

CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS
DEL
INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
DEPARTAMENTO DE CONTROL AUTOMÁTICO

**Diseño de observadores de modos deslizantes para
sincronización caótica y comunicaciones seguras**

TESIS QUE PRESENTA EL:
Ing. Enrique Cisneros Saldaña

PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS

EN LA ESPECIALIDAD DE
CONTROL AUTOMÁTICO

DIRECTOR DE TESIS:
Dr. Rafael Martínez Guerra
Dr. Wen Yu Liu

México, D.F., septiembre del 2006

Índice general

Agradecimientos	v
1. Introducción	1
1.1. Motivación del tema de tesis	4
1.2. Objetivo de la tesis	4
1.3. Distribución de la tesis	4
2. Sincronización de sistemas caóticos	7
2.1. Sincronización Maestro-esclavo	8
2.2. Sincronización mutua	10
2.3. Sincronización con observadores	10
2.4. Acoplamiento de sistemas autónomos	12
2.5. Enfoque del sistema inverso	13
2.6. Dos problemas de sincronización	15
2.6.1. Sistema de Lorenz	15
2.6.2. Circuito de Chua	15
3. Comunicaciones seguras vía sistemas caóticos	17
3.1. Enmascarado caótico	17
3.2. Modulación por desviación caótica (CSK)	18
3.3. Modulación caótica directa	19
3.4. Comunicación con observadores	19

4. Sincronización y comunicación vía observadores basados en el modelo	21
4.1. Observador de Bestle-Zeitz para sincronización	22
4.1.1. Transformación del sistema a la forma canónica	22
4.1.2. Diseño del observador para sincronización	24
4.1.3. Observador de Bestle-Zeitz para la sincronización del sistema de Lorenz	26
4.1.4. Observador de Bestle-Zeitz para la sincronización del circuito de Chua	27
4.2. Observador de Thau para sincronización	29
4.2.1. Observador de Thau para la sincronización del sistema de Lorenz . .	31
4.2.2. Observador de Thau para la sincronización del circuito de Chua . . .	33
5. Sincronización vía observador de modos deslizantes (SMO)	35
5.1. Forma canónica de sistemas no lineales	35
5.2. SMO para el problema de sincronización	36
5.2.1. SMO para la sincronización del sistema de Lorenz	43
5.2.2. SMO para la sincronización del circuito de Chua	44
6. Comunicación vía SMO	47
6.1. Esquema de comunicación	47
6.2. Tres ejemplos de comunicación	50
6.2.1. Ecuación de Duffing	50
6.2.2. Oscilador de Van der Pol	51
6.2.3. Circuito de Chua	52
6.2.4. Resultados numéricos	53
7. Conclusiones y trabajo futuro	57
Bibliografía	59
A. Publicaciones	63

Índice de figuras

2.1. Sistema de sincronización caótica basado en el diseño de observadores de estado lineales.	11
2.2. Sistemas no autónomos acoplados	13
3.1. Transmisión usando enmascarado caótico	18
3.2. Transmision via CSK	19
3.3. Comunicación segura basado en el diseño de observadores de estado lineales.	20
4.1. Error de sincronización del sistema de Lorenz via observador de Bestle-Zeitz	27
4.2. Estados del sistema de Lorenz en sincronización via observador de Bestle-Zeitz	28
4.3. Error de sincronización del circuito de Chua via observador de Bestle-Zeitz .	28
4.4. Estados del circuito Chua en sincronización via observador de Bestle-Zeitz .	29
4.5. Error de sincronización del sistema de Lorenz via observador de Thau	32
4.6. Estados del sistema de Lorenz en sincronización via observador de Thau . . .	32
4.7. Error de sincronización del circuito de Chua via observador de Thau	33
4.8. Estados del circuito Chua en sincronización via observador de Thau	34
5.1. Error de sincronización del sistema de Lorenz via SMO	44
5.2. Estados del sistema de Lorenz en sincronización via SMO	45
5.3. Error de sincronización del circuito de Chua via SMO	46
5.4. Estados del circuito Chua en sincronización via SMO	46

6.1. Comunicación via SMO	48
6.2. Comportamiento caótico de la ecuación de Duffing con $x(0) = [0, 0]^T$	50
6.3. Comportamiento caótico del oscilador de Van der Pol con $x(0) = [1, 1]^T$	51
6.4. Comportamiento caótico del circuito de Chua con condición inicial $[0, 0, 1]^T$	52
6.5. Oscilador de Duffing para comunicaciones caóticas	54
6.6. Oscilador de Van der Pol para comunicaciones caóticas	54
6.7. Circuito de Chua para comunicaciones caóticas	55
6.8. Señales de error para diferentes tipos de receptores	56

Agradecimientos

Al CONACyT por proporcionarme la beca, al CINVESTAV por apoyarme para asistir a la conferencia ICEEE 2006, a mis asesores por ayudarme a obtener este trabajo, al Departamento de Control Automático por las facilidades prestadas en el transcurso de mi estadia en él.

Capítulo 1

Introducción

En los últimos años, el problema de sincronización de sistemas caóticos ha recibido gran atención entre los científicos en muchos campos [24, 22, 17, 23]. Como es bien sabido el estudio del problema de sincronización para sistemas no lineales ha sido muy importante desde el punto de vista no lineal, en particular en aplicaciones a la biología, medicina, criptografía, transmisión segura de información, etc.

En general, la investigación de la sincronización se ha enfocado en dos áreas. La primera tiene que ver con el empleo de observadores de estado, donde las principales aplicaciones recaen en la sincronización de osciladores no lineales. La segunda es el uso de leyes de control, las cuales permiten alcanzar la sincronización entre osciladores no lineales con diferente estructura y orden. [30]. Un interés particular es la conexión entre los observadores para sistemas no lineales y la sincronización caótica, que se conoce también como configuración maestro-esclavo. Por lo que el problema de sincronización caótica se puede ver como un procedimiento de diseño de observadores, donde el ruido de acoplamiento equivale a la salida y el sistema esclavo es el observador [21].

Los principales tendencias usan métodos de geometría diferencial y están relacionados con la construcción de observadores asintóticos para procesos no lineales. La idea es encontrar una transformación de estado para representar al sistema como una ecuación lineal más un término no lineal, el cual es función de la salida del sistema. De todos modos, encontrar

una transformación no lineal que lleve al sistema de orden n a la llamada forma canónica observador, requiere de la integración de n ecuaciones diferenciales parciales acopladas. Más aún, esta metodología necesita un conocimiento preciso de la dinámica del sistema.

En un esquema de comunicación caótica normal, el transmisor y el receptor son sistemas caóticos. Éstos se pueden describir en forma de un sistema no lineal. En general, la mayoría de los sistemas caóticos tienen grado relativo n , de modo que existe una transformación que lleva al sistema caótico a una forma normal [14]

La idea general para transmitir información a través de sistemas caóticos es que la señal de información esté inmersa en el sistema transmisor, el cual produce una señal caótica, esta señal es recobrada cuando el transmisor y el receptor son idénticos. Desde la observación de Pecora y Carroll acerca de la posibilidad de sincronizar dos sistemas caóticos, se han desarrollado bastantes esquemas de sincronización. La sincronización se puede clasificar en sincronización mutua (o acoplamiento bidireccional) [28] y sincronización maestro-esclavo (o acoplamiento unidireccional) [24]. Las comunicaciones seguras basadas en sistemas caóticos actualizaron su cuarta generación [27]. La sincronización continua se adopta en las primeras tres generaciones, mientras que la sincronización discreta se usa en la cuarta generación. Se necesita menos de 94 Hz de ancho de banda para transmitir la señal de sincronización para un transmisor caótico de tercer orden de cuarta generación, mientras que para las otras tres generaciones el ancho de banda necesario es de 30 KHz [26].

Hay muchas aplicaciones en comunicaciones caóticas [11] y sincronización de redes caóticas [6]. Las técnicas de comunicación caótica se pueden dividir en tres categorías (a) enmascarado caótico [15], la señal de información se suma directamente al transmisor; (b) modulación caótica [4, 11, 17, 30], se basa en la sincronización maestro esclavo, donde la señal de información se inyecta en el transmisor usándolo como un filtro no lineal; (c) modulación por desviación caótica [23], la información es binaria y se mapea en el transmisor y el receptor. En estos tres casos se puede recobrar la información mediante un receptor que esté sincronizado con el receptor. Para ésto el receptor debe ser una réplica del transmisor [11].

La teoría de observadores no lineales y lineales se puede aplicar para el diseño de recep-

tores. El receptor se considera como un observador caótico que presenta dos partes: una es el sistema caótico duplicado del transmisor y la otra una ganancia ajustable del observador [17].

Se han hecho algunas modificaciones cuando es difícil obtener una réplica de la sincronización. Por ejemplo si el transmisor y el receptor tienen la misma estructura, se pueden usar métodos de identificación de parámetros para construir el receptor [12]; cuando hay incertidumbres en la sincronización (el transmisor no se conoce exactamente, existe ruido en el canal de transmisión, etc.), el transmisor y el receptor se pueden establecer dentro del mismo modelo difuso, el diseño basado en modelos difusos se aplica para alcanzar la sincronización [16]; algunos análisis de estabilidad de comunicaciones caóticas basadas en observadores en lo que respecta a incertidumbres se pueden encontrar en [1, 4, 20].

Debido al término de modos deslizantes que contienen los observadores de este mismo nombre, proporcionan robustez a pesar de errores de modelado y de salidas ruidosas.

Los primeros trabajos en observadores de modos deslizantes que consideran ruidos en la medición fueron propuestos por Utkin y Drakunov [9]. Ellos discuten la estimación de estado usando la técnica de modos deslizantes. De Carlo et al. [7] discutieron el control de estructura variable como una retroalimentación de control velozmente cambiante resultando un modo deslizante. Anulova [2] trata un análisis de sistemas con modos deslizantes en presencia de ruidos. Slotine et al. [25], diseñaron el llamado método de modos deslizantes para construir observadores que son altamente robustos con respecto a ruidos en la entrada del sistema. Pero por otro lado, el análisis de estabilidad correspondiente no se puede aplicar directamente a situaciones en las que existe ruido en la salida (o incertidumbres compuestas). Por lo tanto, sigue siendo un reto proponer una técnica adecuada para analizar la estabilidad del error de identificación generado por los observadores de modos deslizantes (con no linealidad de discontinuidad). [19, 31].

1.1. Motivación del tema de tesis

En este trabajo se propone un nuevo observador de modelo libre, este nuevo observador presenta una estructura simple que contiene un término de modos deslizantes, el cual es robusto a ruidos en la salida así como a perturbaciones sostenidas, el sistema esclavo es un observador de modos deslizantes puro. Como sabemos, en la literatura, esta clase de observadores no ha sido usada en el problema de sincronización.

1.2. Objetivo de la tesis

Se desea mostrar la ventaja comparativa de utilizar el observador de modos deslizantes propuesto como sistema esclavo en una sincronización de sistemas caóticos y como receptor en un esquema de comunicaciones caóticas, ya que, por se de modelo libre, no requiere del conocimiento exacto del sistema maestro, lo cual lo hace bastante robusto y portable. Se hará una comparación con observadores basados en el modelo tanto de la técnica de diseño como su desempeño.

1.3. Distribución de la tesis

- En este capítulo se presenta una breve introducción incluyendo algunos antecedentes históricos, la motivación de la la tesis, así como su objetivo.
- El capítulo 2 presenta algunos conceptos básicos de la sincronización de sistemas caóticos, sus principales configuraciones y características. Además, se plantean dos problemas de sincronización.
- El capítulo 3 expone los métodos de transmisión segura de información a través sistemas caóticos.
- En capítulo 4 se presentan los conceptos básicos del álgebra de Lie que son utilizados tanto para establecer algunas formas canónicas (Observador de Bestle-Zeitz y Ob-

servador de modos deslizantes), así como una breve explicación de la teoría de dos observadores basados en el modelo que son el de Bestle-Zeitz y el de Thau, con los que después se comparará el observador de modos deslizantes que se propone en este trabajo.

- En el capítulo 5 se introduce el observador de modos deslizantes para el problema de sincronización, también se resuelven dos problemas de sincronización que son el sistema de Lorenz y el circuito de Chua.
- En el capítulo 6 se muestra el esquema de comunicación a utilizar por medio del observador de modos deslizantes; así mismo se exponen tres ejemplos utilizando el observador de modos deslizantes, los sistemas utilizados son el sistema descrito por las ecuaciones de Duffin, el oscilador de Van Der Pol y el circuito de Chua.
- En el capítulo 7 se presentan las conclusiones finales y los trabajos a futuro.
- Finalmente en el apéndice se incluyen a texto completo los artículos publicados en base a esta trabajo.

Capítulo 2

Sincronización de sistemas caóticos

El concepto de sincronización está usualmente ligado al movimiento periódico. Dos señales periódicas están sincronizadas si sus periodos son idénticos. Esta definición resulta ser inadecuada en el contexto de las señales caóticas. En este caso se requiere que las señales sean idénticas, al menos asintóticamente cuando $t \rightarrow \infty$. Esta noción es más débil que la que se usará aquí, y de cierta manera imita la sincronización de señales periódicas.

Se considera un sistema lineal \mathcal{S} descrito por:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases} \quad (2.1)$$

Se consideran dos subsistemas acoplados cuyos estados están denotados por $v_1(k)$ y $v_2(k)$. Se dice que éstos están (M, c) -sincronizados [28] si

$$v_1(k) - Mv_2(k) = c$$

donde M es una matriz cuadrada de dimensiones adecuadas y c es un vector constante.

Si $c = 0$ se dice simplemente que los subsistemas están M -sincronizados. Si $M = I$ se tiene el caso conocido como sincronización en fase y si $M = -I$ se tiene la sincronización en contrafase.

Se asume que M es no singular por lo que $\exists M^{-1}$. Se considera el siguiente sistema lineal

$\overline{\mathcal{S}^*}$:

$$w(k+1) = M^{-1}(A + HC)Mw(k) + M^{-1}B(u(k) + d) - M^{-1}Hy(k) \quad (2.2)$$

donde d es un vector constante. Entonces se tiene

$$x(k+1) - Mw(k) = (A + HC)(x(k) - Mw(k)) - Bd$$

Seleccionando H de tal manera que $(A + HC)$ sea estable, la matriz $(I - A - HC)$ es no singular y se tiene

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (x(k) - Mw(k)) = -(I - A - HC)^{-1} Bd$$

Por lo tanto se puede construir sistemas (M, c) -sincronizados [28] basándonos en las ecuaciones (2.1) y (2.2), donde $c = -(I - A - HC)^{-1} Bd$

2.1. Sincronización Maestro-esclavo

Sean el sistema maestro (M) y el sistema esclavo (E) descritos por las siguientes ecuaciones:

$$M : \begin{cases} \dot{x} = F(x) \\ y = g(x) \end{cases} \quad E : \begin{cases} \dot{\xi} = \hat{F}(\xi, y) \\ \eta = \hat{g}(\xi, y) \end{cases} \quad (2.3)$$

donde

$$\begin{aligned} \hat{F}(x, g(x)) &= F(x) \\ \hat{g}(x, g(x)) &= g(x) \end{aligned} \quad (2.4)$$

La condición (2.4) asegura que si tanto el sistema maestro como el sistema esclavo tienen la misma condición inicial, tendrán la misma evolución temporal. La cuestión ahora es saber que pasa si los sistemas comienzan desde diferentes condiciones iniciales. Aquí, se puede observar una gran variedad de fenómenos, y a este respecto, hay diferentes definiciones que pueden ser apropiadas para distinguir entre los diferentes casos.

Definición 2.1 *El sistema esclavo se sincroniza exponencialmente con el sistema maestro si*

$$|\eta(t) - y(t)| \leq e^{-\alpha t} |\eta(0) - y(0)| \quad (2.5)$$

para **todas** las combinaciones de estados iniciales de los sistemas maestro y esclavo. Donde α es el índice de sincronización. De hecho, (2.5) es equivalente a

$$\frac{d}{dt}|\eta(t) - y(t)| \leq -\alpha|\eta(t) - y(t)| \quad (2.6)$$

Si el índice de sincronización α solo depende de la distancia de sincronización $|\eta(t) - y(t)|$ y no de las condiciones iniciales particulares se dice que el sistema esclavo **se sincroniza uniformemente** con el sistema maestro.

Para las aplicaciones se considera una propiedad importante a la sincronización exponencial, o de manera más general, la sincronización uniforme, ya que permite dar cotas *a priori* con respecto al tiempo necesario para alcanzar la sincronización con una precisión dada.

Usualmente no solo se sincronizan las señales de salida de los sistemas maestro y esclavo, sino que también lo hacen sus estados, aunque para las aplicaciones solo se requiere de la sincronización de las señales de salida.

Definición 2.2 *El sistema esclavo se sincroniza exponencialmente con el sistema maestro si*

$$|\eta(t) - y(t)| \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0 \quad (2.7)$$

para **casi todas** las combinaciones de estados iniciales de los sistemas maestro y esclavo (con respecto a la medida de Lebesgue).

En esta definición no se requiere ningún tipo de uniformidad del índice de sincronización con respecto a la combinación de estados iniciales de los sistemas maestro y esclavo. Típicamente, para algunas combinaciones, alcanzar la sincronización puede tomar un largo tiempo y probablemente para un subconjunto de medida de Lebesgue cero, la sincronización no podrá ser alcanzada. Para aplicaciones técnicas, este tipo de sincronización no es tan deseable, pero aun así es aceptable si la medida de las combinaciones de condiciones iniciales que conducen a tiempos de sincronización muy largos, es suficientemente pequeña.

Es posible observar formas de sincronización todavía más débiles. Puede ocurrir que la sincronización tome lugar solamente cuando las condiciones iniciales del sistema esclavo estén

suficientemente cercanas a las del sistema maestro. En [18] se puede encontrar una forma de sincronización aun más débil, ahí, aun si las condiciones iniciales de los sistemas maestro y esclavo están relativamente cercanas, existe un conjunto de combinaciones de condiciones iniciales para las que no hay sincronización, y dicho conjunto tiene medida de Lebesgue positiva.

Otra manera de introducir la noción de sincronización es considerar al sistema maestro y al esclavo como un solo sistema dinámico. El sistema esclavo se sincroniza con el maestro si en el sistema combinado las trayectorias convergen hacia el subespacio diagonal $\xi = x$. Este es el caso si el(los) atractor(es) cae(n) en dicho subespacio. Esta formulación sugiere además la noción de *sincronización generalizada*, donde en vez del subespacio diagonal, cualquier *intersección de subespacios diagonales (submanifold)* atrae las trayectorias.

2.2. Sincronización mutua

Para este tipo de sincronización solo basta redefinir los sistemas de la siguiente forma:

$$S_1 : \begin{cases} \dot{x} = F(x, \eta) \\ y = g(x, \eta) \end{cases} \quad S_2 : \begin{cases} \dot{\xi} = \hat{F}(\xi, y) \\ \eta = \hat{g}(\xi, y) \end{cases} \quad (2.8)$$

De nuevo se tiene que si ambos sistemas comienzan de la misma condición inicial, tendrán el mismo comportamiento, y se repiten las definiciones para los diferentes tipos de sincronización.

2.3. Sincronización caótica usando diseño de observadores de estado lineales

Se considera el siguiente sistema no lineal:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + f(x, y) + Bd \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (2.9)$$

donde $y \in \mathbb{R}$ es la salida del sistema, $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado, $d \in \mathbb{R}$ es un término aditivo de corriente directa (*dc bias*) del sistema controlado y A, B, C son matrices constantes de dimensiones adecuadas. Además, el par (C, A) es detectable. Se asume que f es un campo vectorial real analítico en \mathbb{R}^n , con $f(0, y) = 0$ y que el sistema (2.9) tiene solución única $x(t)$ para la condición inicial $x(0) = x_0$, dicha solución está bien definida en el intervalo $[0, \infty)$, Mas aun $f(x, y)$ satisface la condición de Lipschitz en x .

Comentario 2.1 *La clase de sistemas dinámicos no lineales incluye una extensa variedad de sistemas caóticos, como los sistemas de Rössler y Lorenz.*

Para sincronización caótica el sistema maestro se modela por (2.9) y la salida y se usa como entrada para acoplar el sistema esclavo.

El sistema sincronizado basado en el método de diseño por observadores se muestra en la figura 2.1

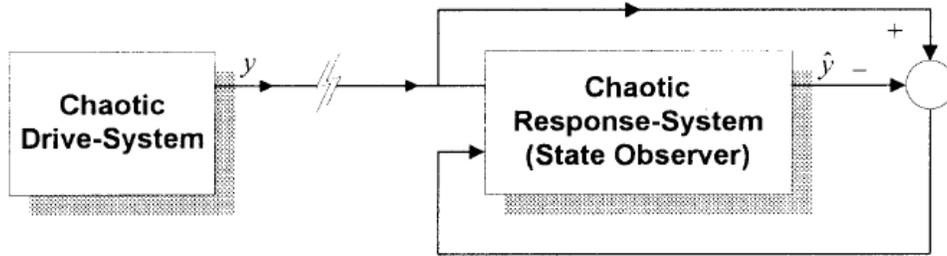


Figura 2.1: Sistema de sincronización caótica basado en el diseño de observadores de estado lineales.

Se tiene el siguiente observador para el sistema (2.9):

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + f(\hat{x}, y) + Bd + L(y - \hat{y}) \\ \hat{y} &= C\hat{x}\end{aligned}$$

donde \hat{x} es el estado estimado de x y $f(\hat{x}, y)$ representa el vector estimado de $f(x, y)$ basado en el estado estimado \hat{x} . El vector constante $L \in \mathbb{R}^n$ se escoge de modo que $(A - LC)$ sea una matriz exponencialmente estable, lo que es posible ya que el par (C, A) es detectable.

Un análisis del error de estado definido por

$$\hat{e} = x - \hat{x} \quad (2.10)$$

muestra que éste tiende exponencialmente a cero bajo ciertas condiciones [17].

2.4. Acoplamiento de sistemas autónomos similares para lograr la sincronización

Aquí se dan expresiones explícitas para F y g introducidas en la ecuación (2.3). Hay dos caminos a seguir para acoplar sistemas autónomos similares con el objetivo de alcanzar la sincronización. El primero es mediante la imposición parcial (o completa) de un estado, con lo que la ecuación (2.3) queda:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_1}{dt} &= F_1(\xi_1, \hat{\xi}) \\ &\vdots \\ \frac{dx}{dt} &= F(x) \quad \frac{d\xi_n}{dt} = F_n(\xi_1, \hat{\xi}) \\ &\quad \frac{d\xi_{n+1}}{dt} = F_{n+1}(x_1, \hat{\xi}) \\ &\quad \vdots \\ &\quad \frac{d\xi_N}{dt} = F_N(x_1, \hat{\xi}) \\ y = x_1 &\quad \eta = \xi_1 \end{aligned} \quad (2.11)$$

donde $\hat{\xi} = (\xi_2, \dots, \xi_N)$

El estado x_1 es impuesto en las últimas $N - n$ ecuaciones del sistema esclavo en lugar de su propio estado ξ_1 . El esquema original introducido por Pecora y Carrol [24] cae dentro de esta categoría.

El segundo método proviene del campo del control automático. Las señales de salida de los sistemas maestro y esclavo se comparan y la señal de error resultante $e(t) = y(t) - \eta(t)$ se utiliza para controlar al sistema esclavo. Se puede aplicar una gran variedad de métodos

de control; en el caso del control lineal la ecuación (2.3) queda:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= F(x) & \frac{d\xi}{dt} &= F(\xi) + a(y - \eta) \\ y &= g(x) & \eta &= g(\xi) \end{aligned} \quad (2.12)$$

donde a es un vector de dimensiones adecuadas.

Debemos enfatizar que la sincronización no se garantiza automáticamente ni para la forma de acoplamiento maestro-esclavo (2.11) ni para la forma (2.12). Se debe establecer para cada sistema particular y sus parámetros. En algunos casos, la sincronización se puede demostrar fácilmente. Aún así, dicha demostración puede ser extremadamente complicada, si no es que imposible.

2.5. Acoplamiento de sistemas no autónomos: El enfoque del sistema inverso

Para sistemas no autónomos se usa una definición de sincronización un poco diferente, debido a su uso en sistemas de comunicación. Sean los sistemas mostrados en la figura 2.2

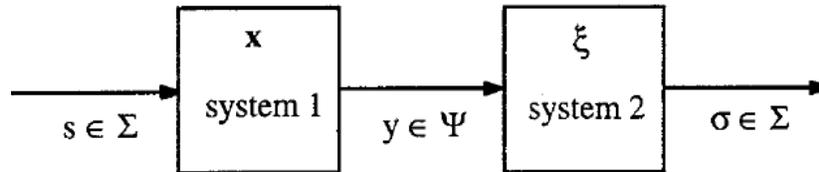


Figura 2.2: Sistemas no autónomos acoplados

y descritos por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= F(x, s) & \frac{d\xi}{dt} &= \Phi(\xi, y) \\ y &= g(x, s) & \sigma &= \gamma(\xi, y) \end{aligned} \quad (2.13)$$

Para poder formular una definición correcta de sistema inverso, se debe especificar, para cada sistema, el conjunto de señales de entrada admisibles, así como las señales de salida correspondientes obtenidas resolviendo (2.13).

Definición 2.3 *El sistema 2 es un sistema inverso del sistema 1 si*

- (i) *El conjunto Σ de entradas admisibles del sistema 1 coincide con el conjunto de señales de salida del sistema 2, y El conjunto Ψ de entradas admisibles del sistema 2 coincide con el conjunto de señales de salida del sistema 1*
- (ii) *Para cada señal $s \in \Sigma$ y cada c.i. $x \in \mathbb{R}^N$ del sistema 1, \exists una c.i. $\xi \in \mathbb{R}^N$ del sistema 2 tal que $\sigma(t) = s(t) \forall t \geq 0$.*
- (iii) *La misma condición que en (ii), pero los papeles del sistema 1 y 2 se invierten.*

Ya que la definición 2.3 es simétrica, si el sistema 2 es un sistema inverso del sistema 1, entonces el sistema 2 es también un sistema inverso del sistema 2. La definición 2.3 requiere de la existencia de una condición inicial adecuada para que el sistema inverso produzca la señal original. La pregunta queda en el aire, que pasa si se usa otro condición inicial. De nuevo, para la aplicación de transmisión de información, requerimos de independencia asintótica al comportamiento debido las condiciones iniciales.

Definición 2.4 *El sistema inverso se sincroniza con el sistema original si para cada señal $s \in \Sigma$ y para cualquier combinación de condiciones iniciales de ambos sistemas se tiene:*

$$|\sigma(t) - s(t)| \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$$

donde σ se obtiene de la solución correspondiente de (2.13).

Nótese que al contrario de la definición 2.3, la definición 2.4 no es simétrica. En realidad, en nuestro interés, se supone que el sistema original produce una señal caótica; por lo tanto, su evolución en el tiempo está lejos de ser globalmente asintóticamente estable, si se espera satisfacer la condición de sincronización.

2.6. Dos problemas de sincronización

Estos problemas se resolverán más adelante tanto con los observadores basados en el modelo como con el observador de modos deslizantes propuesto en este trabajo.

2.6.1. Sistema de Lorenz

El sistema de Lorenz tiene la siguiente dinámica no lineal:

$$\Sigma_L : \begin{cases} \dot{x}_1 = \sigma(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 = \rho x_1 + x_2 - x_1 x_3 \\ \dot{x}_3 = x_1 x_2 - \beta x_3 \\ y = x_1 \end{cases} \quad (2.14)$$

y se sabe bien que con $\sigma = 10$, $\rho = 28$ y $\beta = \frac{8}{3}$, el sistema de Lorenz presenta un comportamiento caótico.

2.6.2. Circuito de Chua

La dinámica que gobierna al circuito de Chua es la siguiente:

$$\begin{cases} C_1 \dot{\xi}_1 = G(\xi_2 - \xi_1) - g(\xi_1) + u \\ C_2 \dot{\xi}_2 = G(\xi_1 - \xi_2) + \xi_3 \\ L \dot{\xi}_3 = -\xi_2 \\ y = \xi_3 \end{cases} \quad (2.15)$$

donde $g(\xi_1) = m_0 \eta_1 + \frac{1}{2}(m_1 - m_0) [|\xi_1 + B_p| + |\xi_1 - B_p|]$ y ξ_1, ξ_2, ξ_3 denotan los voltajes a través de C_1, C_2 y L . Se sabe bien que con $C_1 = \frac{1}{9}$, $C_2 = 1$, $L = \frac{1}{7}$, $G = 0.7$, $m_0 = -0.5$, $m_1 = -1.5$ y $B_p = 1$ el circuito muestra doble ciclo.

Capítulo 3

Comunicaciones seguras vía sistemas caóticos

3.1. Enmascarado caótico

En este método [23] una señal analógica portadora de información $s(t)$ se agrega a la salida $y(t)$ del sistema caótico en el transmisor. En el lado del receptor un sistema caótico idéntico trata de sincronizarse con $y(t)$. Desde este punto de vista la señal de información $s(t)$ es una perturbación, y la sincronización se da solo aproximadamente. Aun así, si el error de sincronización es pequeño con respecto a $s(t)$, esta última puede ser recuperada por substracción como se ve en la figura 3.1

Es de esperarse que este método sea sensible al ruido del canal de transmisión. Realmente, el ruido aditivo, no se puede distinguir de $s(t)$ en la configuración de la figura y tiene que eliminarse en una etapa posterior; Esta es una tarea difícil, si no es que imposible, si la amplitud de $s(t)$ no es suficientemente grande con respecto al nivel del ruido.

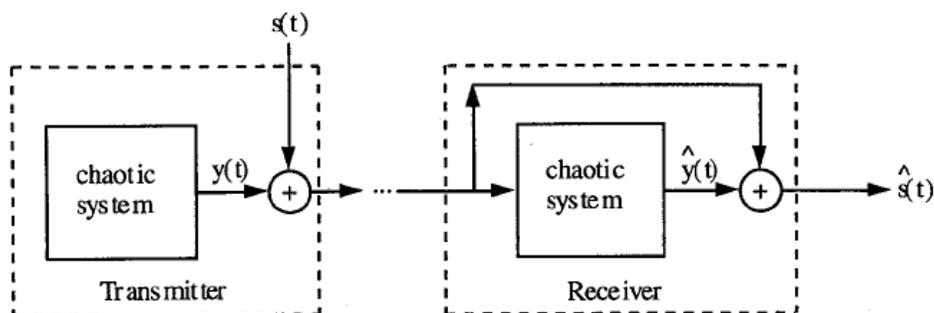


Figura 3.1: Transmisión usando enmascaramiento caótico

3.2. Modulación por desviación caótica (CSK)

Usando este método [8] la señal $s(t)$ debe ser binaria. La señal controla un interruptor cuya acción cambia los parámetros del sistema caótico. Así, de acuerdo con el valor de $s(t)$ en un instante de tiempo dado t , el sistema caótico tiene ya sea el vector de parámetros p o el vector de parámetros p' . La salida $y(t)$ del sistema caótico es transmitida hacia 2 copias idénticas del mismo, una con el vector de parámetros p y otra con el vector de parámetros p' (figura 3.2).

Si la posición momentánea del interruptor en el transmisor se encuentra en p , entonces el sistema con el vector de parámetros p en el receptor se sincronizará, mientras que el sistema con el vector de parámetros p' se desincronizará. Por lo que la señal de error $e(t)$ tenderá a cero, mientras que $e'(t)$ tendrá una forma de onda irregular con una distintiva amplitud diferente de cero. Si el interruptor en el transmisor se encuentra en la posición p' , entonces se tiene la situación opuesta, $e'(t)$ será la que tienda a cero y $e(t)$ tendrá una amplitud diferente de cero; consecuentemente, la señal $s(t)$ se puede obtener de las señales de error $e(t)$ y $e'(t)$. Claramente se tiene que dejar el interruptor en el transmisor en la misma posición por cierto tiempo para que se pueda observar la convergencia a cero de la correspondiente señal de error.

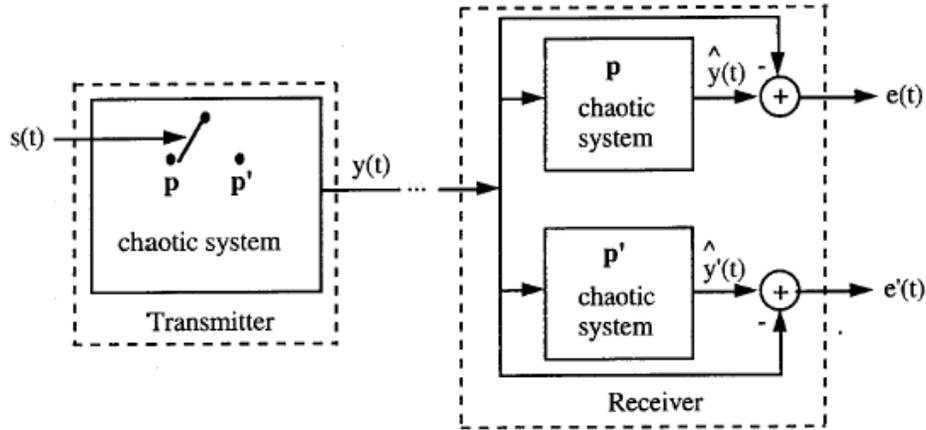


Figura 3.2: Transmision via CSK

3.3. Modulación caótica directa

Este método se basa en la sincronización de sistemas inversos ya descrito anteriormente. La información se puede inyectar directamente en una forma analógica [10] o $s(t)$ puede ser por si misma una señal analógica modulada por información binaria. La transmisión de una señal digital modulada en $s(t)$ se puede esperar que alcance mayores bitrates que con CSK. En CSK, siempre que la señal cambia su valor, hay que esperar la sincronización ya que las condiciones iniciales en los subsistemas transmisor y receptor que van a sincronizarse son diferentes. En la modulación caótica directa, el receptor sigue de manera continua al transmisor y por lo tanto, los estados de ambos sistemas caóticos nunca son tan distintos.

3.4. Comunicación caótica segura usando diseño de observadores de estado lineales

El sistema de comunicación propuesto en [17] se muestra en la figura 3.3

El transmisor es un sistema caótico descrito por (2.9) con una pequeña modificación y se

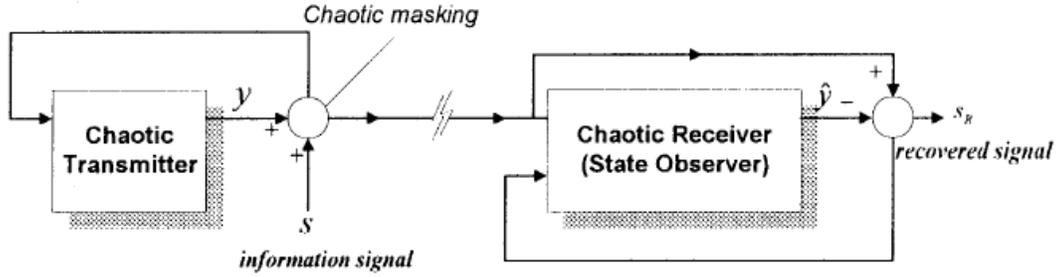


Figura 3.3: Comunicación segura basado en el diseño de observadores de estado lineales.

representa por:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + f(x, y') + Bd + Ls \\ y' &= Cx + s = y + s\end{aligned}$$

donde $s \in \mathbb{R}$ es la señal de información o mensaje, $y' \in \mathbb{R}$ es la señal transmitida caóticamente

Empleando el diseño de observadores de estado el receptor se construye como sigue:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + f(\hat{x}, y') + Bd + L(y' - \hat{y}) \\ \hat{y} &= C\hat{x}\end{aligned}$$

De nuevo un análisis del error de sincronización definido como en (2.10) nos lleva a que el mismo también tiende a cero exponencialmente bajo ciertas condiciones.

Así, definiendo la señal recuperada como:

$$s_R(t) = y'(t) - \hat{y}(t)$$

y usando un análisis similar al del error de sincronización en el apartado 2.3 se observa que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (s_R(t)) = s(t)$$

Para encontrar las condiciones en las que el error tiende a cero es necesario encontrar algunas constantes que no son fáciles de obtener analíticamente por lo que se propone resolver una desigualdad de Riccati numéricamente utilizando el LMI-toolbox de MATLAB.

Capítulo 4

Sincronización y comunicación vía observadores basados en el modelo

Considere las funciones vectoriales $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, donde f y g son campos vectoriales en C^∞ , sea el corchete de Lie

$$[f, g] \triangleq \frac{\partial f}{\partial x} g - \frac{\partial g}{\partial x} f$$

donde $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial g}{\partial x}$ son las matrices jacobianas de f y g respectivamente. Usando una notación alternativa el corchete de Lie se puede representar como

$$[f, g] = (ad^1 f, g)$$

Sea también

$$(ad^k f, g) = [f, (ad^{k-1} f, g)], \quad 1 \leq k \leq n$$

donde por definición

$$(ad^0 f, g) = g$$

Considérese ahora una función $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \in C^\infty$. Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto interno usual sobre \mathbb{R}^n . Sea dh el gradiente de h ($dh = \nabla^T h$) con respecto a x . Entonces derivada de Lie de h con respecto a f se define por:

$$L_f h = L_f(h) = \langle dh, f \rangle = \nabla^T h \cdot f$$

Se empleará la siguiente notación:

$$\begin{aligned} L_f^0 h &= h \\ L_f^1 h &= L_f h \\ &\vdots \\ L_f^k h &= L_f (L_f^{k-1} h) \end{aligned}$$

La derivada de Lie de dh con respecto al campo vectorial f se define por

$$L_f = (dh) = \left(\frac{\partial (dh)^T}{\partial x} f \right)^T + (dh) \frac{\partial f}{\partial x}$$

Es posible verificar fácilmente que estas derivadas de Lie satisfacen la siguiente fórmula de Leibnitz:

$$L_{[f,g]} h = \langle dh, [f, g] \rangle = L_g L_f h - L_f L_g h$$

Más aún, la siguiente relación es válida:

$$dL_f h = L_f (dh)$$

4.1. Observador de Bestle-Zeitz para sincronización

4.1.1. Transformación del sistema a la forma canónica

Se considera la clase de sistemas no lineales descritos por la siguiente ecuación

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= f(x) \\ g &= h(x) \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

Se asumirá que f es un campo vectorial C^∞ en \mathbb{R}^n y que h es una función C^∞ . También se desea encontrar una transformación no lineal $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, que sea uno a uno en C^∞ donde

$$x = T(z) \quad (4.2)$$

tal que el sistema (4.1) se pueda transformar en la *forma canónica* definida enseguida

$$\begin{cases} \dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix} z - \begin{bmatrix} f_0^*(z) \\ f_1^*(z) \\ \vdots \\ f_{n-1}^*(z) \end{bmatrix} \triangleq f^*(z) \\ y = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} z \end{cases} \quad (4.3)$$

Derivando (4.2) con respecto al tiempo obtenemos

$$\dot{x} = \frac{\partial T}{\partial z} f^*(z) \quad (4.4)$$

donde

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \left[\frac{\partial T}{\partial z_1} \cdots \frac{\partial T}{\partial z_n} \right]$$

Haciendo un poco de manipulación algebraica y usando la notación de las derivadas de Lie se puede obtener lo siguiente

$$\frac{\partial T}{\partial z_k} = \left(ad^{k-1} f, \frac{\partial T}{\partial z_1} \right) \quad (k = 1, \dots, n)$$

Por lo que ahora es posible expresar todas las columnas de $\frac{\partial T}{\partial z}$ en términos de un sólo *vector inicial* $\frac{\partial T}{\partial z_1}$ como sigue [3]

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \left[\left(ad^0 f, \frac{\partial T}{\partial z_1} \right) \quad \left(ad^1 f, \frac{\partial T}{\partial z_1} \right) \quad \cdots \quad \left(ad^{n-1} f, \frac{\partial T}{\partial z_1} \right) \right] \quad (4.5)$$

Ahora se debe emplear la siguiente ecuación para obtener una expresión para el vector inicial $\frac{\partial T}{\partial z_1}$.

$$y = h(x) = z_n \quad (4.6)$$

Tomando la derivada parcial de (4.6) con respecto a z nos da

$$\frac{\partial h(x)}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial z} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Note que la primera componente de (4.7) se escribe como

$$\frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial z_1} = \left\langle dh, \frac{\partial T}{\partial z_1} \right\rangle = L_f^0(dh) \frac{\partial T}{\partial z_1} = 0 \quad (4.8)$$

Similarmente, se puede usar la fórmula Leibnitz para simplificar el segundo elemento de (4.7). y mediante la aplicación iterativa de la fórmula de Leibnitz y el uso de (4.5), se obtiene la siguiente matriz que involucra al vector inicial

$$\begin{bmatrix} L_f^0(dh)(x) \\ L_f^1(dh)(x) \\ \vdots \\ L_f^{n-1}(dh)(x) \end{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial z_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

donde la matriz

$$\mathcal{O}(x) = \begin{bmatrix} L_f^0(dh)(x) \\ L_f^1(dh)(x) \\ \vdots \\ L_f^{n-1}(dh)(x) \end{bmatrix}$$

es conocida como la matriz de observabilidad del sistema definido por (4.1). Entonces el vector inicial $\frac{\partial T}{\partial z_1}$ es igual a la última columna de \mathcal{O}^{-1}

4.1.2. Diseño del observador para sincronización

La ventaja de usar la técnica precedente de llevar al sistema a la forma canónica observador es que el diseño del observador se simplifica de manera considerable en el nuevo sistema de coordenadas

Para el caso de una sola salida se considera el observador gobernado por la siguiente

ecuación:

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix} \hat{z} - \begin{bmatrix} f_0^*(z) \\ f_1^*(z) \\ \vdots \\ f_{n-1}^*(z) \end{bmatrix} - K(\hat{y} - y) \\ \hat{y} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \hat{z} \end{cases} \quad (4.9)$$

donde $K = [k_0 \ \cdots \ k_{n-1}]^T$. Definamos el error como

$$e_z = \hat{z} - z$$

Por lo tanto el error obedece la ecuación diferencial

$$\dot{e}_z = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -k_0 \\ 1 & & & -k_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & 0 & -k_{n-1} \end{bmatrix} e_z \quad (4.10)$$

El polinomio característico de (4.10) está dado por

$$p(s) = k_0 + k_1 s + \cdots + k_{n-1} s^{n-1} + s^n \quad (4.11)$$

Con lo que podemos asignar fácilmente el espectro de (4.11) mediante una selección apropiada de K .

Los trabajos de Hunt et al. [13] muestran que la dinámica del error linealizado es invariante bajo estas transformaciones.

4.1.3. Observador de Bestle-Zeitz para la sincronización del sistema de Lorenz

Aplicando el método descrito en el apartado 4.1, hemos obtenido el jacobiano de la transformación deseada para el sistema de Lorenz:

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{\sigma} & -\frac{1}{\sigma} - x_1 \left(\frac{\beta}{\sigma x_1} + \frac{x_2 - x_1}{x_1^2} \right) \\ -\frac{1}{\sigma x_1} & \frac{\beta}{\sigma x_1} + \frac{x_2 - x_1}{x_1^2} & \nu(x) \end{bmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned} \nu(x) &= \frac{x_1}{\sigma} - \beta \left(\frac{\beta}{\sigma x_1} + \frac{x_2 - x_1}{x_1^2} \right) + \frac{\rho x_1 - x_2 - x_1 x_3}{x_1^2} \\ &+ \left(-\frac{\beta}{\sigma x_1^2} - 2 \frac{x_2 - x_1}{x_1^3} - x_1^{-2} \right) \sigma (x_2 - x_1) \end{aligned}$$

Ahora solo necesitamos integrar considerando $T(0) = 0$ para obtener la transformación deseada, después, la aplicación de dicha transformación al sistema de coordenadas nos da la forma canónica observador del sistema de Lorenz:

$$\begin{cases} \dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} z - \begin{bmatrix} f_0^*(z) \\ f_1^*(z) \\ f_2^*(z) \end{bmatrix} \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} z \end{cases}$$

donde

$$\begin{aligned} f_0^*(z) &= - \left(1/2 \frac{z_2(t)}{z_3(t)} - 1/2 - \beta - 1/2 \sigma \right) z_1(t) \\ &+ 1/4 \frac{\beta (z_2(t))^2}{z_3(t)} - 3/4 \beta^2 z_2(t) - (1/2 \beta - 2 \sigma) (z_3(t))^3 \\ &- (-\beta \sigma + 1/4 \beta \sigma^2 + 1/4 \beta^2 \sigma - 1/2 \beta^3 + 3/2 \beta \sigma \rho + 1/4 \beta + 1/4 \beta^2) z_3(t) \\ f_1^*(z) &= (1/2 + 1/2 \sigma) z_2(t) + (z_3(t))^3 - (\sigma \rho - 1/2 \beta \sigma + 1/2 - 1/2 \beta + 1/2 \sigma^2) z_3(t) \\ f_2^*(z) &= 1/2 z_2(t) - (-1/2 - 1/2 \beta - 1/2 \sigma) z_3(t) \end{aligned}$$

Por lo tanto el observador de Bestle-Zeitz es

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \hat{z} - \begin{bmatrix} f_0^*(\hat{z}) \\ f_1^*(\hat{z}) \\ f_2^*(\hat{z}) \end{bmatrix} - K(\hat{y} - y) \\ \hat{y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \hat{z} \end{cases}$$

Escogemos $K = [30 \ 30 \ 30]^T$, los resultados de sincronización se muestran en la figura 4.1 y la figura 4.2.

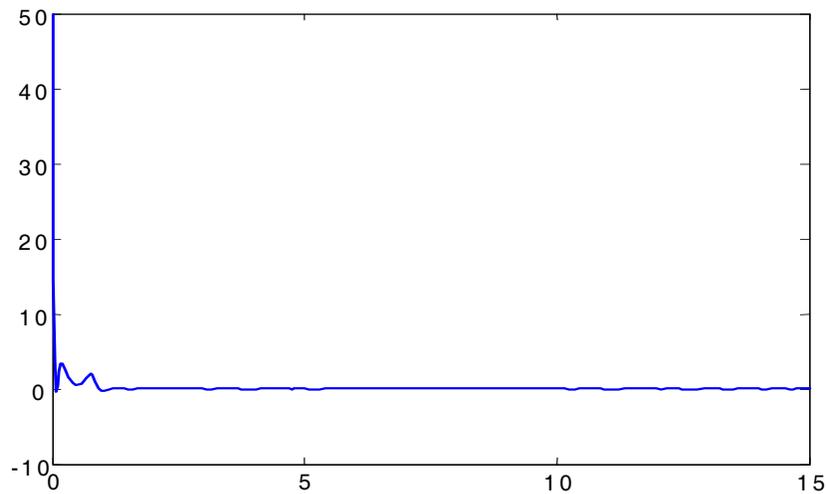


Figura 4.1: Error de sincronización del sistema de Lorenz via observador de Bestle-Zeitz

4.1.4. Observador de Bestle-Zeitz para la sincronización del circuito de Chua

Se procede de la misma manera que con el sistema de Lorenz, escogemos $K = [13 \ 13 \ 13]^T$, los resultados de sincronización se muestran en la figura 4.3 y la figura 4.4.

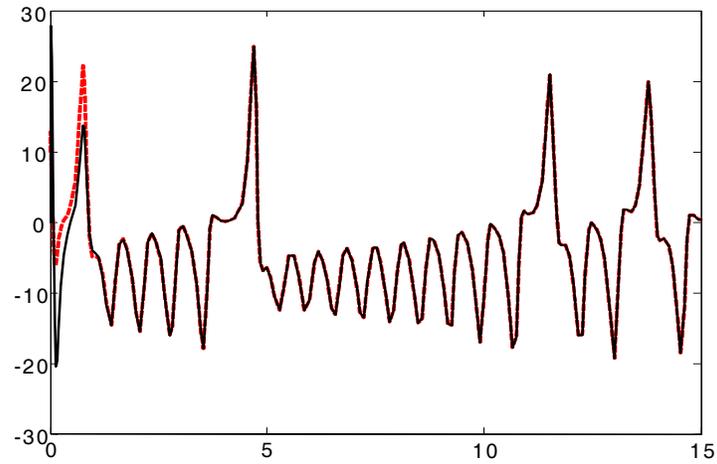


Figura 4.2: Estados del sistema de Lorenz en sincronización via observador de Bestle-Zeitz

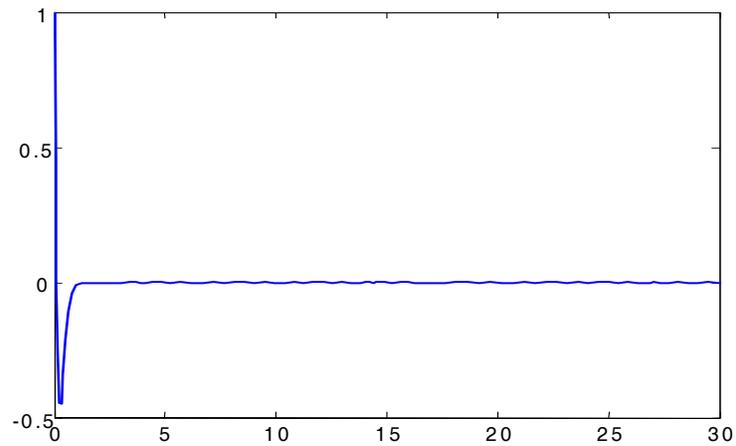


Figura 4.3: Error de sincronización del circuito de Chua via observador de Bestle-Zeitz

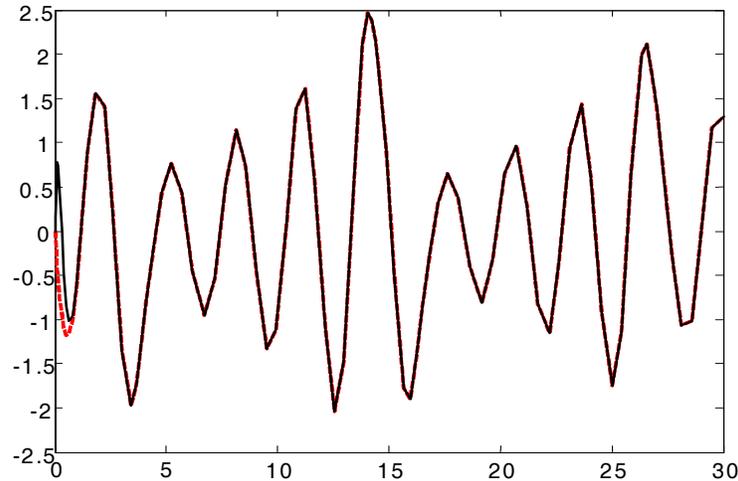


Figura 4.4: Estados del circuito Chua en sincronización via observador de Bestle-Zeitz

4.2. Observador de Thau para sincronización

Considere el sistema no lineal descrito por

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + f(x) + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (4.12)$$

donde $f(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continua y localmente Lipchitz alrededor del origen; $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ y $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$. La función no lineal $f(\cdot)$ puede contener términos lineales en x . Se asume que el par (A, C) es completamente observable. Por lo tanto se puede encontrar $K \in \mathbb{R}^{n \times p}$ tal que los valores propios de $A_0 = A - KC$ estén en el semiplano abierto izquierdo (*OLHP*).

Sea \hat{x} el estimado del estado real x , entonces \hat{x} satisface la ecuación

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A_0 \hat{x} + f(\hat{x}) + Ky + Bu \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases} \quad (4.13)$$

Sea e el error de sincronización definido como

$$e = \hat{x} - x$$

Ya que el espectro de A_0 está contenido en el semiplano izquierdo (*LHP*), existe, para cualquier matriz positiva definida $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una única matriz definida positiva $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que

$$A_0^T P + P A_0 = -2Q \quad (4.14)$$

Teorema 4.1 *El error de sincronización e tiende asintóticamente a cero en (4.17) si la función $f(\cdot)$ es localmente Lipschitz alrededor del origen; esto es, existe una constante positiva L tal que*

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\| \quad (4.15)$$

para todas x_1, x_2 en alguna región abierta R que contenga el origen y existe Q solución de (4.14) tal que

$$\frac{a}{\|P\|} > L \quad (4.16)$$

onde a es el valor propio mínimo de Q y $\|P\|$ es valor propio máximo de P

Demostración. Se tiene que e satisface la ecuación diferencial

$$\dot{e} = A_0 e + f(\hat{x}) - f(x) = A_0 e + f(x + e) - f(x) \quad (4.17)$$

Ahora, considere la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V(e) = e^T P e$$

La derivada de $V(e)$ evaluada a lo largo la solución de la ecuación diferencial del error (4.17) está dada por

$$\dot{V}(e) = \dot{e}^T P e + e^T \dot{e} = 2e^T Q e + 2e^T P [f(x + e) - f(x)]$$

Por lo tanto, de (4.15), si e se encuentra dentro de R entonces las siguientes desigualdades son válidas:

$$\dot{V}(e) \leq -2e^T Q e + 2L\|P e\|\|e\| \leq (-2a + 2L\|P\|)\|e\|$$

■

4.2.1. Observador de Thau para la sincronización del sistema de Lorenz

Primero se necesita reescribir las ecuaciones del sistema en la forma requerida por el método descrito en el apartado 4.2. Por lo tanto el sistema de Lorenz se puede expresar como en (4.12) usando los siguientes valores

$$A = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 1 \\ \rho & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{pmatrix}, \quad f(x) = \begin{pmatrix} -x_3 \\ -x_1x_3 \\ x_1x_2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Así, el sistema se describe como sigue:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 1 \\ \rho & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -x_3 \\ -x_1x_3 \\ x_1x_2 \end{bmatrix} \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

Por lo que el observador queda

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 1 \\ \rho & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} -\hat{x}_3 \\ -\hat{x}_1\hat{x}_3 \\ \hat{x}_1\hat{x}_2 \end{bmatrix} - K(\hat{y} - y) \\ \hat{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{x} \end{cases}$$

Seleccionamos $K = \begin{bmatrix} 13 & 13 & 13 \end{bmatrix}^T$, los resultados de sincronización se muestran en la figura 4.5 y la figura 4.6.

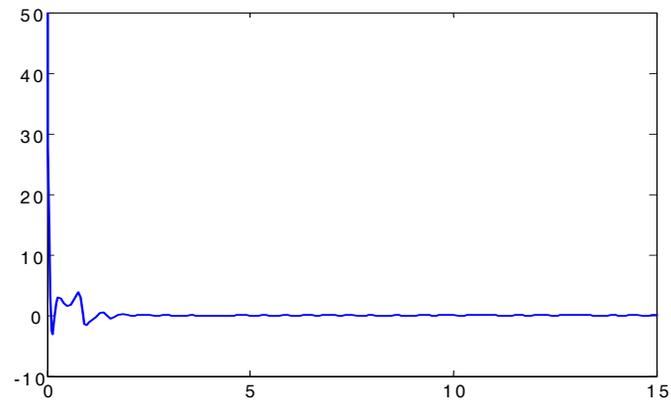


Figura 4.5: Error de sincronización del sistema de Lorenz via observador de Thau

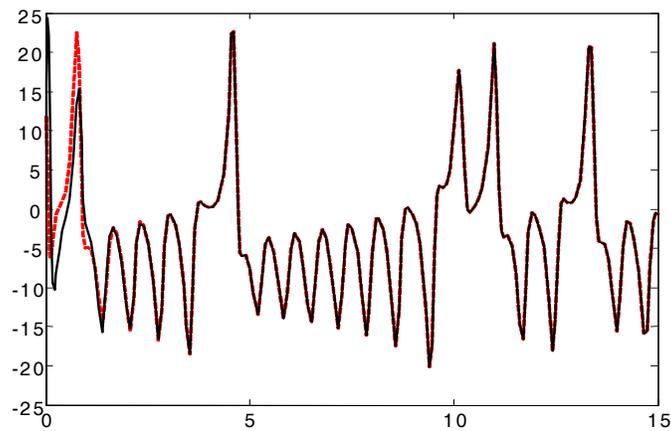


Figura 4.6: Estados del sistema de Lorenz en sincronización via observador de Thau

4.2.2. Observador de Thau para la sincronización del circuito de Chua

Se procede de la misma manera que con el sistema de Lorenz, escogemos $K = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}^T$, los resultados de sincronización se muestran en la figura 4.7 y la figura 4.8.

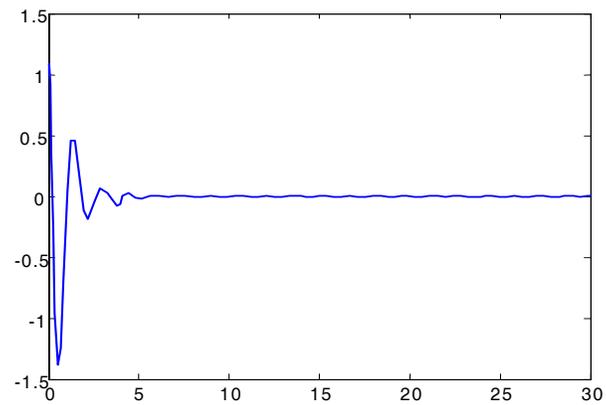


Figura 4.7: Error de sincronización del circuito de Chua via observador de Thau

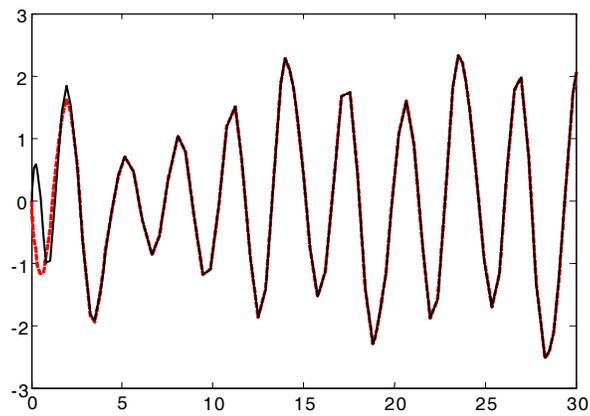


Figura 4.8: Estados del circuito Chua en sincronización via observador de Thau

Capítulo 5

Sincronización vía observador de modos deslizantes (SMO)

5.1. Forma canónica de sistemas no lineales

Consideramos un sistema no lineal descrito como sigue

$$\begin{cases} \dot{\xi} = f(\xi) + g(\xi)u \\ y = h(\xi) \end{cases} \quad (5.1)$$

donde $\xi \in \mathbb{R}^n$ es el estado de la planta, $u \in \mathbb{R}$ es la entrada de control, $y \in \mathbb{R}$ es una salida medible y f, g y h son funciones suaves. Si el sistema tiene grado relativo uniforme n , i.e.

$$L_g h(\xi) = \dots = L_g L_f^{n-2} h(\xi) = 0, \quad L_g L_f^{n-1} h(\xi) \neq 0$$

Entonces existe un mapeo

$$\eta = T(\xi) \quad (5.2)$$

que lleva al sistema (5.1) a la siguiente forma canónica

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_i &= \eta_{i+1}, \quad i = 1 \dots n-1 \\ \dot{\eta}_n &= \Phi(\eta, u) \\ y &= \eta_1 \end{aligned} \quad (5.3)$$

donde $\Phi(\eta, u)$ es una función continua no lineal. Aquí, consideramos la salida $y = \eta_1 + \delta$, siendo δ un ruido aditivo acotado.

5.2. SMO para el problema de sincronización

La sincronización de sistemas caóticos se puede clasificar en dos tipos dependiendo del tipo de configuración: sincronización mutua y sincronización maestro-esclavo. En la primera configuración se tiene un sistema con acoplamiento bidireccional y en la segunda es unidireccional. En este trabajo consideramos la configuración maestro-esclavo.

En este trabajo, proponemos un nuevo observador de modelo libre, un observador de modos deslizantes, para diseñar el sistema esclavo. Éste tiene la siguiente forma:

$$\begin{cases} \dot{\hat{\eta}}_i &= \hat{\eta}_{i+1} + m_i \tau^{-i} \text{sign}(y - \hat{y}), \quad i = 1 \cdots n - 1 \\ \dot{\hat{\eta}}_n &= m_n \tau^{-n} \text{sign}(y - \hat{y}) \\ \hat{y} &= \hat{\eta}_1 \end{cases} \quad (5.4)$$

donde $1 > \tau > 0$, las constantes m_i son tales que $\gamma^n + m_n^{n-1} \gamma^{n-1} + \cdots + m_1 = 0$ tenga todas sus raíces en *LHP*. La función $\text{sign}(y - \hat{y})$ se define como

$$\text{sign}(y - \hat{y}) = \begin{cases} 1 & \text{si } (y - \hat{y}) > 0 \\ -1 & \text{si } (y - \hat{y}) < 0 \\ 0 & \text{si } (y - \hat{y}) = 0 \end{cases}$$

Consideraremos un caso simple de dos dimensiones. El sistema esclavo es:

$$\begin{cases} \dot{\hat{\eta}}_1 &= \hat{\eta}_2 + m \tau^{-1} \text{sign}(y - \hat{y}), \quad m > 0 \\ \dot{\hat{\eta}}_2 &= m^2 \tau^{-2} \text{sign}(y - \hat{y}) \end{cases} \quad (5.5)$$

donde $\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2$ son los estados del sistema esclavo, \hat{y} es el estimado de la salida y , además $m_1 = m$, $m_2 = m^2$ y τ son parámetros pequeños y positivos.

Ya que la salida del sistema maestro es $y = \eta_1 + \delta$. Definiremos el error de sincronización como

$$\begin{cases} e_1 &= \eta_1 - \hat{\eta}_1 \\ e_2 &= \frac{1}{m}(\eta_2 - \hat{\eta}_2) \end{cases} \quad (5.6)$$

El ruido recuperado en el esclavo es

$$\hat{\delta} = y - \hat{y} = e_1 + \delta$$

de (5.5) y (5.6) se puede obtener la dinámica del error de sincronización

$$\dot{e} = A_\mu e - K \text{sign}(Ce + \delta) + \Delta f \quad (5.7)$$

con

$$A_\mu = \begin{pmatrix} -\mu & m \\ 0 & -\mu \end{pmatrix}, \quad K = m\tau^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ m\tau^{-1} \end{pmatrix}, \quad (5.8)$$

$$\mu > 0, \quad \Delta f = \begin{pmatrix} \mu e_1 \\ \frac{\Phi}{m} + \mu e_2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

μ es un parámetro de regularización, Δf es un término de incertidumbre (o un término de dinámica no modelada).

Para nuestro resultado teórico se usan las siguientes hipótesis:

H1. Existen constantes no negativas L_{0f} , L_{1f} tales que para cualquier e se cumple la siguiente condición quasi-Lipschitz:

$$\|\Delta f\| \leq L_{0f} + (L_{1f} + \|A_\mu\|)\|e\| \quad (5.9)$$

H2. Se asume que el ruido de información esta acotado como $\|\delta\|_\Lambda^2 = \delta^T \Lambda \delta \leq \delta^+ < \infty$ donde Λ es una matriz simétrica definida positiva.

H3. Existe una matriz definida positiva $Q_0 = Q_0^T > 0$ tal que la siguiente ecuación matricial de Riccati

$$PA_\mu + A_\mu^T P + PRP + Q = 0 \quad (5.10)$$

donde

$$\begin{aligned} R &= \Lambda_f^{-1} + 2\|\Lambda_f\|L_{1f}I, \quad 0 < \Lambda_f = \Lambda_f^T, \\ Q &= Q_0 + 2(L_{1f} + \|A_\mu\|)^2 I \end{aligned} \quad (5.11)$$

tiene como solución una matriz definida positiva $P = P^T > 0$. Como $P > 0$, existe $k > 0$ tal que $K = kP^{-1}C^T$.

Comentario 5.1 *Note que la dinámica $\Phi(\eta_1, \eta_2)$ en (5.3) es Lipschitz respecto a η_1 y η_2 , entonces se satisface la hipótesis H1 para sistemas caóticos. La medición está alterada por un ruido acotado δ (hipótesis H2). Para calcular la solución a la ecuación de Riccati (5.10), se seleccionaron los siguientes parámetros:*

$$\Lambda_f = \lambda_f I, L_{1f} = \mu, R = (\lambda_f^{-1} + 2\lambda_f \mu) I$$

$$Q_0 = q_0 I, Q = (q_0 + 8\mu^2) I$$

con $\lambda_f = 20$, $\mu = 0.0001$, $q_0 = \mu^2$, obtenemos

$$P = 10^{-3} \begin{bmatrix} 3.16099 & -0.22096 \\ -0.22096 & 3.16099 \end{bmatrix} > 0$$

lo cual satisface la hipótesis H3

El resultado principal es el siguiente:

Teorema 5.1 *El observador de modos deslizantes (5.5) puede alcanzar la sincronización y converge al siguiente conjunto residual:*

$$D_\varepsilon = \{e \mid \|e\|_P \leq \bar{\mu}(k)\} \quad (5.12)$$

donde P es una solución de la ecuación de Riccati (5.10)

$$\bar{\mu}(k) = \left(\frac{\rho(k)}{\sqrt{(k\alpha_p)^2 + \rho(k)\alpha_Q + k\alpha_p}} \right)^2 \quad (5.13)$$

donde

$$\rho(k) = 2\|\Lambda_f\|L_{0f}^2 + 4k \left(\sqrt{n\Lambda_f^{-1}} \right) \delta^+$$

$$k\alpha_p = k \left(\lambda_{\min} \left(P^{-1/2} C^T C P^{-1/2} \right) \right)$$

$$\alpha_Q = \lambda_{\min} \left(P^{-1/2} Q^T Q P^{-1/2} \right) > 0$$

donde n es la dimensión del sistema caótico.

Demostración. Sea $V(e)$ la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V(e) = \|e\|_P^2 = e^T P e, \quad 0 < P = P^T \quad (5.14)$$

Usando la desigualdad

$$X^T Y + Y^T X \leq X^T \Lambda_f X + Y^T \Lambda_f^{-1} Y \quad (5.15)$$

valida para cualquier $X, Y \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $0 < \Lambda_f = \Lambda_f^T$, se sigue

$$\begin{aligned} \dot{V}(e) &= 2e^T P \dot{e} \\ &= 2e^T P (A_\mu e - K \text{sign}(Ce + \delta) + \Delta f) \\ &\leq 2e^T P A_\mu e - 2ke^T C^T \text{sign}(Ce + \delta) + 2e^T P \Delta f \\ &\leq e^T (P A_\mu + A_\mu^T P) e - 2ke^T C^T \text{sign}(Ce + \delta) + e^T P \Lambda^{-1} P e + \Delta^T f \Lambda_f \Delta f \\ &\leq e^T (P A_\mu + A_\mu^T P + P R P + Q) e - e^T Q e \\ &\quad + (L_{0f}^2 + (L_{1f} + \|A_\mu\|)^2 \|e\|^2) 2\|\Lambda_f\| - 2ke^T C^T \text{sign}(Ce + \delta) \\ &= e^T (P A_\mu + A_\mu^T P + P R P + Q) e \\ &\quad - e^T Q e + 2\|\Lambda_f\| L_{0f}^2 - 2k (Ce)^T \text{sign}(Ce + \delta) \end{aligned} \quad (5.16)$$

usando

$$x^T \text{sign}[x + z] \geq \sum_{i=1}^n \|x_i\| - 2\sqrt{n}\|z_i\|$$

Entonces

$$\begin{aligned} \dot{V}(e) &\leq -e^T Q e + 2\|\Lambda_f\| L_{0f}^2 - 2k \left(\sum_{i=1}^n \|(Ce)_i\| - 2\sqrt{n}\|\delta\| \right) \\ &\leq -e^T Q e - 2k \sum_{i=1}^n \|(Ce)_i\| + \rho(k) \end{aligned}$$

donde

$$\rho(k) = 2\|\Lambda_f\| L_{0f}^2 + 4k \left(\sqrt{n\Lambda^{-1}} \right) \delta^+$$

Por lo tanto

$$\dot{V}(e) \leq -\|e\|_Q - 2k\alpha_P \|e\|_P + \rho(k) \quad (5.17)$$

donde

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n \|(Ce)_i\| \right)^2 &\geq \sum_{i=1}^n \|(Ce)_i\|^2 = \|Ce\|^2 \\ &= \|CP^{-1/2}P^{-1/2}e\|^2 \geq \alpha_p e^T Q e \end{aligned} \quad (5.18)$$

con

$$\alpha_P = \lambda_{\min} (P^{-1/2}C^T C P^{-1/2}) \geq 0 \quad (5.19)$$

Entonces, de(5.17) obtenemos

$$\dot{V}(e) = -\alpha_Q V(e) - \vartheta \sqrt{V(e)} + \beta \quad (5.20)$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha_Q &= \lambda_{\min} (P^{-1/2}Q^T Q P^{-1/2}) > 0, \\ \vartheta &= 2k\alpha_p, \quad \beta = \rho(k) \end{aligned} \quad (5.21)$$

Si se satisfacen las hipótesis H1-H3, entonces

$$\left[1 - \frac{\bar{\mu}}{V} \right]_+ \rightarrow 0 \quad (5.22)$$

donde la función $[\cdot]_+$ se define como

$$[z]_+ = \begin{cases} z & \text{si } z \geq 0 \\ 0 & \text{si } z < 0 \end{cases} \quad (5.23)$$

La demostración de este resultado se puede consultar en el final de la sección. El teorema de hecho establece que la estimación ponderada del error $V(e) = e^T P e$ converge asintóticamente a la zona $\bar{\mu}(k)$, esto es, esta finalmente acotado.

$$\bar{\mu}(k) \geq e^T P e \geq e_1^T P e_1$$

■

Comentario 5.2 *Porque*

$$\bar{\mu}(k) = \left(\frac{\frac{2\|\Lambda_f\|L_{0f}^2}{k} + 4\left(\sqrt{n\Lambda_f^{-1}}\right)\bar{s}}{\sqrt{\alpha_p^2 + \left[\frac{2\|\Lambda_f\|L_{0f}^2}{k^2} + \frac{4\left(\sqrt{n\Lambda_f^{-1}}\right)\bar{s}}{k}\right]\alpha_Q + \alpha_p}} \right)^2 \quad (5.24)$$

Como P esta acotada, podemos seleccionar τ arbitrariamente pequeña (la ganancia del esclavo (5.8) aumenta) para hacer k muy grande (ya que $K = kP^{-1}C^T = m\tau^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ m\tau^{-1} \end{pmatrix}$), así el primer término de (5.24) tiende a cero. Λ_f^{-1} es una matriz positiva en $H3$, podemos escogerla tan pequeña que el segundo término de (5.24) tienda también a cero.

Comentario 5.3 *Aunque nos hemos restringido al caso de sistemas caóticos de segundo orden, la construcción del observador y el análisis de convergencia se puede extender al caso n -dimensional. El sistema maestro es*

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_j &= \eta_{j+1} \quad j = 1, \dots, n-1 \\ \dot{\eta}_n &= H(\eta) \\ y &= \eta_1 \end{aligned}$$

el sistema esclavo basado en el observador de modos deslizantes se construye como

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\eta}}_j &= \hat{\eta}_{j+1} + m^j \tau^{-j} \text{sign}(y - \hat{y}) \quad j = 1, \dots, n-1 \\ \dot{\hat{\eta}}_n &= m^n \tau^{-n} \text{sign}(y - \hat{y}) \end{aligned} \quad (5.25)$$

donde la constantes m_j se escogen de tal manera que el polinomio $m_n \mu^n + m_{n-1} \mu^{n-1} + \dots + m_1 = 0$ tenga todas sus raíces en OLHP. Como en el caso de segundo orden, se puede demostrar que el error de sincronización converge con alguna precisión definida seleccionando valores de la ganancia del observador suficientemente pequeños.

Considere la función de Lyapunov $V(e)$ que satisface la igualdad

$$\dot{V} = -\alpha V - \vartheta \sqrt{V} + \beta$$

El punto de equilibrio V^* de esta ecuación, que satisface

$$-\alpha V^* - \vartheta \sqrt{V^*} + \beta = 0,$$

es como sigue

$$\begin{aligned} V^* &= \left(\sqrt{(\vartheta/2\alpha)^2 + \beta/\alpha} - \vartheta/2\alpha \right)^2 \\ &= \frac{(\beta/\alpha)^2}{\left(\sqrt{(\vartheta/2\alpha)^2 + \beta/\alpha} + \vartheta/2\alpha \right)^2} \end{aligned}$$

Demostración. Se define $\Delta := (V - V^*)^2$, derivamos

$$\begin{aligned} \dot{\Delta} &= 2(V - V^*) \dot{V} \leq 2(V - V^*) \left[-\alpha V - \vartheta \sqrt{V} + \beta \right] = \\ &= 2(V - V^*) \left[-\alpha V - \vartheta \sqrt{V} + \beta + (\alpha V^* + \vartheta \sqrt{V^*} - \beta) \right] \\ &= 2(V - V^*) \left[-\alpha(V - V^*) - \vartheta(\sqrt{V} - \sqrt{V^*}) \right] = \\ &= -2\alpha(V - V^*)^2 - 2\vartheta(\sqrt{V} + \sqrt{V^*})(\sqrt{V} - \sqrt{V^*})^2 < 0 \end{aligned}$$

para cualquier $V \neq V^*$, esto implica: $V \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} V^*$. Para

$$G := [V - \tilde{\mu}]_+^2 = V^2 \left[1 - \frac{\tilde{\mu}}{V} \right]_+^2$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{G} &:= 2[V - \tilde{\mu}]_+ \dot{V} = 2V \left[1 - \frac{\tilde{\mu}}{V} \right]_+ \dot{V} \leq \\ &= 2V \left[1 - \frac{\tilde{\mu}}{V} \right]_+ \left(-\alpha V - \vartheta \sqrt{V} + \beta \right) = \\ &= -2V \left[1 - \frac{\tilde{\mu}}{V} \right]_+ \left[\alpha(V - V^*) + \vartheta(\sqrt{V} - \sqrt{V^*}) \right] \leq 0 \end{aligned}$$

La última desigualdad implica que G_t converge, ésto es,

$$G_t \rightarrow G_t^* < \infty$$

Integrando la última desigualdad de 0 a T se obtiene

$$\begin{aligned} G_T - G_0 &\leq \\ -2 \int_0^T V_t \left[1 - \frac{\tilde{\mu}}{V} \right]_+ \left[\alpha(V_t - V_t^*) + \vartheta(\sqrt{V_t} - \sqrt{V_t^*}) \right] dt \end{aligned}$$

ésto nos lleva a la siguiente desigualdad

$$2 \int_0^T V_t \left[1 - \frac{\tilde{\mu}}{V}\right]_+ \left[\alpha (V_t - V_t^*) + \vartheta (\sqrt{V_t} - \sqrt{V_t^*})\right] dt \leq G_0 - G_T \leq G_0$$

Dividiendo entre T y tomando los límites superiores de ambos lados, obtenemos:

$$\overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T V_t \left[1 - \frac{\tilde{\mu}}{V}\right]_+ \left[\alpha (V_t - V_t^*) + \vartheta (\sqrt{V_t} - \sqrt{V_t^*})\right] dt \leq 0$$

y, por lo tanto, existe una subsucesión t_k tal que

$$V_{t_k} \left[1 - \frac{\tilde{\mu}}{V}\right]_+ \left[\alpha (V_{t_k} - V_t^*) + \vartheta (\sqrt{V_{t_k}} - \sqrt{V_t^*})\right] \rightarrow 0$$

o,

$$G_{t_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

Entonces, se sigue que $G = 0$, ésto es equivalente al hecho de que

$$\left[1 - \frac{\tilde{\mu}}{V}\right]_+ \rightarrow 0$$

■

5.2.1. SMO para la sincronización del sistema de Lorenz

El SMO no se puede aplicar directamente al sistema de Lorenz, por lo que aplicando la transformación (5.2), el sistema de Lorenz queda en la siguiente forma canónica:

$$\bar{\Sigma}_{LC} : \begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = z_3 \\ \dot{z}_3 = f(z) \\ y = z_1 \end{cases}$$

donde $f(z) = \sigma\{\rho(z_2 - z_1) + f_1(z) + z_1 f_2(z) - z_2 f_2(z) - z_1[z_1 f_1(z) - \beta f_2(z)] - z_3\}$ y $f_1(z) = \frac{z_2 + z_1}{\sigma}$, $f_2(z) = \rho - 1 - \frac{z_2(\sigma+1) + z_3}{z_1}$

Ahora el se puede aplicar al sistema de Lorenz y su dinámica se puede describir como sigue:

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}}_1 = \hat{z}_2 + k_1 \text{sign}(y - \hat{y}) \\ \dot{\hat{z}}_2 = \hat{z}_3 + k_2 \text{sign}(y - \hat{y}) \\ \dot{\hat{z}}_3 = k_3 \text{sign}(y - \hat{y}) \\ \hat{y} = \hat{z}_1 \end{cases} \quad (5.26)$$

Escogemos $k_1 = 100$, $k_2 = 70$, $k_3 = 100$, los resultados de sincronización se muestran en la figura 5.1 y la figura 5.2.

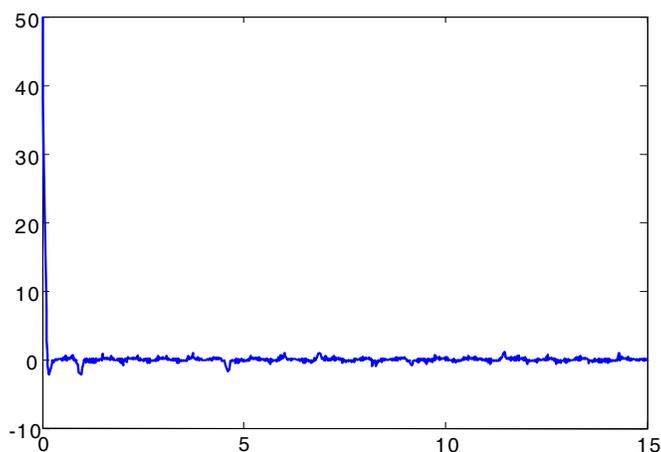


Figura 5.1: Error de sincronización del sistema de Lorenz via SMO

5.2.2. SMO para la sincronización del circuito de Chua

Al igual que en el sistema de Lorenz, el SMO no se puede aplicar directamente al circuito de Chua, por lo que si hacemos la transformación $\eta = T(\xi)$ como

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \xi_3 \\ \eta_2 &= -L\xi_2 \\ \eta_3 &= \frac{LG}{C_2} (\xi_2 - \xi_1) - \frac{L}{C_2} \xi_3 \end{aligned} \quad (5.27)$$

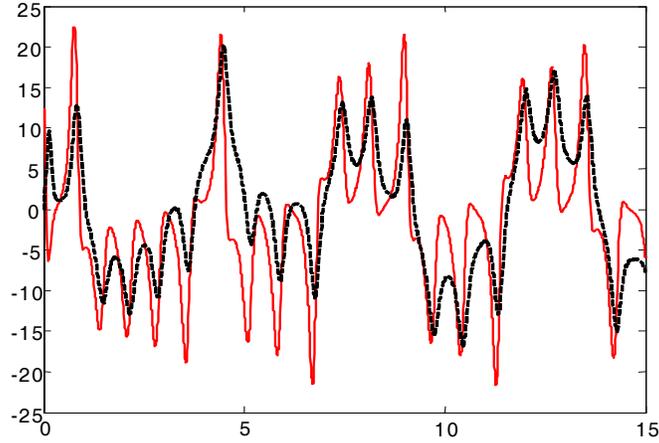


Figura 5.2: Estados del sistema de Lorenz en sincronización via SMO

El circuito de Chua obtiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 \dot{\eta}_1 &= \eta_2 \\
 \dot{\eta}_2 &= \eta_3 \\
 \dot{\eta}_3 &= f(\eta_1, \eta_2, \eta_3) + gu \\
 y &= \eta_1
 \end{aligned} \tag{5.28}$$

donde $f(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = -\frac{G}{C_2}\eta_3 - \frac{1}{C_2L}\eta_1 - \frac{G^2}{C_1C_2} \left[-2\eta_2 - \frac{1}{GL}\eta_1 - \frac{C_2}{G}\eta_3 - \frac{1}{C_1}g \left(-\eta_1 - \frac{1}{GL}\eta_1 - \frac{C_2}{G}\eta_3 \right) \right]$, $g = \frac{G}{C_1C_2}$. Ahora podemos aplicar el observador de modos deslizantes (5.26). Escogemos $k_1 = 300, k_2 = 100, k_3 = 2$, los resultados de sincronización se muestran en la figura 5.3 y la figura 5.4.

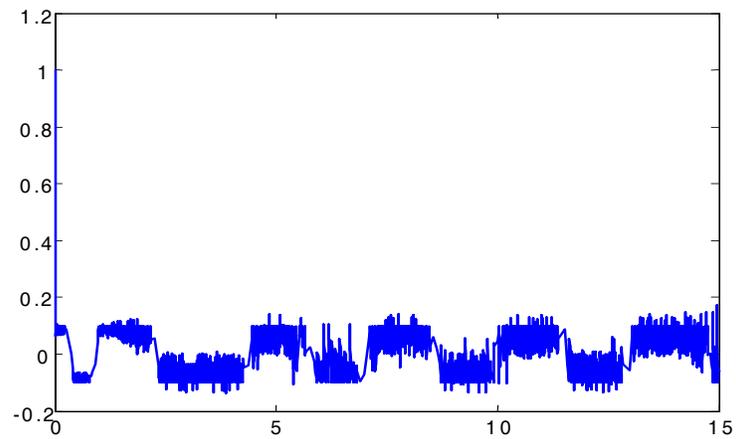


Figura 5.3: Error de sincronización del circuito de Chua via SMO

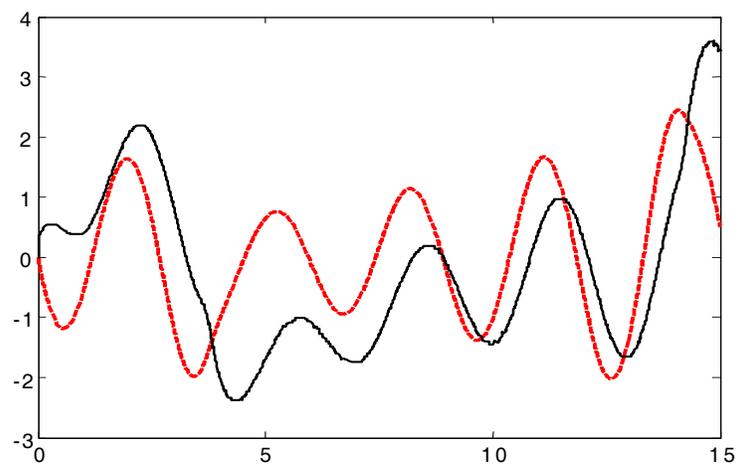


Figura 5.4: Estados del circuito Chua en sincronización via SMO

Capítulo 6

Comunicación vía SMO

6.1. Esquema de comunicación

En la comunicación caótica normal, el transmisor y el receptor son sistemas caóticos, Se pueden describir en la forma del siguiente sistema no lineal considerado en (5.1). La mayoría de los sistemas caóticos tienen grado relativo uniforme n , y como se dijo en el apartado 5.1 existe un mapeo que transforma al sistema en la forma canónica (5.3)

Al igual que en el apartado 5.2, se tratará el caso de simple de dos dimensiones, en este caso, tanto el transmisor como el receptor son sistemas caóticos de segundo orden, por ejemplo la ecuación de Duffing y el oscilador de Van der Pol. Cuando $n = 2$, (5.3) se vuelve

$$\begin{aligned}\dot{\eta}_1 &= \eta_2 \\ \dot{\eta}_2 &= \Phi(\eta_1, \eta_2, u) \\ y &= \eta_1\end{aligned}\tag{6.1}$$

En este trabajo se usará para la comunicación caótica el método de enmascarado caótico, donde como ya se dijo, la señal de información s se esconde en la salida del transmisor caótico. El transmisor caótico es una ligera modificación del sistema caótico normal (6.1)

como sigue:

$$\begin{aligned}\dot{\eta}_1 &= \eta_2 \\ \dot{\eta}_2 &= \Phi(\eta_1, \eta_2) \\ y &= \eta_1 + s\end{aligned}\tag{6.2}$$

donde la salida $y = \eta_1 + s$ es el enmascarado caótico.

El receptor será el SMO descrito por (5.5). El diagrama esquemático de la comunicación caótica basada en el SMO se muestra en la figura 6.1.

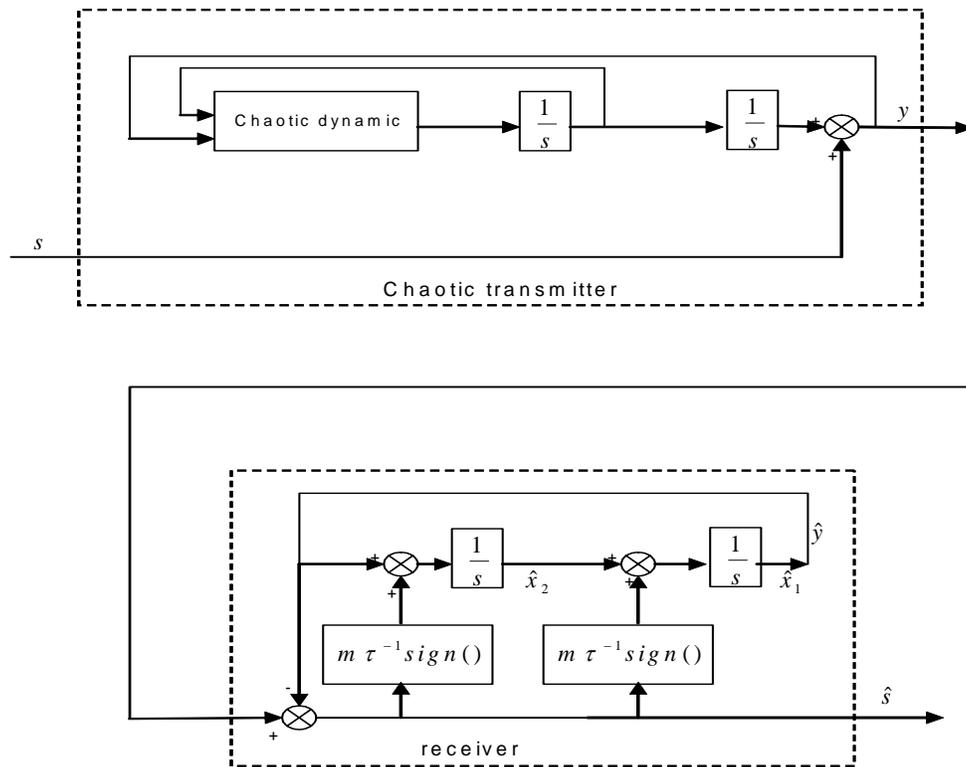


Figura 6.1: Comunicación via SMO

El receptor aquí propuesto se puede aplicar muy fácilmente y es mas robusto en comparación con otros receptores en comunicación caótica. Por ejemplo en [1, 4, 17] el receptor

es

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\eta}}_1 &= \hat{\eta}_2 + l_1(y - \hat{y}) \\ \dot{\hat{\eta}}_2 &= a_1 [(1 - a_2 \hat{\eta}_1^2) \hat{\eta}_2 - a_3 \hat{\eta}_1] + l_2(y - \hat{y}) \\ \hat{y} &= \hat{\eta}_1\end{aligned}\tag{6.3}$$

donde l_1 y l_2 son la solución de una desigualdad de Riccati. Cualquier incertidumbre en el lado del transmisor, por ejemplo los parámetros a_1 , a_2 y a_3 no se conocen exactamente, afectará la precisión de la recuperación de la señal de información.

Si definimos el error como en (5.6) la señal recuperada en el receptor es

$$\hat{s} = y - \hat{y} = e_1 + s$$

por (6.2) y (5.5) el error de sincronización queda:

$$\dot{e} = A_\mu e - K \text{sign}(Ce + s) + \Delta f\tag{6.4}$$

con A_μ , K , μ , Δf y C como en (5.8)

Corolario 6.1 *El receptor basado en el SMO (5.5) puede recuperar la señal de información s que se encuentra escondida en el transmisor caótico (6.2), el error en la recuperación de la señal $\tilde{s} = s - \hat{s}$ converge al siguiente conjunto residual*

$$D_\varepsilon = \{\tilde{s} \mid \|\tilde{s}\|_P \leq \bar{\mu}(k)\}\tag{6.5}$$

donde P es la solución de la ecuación de Riccati (5.10)

$$\bar{\mu}(k) = \left(\frac{\rho(k)}{\sqrt{(k\alpha_p)^2 + \rho(k)\alpha_Q + k\alpha_p}} \right)^2\tag{21}$$

donde

$$\begin{aligned}\rho(k) &= 2 \|\Lambda_f\| L_{0f}^2 + 4k \left(\sqrt{n\Lambda_f^{-1}} \right) \bar{s} \\ k\alpha_p &= k \left(\lambda_{\min} \left(P^{-1/2} C^T C P^{-1/2} \right) \right) \\ \alpha_Q &= \lambda_{\min} \left(P^{-1/2} Q^T Q P^{-1/2} \right) > 0\end{aligned}$$

donde n es la dimensión del sistema caótico.

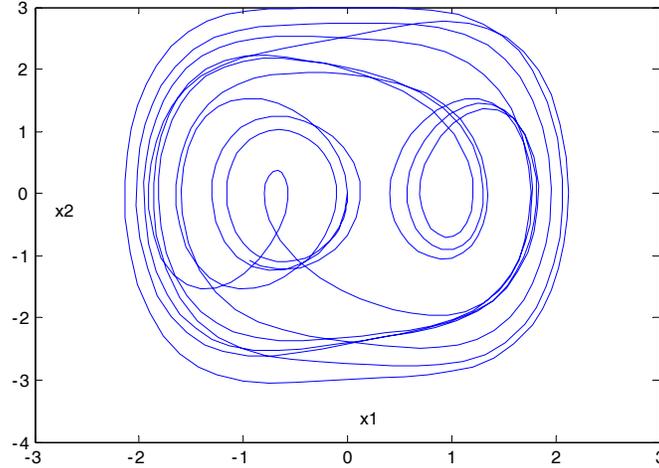


Figura 6.2: Comportamiento caótico de la ecuación de Duffing con $x(0) = [0, 0]^T$.

6.2. Tres ejemplos de comunicación

6.2.1. Ecuación de Duffing

La ecuación de Duffing describe un circuito caótico específico [5]. Éste se puede escribir como

$$\begin{aligned}\dot{\eta}_1 &= \eta_2 \\ \dot{\eta}_2 &= p_1\eta_1 - p_2\eta_1^3 - p\eta_2 + q \cos(\omega t) + u_t\end{aligned}\tag{6.6}$$

donde p , p_1 , p_2 , q y ω son constantes. u_t es la entrada de control. Se sabe que la solución de (6.6) presenta un comportamiento caótico casi periódico. Para el caso sin control, si seleccionamos $p_1 = 1.1$, $p_2 = 1$, $p = 0.4$, $q = 2.1$, $\omega = 1.8$, el oscilador de Duffing (6.6) tiene una respuesta caótica como en la figura 6.2.

Para transmitir información a con las ecuaciones de Duffing tenemos el siguiente sistema:

$$\begin{aligned}\dot{\eta}_1 &= \eta_2 + \frac{1}{\tau}s \\ \dot{\eta}_2 &= -1.1\eta_1 - \eta_1^3 - 0.4\eta_2 + 2.1 \cos(1.8t) + \frac{1}{\tau^2}s \\ y &= \eta_1 + s, \quad \eta(0) = [0, 0]^T\end{aligned}\tag{6.7}$$

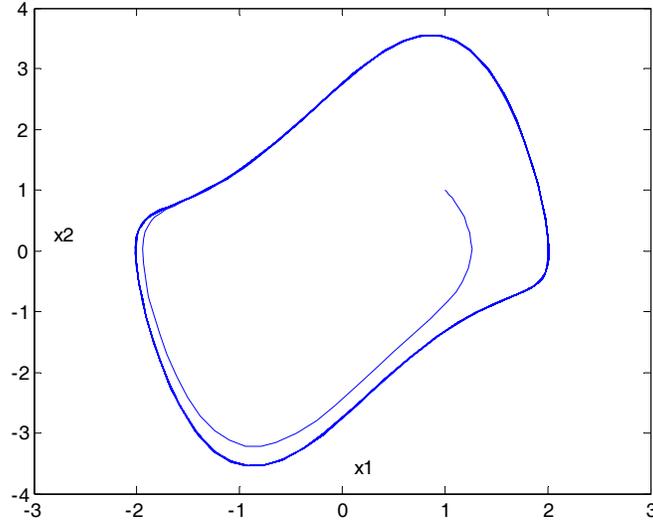


Figura 6.3: Comportamiento caótico del oscilador de Van der Pol con $x(0) = [1, 1]^T$.

6.2.2. Oscilador de Van der Pol

El oscilador de Van der Pol se puede describir por [29]

$$\begin{aligned}\dot{\eta}_1 &= \eta_2 \\ \dot{\eta}_2 &= a_1 [(1 - a_2 \eta_1^2) \eta_2 - a_3 \eta_1] + u_t\end{aligned}\tag{6.8}$$

En el caso sin control, si se selecciona $a_1 = 1.5$, $a_2 = 1$, $a_3 = 1$, el oscilador de Van der Pol (6.8) tiene una respuesta caótica como en la figura 6.3.

El oscilador de Van der Pol queda como sigue para poder transmitir información con él:

$$\begin{aligned}\dot{\eta}_1 &= \eta_2 + \frac{1}{\tau} s \\ \dot{\eta}_2 &= 1.5 [(1 - \eta_1^2) \eta_2 - \eta_1] + \frac{1}{\tau^2} s \\ y &= \eta_1 + s, \quad \eta(0) = [2, -1]^T\end{aligned}\tag{6.9}$$

6.2.3. Circuito de Chua

Usamos los siguientes parámetros: $C_1 = \frac{1}{9}$, $C_2 = 1$, $L = \frac{1}{7}$, $G = 0.7$, $m_0 = -0.5$, $m_1 = -1.5$, $B_p = 1$. el circuito de chua tiene el comportamiento que se muestra en la figura 6.4 Por la transformación (5.27), el circuito de Chua (2.15) se puede escribir como

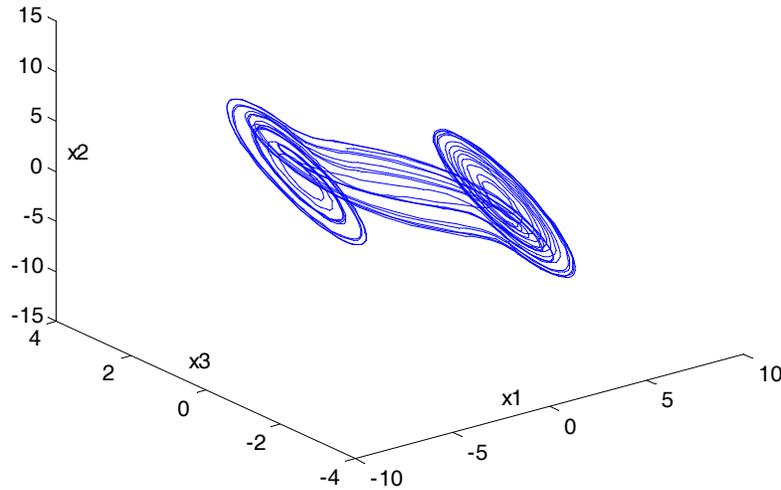


Figura 6.4: Comportamiento caótico del circuito de Chua con condición inicial $[0, 0, 1]^T$.

$$\begin{aligned}
 \dot{\eta}_1 &= \eta_2 \\
 \dot{\eta}_2 &= \eta_3 \\
 \dot{\eta}_3 &= \frac{31}{4.9}\eta_3 - \frac{310}{7}\eta_1 - \frac{22}{4.9}\eta_3 - \frac{22}{7}\eta_2 - \frac{220}{7}\eta_1 - 0.7\eta_2 - 7\eta_1 + 22g(\eta_1, \eta_2, \eta_3) \\
 y &= \eta_2, \quad \eta(0) = [1, 0, -7]^T
 \end{aligned}$$

donde $g(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = \left| -\frac{1}{4.9}\eta_3 - \frac{1}{7}\eta_2 - \frac{10}{7}\eta_1 + 1 \right| - \left| -\frac{1}{4.9}\eta_3 - \frac{1}{7}\eta_2 - \frac{10}{7}\eta_1 - 1 \right|$. Usamos η_2 y η_3 como el transmisor

$$\begin{aligned}\dot{\eta}_2 &= \eta_3 + \frac{1}{\tau}s \\ \dot{\eta}_3 &= \frac{31}{4.9}\eta_3 - \frac{310}{7}\eta_1 - \frac{22}{4.9}\eta_3 - \frac{22}{7}y - \frac{220}{7}\eta_1 - 0.7y - 7\eta_1 + 22g(\eta_1, y, \eta_3) + \frac{1}{\tau^2}s \\ y &= \eta_2 + s\end{aligned}\quad (6.10)$$

donde η_1 satisface $\dot{\eta}_1 = \eta_2$.

Ahora diseñamos el receptor de modos deslizantes como (5.5). Escogemos $m = 0.1$, $\tau = 0.01$. El receptor basado en el SMO es

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\eta}}_1 &= \hat{\eta}_2 + 10\text{sign}(y - \hat{y}) \\ \dot{\hat{\eta}}_2 &= 10^2\text{sign}(y - \hat{y}) \\ \hat{y} &= \hat{\eta}_1, \quad \hat{\eta}(0) = [1, 1]^T\end{aligned}\quad (6.11)$$

6.2.4. Resultados numéricos

La señal de información s se escoge como una señal sinusoidal con frecuencia de 100Hz como en [4] y [17], *i.e.*,

$$s = 0.05 \sin(200\pi t)$$

Las figuras 6.5-6.7 muestran el proceso de comunicación con tres diferentes transmisores caóticos y un receptor, aquí la forma de onda de la señal transmitida y se muestra en la subgráfica (a), el comportamiento de la convergencia de $s - \hat{s}$ se muestra en las subgráficas (b).

Después del estado transitorio ($t > 0.1s$), el error relativo máximo se define como

$$e_{\text{máx}} = \frac{\text{máx}(|s - \hat{s}|)}{\text{máx}(|s|)}$$

Para el oscilador de Duffing, $e_{\text{máx}} \cong 1.5\%$. Para el oscilador de Van der Pol, $e_{\text{máx}} \cong 2\%$. Para el circuito de Chua, $e_{\text{máx}} \cong 1.915\%$. Aunque los errores relativos son diferentes, todos son aceptables para comunicación. Es interesante ver que un receptor (5.5) puede recuperar la señal de información de tres transmisores caóticos diferentes.

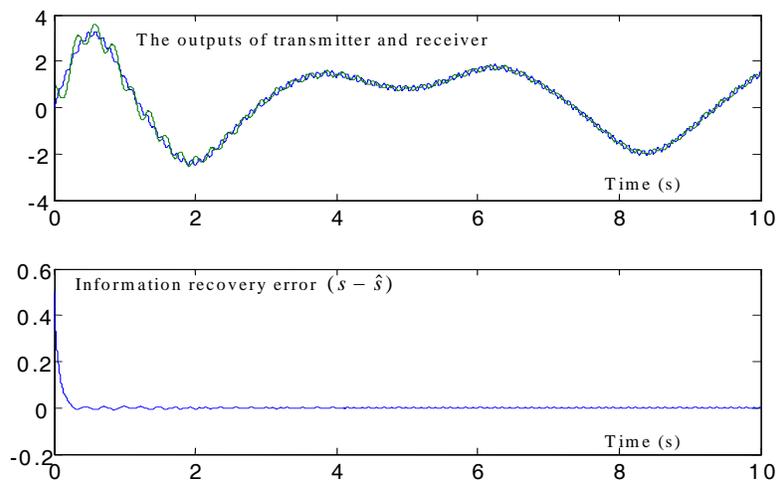


Figura 6.5: Oscilador de Duffing para comunicaciones caóticas

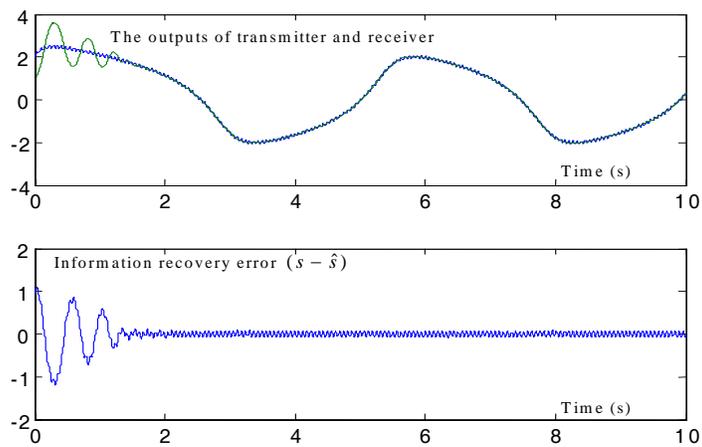


Figura 6.6: Oscilador de Van der Pol para comunicaciones caóticas

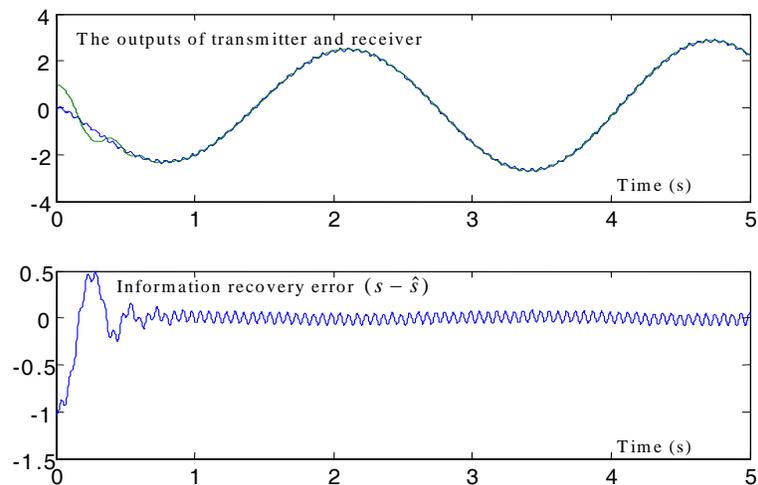


Figura 6.7: Circuito de Chua para comunicaciones caóticas

Los observadores basados en el modelo requieren de información completa acerca del transmisor. Para comparar los resultados de comunicación usamos un observador lineal [17], ver figura 6.8. Se encontraron que el observador basado en el modelo tiene mejor desempeño, pero si el transmisor es desconocido o se conoce solo parcialmente, ésta clase de observador no funciona. Otra ventaja del observador basado en el modelo es que se puede aplicar a cualquier transmisor caótico como en (5.1), mientras que el SMO sólo se puede aplicar a aquellos sistemas que cumplen con la forma (5.3)

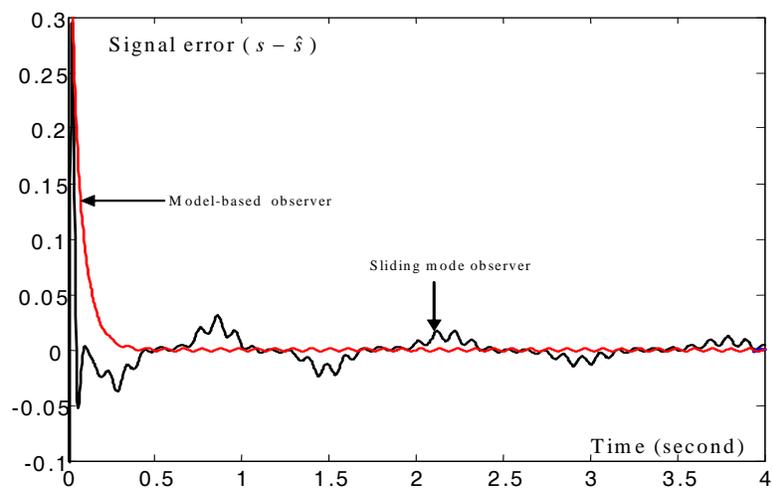


Figura 6.8: Señales de error para diferentes tipos de receptores

Capítulo 7

Conclusiones y trabajo futuro

Para el caso de sincronización, los observadores basados en el modelo (Thau y Bestle-Zeitz) requieren información completa del sistema maestro. El observador de Bestle-Zeitz necesita una transformación complicada, el error de sincronización puede converger a cero. La ganancia del observador de Thau no es difícil de obtener, el error de sincronización converge a una zona acotada. Podemos ver que en ambos sistemas, el de Lorenz y el de Chua, el mejor desempeño lo presenta el observador de Bestle-Zeitz, pero, aun si el observador de Thau también presenta un mejor desempeño que el observador de modos deslizantes, debemos recordar que ambos, el observador de Bestle-Zeitz y el de Thau requieren de información completa acerca del sistema mientras que el observador de modelo libre propuesto en este trabajo no requiere de información alguna del sistema maestro, es robusto a errores acotados, pero el error de sincronización es más grande que en los observadores basados en el modelo.

En lo referente a comunicación, podemos observar que el observador de modos deslizantes no puede trabajar tan bien como lo hacen los receptores normales, pero podemos establecer que existe un riesgo de seguridad al transmitir información a través del esquema actual que comprende a los sistemas caóticos.

Nuestro observador aún no tiene una aplicación práctica, pero esperamos que este trabajo inspire la investigación al respecto.

Como trabajo futuro se considera aplicar el observador a otros sistemas caóticos para la

sincronización, así como usar otros métodos de comunicación.

Bibliografía

- [1] Alvarez, J., Puebla, H., and Cervantes, I. (2002). Stability of observer-based chaotic communications for a class of luré systems. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 12(7):1605–1618.
- [2] Anulova, S. V. (1986). Random disturbances of the operation of control systems in the sliding mode. *Automation and Remote Control*, 47(4):474–479. Part I.
- [3] Bestle, D. and Zeitz, M. (1983). Canonical form observer design for non-linear time-variable systems. *Int. J. Control*, 38(2):419–432.
- [4] Boutayeb, M. and Darouach, M. and Rafaralahy, H. (2002). Generalized state-space observer for chaotic synchronization and secure communication. *IEEE Trans. Circuits and Systems, Part I*, 49(3):345–349.
- [5] Chen, G. and Dong, X. (1993). On feedback control of chaotic continuous-time systems. *IEEE Trans. Circuits Syst*, 40:591–601.
- [6] Chow, T., Feng, J., and Ng, K. T. (2001). Chaotic network synchronization with application to communications. *Int. J. Commun. Syst.*, 14:217–230.
- [7] De Carlo, R., Zak, S., and Drakunov, S. (1996). *Control Handbook*, chapter Variable structure and sliding mode control. *Electrical Engineering Handbook*. CRC Press, Inc.
- [8] Dedieu, H., Kennedy, M. P., and Hasler, M. (1993). Chaos shift keying: modulation and

- demodulation of a chaotic carrier using self-synchronizing chua's circuits. *IEEE Trans. Circ. Syst., Part II*, 40(10):634–642.
- [9] Drakunov, S. V. and Utkin, V. (1995). Sliding mode observers. tutorial. In *Proc. 34th IEEE Conference on Decision y Control (CDC)*, pages 3376–3378, New Orleans, LA.
- [10] Halle, K. S., Wu, C. W., Itoh, M., and Chua, L. O. (1993). Spread spectrum communication through modulation of chaos. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 3(2):469–477.
- [11] Hasler, M. (1998). Synchronization of chaotic systems and transmission of information. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 8(4):647–659.
- [12] Huijberts, H., Nijmeijer, H., and Willems, R. (2000). System identification in communication with chaotic systems. *IEEE Trans. Circuits and Systems, Part I*, 47(6):800–808.
- [13] Hunt, L. R., Su, R., and Meyer, G. (1983). Design for multi-input nonlinear systems. In Brockett, R., Millman, R., and Sussmann, H., editors, *Differential Geometric Control Theory*, pages 268–298, Birkhauser, Boston.
- [14] Isidori, A. (1995). *Nonlinear Control System*. Springer-Verlag, London, 3rd edition.
- [15] Kocarev, L., Halle, K., Eckert, K., and Chua, L.O.and Parlitz, U. (1992). Experimental demonstration of secure communication via chaotic synchronization. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 2:709–713.
- [16] Lian, K., Chiang, T., Chiu, C., and Liu, P. (2001). Synthesis of fuzzy model-based designs to synchronization and secure communication for chaotic systems. *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern. B*, 31(1):66–83.
- [17] Liao, T.-L. and Huang, N.-S. (1999). An observer-based approach for chaotic synchronization with applications to secure communications. *IEEE Trans. Circuits and Systems I*, 46(9):1144–1150.

- [18] Maistrenko, Y. and Kapitaniak, T. (1996). Different types of chaos synchronization in two coupled piecewise linear maps. *Phys. Rev. E*, 54(4):3285–3292.
- [19] Martínez-Guerra, R., Aguilar, R., and Poznyak, A. (2004). A new robust sliding-mode observer design for monitoring in chemical reactors. *Transactions of the ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 126:473–478.
- [20] Martínez-Guerra, R., Cruz-Victoria, J. C., Gonzalez-Galan, R., and Aguilar-Lopez, R. (2006). A new reduced-order observer design for the synchronization of lorenz systems. *Chaos, Solitons and Fractals*, 28(2):511–517.
- [21] Nijmeijer, H. and Mareels, I. M. (1997). An observer looks at synchronization. *IEEE Trans. Circuits and Systems, Part I*, 44(10):882–890.
- [22] O., M. and Solak, E. (1996). Observer based synchronization of chaotic systems. *Phys. Rev. E*, 54:4803–4811.
- [23] Parlitz, U., Chua, L., Kocarev, L., Halle, K., and Shang, A. (1992). Transmission of digital signals by chaotic synchronization. *Int.J. Bifurcation y Chaos*, 2:973–977.
- [24] Pecora, L. M. and Carroll, T. L. (1990). Synchronization in chaotic systems. *Phys. Rev. Lett.*, 64(8):821–824.
- [25] Slotine, J., Hedricks, J., and Misawa, E. (1987). On sliding observers for nonlinear systems. *I. J. Dyn. Meas. & Control*, 109:245–252.
- [26] T., Y. and Chua, L. (1997). Impulsive stabilization for control and synchronization of chaotic systems theory and application to secure communication. *IEEE Trans. Circuits and Systems, Part I*, 44:976–988.
- [27] Tao, Y. (1999). Chaotic secure communication systems history and new results. *Telecommun. Rev.*, 9(4):597–634.

- [28] Ushio, T. (1999). Synthesis of synchronized chaotic systems based on observers. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 9(3):541–546.
- [29] Venkatasubramanian, V. (1994). Singularity induces bifurcation and the van der pol oscillator. *IEEE Trans. Circuits and Systems, Part I*, 41(11):765–769.
- [30] Wu, W. and Chua, L. (1994). A unified framework for synchronization and control of dynamical systems. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 4:979–998.
- [31] Yu, W., Moreno, M., and Li, X. (2000). Observer based neuro identifier. *IEE Proceedings - Control Theory and Applications*, 147(2):145–152.

Apéndice A

Publicaciones

1. Martínez-Guerra, R., Cisneros-Saldaña, E., and Yu, W. A new model-free sliding observer to synchronization problem. In *Int. Conf. on Electrical and Electronic Engineering*.
2. Martínez-Guerra, R., Yu, W., and Cisneros-Saldaña, E. (Aceptado). A new model-free sliding observer to synchronization problem. *Int. J. Chaos Solitons and Fractals*.