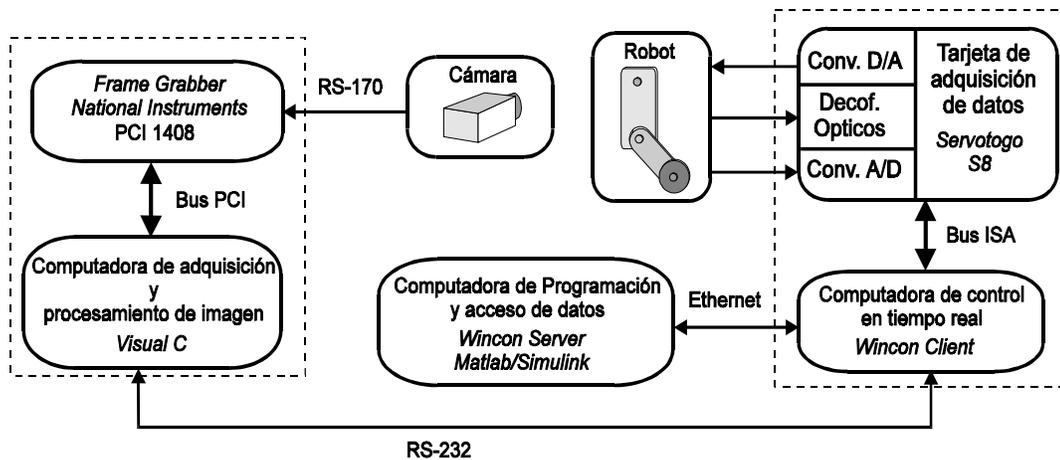


Figura C.1: Componentes de la plataforma *visual servoing*

Finalmente, *el componente de visión* que está constituido por una cámara modelo *VT-90D* para la adquisición de la imagen cuya señal de salida de vídeo está en el formato *RS-170*. La imagen es convertida a datos digitales usando un *frame grabber* de la *National Instruments*, modelo *PCI-1408* que se encuentra alojado en una computadora. El procesamiento de la imagen es realizado usando el lenguaje de programación *Visual C* y consiste en la detección de la posición del órgano terminal del robot a través de la determinación de su centroide. Cuando éste es calculado se transmite al *cliente* vía *RS-232* a *115.4 kbauds*. El período de muestreo visual empleado es de *20 mseg*, el cual es función del tiempo requerido para la adquisición de la imagen, del procesamiento y del tiempo requerido para enviar los datos al *cliente*.

## C.1 Operación de la plataforma de *visual servoing*

En esta sección se describirá el funcionamiento de la plataforma para el control de un robot de dos grados de libertad mostrado en la figura C.2, en el cual se usa la filosofía *look then move basada en imagen*, es decir, la ley de control emplea las mediciones del error de posición de imagen  $\tilde{\mathbf{x}}_s$  obtenida del sistema de visión en *pixels* y la velocidad articular  $\dot{\mathbf{q}}$  la cual es estimada por medio de un filtro pasa altas mediante la medición de la posición articular proporcionada por los decodificadores ópticos del robot.



Figura C.2: Robot Manipulador

La implementación de las leyes de control se realiza en el ambiente de *Matlab/Simulink*<sup>®</sup> de una forma rápida y sencilla permitiendo cambiar los parámetros de control en tiempo real.

A continuación se describirá la operación de activación de los diferentes elementos que componen la plataforma empleada.

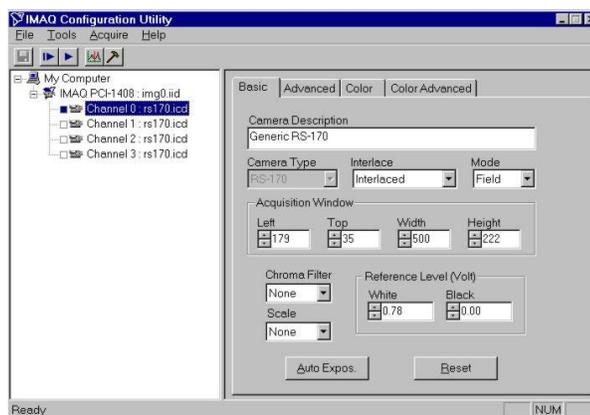
### C.1.1 Sistema de visión

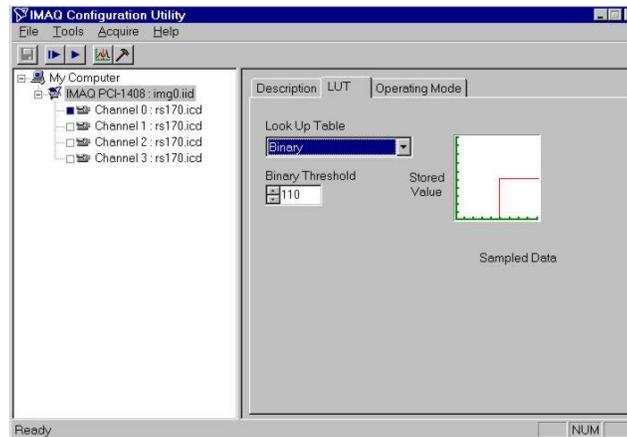
Este sistema consta de una cámara analógica (figura C.3) conectada a una tarjeta *NI-IMAQ*, la cual se encuentra alojada en la computadora de adquisición y procesamiento de imágenes. El primer paso para su uso es verificar que la cámara se encuentra dada de alta mediante el programa *IMAQ setup* en el menú *Basic*, el cual es mostrado en la figura C.4, donde también se puede modificar el tamaño de la ventana de adquisición de imagen que depende del tamaño del área que se desea adquirir y la distancia a la cual se encuentra la cámara con respecto al robot. El modo en el que se adquiere la imagen ya sea *campo* o *cuadro* (*field* o *frame*) también puede ser modificado en este menú, durante los experimentos de la presente tesis fue utilizado el modo *campo*.

Para binarizar la imagen adquirida y variar el nivel de umbralizado, se utiliza el menú *LUT*, el



Figura C.3: Sistema de visión

Figura C.4: *Imag Setup* menú *Basic*

Figura C.5: *Imaq Setup* menú LUT

cual es mostrado en la figura C.5. Con el botón de *grab* se activa al modo de adquisición continua con el cual es posible observar los cambios realizados a la imagen adquirida.

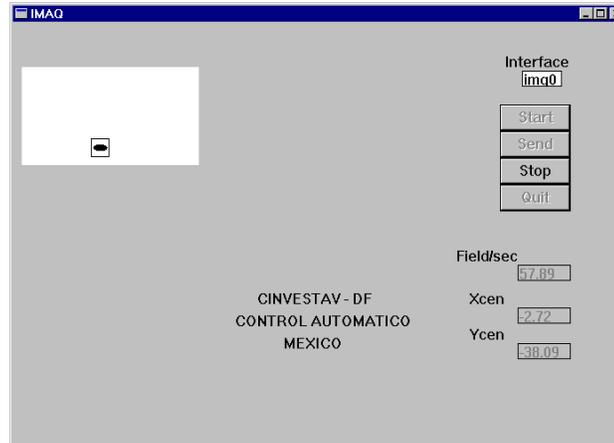
El siguiente paso consiste en activar el programa que se muestra en la figura C.6, el cual cuenta con una *interfaz GUI* que permite iniciar el proceso de adquisición de imagen, cálculo del centroide del órgano terminal del robot y el envío de éste por el puerto serial [4].

### C.1.2 Operación del cliente

En la computadora denominada *cliente* la cual se encarga de realizar los cálculos relacionados con la ley de control, se debe activar el programa *WinCon Client*<sup>®</sup>. En esta computadora se encuentra la tarjeta *ServoToGo* y el conector serial de recepción de datos.

### C.1.3 Operación del servidor

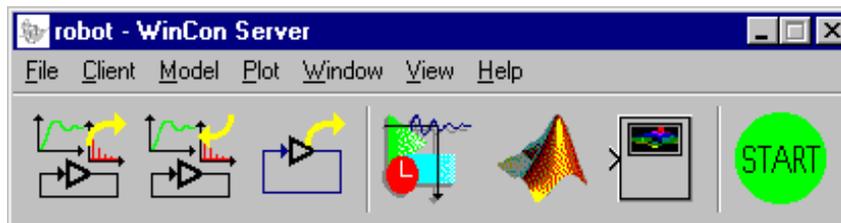
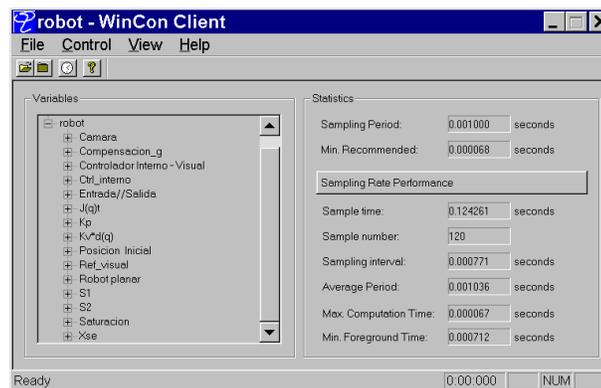
En la computador denominada *servidor* se debe activar el programa de *Matlab/Simulink*<sup>®</sup> y cargar el archivo que contiene la programación de la ley de control que se va a ejecutar, en este mismo archivo se deben encontrar los *drivers* que permiten utilizar tanto la tarjeta *ServoToGo* como el poder recibir datos mediante el puerto serial. Se debe verificar que los datos referentes al período de muestreo visual  $t_v$  que se encuentra dentro del bloque *S-function* el cual esta alojado en

Figura C.6: *Interfaz GUI*

el subsistema cámara (ver apéndice E) y el período de muestreo de control  $t_c$  el cual se encuentra en el menú *simulation* del programa *Simulink*, sean los apropiados, en esta tesis los valores utilizados fueron  $t_v = 20$  msec y  $t_c = 1$  msec.

Finalmente, se activar el programa *WinCon Server*<sup>®</sup> el cual compila y descarga el código de la ley de control en el programa *WinCon Client*<sup>®</sup> de la computadora *cliente*. Para esto primeramente se conecta el *servidor* con el *cliente* mediante el menú *Client* de *WinCon Server*<sup>®</sup>, posteriormente se selecciona *build* dentro del menú *WinCon* del programa *Simulink*, si todo fue realizado correctamente, el botón *Start* de *WinCon Server*<sup>®</sup> estará en verde como se ilustra en la figura C.7 y el programa *WinCon Client*<sup>®</sup> mostrará los parámetros de control como se muestra en la figura C.8.

Realizando lo anterior la plataforma de *visual servoing* se encuentra lista para poder realizar los experimentos para alguna ley de control visual propuesta.

Figura C.7: *WinCon Server*Figura C.8: *WinCon Client*



## Apéndice D

# Fundamentos experimentales

### D.1 Centros de la red neuronal

La siguiente tabla muestra los valores de los centros  $\mathbf{c}_j$  ( $j = 1, \dots, 20$ ) utilizados para la red neuronal RBF.

Neurona	Centro	Neurona	Centro
1	$\mathbf{c}_1 = [3.6, 3.6]^T$	11	$\mathbf{c}_{11} = [0.6, 1.0]^T$
2	$\mathbf{c}_2 = [3.3, 3.3]^T$	12	$\mathbf{c}_{12} = [0.3, 0.9]^T$
3	$\mathbf{c}_3 = [3.0, 3.0]^T$	13	$\mathbf{c}_{13} = [-0.3, 0.8]^T$
4	$\mathbf{c}_4 = [2.7, 2.7]^T$	14	$\mathbf{c}_{14} = [-0.6, 0.7]^T$
5	$\mathbf{c}_5 = [2.4, 2.4]^T$	15	$\mathbf{c}_{15} = [-0.9, 0.6]^T$
6	$\mathbf{c}_6 = [2.1, 2.1]^T$	16	$\mathbf{c}_{16} = [-1.2, 0.5]^T$
7	$\mathbf{c}_7 = [1.8, 1.8]^T$	17	$\mathbf{c}_{17} = [-1.5, 0.4]^T$
8	$\mathbf{c}_8 = [1.5, 1.6]^T$	18	$\mathbf{c}_{18} = [-1.8, 0.3]^T$
9	$\mathbf{c}_9 = [1.2, 1.4]^T$	19	$\mathbf{c}_{19} = [-2.1, 0.2]^T$
10	$\mathbf{c}_{10} = [0.9, 1.2]^T$	20	$\mathbf{c}_{20} = [-2.4, 0.1]^T$

## D.2 Gráficas del compensador de gravedad

Para realizar una comparación del desempeño de la red neuronal RBF propuesta en esta tesis con respecto al compensador desarrollado en [17], esta sección muestra el desempeño de dicho compensador bajo las mismas condiciones utilizadas para la red neuronal RBF en el capítulo 5.

La figura D.1 muestra la consigna de desplazamiento para la coordenada  $x_{s_1}$  sin incertidumbre en la matriz jacobiana y con las ganancias bajas para el controlador las cuales son  $\mathbf{K}_p = \text{diag}\{0.12, 0.12\}$  y  $\mathbf{K}_d = \text{diag}\{0.15, 0.15\}$ .

La figura D.2 muestra la consigna de desplazamiento para la coordenada  $x_{s_2}$  sin incertidumbre en la matriz jacobiana y con las ganancias bajas para el controlador las cuales son  $\mathbf{K}_p = \text{diag}\{0.45, 0.45\}$  y  $\mathbf{K}_d = \text{diag}\{0.3, 0.3\}$ .

La figura D.3 muestra la consigna de desplazamiento para la coordenada  $x_{s_1}$  sin incertidumbre en la matriz jacobiana y con las ganancias altas para el controlador las cuales son  $\mathbf{K}_p = \text{diag}\{0.35, 0.35\}$  y  $\mathbf{K}_d = \text{diag}\{0.45, 0.45\}$ .

La figura D.4 muestra la consigna de desplazamiento para la coordenada  $x_{s_2}$  sin incertidumbre en la matriz jacobiana y con las ganancias altas para el controlador las cuales son  $\mathbf{K}_p = \text{diag}\{0.85, 0.85\}$  y  $\mathbf{K}_d = \text{diag}\{0.45, 0.45\}$ .

La figura D.5 muestra la consigna de desplazamiento para la coordenada  $x_{s_1}$  con un 50% de incertidumbre en la matriz jacobiana y con las ganancias bajas para el controlador las cuales son  $\mathbf{K}_p = \text{diag}\{0.12, 0.12\}$  y  $\mathbf{K}_d = \text{diag}\{0.15, 0.15\}$ .

La figura D.6 muestra la consigna de desplazamiento para la coordenada  $x_{s_2}$  con un 50% de incertidumbre en la matriz jacobiana y con las ganancias bajas para el controlador las cuales son  $\mathbf{K}_p = \text{diag}\{0.45, 0.45\}$  y  $\mathbf{K}_d = \text{diag}\{0.3, 0.3\}$ .

La figura D.7 muestra la consigna de desplazamiento para la coordenada  $x_{s_1}$  con un 50% de incertidumbre en la matriz jacobiana y con las ganancias altas para el controlador las cuales son  $\mathbf{K}_p = \text{diag}\{0.35, 0.35\}$  y  $\mathbf{K}_d = \text{diag}\{0.45, 0.45\}$ .

La figura D.8 muestra la consigna de desplazamiento para la coordenada  $x_{s_2}$  con un 50% de incertidumbre en la matriz jacobiana y con las ganancias altas para el controlador las cuales son  $\mathbf{K}_p = \text{diag}\{0.85, 0.85\}$  y  $\mathbf{K}_d = \text{diag}\{0.45, 0.45\}$ .

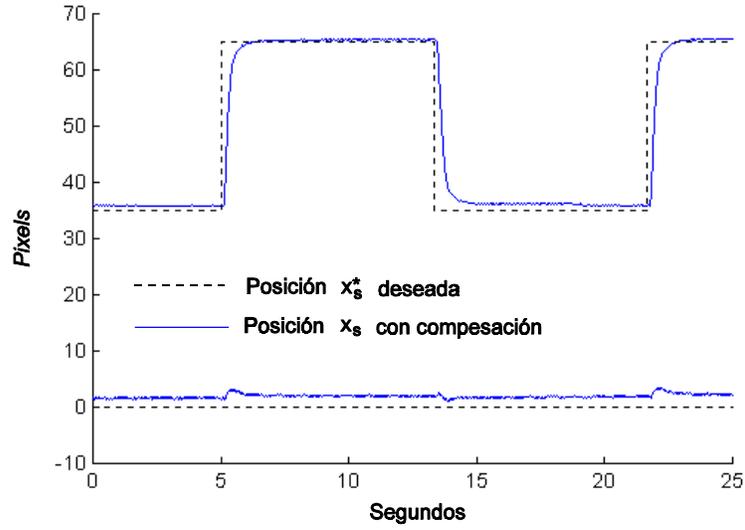


Figura D.1: Desplazamiento sobre  $x_{s1}$  con ganancias bajas

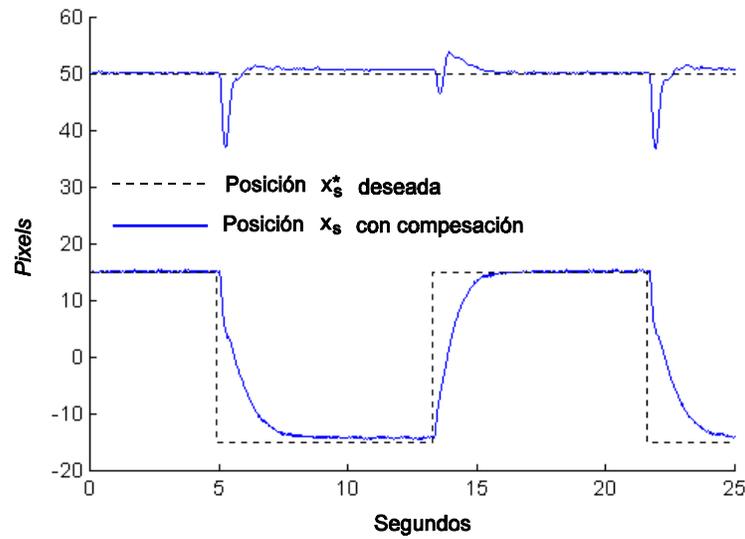


Figura D.2: Desplazamiento sobre  $x_{s2}$  con ganancias bajas

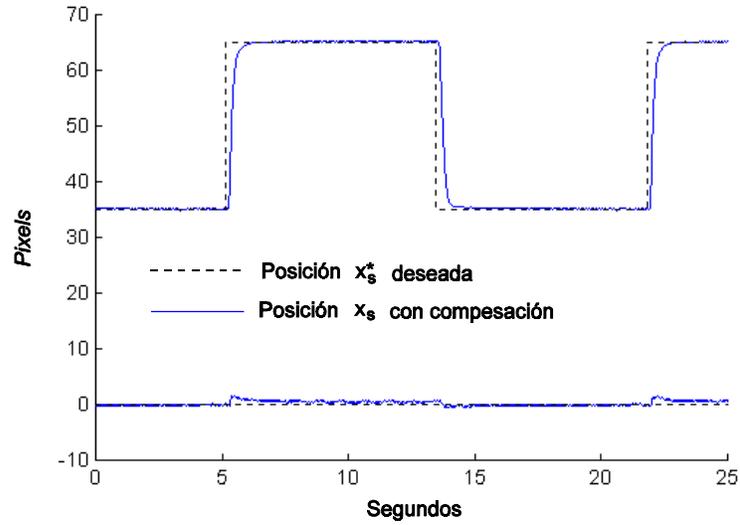


Figura D.3: Desplazamiento sobre  $x_{s1}$  con ganancias altas

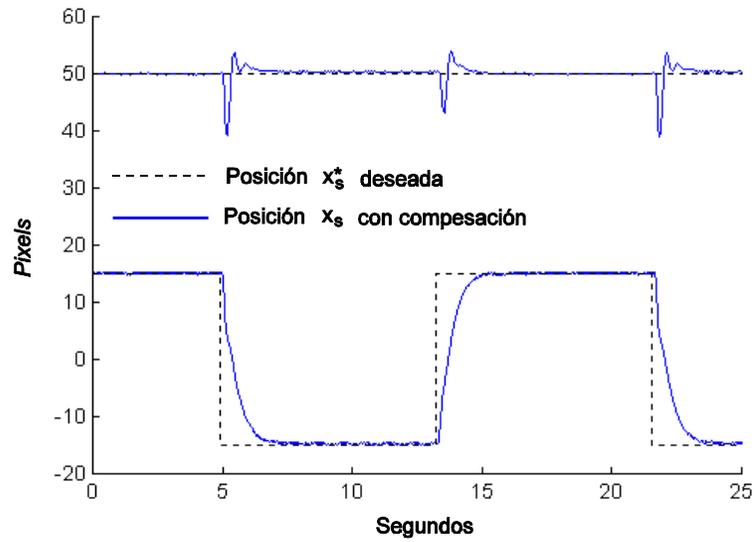


Figura D.4: Desplazamiento sobre  $x_{s2}$  con ganancias altas

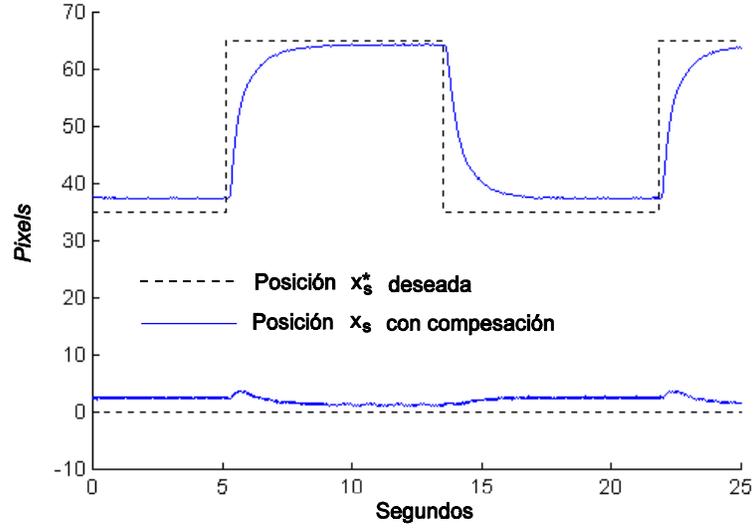


Figura D.5: Desplazamiento sobre  $x_{s1}$  con ganancias bajas e incertidumbre en  $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ .

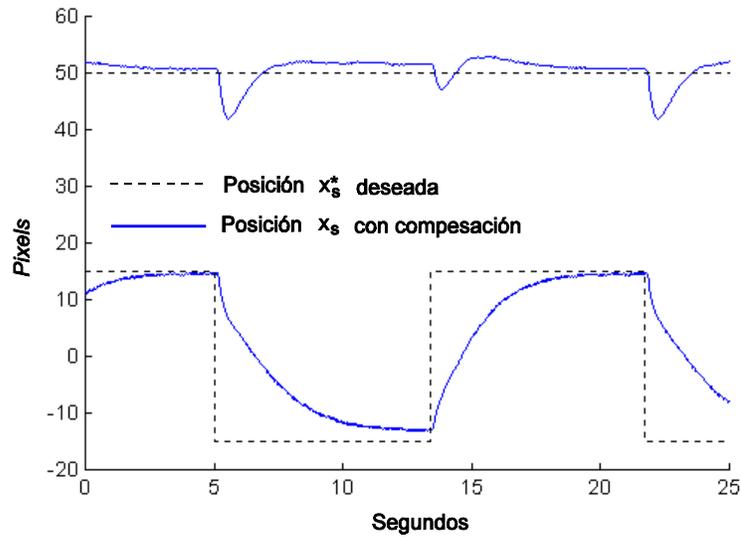


Figura D.6: Desplazamiento sobre  $x_{s2}$  con ganancias bajas e incertidumbre en  $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ .

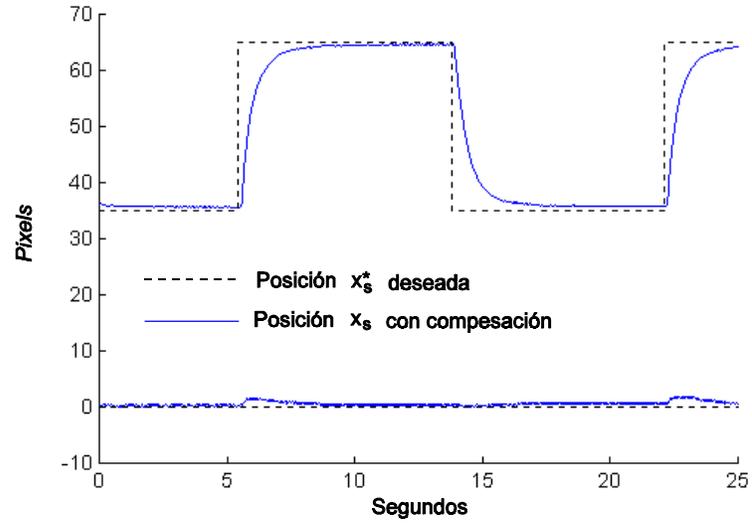


Figura D.7: Desplazamiento sobre  $x_{s1}$  con ganancias altas e incertidumbre en  $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ .

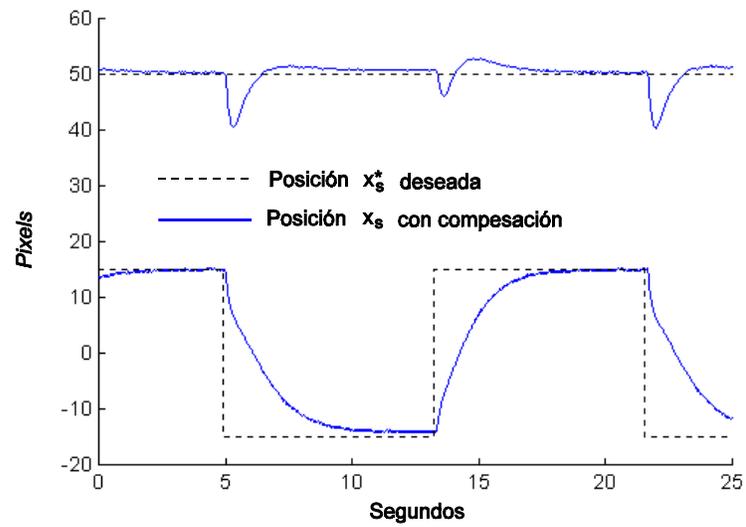


Figura D.8: Desplazamiento sobre  $x_{s2}$  con ganancias altas e incertidumbre en  $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ .

# Apéndice E

## Diagramas de simulink

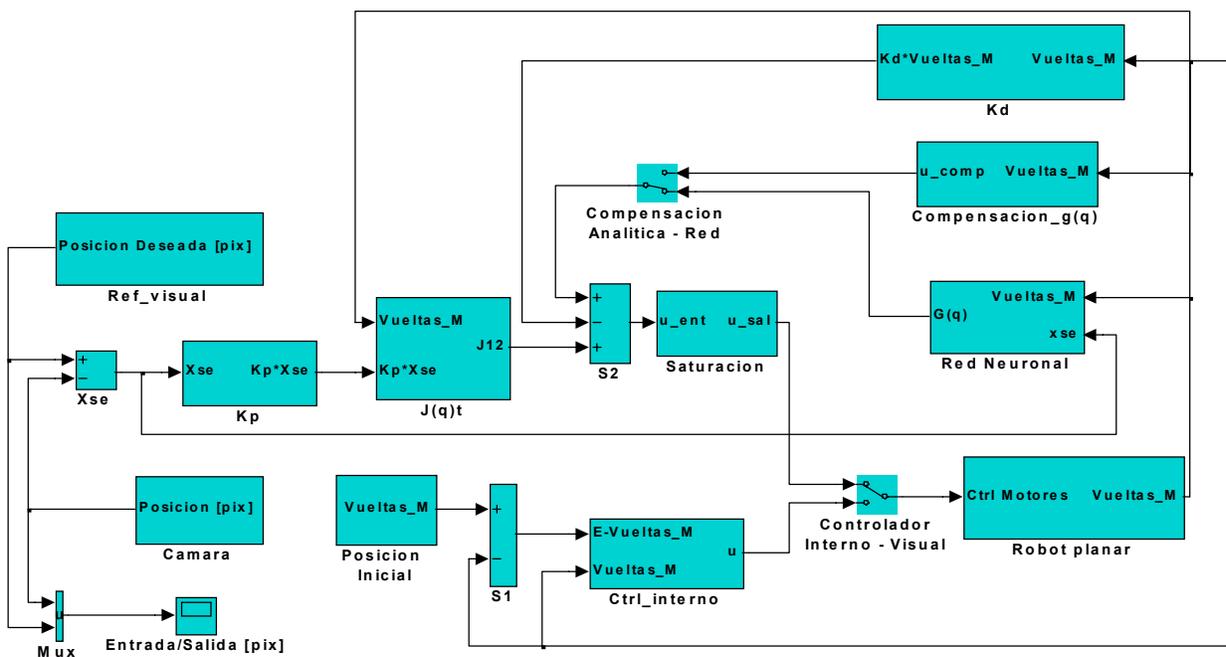


Figura E.1: Ley de Control Visual PD con Compensación neuronal.

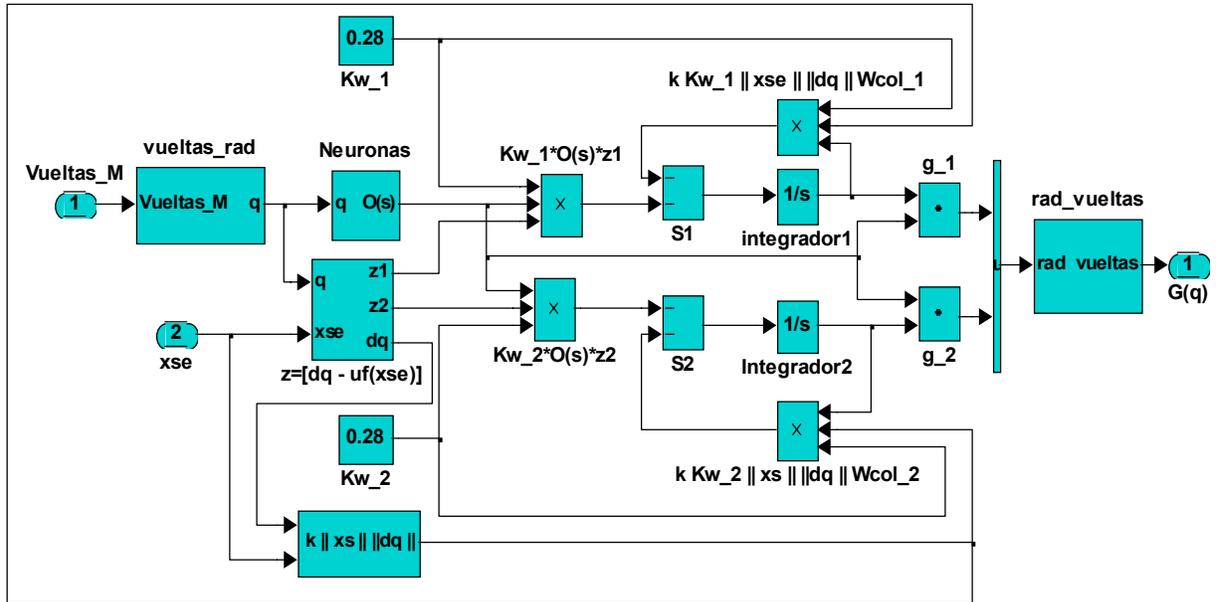


Figura E.2: Bloque *Red Neuronal*.

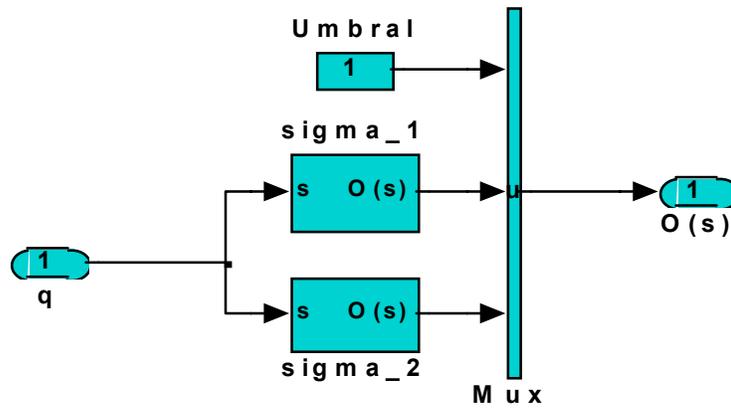
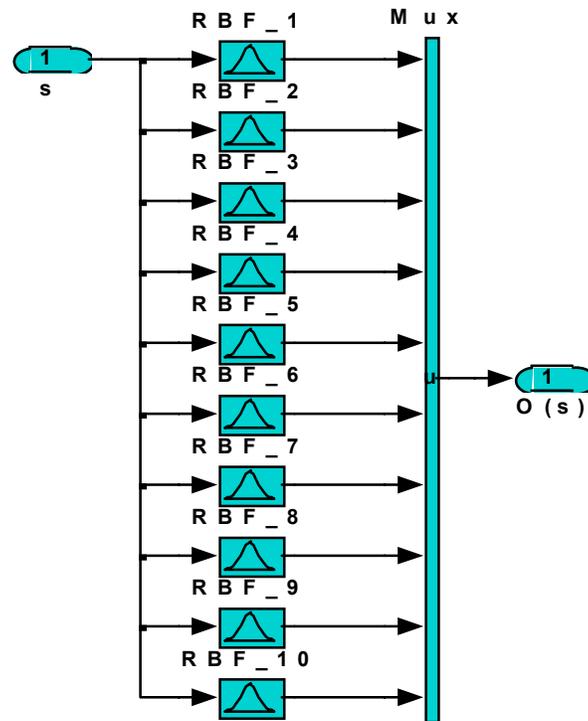
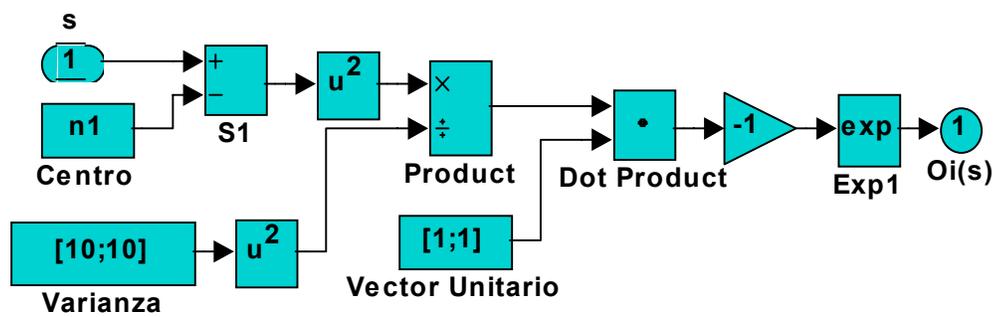


Figura E.3: Bloque *Neuronas*

Figura E.4: Bloque *Sigma*Figura E.5: Bloque *RBF*

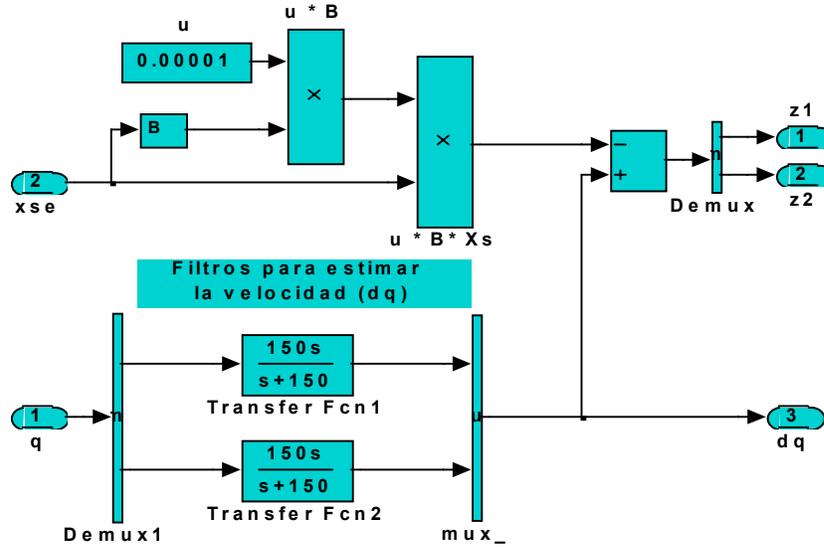


Figura E.6: Bloque  $z=[dq-uf(xse)]$

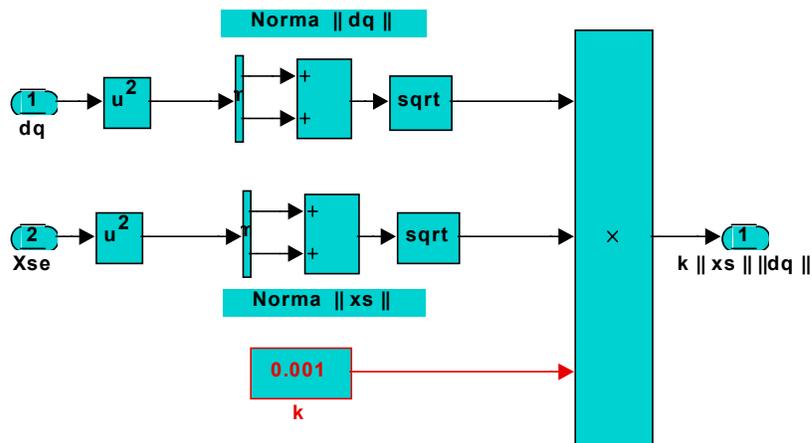
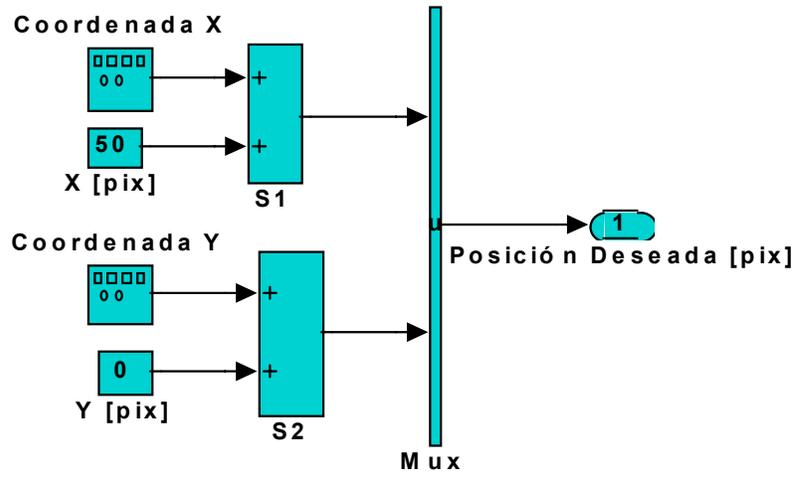
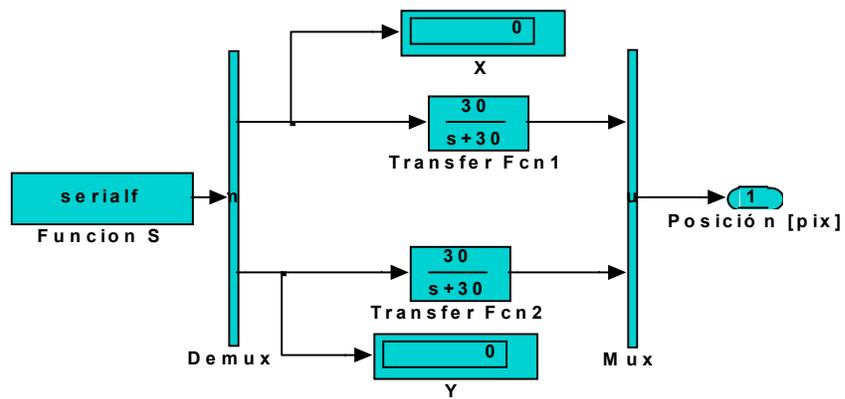


Figura E.7: Bloque  $k ||xs|| ||dq||$

Figura E.8: Bloque *Ref\_Visual*Figura E.9: Bloque *Camara*

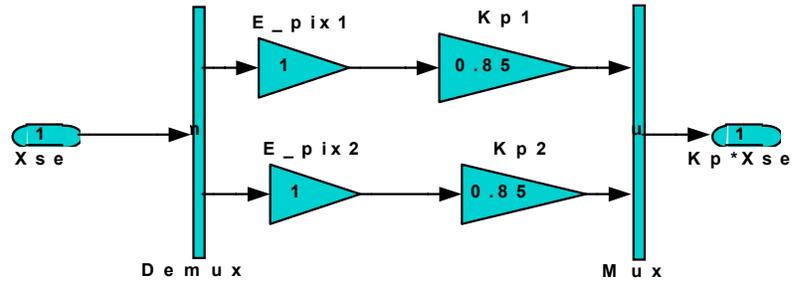


Figura E.10: bloque  $Kp$

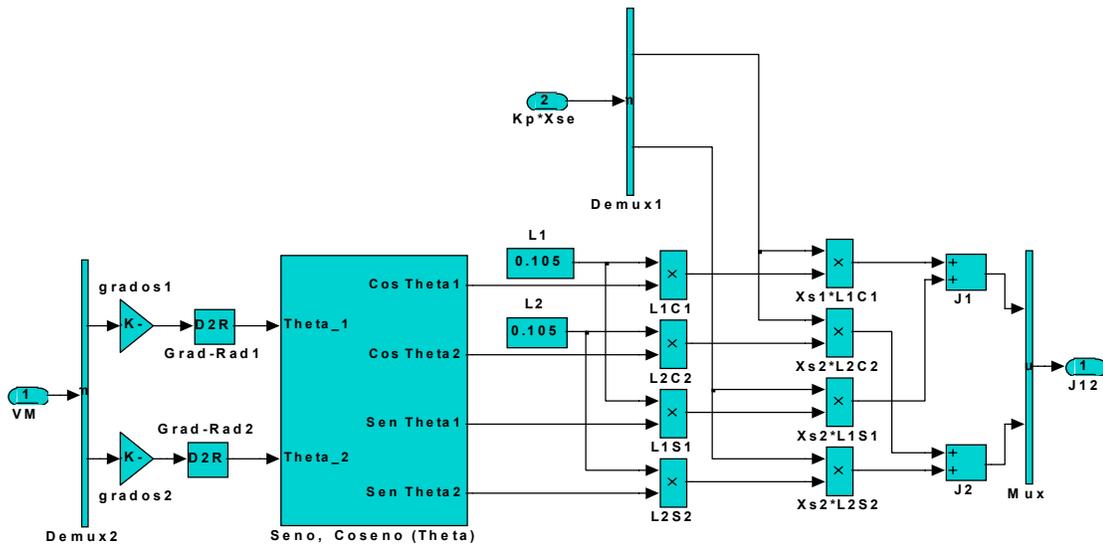
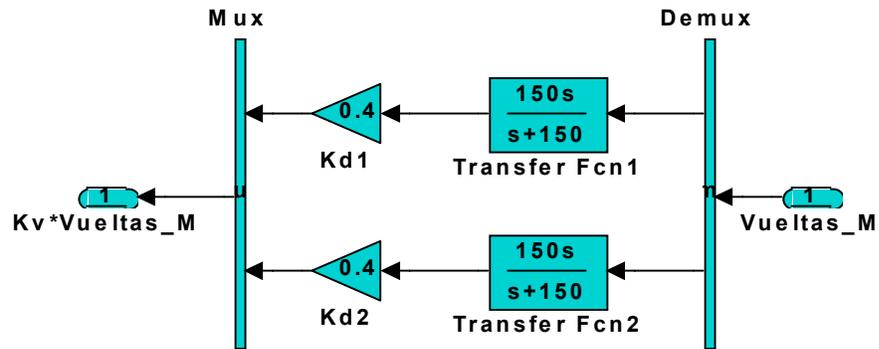
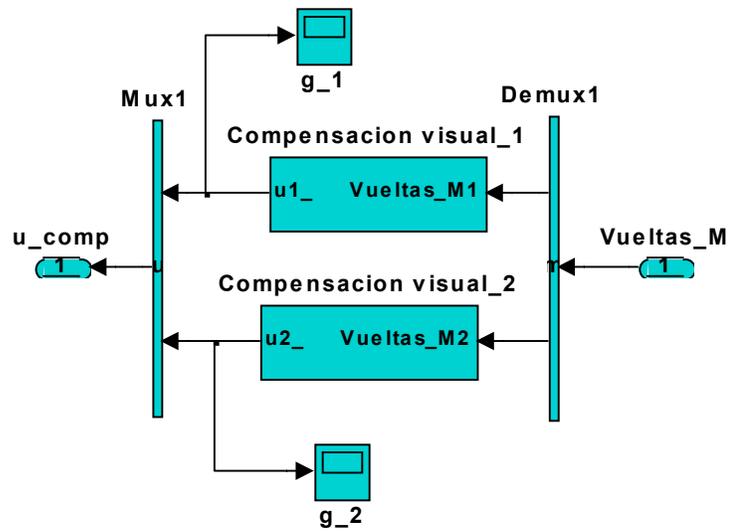


Figura E.11: Bloque  $J(q)t$

Figura E.12: Bloque  $Kd$ Figura E.13: Bloque  $Compensacion\_g(q)$

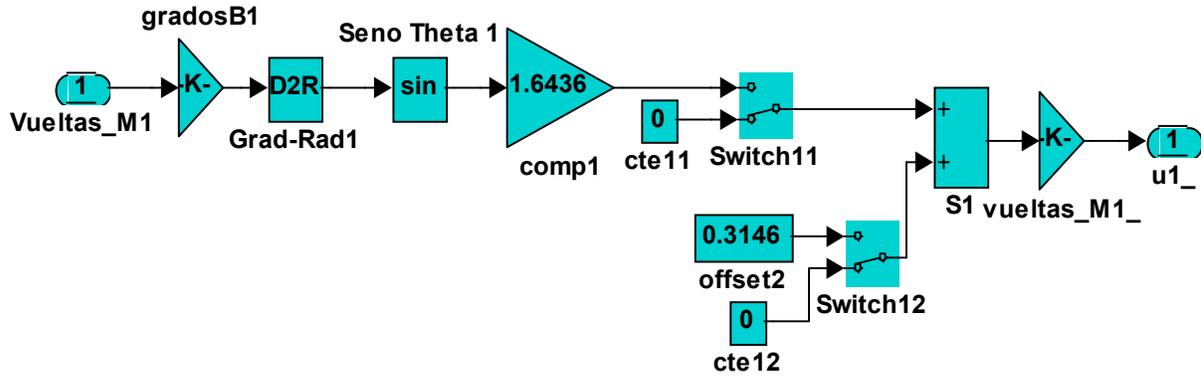


Figura E.14: Bloque *Compensacion\_Visual*

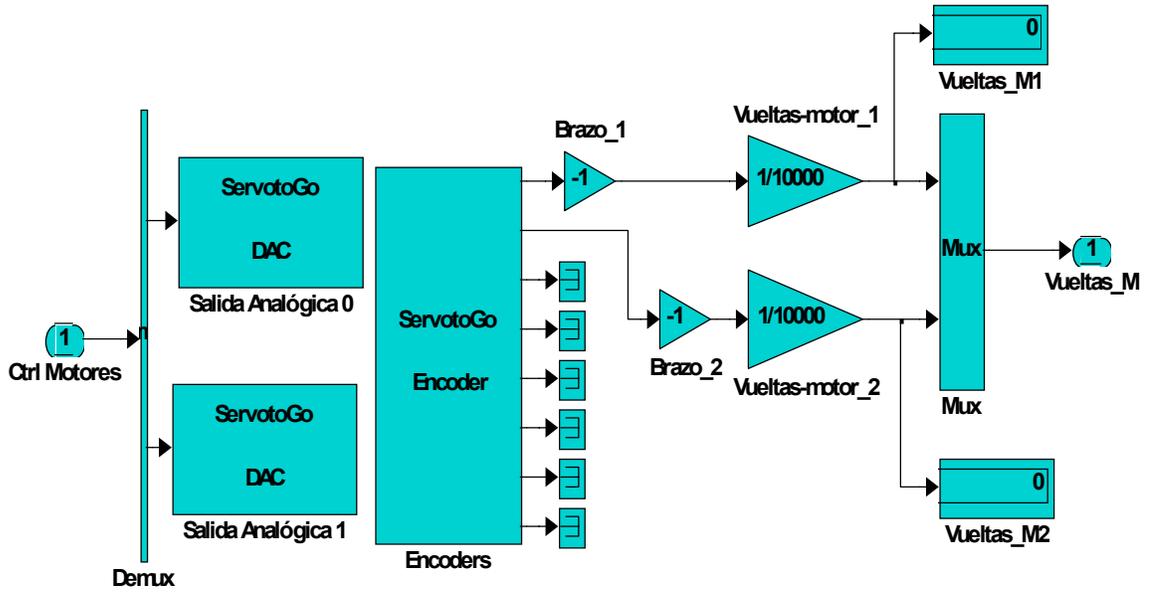
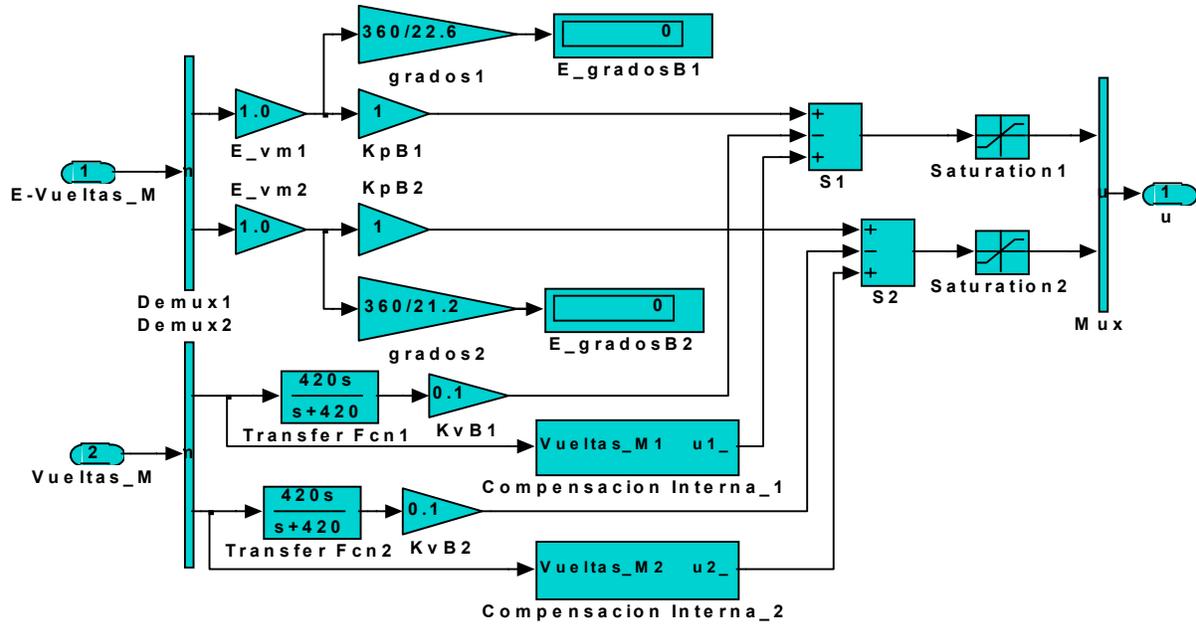
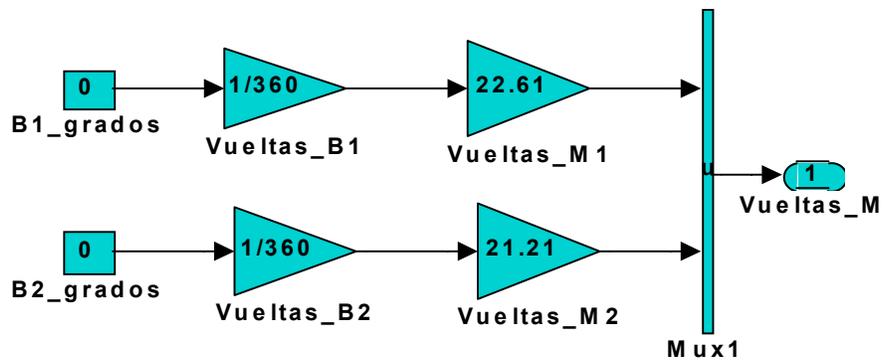


Figura E.15: Bloque *Robot Planar*

Figura E.16: Bloque *Ctrl\_Interno*Figura E.17: Bloque *Posicion Inicial*



# Bibliografía

- [1] Barry, J. & Ding Li Yu, “Selecting Radial Basis Function Network Centers with Recursive Orthogonal Least Squares Training”, *IEEE Trans. Neural Networks*, vol. 11, no. 2, pp. 306-314, Marzo 2000.
- [2] Berghuis, H. & H. Nijmeijer. “Global regulation of robots using only position measurements”, *Systems and Control Letters*, vol. 21, no. 4, pp. 289-293, Octubre 1993.
- [3] Broomhead, D. S & D. Lowe, “Multivariable Functional Interpolation and Adaptive Networks”, *complex systems*, vol. 2, pp. 321-355, 1988.
- [4] Castillo, P., *Plataforma de control visual para servomecanismos*. (Tesis de maestría). Departamento de Control Automático, CINVESTAV-IPN, Agosto 2000.
- [5] Cichocki, A. & R. Unbehauen, *Neural Networks for Optimization and Signal Processing*, John Wiley & Sons, New York 1993.
- [6] Cybenko, G., “Approximation by superpositions of a sigmoidal function”, *Mathematics of Control, Signals and Systems*, vol. 2, no. 4, pp. 303-314, 1989.
- [7] Corless, Martin & George Leitmann “Continuous State Feedback Guaranteeing Uniform Ultimate Boundedness for Uncertain Dynamic Systems”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-26, no. 5, pp. 1139-1144, 1981.
- [8] Chen, S., C. F. N. Cowan & P. M. Grant, “Orthogonal Least Squares Learning Algorithm for Radial Basis Function Networks”, *IEEE Trans. Neural Networks*, vol. 2, no. 2, pp. 302-309 Marzo 1991.

- [9] Chen, S., “Nonlinear Time Series Modeling and Prediction Using Gaussian RBF Networks with Enhanced Clustering and RLS Learning”, *Inst. Elect. Eng. Electron. Lett.*, vol. 31, no. 2, pp. 117-118, 1995.
- [10] Chen, Y. & G. Leitmann, “Robstness of Uncertain Systems in the Absence of Matching Assumptions”, *Int. J. Control*, vol. 45, no. 5, pp. 1527-1542, 1987.
- [11] Corke I. Peter *Visual control of robots: High-performance visual servoing*, John Wiley & Sons Inc., 1996.
- [12] Cheah, C.C., S. Kawamura, S. Arimoto & K. Lee, “PID Control of Robotic Manipulator with Uncertain Jacobian Matrix”, *Proc. IEEE Conference on Robotic & Automation* (Detroit, Michigan), pp. 494-499, Mayo 1999.
- [13] Cheah, C.C., K. Lee, S. Kawamura & S. Arimoto, “Asympototic Stability of Robot Control with Approximate Jacobian Matrix and Its Application to Visual Servoing”, *in Proc. of IEEE Int. Conference on Decision and Control* (Sydney, Australia), pp.3939-3944, 2000.
- [14] Cheah, C.C., K. Lee, S. Kawamura & S. Arimoto, “Feedback Control for Robotic Manipulator with Uncertain Kinematics and Dynamics”, *Proc. of IEEE Int. Conference on Robotics and Automation* (Leuven, Belgica), pp.3607-3612, Mayo 1998.
- [15] Elanayar S. & Y. C. Shin, “Radial Basis Function Neural Network for Approximation and Estimation of Nonlinear Stochastic Dynamic Systems”, *IEEE Trans. Neural Network*, vol. 5, no. 4, pp. 594-603, 1994.
- [16] Garrido, R., A. Soria, P. Castillo & I. Vásquez, “A Visual Servoing Architecture For Controlling Electromechanical Systems”, *Proceedings of the IEEE International Conference on Control Applications*, pp. 35-40, Septiembre 2001.
- [17] Garrido, R. & I. Vásquez. “A method for estimating the gravity vector in simple robot manipulators”, (Nota técnica), Departamento de Control Automático, CINVESTAV-IPN, Septiembre 2001.
- [18] Grosso, E., G. Metta, A. Oddera & G. Sandini, “Robust visual servoing in 3-D reaching tasks”, *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, vol. 12, no. 5, pp. 732-741, 1996.

- [19] Haykin, S., *Neural Networks, A comprehensive Foundation*, Second Edition, Prentice Hall, 1999.
- [20] Hashimoto, Koichi, *Visual Servoing Real-Time Control of Robot Manipulators Based on Visual Sensory Feedback*, World Scientific Publishing, 1993.
- [21] Hashimoto, H., T. Kubota, M. Sato & F. Harashima, "Visual Control of Robotic Manipulators Based on Neural Networks", *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 39, pp.490-496, 1992.
- [22] Hill J. & W. Park, "Real time control of a robot with a mobile camera". *Proceedings 9th ISIR* (Washington, D. C.), pp. 233-246, Marzo 1979.
- [23] Hornik, K., M. Stinchcombe & H. White, "Multilayer feedforward networks are universal approximators", *Neural Networks*, vol. 2, pp. 359-366, 1989.
- [24] Horn, R. A. & C. R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, 1988.
- [25] Huang, S. N., K. K. Tan & T. H. Lee, "Adaptive Motion Control Using Neural Network Approximations", *Automatica*, vol. 38, pp.227-233, 2002.
- [26] Hutchinson, S., G. D. Hager & Peter I. Corke, "A tutorial on Visual Servo Control", *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, vol. 12, no. 5, Octubre 1996.
- [27] Hunt, J. -J., K. J. D. Sbarbaro, R. Zbikowski & P. J. Gawthrop, "Neural networks for control systems: A survey", *Automatica*, vol. 28, no. 6, pp. 1823-1836, 1992.
- [28] Huerta A. H. & Wen Yu, "A modified PD Control of Robot Manipulator Using Neural Network Compensator", *International Joint Conference on Neural Network*, vol. 3, pp. 1999-2004, 1999.
- [29] Ishiguro, A., T. Furuhashii, S. Okuma & Y. Uchikawa, "A neural network compensator for uncertainties of robot manipulator", *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 39, no. 6, pp. 61-66, Diciembre 1992.
- [30] Isidori, A., *Nonlinear Control Systems*, Springer - Verlag, London 1995.
- [31] Kelly, R. "Global Positioning on Robot Manipulators via PD control plus a class of Nonlinear Integral Actions", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol 43, no. 7, pp. 934-938, 1998.

- [32] Kelly, R. "Robust Asymptotically stable visual servoing of Planar Robots", *IEEE Trans. On Robotics and Automation*, vol. 12, no. 5, pp. 759-766, 1996.
- [33] Kelly, R. "Comments on Adaptive PD controller for Robot Manipulator", *IEEE Trans. Robotics and Automation*, vol. 9, no. 1, pp. 117-119, Febrero 1993.
- [34] Kelly, R. "Asymptotically Stable Visual Servoing of Manipulators via Neural Networks", *Journal of Robotic Systems*, vol. 17, no. 12, pp. 659-669, 2000.
- [35] Kim, Young H. & Frank L. Lewis, "Neural Network Output Feedback Control of Robot Manipulators", *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, vol. 15, no. 2, pp. 301-309, Abril 1999.
- [36] Kubat, M. "Decision Trees Can Initialize Radial-Basis Function Networks", *IEEE Trans. Neural Networks*, vol. 9, no. 5, pp. 813-821, 1998.
- [37] Lefeber, E. "Adaptive and filtered visual servoing of planar robots". *Preprints of the 4th IFAC Nonlinear Control Systems Design Symposium*, vol. 2, pp. 563-568, 1998.
- [38] Lenz, R. K. & R. Y. Tsai, "Techniques for calibration of the scale factor and image center for high accuracy 3-D machine vision metrology", *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, vol. 10, no. 5, pp. 713-720, Septiembre 1988.
- [39] Lewis, F. L., S. Jagannathan & A. Yesildirek, *Neural Network Control of Robot Manipulators and Nonlinear Systems*, Taylor & Francis, Philadelphia 1999.
- [40] Kim, Y. H. & F.L. Lewis, "High-Level Feedback Control with Neural Networks", *World Scientific Series in Robotics and Intelligent Systems*, vol. 21, New Jersey 1998.
- [41] Lewis, F. L., C. T. Abdallah & D. M. Dawson, *Control of Robot Manipulators*, Macmillan Publishing Company, New York 1993.
- [42] Lewis, F. L., K. Liu & A. Yesildirek, "Neural Net Robot Controller with Guaranteed Tracking Performance", *IEEE Trans. On Neural Networks*, vol. 6, no. 3, Mayo 1995.
- [43] Loreto, G., W. Yu & R. Garrido, "Stable Visual Servoing with Neural Network Compensation", *Proc. IEEE Int. Conf. Control Applications*, pp. 183-188, México 2001.

- [44] Meyer, Carl D. *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*, SIAM, North Carolina 2000.
- [45] Narendra, K. S., & K. Parthasarathy, "Identification and Control of Dynamical Systems Using Neural Networks", *IEEE Trans. Neural Networks*, vol. 1, pp. 4-27, Marzo 1990.
- [46] Narendra, K. S. & K. Parthasarathy, "Gradient Methods for the Optimization of Dynamical Systems Containing Neural Networks", *IEEE Trans. Neural Networks*, vol. 2, no. 2, pp. 252-262, Marzo 1991.
- [47] Narendra, K. S. & A. Annaswamy, "A New Adaptive Law for Robust Adaptation Without Persistent Excitation", *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. AC-32, no. 2, pp. 134-145, Febrero 1987.
- [48] Powell, M. J. D., "Radial Basis Function Approximations to Polynomials", in *Proc. 12th Biennial Numerical Analysis Conf.*, pp. 223-241, 1987.
- [49] Sanner, R. M. & J.-J. E. Slotine, "Stable adaptive control and recursive identification using radial gaussian networks", *Proc. IEEE Conf. Decision and Control*, Brighton, 1991.
- [50] Slotine, J. E. & W. Li, "On the adaptive control of robot manipulators", *Int. J. Robotics Res.*, vol. 6, no. 3, pp. 49-59, 1987.
- [51] Sadegh, N., "A perceptron network for functional identification and control of nonlinear systems", *IEEE Trans. Neural Networks*, vol. 4, no. 6, pp. 982-988, 1993.
- [52] Santibáñez, V. & R. Kelly, "Strict Lyapunov Functions for Control of Robot Manipulators", *Automatica*, vol. 33, no. 4, pp. 675-682, 1997.
- [53] Sanderson, A. C. & L. E. Weiss, "Image-based visual servo control using relational graph error signals", *Proc. IEEE*, pp. 1074-1077, 1980.
- [54] Spong, M. & M. Vidyasagar, *Robot Dynamics and Control*, Wiley, New York 1989.
- [55] Tsai, R., "A versatile camera calibration technique for high accuracy 3-D machine vision metrology using off-the-shelf TV cameras and lenses". *IEEE Trans. Robot. Autom.*, pp. 323-344, Agosto 1987.

- [56] Tomei, P., “Adaptive PD Controller for Robot Manipulator”, *IEEE Tran. on Automatic Control*, vol. 36, pp. 556-570, 1992.
- [57] Vásquez, I., *Control visual de un robot planar de dos grados de libertad*. (Tesis de maestría). Departamento de Control Automático, CINVESTAV-IPN, 2002.
- [58] Wang, Zheng-ou & Tao Zhu, “An Efficient Learning Algorithm for Improving Generalization Performance of Radial Basis Function Neural Networks”, *Neural Networks*, vol. 13, pp. 545-553, 2000.
- [59] Wen, J. T., K. K. Delgado & D. S. Bayard, “Lyapunov Function-Based Control Laws for Revolute Robot Arms: Tracking Control, Robustness, and Adaptive Control”, *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 37, no. 2, pp. 231-237, Febrero 1992.
- [60] Yazarel, H. & C. C. Cheah, “Adaptive Visual Servoing of Robots with Uncertain Gravity Regressor and Jacobian Matrices”, *Proc. of the American Control Conference*, pp. 652-657, (Arlington), Junio 2001.
- [61] Yu, W. & Xiaou Li, “PD Control of Robot with Velocity Estimation and Uncertainties Compensation”, *Proc. of the 40th IEEE Conf. on Decision and Control*, pp. 1162-1167, Orlando, Florida USA 2001.