

**CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y ESTUDIOS  
AVANZADOS DEL I.P.N.**

DEPARTAMENTO DE CONTROL AUTOMÁTICO

**Control con anti-oscilación para una Grúa  
en tres dimensiones en tiempo real**

TESIS QUE PRESENTA EL

**M. en C. Rigoberto Toxqui Toxqui**

PARA OBTENER EL GRADO DE  
**Doctor en Ciencias**

En la Especialidad de  
**Control Automático**

DIRECTOR DE TESIS:  
**Dr. Wen Yu Liu**

México, D.F. Agosto del 2006

---

Becario de CONACYT



# AGRADECIMIENTOS

A mi asesor:

Dr. Wen Yu Liu

Por su valiosa asesoría, paciencia y consejos otorgados para concluir con éxito este proyecto.

A los investigadores:

Dr. Rafael Martínez Guerra

Dr. Moisés Bonilla Estrada

Dr. Marco A. Moreno Armendariz

Dr. Andrés Ferreira Ramírez

Por sus comentarios y observaciones para complementar este trabajo, así como para aceptar ser parte del jurado.

A la

Srita. Lucero M. Fernández Campos

Por su apoyo secretarial.

Y finalmente, a mis amigos, compañeros(a) y profesores por su grata compañía, apoyo y ayuda brindada durante toda esta formación.

# DEDICATORIA

Mi esposa **Margarita Palacios Casillas**, por su amor y paciencia, a la memoria de mi hija **Rosa del Carmen Toxqui P.**, donde ella se encuentre estará siempre en nuestro corazón y a mi hijo **Fernando Toxqui Palacios.**, por permitir darme fuerzas para seguir adelante.

A ustedes, mis queridos padres por su comprensión y apoyo incondicional:

**Dimas Toxqui T. y Carmen Toxqui A.**

A ustedes hermanos:

**Venancio, Amador, Raymundo y Alberto**

Quienes me han enseñado a no reservar del mundo solo un rincón tranquilo actuando únicamente vestido con el velo transparente de la entrega al momento presente, le dedico este trabajo, fruto de esfuerzo y dedicación continua.

A todas aquellas personas que se dedican a la noble enseñanza superior que tiene como finalidad capacitar y avivar a la mente para pensar.

Principalmente a Dios por brindarme la gentileza y humildad de acoger con gratitud mi personaje en el teatro de la creación dejando que el mismo recite su papel.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Motivación . . . . .	1
1.2. Objetivos . . . . .	2
1.3. Estructura de la tesis . . . . .	3
1.4. Resumen del control en la grúa . . . . .	3
<b>2. Modelo matemático de una grúa en tres dimensiones</b>	<b>11</b>
2.1. Introducción . . . . .	11
2.2. Modelado matemático del motor . . . . .	14
2.3. Modelado matemático de la grúa con el método de Newton . . . . .	17
2.3.1. Modelo simplificado . . . . .	18
2.3.2. Modelo completo . . . . .	20
2.4. Modelado matemático de la grúa utilizando el método de Lagrange . . . . .	23
2.5. Experimentos en tiempo real . . . . .	32
2.5.1. Propiedades de la descripción de la grúa en 3 dimensiones . . . . .	34
2.6. Conclusiones del capítulo . . . . .	35
<b>3. Control PD con anti-oscilación y compensación Neuronal</b>	<b>41</b>
3.1. Introducción . . . . .	41
3.2. Control PD . . . . .	43
3.3. Control PD con oscilación . . . . .	48

3.4. Posición de control del PD y compensación neuronal . . . . .	49
3.5. Análisis de estabilidad . . . . .	50
3.6. Comparaciones de los experimentos . . . . .	56
3.7. Conclusiones del capítulo . . . . .	62
<b>4. Control PD con Anti-oscilación y Velocidad en el Observador</b>	<b>65</b>
4.1. Introducción . . . . .	65
4.2. Observador alta-ganancia . . . . .	65
4.3. Control PD y velocidad en el observador . . . . .	68
4.4. Control PD y velocidad en el observador con compensación neuronal . . . . .	73
4.5. Comparación con los experimentos . . . . .	75
4.5.1. Control PD sin Redes Neuronales . . . . .	77
4.5.2. Control PID . . . . .	77
4.5.3. Control PD con Observador y Redes Neuronales . . . . .	79
4.5.4. Control PD con Observador y Redes Neuronales sin ángulo . . . . .	81
4.6. Conclusiones del capítulo . . . . .	86
<b>5. Conclusiones y trabajos futuros</b>	<b>89</b>
<b>A. Publicaciones</b>	<b>97</b>

# Índice de figuras

2.1. Coordenadas de la grúa en tres dimensiones . . . . .	12
2.2. Esquema del motor con la grúa . . . . .	14
2.3. Modelo eléctrico-mecánico del motor . . . . .	15
2.4. Grúa en tres dimensiones . . . . .	33
2.5. Gráficas en Posición $x, y, z$ . Ángulos alfa, beta y gama ( $\alpha, \beta, \delta$ ) . . . . .	36
2.6. Posición en lazo abierto de la grúa en $x$ . . . . .	36
2.7. Ángulo de la grúa ( $\alpha$ ) . . . . .	37
2.8. Posición en lazo abierto de la grúa en $y$ . . . . .	37
2.9. Ángulo de la grúa ( $\beta$ ) . . . . .	38
2.10. Posición en lazo abierto de la grúa en $z$ . . . . .	38
2.11. Ángulo de la grúa ( $\delta$ ) . . . . .	39
3.1. Grúa viajera . . . . .	44
3.2. Control en tiempo real para una grúa viajera en 3D . . . . .	57
3.3. Sin oscilación en los ángulos de control . . . . .	58
3.4. Con oscilación en los ángulos de control . . . . .	59
3.5. Control PD con compensación neuronal . . . . .	60
3.6. Control PD sin compensación . . . . .	60
3.7. Control PID . . . . .	61
4.1. Posición de control en el eje X . . . . .	78
4.2. Posición de control en el eje Y . . . . .	78

4.3. Velocidad en el eje X . . . . .	79
4.4. Posición en el eje X . . . . .	80
4.5. Posición en el eje Y . . . . .	80
4.6. Angulo de control en X . . . . .	81
4.7. Velocidad con control PD con Observador y NN en el eje X . . . . .	82
4.8. Velocidad con control PD con Observador y NN en el eje Y . . . . .	83
4.9. Posición con control PD con Observador y NN en el eje X . . . . .	83
4.10. Posición con control PD con Observador y NN en el eje Y . . . . .	84
4.11. Angulo con control PD con Observador y NN en X . . . . .	84
4.12. Angulo con control PD con Observador y NN en Y . . . . .	85
4.13. Angulo de la Grúa en X con control PD . . . . .	85
4.14. Angulo de la Grúa en Y con control PD . . . . .	86

# Capítulo 1

## Introducción

Un esfuerzo en la investigación ha sido significativo durante los últimos 40 años en el análisis de estrategias de control para las grúas viajeras, han sido mas largas y rápidas, la necesidad para controlar y garantizar la grúa por encima de (es decir grúas viajeras). Las grúas tienen un mecanismo para subir (comúnmente tienen el cable de subida en línea y enganchado) y soportan mecanismos (tren vía). El cable que sostiene la carga esta suspendida de un punto a el mecanismo que lo soporta. El movimiento del mecanismo que sostiene un punto al rededor del espacio de trabajo de la grúa, mientras el mecanismo de la grúa cuando alza y baja la carga para evitar obstáculos en su trayectoria y el deposito de la carga en el punto.

Las grúas se pueden clasificar por los grados de libertad que soportan el mecanismo, para el análisis de nuestra grúa esta compuesta por tres grados de libertad el riel, el móvil y la carga. La aproximación del modelado de la grúa lo hacemos en lazo abierto y posteriormente el lazo cerrado para analizar un método de control clasificando segun nuestra necesidad.

### 1.1. Motivación

Los modelos de las grúas viajera en 3D en su análisis para el modelado matemático se observan que no incluyen la fricción, la longitud de la cuerda y esto genera matrices de

dimensiones de  $3 \times 3$  en general como en [30], si nosotros tenemos algunas comparaciones con este modelado observamos también que para algunos autores las matrices son de dimensiones de  $4 \times 4$ , considerando la anti-oscilación [34]. Para nuestro análisis queremos considerar fricción, acoplamiento en la anti-oscilación para el control, esto nos lleva para motivarnos con el análisis, considerando los puntos antes mencionados y nuestra matriz sera de dimensiones de  $5 \times 5$ . Las redes neuronales nos servirán para compensar la fricción, gravedad y el acoplamiento entre la posición y el control con anti-oscilación, el observador nos sirve para estimar la velocidad en los ejes.

- El modelo dinámico de la grúa en tres dimensiones en lazo abierto, nos modela el sistema sin considerar oscilaciones y sin control en este método solo observamos como se comporta nuestro modelo.
- El controlador puede regular la posición y la anti-oscilación. Esto es debido a las incertidumbres que existen cuando modelamos el sistema.
- Proponer una ley de control con un controlador PD, PID, un observador de alta ganancia y con compensación de redes neuronales, es para considerar la fricción por mencionar algunos de las incertidumbres.
- Realizar experimentos reales con la grúa en 3D. Finalmente comparar los métodos propuestos y observar cual estabilizan el sistema. En este caso nuestro modelado de nuestra grúa en tres dimensiones considerando fricción así como gravedad y acoplamiento en la posición, nosotros lo llevamos a comparaciones reales en nuestro sistema

## 1.2. Objetivos

Como objetivos principales para la elaboración de este trabajo de investigación tenemos los siguientes puntos.

- El modelo dinámico de la grúa en tres dimensiones en lazo abierto.

- El controlador pueda regular la posición y la anti-oscilación
- Proponer una ley de control con un controlador PD, PID, Observador Alta Ganancia y con compensación de Redes Neuronales
- Realizar experimentos reales con la grúa en 3D.
- Finalmente comparar los métodos propuestos y observar cual estabilizan el sistema.

### **1.3. Estructura de la tesis**

En el capítulo dos, se hace la revisión de literatura correspondiente a la grúa en tres dimensiones con diferentes métodos. Se modela la dinámica de la grúa en tres dimensiones con diferentes métodos, Lagrange, Newton. El modelo en general comprende diferentes formas de ver el modelado desde un modelo completo a un modelo siempre sin considerar fricción. También se hacen experimentos reales con la grúa y se comparan con los métodos descritos.

En el capítulo tres, a partir del modelado dinámico se propone una ley de control PD, otra ley de control con compensación neuronal y se hacen simulaciones para comparar cual de los dos métodos estabiliza mejor el sistema. Finalmente en el capítulo cuatro, se analiza el método donde el control PD tiene una anti-oscilación. También se modela con un observador de alta ganancia con velocidad en el observador y sin velocidad para finalmente comparar los métodos.

### **1.4. Resumen del control en la grúa**

La primera idea en la automatización de la grúa, fue calculando la función de control en tiempo óptimo, minimizando la trayectoria de tiempo de la grúa considerando las condiciones que acotan la carga de oscilación en el objetivo del punto (Beeston, 1969).

El campo de control no lineal en sistemas dinámicos es muy variado. Esto generalmente converge en control no lineal. En este proyecto se analiza en específico para un sistema no lineal, en la grúa viajera en tres dimensiones.

Las grúas viajeras son usados en numerosas aplicaciones industriales, tal como la carga y descarga de contenedores, el manejo de desechos nucleares, la automatización industrial y básicamente en algunas industrias que requieren tareas pesadas para mover de un lado a otro.

El análisis del control de la grúa en 3D, es complejo, así como en diferentes aplicaciones industriales requiere diferentes sistemas de control. Algunas aplicaciones requieren la optimización del movimiento del carro. Otros requieren poco o ningún balance cuando estos se están moviendo.

Desde que en el análisis del sistema de la grúa en 3D, es un sistema multivariable no lineal, esto nos proporciona un significado para observar la representación de diferentes tipos de controladores cuando se aplican en un sistema multivariable no lineal. Estos controladores consisten en partes proporcionales derivativos (PD).

La solución del control de la grúa no es limitada a una área específica en teoría de control. Viendo la representación de diferentes controladores, el perfeccionamiento en la grúa industrial quizás sea logrado.

El control no lineal no solo se trata en esta tesis, de donde el controlador no lineal se deriva de un modelo no lineal. Incluso sin embargo el sistema de la grúa es un sistema no lineal, el controlador no lineal se deriva del modelo linealizado de la grúa.

Las no linealidades en el diseño del controlador provienen de dos aspectos principales:

- 1) El controlador sliding mode esta relacionado con un controlador no lineal debido a la función discontinúa presente en la estructura de control.
- 2) La ganancia programada se usa con respecto a la longitud de la cuerda en el diseño del controlador sliding mode.

Estos dos aspectos importantes ocasionan que un controlador no lineal que sea simulado en su modelo linealizado e implementando en tiempo real en el sistema de la grúa.

Este proyecto no se considera solo la teoría de control, pero también el problema práctico que surge en aplicaciones industriales en la grúa. En la revisión de literatura en general que se ha publicado en relación al control de la grúa se da en esta sección.

Revisando detalladamente la literatura de diferentes aproximaciones de control en sistemas de grúas. Estos controladores extendiendo de un simple estado de control de retroalimentación [41], a controladores no lineales mas complejos [51] y [7].

Ridout [41], resolvió el problema de oscilación de control y el posicionamiento del carro usando variables de estado en el diseño de retroalimentación. El no considero el control con la longitud de la cuerda, es cual ahí tenemos un componente crítico en la aplicación práctica para la grúa viajera. Ridout encontró que la implementación práctica del controlador tenía que ser conectado en línea en resultados realizados que podrían tener en esta simulación. Esto significa que cualquiera de su modelado de la grúa necesita ser mas preciso, o el controlador lineal es sensible a cambios en parámetros de sistemas, el cual es caracterizado por controladores lineales.

Nguyen [7], extendió el trabajo de Ridout e incluyo la longitud de la cuerda en el control. El mejoro una simple ganancia en la programación de variables de estado del controlador de retroalimentación. El también específico un modelo para la grúa en el cual la dinámica del carro son también influenciados por un cambio de la longitud de la cuerda. Esto implica claramente que el logro mejor desempeño si el estuviera programado para todas las ganancias de retroalimentación mas bien entonces la velocidad angular de oscilación. La función programada de funciones es una simple división de la oscilación de la velocidad angular por la longitud de la cuerda. Esta función programada se muestra para ser deducido experimentalmente entonces matemáticamente, como el no detalla matemáticamente la deducción del modelo. Si la deducción matemática fuera usado, entonces todos las ganancias de retroalimentación habrían sido programados con la longitud de la cuerda. Nguyen solo detallo la robustez de la operación del controlador para una región finita. Entonces no hay garantía en la representación del controlador sobre todo el espacio de operación. También desde que el controlador de Nguyen es básicamente una variable de retroalimentación de estado del controlador hay garantía de la representación del controlador en la presencia de inestabilidad.

Auernig y Troger [3], resolvieron el problema en tiempo óptimo para la grúa viajera, pero los resultados de la simulación son disponibles, y ellos no detallan la demostración de

la concavidad de hamiltoniano. Mientras esto es realmente una solución valida ahí existe un problema analíticamente. También su controlador es en lazo abierto este sistema no proporciona perturbaciones y defectos. Auernig y Troger básicamente descubrieron un controlador Bang-Bang para la grúa, pero una implementación práctica del controlador Bang-Bang es estrictamente no factible, como esto causa uso excesivos y un deterioro en las partes del mecanismo. Por razones de seguridad un repentino y largo switch en la corriente del motor no es deseable.

Singhose, Porter y Seering [46], propusieron un método de retroalimentación de control llamado input shaping fue solamente usado para minimizar la magnitud del ángulo de oscilación y no para la dirección del control de la longitud de la cuerda o el control de posicionamiento del carro. Básicamente la entrada requiere un comando conocido en la señal que ocasiona una respuesta deseada aproximada para el sistema. El comando de esta orden de señal quizás entonces deje oscilaciones restantes en el ángulo de la cuerda. Si la frecuencia de esta oscilación es conocida, entonces una nueva señal de comando puede ser hecho por la convolución de la señal apropiado con un filtro en cual cancele la frecuencia restante. El impulso que constituye al formar el mas apropiado amplitud y la locación de tiempo a cancelar las oscilaciones restantes. Singhose utilizo técnicas para la entrada formada con filtros del tipo IIR(Respuesta al impulso infinito).

Singhose observo que la frecuencia en el modelado no es exactamente entonces la entrada formada, entonces el método no puede ser completamente factible para cancelar el ángulo de oscilación. Entonces usando una entrada deseada, uno tiene que superar el conocimiento del sistema para generar una señal apropiado. Esto también requiere la posición de la ubicación del impulso en el momento correcto el método a minimizar algún sistema de oscilación. En la simulación claramente es posible, pero en un medio ambiente practico que consiste de ruido y cambiando los parámetros de sistema, este método puede ocasionar una señal de control inútil.

Woods y Clements [51], desarrollaron un método logrando un control no lineal de un sistema para la grúa viajera utilizando la dinámica exacta en la linealización del controlador. Este método básicamente transforma un sistema no lineal dentro de una forma lineal normal,

del cual el controlador lineal es diseñado por medios de la dinámica exacta con técnicas de linealización. Una transformación contraria es entonces realizando en el controlador, tal que esta transformación es una función de los estados del sistema. Este trabajo se compara con un controlador no lineal y lineal que fue diseñado cuando el sistema fue linealizando los puntos de operación. Ellos encontraron que la longitud de la cuerda es variable y además que el controlador puede ser inestable, mientras que el controlador no lineal puede ser estable. Este método también puede ser una solución válida, sin embargo el trabajo no detalla alguna implementación práctica para el controlador, ni la posición del carro y la longitud de la cuerda con el control obtenido. Entonces no hay garantía que el controlador se comporte similar a la simulación cuando se implementa en un medio ambiente donde hay ruido.

Butler [9], propuso un controlador de un modelo adaptable de referencia que utiliza un modelo de descomposición a mejorar un controlador adaptable. El presenta un método que elabora un reducido método del controlador para ambas posiciones del carro y la cancelación de la oscilación. Butler [17], no tiene distribuido el sistema. Esto nos dice que el sistema y el modelo son del mismo orden entonces igualando al modelo perfecto. Butler dice que todos los estados relevantes son medibles o observables. Claramente en la práctica esto siempre no implica que todos los estados del sistema están inmediatamente disponibles.

Boustany y d'Andrea-Novel [2] y [6], describen el modelo y comparan ambos controladores adaptables y no adaptables que se derivan de una aproximación de Lyapunov y de las técnicas de linealización de la dinámica de retroalimentación, donde la adaptación esta en la carga de la masa. Estos muestran que para el caso no adaptable el controlador que se diseña con aproximaciones de Lyapunov nos da una estabilidad sobre el rango de alcance de la masa en la técnica de linealización.

Para el método adaptable ellos muestran que usando la aproximación de Lyapunov para derivar el controlador adaptable no lleva a algún mejoramiento en particular. El cual esperara la aproximación de Lyapunov es muy robusto en las incertidumbres paramétricos. Ellos encontraron que en un control adaptable basados en la linealización dinámica de retroalimentación ocasiona lejanamente una estabilidad en un rango de oscilación en la masa de la carga del controlador no adaptable. Ambos métodos para derivar el control adaptable

provee una estabilidad general, como los controladores no lineales ocasionados, pero estos realmente difícilmente se puede implementar en tiempo real. Una solución práctica completa usando ambos métodos que describen su trabajo en el cual tienen que extenderse a incluir posicionamiento del carro y control en la longitud de la cuerda, en el cual ellos no direccionan. Esto debería notarse que solo en los experimentos los resultados y las consideraciones no prácticas se dan.

Burg [7], llevo acabo la saturación en el control que propuso Teel [48] y [49]. Burg utilizo saturación en el control para minimizar el ángulo de oscilación. El control que diseño no garantiza la magnitud del ángulo de oscilación, pero Burg acepta que si en la entrada forzada en el sistema se puede limitar con una función de saturación, entonces se puede lograr la mínima oscilación. En este trabajo la longitud en la cuerda y el control también se considera. Un aspecto importante que no se nota en este trabajo es que en orden para lograr la mínima oscilación, esto implica que se requiere que se atravesase en un tiempo lentamente. De esta manera utilizando este método de saturación hay un cambio fuera de entre establecer un tiempo y un ángulo de oscilación.

Pieper y Surgenor [39], simularon en tiempo discreto para el sistema del controlador de la grúa. Pieper [39], utilizo una solución cuadrática lineal como una referencia para el controlador representando en tiempo discreto sliding mode, en este trabajo la longitud de la cuerda no fue considerado. El modelo usado por Pieper [39], no es un modelo escala para la grúa real y usa controles neumáticos para la entrada en el carro. Entonces, Pieper y Surgenor tienen que usar un pulso ancho para la modulación y manejar el sistema. Una solución práctica para esta grúa se debería usar el control óptimo, semejante al método en lazo abierto propuesto en [3], o un controlador en retroalimentación en tiempo óptimo de tipo Bang-bang. Estos métodos quizás nos dan menos cambios en la entrada de control y entonces nos reduce el desgaste en el aparato. Con PWM las funciones rápidas de encendido y apagado son aplicados con la fuerza de impulso, esto quizás cause innecesarios cambios en la oscilación, quizás no se manifieste en el diseño de control por métodos de control óptimo.

Yu, Lewis y Huang [31], usan una aproximación perturbación singular para separar la dinámica de la grúa en dos subsistemas. Hay un sistema lento que describe el movimiento

promedio del carro, y el sistema rápido que describe el movimiento de oscilación de la carga mientras el carro esta en movimiento. Ellos usan técnicas LQR para diseñar el controlador para cada de estos dos subsistemas. Estos dos controladores son entonces combinados en una forma única para el controlador de la grúa. El control del sistema lento habilita el carro para posicionarse y seguir el diseño de la trayectoria y el control del sistema rápido habilita la oscilación para minimizar. Yu, Lewis y Huang [31], solo consideran el caso donde la carga de elevación se fija. Entonces, no hay garantía en el desempeño del controlador mientras la altura de la carga comienza a controlarse con un setpoint.

Todos estos métodos discutidos en la revisión de literatura necesita por lo menos uno, si no todas las cinco suposiciones siguientes.

1. Todos los estados son medibles y observables.
2. El sistema de la grúa no se considera (entonces la elevación de la carga se fija).
3. No se implementa en la práctica, la teoría respecto al modelado se documenta.
4. El cambio de cada escalón (paso) son usados para investigar un nuevo setpoint para el carro y la longitud de la cuerda.
5. Los controladores no lineal son derivados de los modelos no lineales del sistema.

Este tesis dar solución para un control satisfactorio mencionados en las deficiencias mostrados anteriormente. Sera haciendo uso de las técnicas de control sliding mode, tecnicas de control con incertidumbres como fricción, oscilacion.



## Capítulo 2

# Modelo matemático de una grúa en tres dimensiones

### 2.1. Introducción

En esta sección se describe la deducción del modelo matemático de la grúa viajera en tres dimensiones donde los modelos son conectados por un término en el cual tienen una magnitud pequeña. El modelo del sistema se puede dividir en tres componentes, el motor y el carro, la dinámica de oscilación y el sistema en la grúa, los tres componentes mencionados mutuamente afectan en cada uno de los componentes.

Una deducción completa del modelo en general se da posteriormente en el próximo capítulo. Observando una respuesta en lazo abierto del modelo completo, se concluye que la representación más exacta del sistema dinámico en tiempo real está dado por la conexión del modelo. El modelo acoplado es hecho para un modelo de la dinámica de la grúa y otro modelo para la oscilación de la dinámica del carro. Estos dos modelos son acoplados por términos que contienen la longitud de la cuerda como parámetros. Donde la longitud de la cuerda que ejerce la oscilación del ángulo a su vez la influencia de la dinámica del carro, la longitud de la cuerda se incluye como un término medido en las derivaciones del carro y de la oscilación en la dinámica.

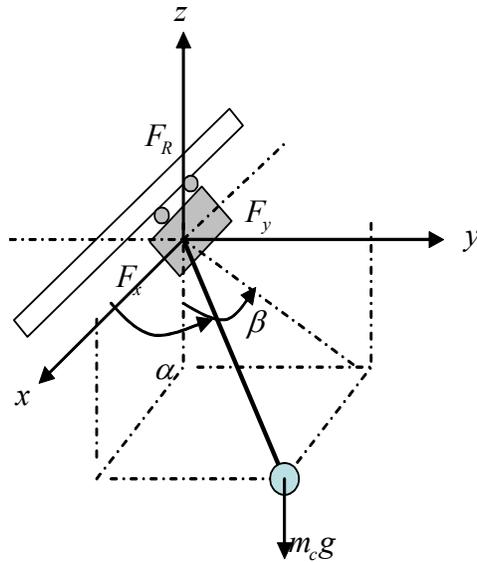


Figura 2.1: Coordenadas de la grúa en tres dimensiones

La grúa en tres dimensiones es un sistema electromecánico, consta de un riel, el carro y finalmente la carga en sentido a la fuerza de gravedad, este sistema se puede modelar a través de las ecuaciones de Newton para describir las coordenadas de la carga, el modelado dinámico se describe gráficamente ver Figura 2.1.

En la Figura 2.1, muestra el diagrama de la grúa en 3 dimensiones con 5 variables de salida.

1.  $x_w$  es la distancia de la barra (riel) con el carro que va del centro del marco a la construcción (no se muestra en la Figura).
2.  $y_w$  es la distancia del carro es decir del centro de la barra.
3.  $R$  es la longitud de la línea de elevación.
4.  $\alpha$  es el ángulo entre la línea de elevación y el eje  $x$ .

5.  $\beta$  es el ángulo entre la dirección negativa en el eje  $z$  y la proyección de la línea de elevación hacia el plano  $yz$ .

Tenemos 3 variables de control en la entrada.

1.  $F_x$  fuerza de impulso de la barra con el carro.
2.  $F_y$  fuerza de impulso del carro a lo largo del riel o barra.
3.  $F_R$  fuerza que controla la longitud de la línea de la barra.

También se denotan los parámetros de la grúa en 3 dimensiones.

- $m_c$  denota la masa de la carga.
- $m_w$  masa del carro.
- $m_s$  masa del movimiento de la barra.
- $x_c, y_c, z_c$  coordenadas de la carga

Incertidumbres.

- $S$  es la fuerza de reacción en la línea de elevación actuando en el carro,  $S_x$ ,  $S_y$  y  $S_z$ , son las fuerzas de la carga en las direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$ .
- $T_x, T_y$  y  $T_R$ , corresponden a las fuerzas de fricción de los movimiento en los ejes  $x$ ,  $y$  y  $R$ . Para la deducción del modelo matemático de la grúa en 3 dimensiones es apropiado cambiar el sistema de coordenadas, es decir en coordenadas cartesianas la interpretación es simple y se determina la posición en el espacio en una única manera en ambas direcciones, mas para nuestros intereses no es apropiado para la descripción del movimiento rotacional dinámico. Sin embargo es apropiado en sistemas esféricos, la posición de la carga se describe por dos ángulos,  $\alpha$  y  $\beta$  como se muestra en la Figura 2.1, se muestra un bosquejo del sistema en coordenadas esféricas es que para cada punto en el eje  $y$ , el correspondiente valor de  $\beta$  no se determina únicamente. Sin embargo los puntos en el eje  $y$  no son obtenidos en un sistema en una grúa real.

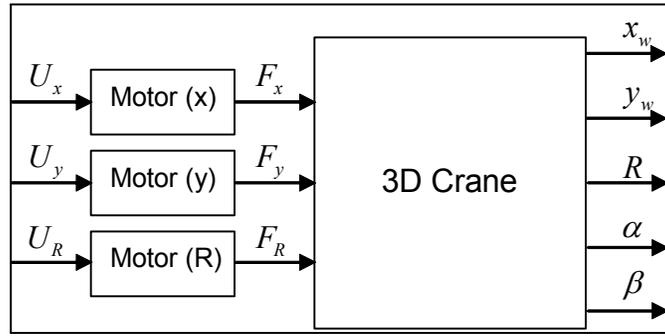


Figura 2.2: Esquema del motor con la grúa

Se consideran las siguientes definiciones para la deducción del modelo matemático en la grúa en 3 dimensiones.

$$\begin{aligned}
 \mu_1 &= \frac{m_c}{m_w}, & \mu_2 &= \frac{m_c}{m_w + m_s}, & s &= \frac{S}{m_c} \\
 u_1 &= \frac{F_y}{m_w}, & u_2 &= \frac{F_x}{m_w + m_c}, & u_3 &= \frac{F_R}{m_c} \\
 T_1 &= \frac{T_y}{m_w}, & T_2 &= \frac{T_x}{m_w + m_c}, & T_3 &= \frac{T_R}{m_c} \\
 N_1 &= u_1 - T_1, & N_2 &= u_2 - T_2, & N_3 &= u_3 - T_3
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

## 2.2. Modelado matemático del motor

Se analizará la dinámica de los motores de Corriente Directa (*cd*) de magneto permanente, que son las más utilizadas como actuadores, los motores de (*cd*) pueden ser clasificados de acuerdo a la forma en la que el campo magnético es producido y por el diseño de la armadura, considere el diagrama de la Figura 2.3. La ecuación diferencial para la corriente de armadura está dada por:

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a = V_{in} - V_{fce} \tag{2.2}$$

La ecuación de la parte mecánica del motor es:

$$J_m \frac{d^2\theta_m}{dt^2} + B_m \frac{d\theta_m}{dt} = \tau - r\tau_l \tag{2.3}$$

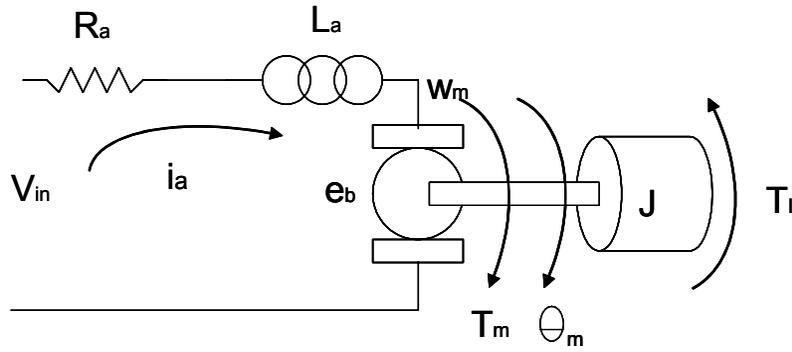


Figura 2.3: Modelo eléctrico-mecánico del motor

El par desarrollado por el motor es:

$$\tau_m = k_m i_a \quad (2.4)$$

Donde la relación de engranes está dado por:

$$\tau = k_g \tau_m \quad (2.5)$$

La fuerza contra electromotriz está dada por:

$$V_{fce} = k_b \omega_m = k_b \frac{d\theta_m}{dt} \quad (2.6)$$

Sustituyendo la ecuación (2.6) en la ecuación (2.2):

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a = V_{in} - k_b \frac{d\theta_m}{dt} \quad (2.7)$$

Sustituyendo la ecuación (2.5) en la ecuación (2.3) y  $\tau_l = 0$ , es decir, no se considera el par de carga y la relación de engranes ecuación (2.5), se obtiene:

$$J_m \frac{d^2\theta_m}{dt^2} + B_m \frac{d\theta_m}{dt} = k_g k_m i_a \quad (2.8)$$

Despejando  $i_a$  de la ecuación (2.7) y haciendo  $L_a = 0$ , debido que la constante de tiempo eléctrica  $\frac{L_a}{R_a}$  es mucho más pequeña que la constante de tiempo mecánica  $\frac{J_m}{B_m}$  lo cuál permite

reducir el orden del modelo en la dinámica del actuador [27], [5].

$$i_a = \frac{(V_{in} - k_b \frac{d\theta_m}{dt})}{R_a} \quad (2.9)$$

Sustituyendo la ecuación (2.9) en la ecuación (2.8):

$$\begin{aligned} J_m \frac{d^2\theta_m}{dt^2} + B_m \frac{d\theta_m}{dt} &= \frac{k_g k_m}{R_a} \left( V_{in} - k_b \frac{d\theta_m}{dt} \right) \\ J_m \frac{d^2\theta_m}{dt^2} + B_m \frac{d\theta_m}{dt} + \frac{k_g k_m k_b}{R_a} \frac{d\theta_m}{dt} &= \frac{k_g k_m}{R_a} V_{in} \\ \frac{R_a}{k_g k_m} \left( J_m \frac{d^2\theta_m}{dt^2} + B_m \frac{d\theta_m}{dt} + \frac{k_g k_m k_b}{R_a} \frac{d\theta_m}{dt} \right) &= V_{in} \\ \left( \frac{R_a J_m}{k_g k_m} \right) \frac{d^2\theta_m}{dt^2} + \left( \frac{R_a B_m}{k_g k_m} + k_b \right) \frac{d\theta_m}{dt} &= V_{in} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Para el modelo del prototipo  $\frac{R_m J}{K_m K_g} = 0.01176$ ,  $\frac{R_m B}{K_m K_g} + K_m = 0.58823$ .

El modelado de un servomotor en (cd) se puede dividir en dos subsistemas la parte eléctrica y la parte mecánica. El sistema eléctrico se basa en las leyes de voltaje de Kirchhoff.

$$U = L_m \dot{I}_m + R_m I_m + K_b \dot{\theta} \quad (2.11)$$

donde  $U$  es el voltaje de entrada,  $I_m$  es la corriente en la armadura,  $R_m$  y  $L_m$  son la resistencia y la inductancia en la armadura,  $K_b$  es la fuerza electromotriz,  $\dot{\theta}$  es la velocidad angular. Comparando a  $R_m I_m$  y  $K_b \dot{\theta}$ , el término  $L_m \dot{I}_m$  es pequeño. El método para simplificar el modelado para el motor en (cd), para omitir el término  $L_m \dot{I}_m$ .

El subsistema mecánico es:

$$\frac{1}{K_g} \left( J_m \ddot{\theta} + B_m \dot{\theta} \right) = \tau_m \quad (2.12)$$

donde  $K_g$  es la relación de engranaje,  $J_m$  es el momento de inercia,  $B_m$  es el coeficiente de fricción viscoso,  $\tau_m$  es el torque producido en el eje del motor. Los subsistemas eléctrico y mecánico son acoplados a través de una ecuación del torque algebraica.

$$\tau_m = K_m I_m \quad (2.13)$$

donde  $K_m$  es el torque constante del motor. Esto implica que no hay backlash o deformación eléctrico en los engranajes, el trabajo realizado por la carga del eje es igual al trabajo realizado por el eje en el motor,  $\tau = \frac{1}{K_g}\tau_m = \tau_m$ , aquí  $\tau$  es la armadura del sistema del balancín de la bola. De esta manera el modelo del motor en (cd) esta expresado.

$$\frac{R_m J_m}{K_m K_g} \ddot{\theta} + \left( K_b + \frac{R_m B_m}{K_m K_g} \right) \dot{\theta} = U \quad (2.14)$$

### 2.3. Modelado matemático de la grúa con el método de Newton

Las siguientes ecuaciones nos describen la posición de la carga en coordenadas esférica como se muestra en la Figura 2.1.

$$\begin{aligned} x_c &= x_w + R \sin \alpha \cos \beta \\ y_c &= y_w + R \sin \beta \\ z_c &= -R \cos \alpha \cos \beta \end{aligned} \quad (2.15)$$

Las ecuaciones dinámicas de la carga satisfacen la Ley de Newton  $\sum F = ma$ , como

$$m_c \ddot{x}_c = -S_x, \quad m_c \ddot{y}_c = -S_y, \quad m_c \ddot{z}_c = -S_z - m_c g \quad (2.16)$$

donde  $S_x$ ,  $S_y$ , y  $S_z$  son componentes del vector  $S$ , tenemos  $S_x = S \sin \alpha \sin \beta$ ,  $S_y = S \cos \alpha$ ,  $S_z = -S \sin \alpha \cos \beta$ . La ecuación para el carro y el riel usando las leyes de Newton son:

$$\begin{aligned} (m_w + m_s) \ddot{x}_w &= F_x - T_x + S_x \\ m_w \ddot{y}_w &= F_y - T_y + S_y \end{aligned} \quad (2.17)$$

Usando la relación de

$$S = F_R - T_R \quad (2.18)$$

la ecuación (2.17), se vuelve

$$\ddot{x}_w = -\frac{T_x}{(m_w + m_s)} + \frac{F_x}{(m_w + m_s)} + \frac{(F_R - T_R) \sin \alpha \sin \beta}{(m_w + m_s)}$$

### Restricción

se da por hecho que la línea de elevación siempre esta extendiéndose, entonces

$$S_x(x_c - x_w) + S_y(y_c - y_w) + S_z z_c > 0 \quad (2.19)$$

sustituyendo las ecuaciones  $S_x = S \sin \alpha \sin \beta$ ,  $S_y = S \cos \alpha$ ,  $S_z = -S \sin \alpha \cos \beta$ . En la ecuación (2.19), de igual manera la ecuación (2.15), en la ecuación anterior tenemos:

$$\begin{aligned} & S_x(x_c - x_w) + S_y(y_c - y_w) + S_z z_c \\ & S \sin \alpha \sin \beta (x_c - x_w) + S \cos \alpha (y_c - y_w) - S \sin \alpha \cos \beta z_c \\ & SR \sin^2 \alpha \sin^2 \beta + SR \cos^2 \alpha + SR \sin^2 \alpha \cos^2 \beta \end{aligned}$$

en el caso donde ahora la carga esta elevada y reducida con el uso de las fuerzas de control  $F_R$ ,  $S$  y las ecuaciones (2.16) a la (2.19) deberían ser reemplazados como sigue simplificando el modelo con tres fuerzas de control tenemos

**Propiedad 2.1** *Para el caso en que la carga es elevada y disminuye con las fuerzas de control  $F_R$ ,  $S$ , entonces nos da lo siguiente:*

$$SR \sin^2 \alpha \sin^2 \beta + SR \cos^2 \alpha + SR \sin^2 \alpha \cos^2 \beta > 0$$

### 2.3.1. Modelo simplificado

Cuando la carga esta en reposo principalmente los ángulos pequeños  $\alpha$  y  $\beta$ . Se acepta que la derivación de la carga en el eje  $z$  es pequeña, entonces:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \cos\left(\frac{\pi}{2} + \Delta\alpha\right) \cong -\Delta\alpha, & \sin \alpha &= \sin\left(\frac{\pi}{2} + \Delta\alpha\right) \cong 1 \\ \cos \beta &\cong 1, & \sin \beta &\cong \Delta\beta \end{aligned} \quad (2.20)$$

entonces las ecuaciones  $S_x = S \sin \alpha \sin \beta$ ,  $S_y = S \cos \alpha$ , quedan nuevamente

$$S_x = S \Delta\beta = (F_R - T_R) \Delta\beta \quad (2.21)$$

de manera que las nuevas ecuaciones

$$\begin{aligned} m_c \ddot{x}_c &= -(F_R - T_R) \Delta\beta \\ \ddot{x}_c &= -\frac{F_R}{m_c} \Delta\beta + \frac{T_R}{m_c} \Delta\beta \end{aligned}$$

Como en la definición de la ecuación (2.1),  $u_3 = \frac{F_R}{m_c}$ ,  $T_3 = \frac{T_R}{m_c}$ , entonces

$$\ddot{x}_c = (-u_3 + T_3) \Delta\beta \quad (2.22)$$

ahora para  $S_y$ ,  $S_y = -S \Delta\alpha = -(F_R - T_R) \Delta\alpha$ ,

$$\ddot{y}_c = (u_3 - T_3) \Delta\alpha \quad (2.23)$$

Finalmente para  $S_z$ ,  $S_z = -S = -(F_R - T_R)$

$$\ddot{z}_c = u_3 - T_3 - g \quad (2.24)$$

De manera similar para el carro y el riel, tenemos

$$\begin{aligned} \ddot{x}_w &= u_2 - T_2 + (u_3 - T_3) \mu_2 \Delta\beta \\ \ddot{y}_w &= u_1 - T_1 + (u_3 - T_3) \mu_2 \Delta\alpha \end{aligned} \quad (2.25)$$

Ahora definimos los estados  $x = [x_1 \cdots x_{10}]^T$  como  $x_1 = y_w$ ,  $x_2 = \dot{x}_1$ ,  $x_3 = x_w$ ,  $x_4 = \dot{x}_3$ ,  $x_5 = \Delta\alpha$ ,  $x_6 = \dot{x}_5$ ,  $x_7 = \Delta\beta$ ,  $x_8 = \dot{x}_7$ ,  $x_9 = R$ ,  $x_{10} = \dot{x}_9$ .

De la ecuación (2.25), y la ecuación (2.1), llevando al final y simplificando el sistema en las ecuaciones de estado para la grúa en 3 dimensiones tenemos:

$$\dot{x} = f(x, U) \quad (2.26)$$

donde  $U = [N_1, N_2, N_3]^T$

$$f(x, U) = \begin{bmatrix} x_2, N_1 - \mu_1 x_5 N_3, x_4, N_2 + \mu_2 x_7 N_3, x_6 \\ -\frac{(N_1 - \mu_1 x_5 N_3 - g x_5 - 2x_6 x_{10})}{x_9}, x_8, \frac{(N_2 + \mu_2 x_7 N_3 + g x_7 + 2x_8 x_{10})}{x_9}, x_{10}, -N_3 + g \end{bmatrix}^T$$

El resultado de la simplificación propuesta en separación parciales de las ecuaciones de la grúa. Las ecuaciones que describen el movimiento de la grúa a lo largo del eje  $y$  es para

las ecuaciones  $x_1, x_2, x_5, x_6$  no están unidas con las ecuaciones para las variables  $x_3, x_4, x_7, x_8$ , estas ecuaciones describen el movimiento a lo largo del eje  $x$ . La grúa puede ser entonces tratado como dos subsistemas independientes, esta separación es parcial, como ambos subsistemas dependen de  $x_9$  es decir debido a la longitud de la línea en la barra  $R$ . Una separación completa sería si toma el lugar de la variable  $x_9 = R = \text{constante}$  y separamos  $T_x, T_y$ . Como observamos la grúa siempre es controlada de tal manera que la oscilación de la carga es omitido, y por esta razón la derivación de los ángulos son pequeños, entonces el modelo simplificado es entonces el adecuado.

### 2.3.2. Modelo completo

#### Con dos fuerzas de control

Ahora derivamos las ecuaciones sin las simplificaciones de las ecuaciones (2.16), pero implicando que la longitud de la línea de elevación  $R$  es constante y no hay fuerza de control  $F_R$ . Se obtiene

$$\begin{aligned}\ddot{x}_c &= -S \sin \alpha \sin \beta \\ \ddot{y}_c &= -S \cos \alpha \\ \ddot{z}_c &= S \sin \alpha \sin \beta - g\end{aligned}\tag{2.27}$$

De la ecuación (2.17),

$$\begin{aligned}\ddot{x}_w &= u_2 - T_2 + S\mu_2 \sin \alpha \sin \beta \\ \ddot{y}_w &= u_1 - T_1 + S\mu_1 \cos \alpha\end{aligned}\tag{2.28}$$

de las ecuaciones (2.27) y (2.28),

$$\begin{aligned}\ddot{x}_c &= \ddot{x}_w + R \left[ \ddot{\alpha} \cos \alpha \cos \beta + \ddot{\beta} \sin \alpha \cos \beta - \left( \dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2 \right) \sin \alpha \sin \beta + 2\dot{\alpha}\dot{\beta} \cos \alpha \cos \beta \right] \\ \ddot{y}_c &= \ddot{y}_w - R \left( \ddot{\alpha} \sin \alpha + \dot{\alpha}^2 \cos \alpha \right) \\ \ddot{z}_c &= -R \left[ \ddot{\alpha} \cos \alpha \cos \beta - \ddot{\beta} \sin \alpha \sin \beta - \left( \dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2 \right) \sin \alpha \cos \beta - 2\dot{\alpha}\dot{\beta} \cos \alpha \sin \beta \right]\end{aligned}\tag{2.29}$$

después de eliminar la  $S$ , que es de la sustitución en la ecuación  $S = -\frac{\ddot{y}_c}{\cos \alpha}$ , obtenemos cuatro ecuaciones:

$$\begin{aligned}\ddot{x}_c &= \ddot{y}_c \tan \alpha \sin \beta \\ \ddot{z}_c &= -\ddot{y}_c \tan \alpha \cos \beta - g \\ \ddot{x}_w &= u_2 - T_2 - \mu_2 \ddot{y}_c \tan \alpha \sin \beta \\ \ddot{y}_w &= u_1 - T_1 - \mu_1 \ddot{y}_c\end{aligned}\tag{2.30}$$

utilizando las ecuaciones (2.29) en (2.30), llegamos a un sistemas de cuatro ecuaciones con cuatro variables desconocidas  $\ddot{x}_w$ ,  $\ddot{y}_w$ ,  $\ddot{\alpha}$  y  $\ddot{\beta}$ . La solución de este sistema con respecto a sus segundas derivadas e introduciendo nuevas variables dadas al final de la descripción en forma de ecuaciones de estado no lineales. Introducimos las notaciones.

Ahora definimos los estados como  $x = [x_1, \dots, x_{10}]^T$ ,  $x_1 = y_w$ ,  $x_2 = \dot{x}_1$ ,  $x_3 = x_w$ ,  $x_4 = \dot{x}_3$ ,  $x_5 = \alpha$ ,  $x_6 = \dot{x}_5$ ,  $x_7 = \beta$ ,  $x_8 = \dot{x}_7$ ,  $x_9 = R$ ,  $x_{10} = \dot{x}_9$ ,  $s_n \equiv \sin x_n$ ,  $c_n = \cos x_n$ ,  $A = 1 + \mu_1 c_5^2 + \mu_2 s_5^2 s_7^2$ ,  $B = 1 + \mu_1$ ,

$$\begin{aligned}V_1 &= \mu_1 R c_5 (x_6^2 + s_5^2 x_8^2) + \mu_1 g c_5 s_5 c_7 \\ V_2 &= \mu_2 R s_7 (s_5^3 x_8^2 + s_5 x_6^2) + \mu_2 g s_5^2 s_7 c_7 \\ V_3 &= B g c_5 c_7 + B R c_5 s_5 x_8^2 + (\mu_1 - \mu_2 s_7^2) R c_5 s_5 x_6^2 \\ V_4 &= \mu_2 R s_5 s_7 c_7 (x_6^2 + s_5^2 x_8^2) + (B + (\mu_2 - \mu_1) s_5^2) g s_7 + 2 R A c_5 x_6 x_8\end{aligned}\tag{2.31}$$

De la ecuación (2.25) y la definición (2.1), llevando al final y simplificando el sistema en las ecuaciones de estado para la grúa en 3 dimensiones.

$$\dot{x} = f(x, U)$$

donde  $U = [N_1, N_2, N_3]^T$

$$f(x, U) = \left[ \begin{array}{c} x_2, \frac{(1 + \mu_2 s_5^2 s_7^2) N_1 - \mu_1 c_5 s_5 x_7 N_2 + V_1}{A}, x_4, \frac{(-\mu_2 c_5 s_5 s_7 N_1 + (1 + \mu_1 c_5^2) N_2 + V_2)}{A}, x_6 \\ \frac{((1 + \mu_2 s_7^2) s_5 N_1 - B c_5 s_7 N_2 + V_3)}{R A}, x_8, \frac{(\mu_2 c_5 s_5 c_7 s_7 N_1 - (B - \mu_1 s_5^2) c_7 N_2)}{R A s_5}, x_{10}, -N_3 + g \end{array} \right]^T$$

finalmente, se obtienen ocho ecuaciones que describen la dinámica de la grúa con longitud constante del péndulo. Las expresiones  $A$ ,  $R$  y  $\sin x_5$ , son mayores que cero, por lo tanto el modelo esta libre de singularidades.

### Con tres fuerzas de control

Para derivar las ecuaciones de la grúa sin considerar las simplificaciones hechas en la ecuación (2.20) y las ecuaciones  $S_x = S \sin \alpha \sin \beta$ ,  $S_z = -S \sin \alpha \cos \beta$ , sustituyendo en las ecuaciones (2.16) a la (2.17) tenemos:

$$\begin{aligned}
 \ddot{x}_c &= -(u_3 - T_3) \sin \alpha \sin \beta \\
 \ddot{y}_c &= -(u_3 - T_3) \cos \alpha \\
 \ddot{z}_c &= (u_3 - T_3) \sin \alpha \cos \beta - g \\
 \ddot{x}_w &= u_2 - T_2 + \mu_2 (u_3 - T_3) \sin \alpha \sin \beta \\
 \ddot{y}_w &= u_1 - T_1 + \mu_1 (u_3 - T_3) \cos \alpha
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

la ecuación (2.15), son diferenciadas dos veces considerando que la longitud de la línea izquierda  $R(t)$ , varia en el tiempo debido a la acción de la fuerza de control  $F_R$ .

$$\begin{aligned}
 \ddot{x}_c &= \ddot{x}_w + \left( \ddot{R} - R\dot{\alpha}^2 - R\dot{\beta}^2 \right) \sin \alpha \sin \beta + 2\dot{\alpha}\dot{\beta} \cos \alpha \cos \beta + \left( 2\dot{R}\dot{\alpha} + R\ddot{\alpha} \right) \cos \alpha \sin \beta \\
 &\quad + \left( 2\dot{R}\dot{\beta} + R\ddot{\beta} \right) \sin \alpha \cos \beta. \\
 \ddot{y}_c &= \ddot{y}_w + \left( \ddot{R} - R\dot{\alpha}^2 \right) \cos \alpha - \left( 2\dot{R}\dot{\alpha} + R\ddot{\alpha} \right) \sin \alpha. \\
 \ddot{z}_c &= \left( -\ddot{R} + R\dot{\alpha}^2 + R\dot{\beta}^2 \right) \sin \alpha \cos \beta + 2R\dot{\alpha}\dot{\beta} \cos \alpha \sin \beta - \left( 2\dot{R}\dot{\alpha} + R\ddot{\alpha} \right) \cos \alpha \cos \beta \\
 &\quad + \left( 2\dot{R}\dot{\beta} + R\ddot{\beta} \right) \sin \alpha \sin \beta.
 \end{aligned}$$

Ahora definimos los estados como  $x = [x_1 \cdots x_{10}]^T$ ,  $x_1 = y_w$ ,  $x_2 = \dot{x}_1$ ,  $x_3 = x_w$ ,  $x_4 = \dot{x}_3$ ,  $x_5 = \alpha$ ,  $x_6 = \dot{x}_5$ ,  $x_7 = \beta$ ,  $x_8 = \dot{x}_7$ ,  $x_9 = R$ ,  $x_{10} = \dot{x}_9$ ,  $s_n \equiv \sin x_n$ ,  $c_n = \cos x_n$ ,  $A = 1 + \mu_1 c_5^2 + \mu_2 s_5^2 s_7^2$ ,  $B = 1 + \mu_1$ ,

$$\begin{aligned}
 V_1 &= \mu_1 R c_5 (x_6^2 + s_5^2 x_8^2) + \mu_1 g c_5 s_5 c_7 \\
 V_2 &= \mu_2 R s_7 (s_5^3 x_8^2 + s_5 x_6^2) + \mu_2 g s_5^2 s_7 c_7 \\
 V_3 &= B g c_5 c_7 + B R c_5 s_5 x_8^2 + (\mu_1 - \mu_2 s_7^2) R c_5 s_5 x_6^2 \\
 V_4 &= \mu_2 R s_5 s_7 c_7 (x_6^2 + s_5^2 x_8^2) + (B + (\mu_2 - \mu_1) s_5^2) g s_7 + 2 R A c_5 x_6 x_8 \\
 V_5 &= c_5 s_5 x_8^2 x_9 - 2 x_{10} x_6 + g c_5 c_7 \\
 V_6 &= 2 x_8 (c_5 x_6 x_9 + s_5 x_{10}) + g s_5 \\
 V_7 &= x_5^2 x_8^2 x_9 + g s_5 c_7 + x_6^2 x_9
 \end{aligned}$$

De la ecuación (2.25), y la definición (2.1). Llevando al final y simplificando el sistema en las ecuaciones de estado para la grúa en 3 dimensiones

$$\dot{x} = f(x, U)$$

donde  $U = [N_1, N_2, N_3]^T$

$$f(x, U) = \begin{bmatrix} x_2, N_1 + \mu_1 c_5 N_3, x_4, N_2 + \mu_2 s_5 x_7 N_3, x_6, \frac{(s_5 N_1 - c_5 s_7 N_2 + (\mu_1 - \mu_2 s_7^2) c_5 s_5 N_3 + V_5)}{x_9}, \\ x_8, \frac{-(c_7 N_2 + \mu_2 s_5 c_7 s_7 N_3 + V_6)}{s_5 x_9}, x_{10}, -c_5 N_1 - s_5 s_7 N_2 - (1 + \mu c_5^2 + \mu_2 s_5^2 s_7^2) N_3 + V_7 \end{bmatrix}^T$$

## 2.4. Modelado matemático de la grúa utilizando el método de Lagrange

Para derivar el modelo del sistema se usa la dinámica de Lagrangiano y técnicas de modelado electromecánico. Las ecuaciones de Lagrange proporcionan un significado para determinar las ecuaciones de movimiento para sistemas conservativos y no conservativos. De donde se asume que el sistema no pierde energía conservativa aproximándose en la deducción de las ecuaciones de Lagrange. La ecuación matemática para determinar el sistema dinámico usando ecuaciones de Lagrange es:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] - \left[ \frac{\partial L}{\partial q_i} \right] = F_i$$

para  $i = 1, 2, \dots, n$

donde

$i$  = número de grado de libertad.

$F_i$  = fuerza neta actuando en dirección de  $q$ .

$q_i$  = conjunto de coordenadas generalizadas, donde  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ .

$L$  = Sistema Lagrangiano el cual esta compuesto por la energía cinética y energía potencial

El sistema Lagrangiano es dado por:

$$L = K - U$$

de donde

$K$  = Energía total cinética del sistema.

$U$  = Energía total potencial del sistema.

ya que  $U$  no es una función de  $\dot{q}_i$ ,  $L = L(\dot{q}_i, q_i, t)$  y  $U = U(q_i, t)$ .

La dinámica de la grúa se obtienen por el método de Lagrange. La energía cinética del sistema es

$$K = K_1 + K_2 + K_3$$

donde la energía cinética del riel es  $K_1 = \frac{M_r V_{M_r}^2}{2}$  (donde  $x_r = 0$ ,  $y_r = y$ ,  $z_r = 0$ ), la energía cinética del móvil es  $K_2 = \frac{M_m V_{M_m}^2}{2}$  (donde  $x_m = x$ ,  $y_m = 0$ ,  $z_m = 0$ ), la energía cinética de la carga es  $K_3 = \frac{M_c V_{M_c}^2}{2}$ . Las velocidades proyectadas en cada uno de los ejes de la primera masa son  $V_{M_r} = \dot{y}_w$ ,  $V_{M_m} = \dot{x}_w$ . Además  $K_1 = \frac{1}{2} M_r \dot{y}^2$ ,  $K_2 = \frac{1}{2} M_m \dot{x}^2$ . Para la masa de la carga  $V_{M_c}^2 = V_{M_{xc}}^2 + V_{M_{yc}}^2 + V_{M_{zc}}^2$ . Derivando la ecuación (2.15), que nos describe el sistema de la grúa en tres dimensiones, tenemos que la primera derivada con respecto a la coordenada de la carga en la grúa.

$$\begin{aligned}\dot{x}_c &= \dot{x}_w - R \sin \alpha \sin \beta \dot{\beta} + R \cos \alpha \dot{\alpha} \cos \beta \\ \dot{y}_c &= \dot{y}_w + R \cos \beta \dot{\beta} \\ \dot{z}_c &= R \cos \alpha \sin \beta \dot{\beta} + R \cos \beta \sin \alpha \dot{\alpha}\end{aligned}\tag{2.33}$$

por eso tenemos

$$\begin{aligned}V_{M_c}^2 &= \left( \dot{x}_w - R \sin \alpha \sin \beta \dot{\beta} + R \cos \alpha \dot{\alpha} \cos \beta \right)^2 + \left( \dot{y}_w + R \cos \beta \dot{\beta} \right)^2 \\ &\quad + \left( R \cos \alpha \sin \beta \dot{\beta} + R \cos \beta \sin \alpha \dot{\alpha} \right)^2\end{aligned}\tag{2.34}$$

sustituyendo  $V_{M_c}^2$

$$\begin{aligned}K_3 &= \frac{1}{2} M_c \left[ \dot{x}_w^2 + R^2 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \dot{\beta}^2 + R^2 \cos^2 \alpha \dot{\alpha}^2 \cos^2 \beta - 2 \dot{x}_w R \sin \alpha \sin \beta \dot{\beta} \right. \\ &\quad + 2 \dot{x}_w R \cos \alpha \dot{\alpha} \cos \beta - 2 R^2 \sin \alpha \sin \beta \dot{\beta} \cos \beta \cos \alpha \dot{\alpha} + \dot{y}_w^2 + 2 \dot{y}_w R \cos \beta \dot{\beta} \\ &\quad + R^2 \cos^2 \beta \dot{\beta}^2 + R^2 \cos^2 \alpha \sin^2 \beta \dot{\beta}^2 + 2 R \cos \alpha \sin \beta \dot{\beta} \cos \beta \sin \alpha \dot{\alpha} \\ &\quad \left. + R^2 \sin^2 \alpha \dot{\alpha}^2 \cos^2 \beta \right]\end{aligned}$$

finalmente tenemos que

$$\begin{aligned}
K = & \frac{1}{2}M_c \left[ \dot{x}_w^2 + R^2 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \dot{\beta}^2 + R^2 \cos^2 \alpha \dot{\alpha}^2 \cos^2 \beta - 2\dot{x}_w R \sin \alpha \sin \beta \dot{\beta} \right. \\
& + 2\dot{x}_w R \cos \alpha \dot{\alpha} \cos \beta - 2R^2 \sin \alpha \sin \beta \dot{\beta} \cos \beta \cos \alpha \dot{\alpha} + \dot{y}_w^2 + 2\dot{y}_w R \cos \beta \dot{\beta} \\
& + R^2 \cos^2 \beta \dot{\beta}^2 + R^2 \cos^2 \alpha \sin^2 \beta \dot{\beta}^2 + 2R \cos \alpha \sin \beta \dot{\beta} \cos \beta \sin \alpha \dot{\alpha} \\
& \left. + R^2 \sin^2 \alpha \dot{\alpha}^2 \cos^2 \beta \right] + K_1 + K_2
\end{aligned}$$

La energía potencial

$$V = V_1 + V_2 + V_3 \quad (2.35)$$

donde  $V_1, V_2, V_3$  son la energía potencial del riel, carro y la carga, para la grúa  $V_1 = 0, V_2 = 0,$

$$V_3 = mgR(1 - \cos \alpha \cos \beta)$$

por lo que el Lagrangiano esta definido como

$$L = K - U$$

Entonces tenemos  $L$  de la ecuación de la grúa en tres dimensiones.

$$\begin{aligned}
L = & \frac{1}{2}M_r \dot{y}_m + \frac{1}{2}M_m \dot{x}_m + \frac{1}{2}M_c \left[ \dot{x}_w^2 + R^2 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \dot{\beta}^2 + R^2 \cos^2 \alpha \dot{\alpha}^2 \cos^2 \beta - 2\dot{x}_w R \sin \alpha \right. \\
& \sin \beta \dot{\beta} + 2\dot{x}_w R \cos \alpha \dot{\alpha} \cos \beta + \dot{y}_w^2 + 2\dot{y}_w R \cos \beta \dot{\beta} + R^2 \cos^2 \beta \dot{\beta}^2 + R^2 \cos^2 \alpha \sin^2 \beta \dot{\beta}^2 \\
& \left. + R^2 \sin^2 \alpha \dot{\alpha}^2 \cos^2 \beta \right] - mgR(1 - \cos \alpha \cos \beta)
\end{aligned}$$

Para la masa de la carga, las ecuaciones de poisson son derivadas usando las ecuaciones de Euler-Lagrange,  $R$  es fijo,  $F_x, F_y$  y  $F_R$  son fuerzas de control que actúan en el carro y riel de

la grúa.  $T_x, T_y$  y  $T_R$  son fricciones.

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} \right] - \frac{\partial L}{\partial \alpha} = 0 \quad (2.36)$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}} \right] - \frac{\partial L}{\partial \beta} = 0 \quad (2.37)$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_w} \right] - \frac{\partial L}{\partial x_w} = F_x - T_x \quad (2.38)$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_w} \right] - \frac{\partial L}{\partial y_w} = F_y - T_y \quad (2.39)$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{R}} \right] - \frac{\partial L}{\partial R} = F_R - T_R \quad (2.40)$$

La derivada con respecto a  $\alpha, \beta, x_w, y_w, R, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{x}_w, \dot{y}_w$  y finalmente  $\dot{R}$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \alpha} &= \frac{1}{2} M_c \left[ 2R^2 \sin \alpha \cos \alpha \sin^2 \beta \dot{\beta}^2 - 2R^2 \sin \alpha \cos \alpha \dot{\alpha}^2 \cos^2 \beta - 2\dot{x}_w \dot{\beta} R \cos \alpha \sin \beta - 2\dot{x}_w R \right. \\ &\quad \left. \dot{\alpha} \sin \alpha \cos \beta - 2R^2 \sin \alpha \cos \alpha \sin^2 \beta \dot{\beta}^2 + 2R^2 \sin \alpha \cos \alpha \dot{\alpha}^2 \cos^2 \beta \right] - mgR \sin \alpha \cos \beta \\ &= M_c \left[ R\dot{x}_w \left( -\sin \alpha \cos \beta \dot{\alpha} - \cos \alpha \sin \beta \dot{\beta} \right) \right] - mgR \sin \alpha \cos \beta \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} &= \frac{1}{2} M_c \left[ 2R^2 \cos^2 \alpha \dot{\alpha} \cos^2 \beta + 2\dot{x}_w R \cos \alpha \cos \beta + 2R^2 \sin^2 \alpha \dot{\alpha} \cos^2 \beta \right] \\ &= M_c R^2 \dot{\alpha} \cos^2 \beta + M_c \dot{x}_w R \cos \alpha \cos \beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \beta} &= \frac{1}{2}M_c \left[ 2R^2 \sin^2 \alpha \sin \beta \cos \beta \dot{\beta}^2 - 2R^2 \dot{\alpha}^2 \cos^2 \alpha \cos \beta \sin \beta - 2\dot{x}_w R \sin \alpha \cos \beta \dot{\beta} - 2\dot{x}_w R \right. \\
&\quad \left. \cos \alpha \dot{\alpha} \sin \beta + 2R^2 \cos \beta \dot{\beta}^2 \sin \beta + 2R^2 \cos^2 \alpha \sin \beta \dot{\beta}^2 \cos \beta - 2R^2 \sin^2 \alpha \dot{\alpha}^2 \cos \beta \sin \beta \right] \\
&\quad - mgR \sin \alpha \cos \beta \\
&= \frac{1}{2}M_c \left[ 2R^2 \sin \beta \cos \beta \left( \sin^2 \alpha \dot{\beta}^2 - \cos^2 \alpha \dot{\alpha}^2 - \dot{\beta}^2 + \cos^2 \alpha \dot{\beta}^2 - \sin^2 \alpha \dot{\alpha}^2 \right) \right] \\
&\quad - mgR \sin \alpha \cos \beta \\
&= \frac{1}{2}M_c \left[ 2R^2 \sin \beta \cos \beta \dot{\beta}^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) - 2R^2 \sin \beta \cos \beta \dot{\alpha}^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \right. \\
&\quad \left. + 2R^2 \sin \beta \cos \beta (-\dot{\beta}^2) \right] - mgR \sin \alpha \cos \beta \\
&= \frac{1}{2}M_c \left[ -2R^2 \sin \beta \cos \beta \dot{\alpha}^2 \right] - mgR \cos \alpha \sin \beta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial R} &= \frac{1}{2}M_c \left[ 2R \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \dot{\beta}^2 + 2R \cos^2 \alpha \dot{\alpha}^2 \cos^2 \beta - 2\dot{x}_w \sin \alpha \sin \beta \dot{\beta} + 2\dot{x}_w \cos \alpha \dot{\alpha} \cos \beta \right. \\
&\quad \left. + 2\dot{y}_w \cos \beta \dot{\beta} + 2R \cos^2 \beta \dot{\beta}^2 + 2R \cos^2 \alpha \sin^2 \beta \dot{\beta}^2 + 2R \sin^2 \alpha \dot{\alpha}^2 \cos^2 \beta \right] \\
&\quad - mg(1 - \cos \alpha \cos \beta)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_w} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_w} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{R}} = 0$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}} &= \frac{1}{2}M_c \left[ 2R^2 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \dot{\beta} - 2\dot{x}_w R \sin \alpha \sin \beta + 2\dot{y}_w R \cos \beta + 2R^2 \cos^2 \beta \dot{\beta} \right. \\
&\quad \left. + 2R^2 \cos^2 \alpha \sin^2 \beta \dot{\beta} \right]
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_w} = M_m \dot{x}_w + M_c \left[ \dot{x}_w - R \sin \alpha \sin \beta \dot{\beta} + R \cos \alpha \dot{\alpha} \cos \beta \right]$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_w} = M_r \dot{y}_w + M_c \left[ \dot{y}_w + R \cos \beta \dot{\beta} \right]$$

Finalmente tenemos que las ecuaciones de Lagrange (2.36 - 2.40) quedan expresadas de la

manera siguiente:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{2}M_c \left[ 2R^2 \left( \cos^2 \alpha \cos^2 \beta \ddot{\alpha} + 2 \cos^2 \alpha \dot{\alpha} \cos \beta \sin \beta \dot{\beta} + 2 \cos^2 \beta \dot{\alpha}^2 \cos \alpha \sin \alpha \right) \right. \\
&\quad \left. + 2\dot{x}_w R \left( -\cos \alpha \sin \beta \dot{\beta} - \cos \beta \sin \alpha \dot{\alpha} \right) + 2R^2 \left( -2 \sin^2 \alpha \dot{\alpha} \cos \beta \sin \beta \dot{\beta} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \beta \ddot{\alpha} \cos^2 \beta \sin \alpha \cos \alpha \dot{\alpha}^2 \right) \right] - 2R\dot{x}_w \left( -\cos \beta \sin \alpha \dot{\alpha} - \cos \alpha \sin \beta \dot{\beta} \right) \\
&\quad + MgR \sin \alpha \cos \beta \\
0 &= \frac{1}{2}M_c \left[ 2R^2 \ddot{\beta} - 2R \left( \dot{x}_w \sin \alpha \cos \beta \dot{\beta} + \dot{x}_w \sin \beta \cos \alpha \dot{\alpha} + \sin \alpha \sin \beta \ddot{x}_w \right) \right. \\
&\quad \left. + 2R \left( \cos \beta \ddot{y}_w - \dot{y}_w \sin \beta \dot{\beta} \right) \right] - \frac{1}{2}M_c \left[ -2R^2 \sin \beta \cos \beta \dot{\alpha}^2 \right] - mgR \cos \alpha \sin \beta \\
F_x - T_x &= M_m \ddot{x}_w + M_c \left[ \ddot{x}_w - R \ddot{\beta} (\sin \alpha \sin \beta) - R \dot{\beta}^2 (\sin \alpha \cos \beta) + R \cos \alpha \cos \beta \ddot{\alpha} \right. \\
&\quad \left. - \cos \beta \sin \alpha \dot{\alpha}^2 \right] \\
F_y - T_y &= M_r \ddot{y}_w + M_c \left( \ddot{y}_w + R \cos \beta \ddot{\beta} - \sin \beta \dot{\beta}^2 \right) \\
F_R - T_R &= -M_c \left[ R \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \dot{\beta}^2 + R \cos^2 \alpha \dot{\alpha}^2 \cos^2 \beta - \dot{x}_w \sin \alpha \sin \beta \dot{\beta} + \dot{x}_w \cos \alpha \dot{\alpha} \cos \beta \right. \\
&\quad \left. \dot{y}_w \cos \beta \dot{\beta} + R \cos^2 \beta \dot{\beta}^2 + R \cos^2 \alpha \sin^2 \beta \dot{\beta}^2 + R \sin^2 \alpha \cos^2 \beta \dot{\alpha}^2 \right] \\
&\quad + mg (1 - \cos \alpha \cos \beta)
\end{aligned}$$

por lo cual podemos ver que la dinámica del sistema esta dado por las ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales implícitas siguientes:

La posición de la carga se describe por las igualdades

$$\begin{aligned}
x_c &= x_w + R \sin \alpha \cos \beta \\
y_c &= y_w + R \sin \beta \\
z_c &= -R \cos \alpha \cos \beta
\end{aligned} \tag{2.41}$$

$x(t) \in R$ , denota la posición de la grúa a lo largo del eje  $x$ .

$y(t) \in R$ , denota la posición de la grúa a lo largo del eje  $y$ .

$\alpha \in R$ .

El modelo matemático dinámico para una grúa en tres dimensiones debe tener la siguiente

ecuación:

$$M(q)\ddot{q} + V_m(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = u \quad (2.42)$$

donde  $q(t) \in R^5$ .

$$q = [x, y, \alpha, \beta, R]^T \quad (2.43)$$

donde  $x(t) \in R^1$ , denota la posición de la grúa en la coordenada del eje  $x$ ,  $y(t) \in R^1$  nos denota la posición de la grúa en la coordenada del eje  $y$ .

$$u = [F_x, F_y, 0, 0, R]^T \quad (2.44)$$

$$M(q) \in R^{5 \times 5} \quad (2.45)$$

$$V_m(q, \dot{q}) \in R^{5 \times 5} \quad (2.46)$$

$G(q) \in R^5$ , representa la fuerza de coriolis y la fuerza centrípeta.

La dinámica del sistema puede ser representada de la manera estandar siguiente:

$$M(q)\ddot{q} + V_m(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = u \quad (2.47)$$

donde  $M(q) = \{m_{ij}\}$  se define como la matriz de Inercia

$V_m(q, \dot{q}) = \{c_i\}$  matriz de coriolis

$G(q) = \{g_i\}$  vector de fuerzas Gravitacionales

por lo que tenemos:

$$q = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \alpha \\ \beta \\ R \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

$$M(q) = \begin{bmatrix} (M_m + M_c + M_r) & 0 & M_c R \cos \alpha \cos \beta & M_c R \sin \alpha \sin \beta \\ 0 & M_m + M_c & M_c R \cos \alpha \cos \beta & -M_c R \sin \alpha \sin \beta \\ M_c R \cos \alpha \sin \beta & M_c R \cos \alpha \cos \beta & M_c R^2 + I & 0 \\ M_c R \sin \alpha \cos \beta & -M_c R \sin \alpha \sin \beta & 0 & M_c R \sin^2 \beta + M_c R^2 \cos^2 \beta \\ M_c \sin \alpha \cos \beta & M_c \sin \beta & 0 & 0 \\ M_m \sin \alpha \cos \beta \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ M_c + M_r \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

$$\quad (2.50)$$

si  $V = V_m(q, \dot{q})$

$$V = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -2McR \cos \alpha \sin \beta \dot{\beta} & 0 \\ 0 & 0 \\ Mc \dot{\beta} \sin \alpha \sin \beta - Mc \dot{\alpha} \cos \alpha \cos \beta & -Mc \dot{\beta} \cos \beta \\ 2R \cos \beta \sin \alpha \dot{\alpha} + 4R \cos \alpha \sin \beta \dot{\beta} & 4R \sin \beta \cos \alpha \dot{\alpha} + 2R \sin \alpha \cos \beta & 0 \\ 0 & R \sin \beta & 0 \\ -2McR^2 \sin \beta \cos \beta \dot{\beta} & -2McR^2 \sin \beta \cos \beta \dot{\alpha} - 2McR \dot{x}_w \cos \alpha \sin \beta & 0 \\ McR^2 \sin \beta \cos \beta \dot{\alpha} & 2McR \sin \beta \cos \beta \dot{\beta} - 2McR^2 \sin \beta \cos \beta \dot{\beta} & 0 \\ -McR \cos^2 \beta \dot{\alpha} & -McR \dot{\beta} + Mc \dot{x}_w \sin \alpha \sin \beta - Mc \dot{y}_w \cos \beta & 0 \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

Ahora si  $s_1 = \sin \alpha$ ,  $s_2 = \sin \beta$ ,  $c_1 = \cos \alpha$ ,  $c_2 = \cos \beta$ .

$$V = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2Rc_2s_1\dot{\alpha} + 4Rc_1s_2\dot{\beta} \\ 0 & 0 & 0 \\ -2McRc_1s_2\dot{\beta} & 0 & -2McR^2c_2s_2\dot{\beta} \\ 0 & 0 & McR^2c_2s_2\dot{\alpha} \\ Mc\dot{\beta}s_2s_1 - Mc\dot{\alpha}c_1c_2 & -Mc\dot{\beta}\cos\beta & -McRc_2^2\dot{\alpha} \\ 4Rc_1s_2\dot{\alpha} + 2Rc_2s_1 & 0 & \\ Rs_2 & 0 & \\ -2McR^2c_2s_2\dot{\alpha} - 2McR\dot{x}_w c_1s_2 & 0 & \\ 2McRc_2s_2\dot{\beta} - 2McR^2c_2s_2\dot{\beta} & 0 & \\ -McR\dot{\beta} + Mc\dot{x}_w s_2s_1 - Mc\dot{y}_w c_2 & 0 & \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

$$G(q) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & Mg \sin \alpha \cos \beta & Mg \cos \alpha \sin \beta & 0 \end{bmatrix}^T \quad (2.53)$$

$$G(q) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & RM_c g s_1 c_2 & RM_c g c_1 s_2 & RM_c g c_1 c_2 \end{bmatrix}^T$$

$$u = \begin{bmatrix} F_x - T_x & F_y - T_y & F_R - T_R & 0 \end{bmatrix}^T \quad (2.54)$$

donde  $M_m$ ,  $M_c$ ,  $M_r \in R^1$  representan la masa de la carga, masa del riel y la masa del carro,  $I \in R^1$ , nos denota el momento de inercia de la carga,  $R \in R^1$ , nos representa la longitud de la grúa,  $g \in R^1$ , nos representa la fuerza de gravedad,  $F_x, F_y \in R^1$ , nos denota las entradas de la fuerza de control actuando en el carro y el riel.

Nótese que  $M(q)$ , es una matriz simétrica y positiva definida, siendo los parámetros  $M_m$ ,  $M_c$ ,  $M_r$ , positivos y el determinante de  $M(q)$  es entonces

$$\det [M(q)] = (Mm + Mc + Mr) (Mm + Mc) (McR^2 + I) (McR^2 \sin^2 \alpha + I) > 0$$

**Propiedad 2.2** Para expresar el sistema en lazo abierto multiplicamos la ecuación (2.42), por  $M^{-1}(q)$ , y obtenemos la siguiente ecuación

$$\ddot{q} = M^{-1}(u - Vm\dot{q} - G) \quad (2.55)$$

donde  $M^{-1}(q) \in R^{5 \times 5}$ , esta nos garantiza la existencia de que el determinante de  $M(q)$ , denotado por el  $\det(M(q))$ , es una función positiva

$$\det(M) = (Mm + Mc + Mr)(Mm + Mc)(McR^2 + I)(McR \sin^2 \beta + McR^2 \cos^2 \beta)(Mc + Mr) > 0 \quad (2.56)$$

Ahora sustituyendo las ecuaciones (2.49), (2.51), (2.53), (2.54), en la expresión  $M^{-1}(q)$ , en la ecuación (2.55), entonces podemos describir la ecuación (2.55).

## 2.5. Experimentos en tiempo real

Los experimentos realizados son compilados en una grúa viajera Quanser Figura 2.4, el riel es de 150cm de largo, la carga es de aproximadamente 500g. El voltaje de control del sistema en la entrada es  $U$ .  $A/D - D/A$  la tarjeta tiene un microprocesador de una *Xilinx FPGA*, es un analógico multifunción y un cronómetro digital  $I/O$  en la tarjeta para la adquisición de datos en tiempo real y control para la plataforma de Windows. La tarjeta es instalada en un *PC Pentium - III 500Mhz*, debido a que la tarjeta *Xilinx FPGA* soporta operaciones en tiempo real sin meter tiempos debido al reloj interno en el sistema por default de Windows. El programa de control es simulado en Windows XP con Matlab 6.5/Simulink.

Para comenzar con la simulación en tiempo real debemos de llevar la grúa en dos posiciones: GO HOME y GO CENTER, que se ubican en la primer ventana de control del programa esto es debido para tener una mejor referencia en posición para los movimientos sin tener restringido alguna coordenada de la grúa en tres dimensiones y así una vez simulando dependiendo de la posición tendremos un mejor resultado, el carro esta en medio del plano  $x, y$ , la carga esta suspendido de la posición en reposo.

Regresando al modelo de la grúa para la simulación en tiempo real, damos click en la ventana que tiene por nombre *Simulation/Conenect to Target item*. El próximo paso es dar click en *Simulation/Start real - time code item*. Esto nos activa para la simulación los últimos 30 *segundos* teniendo presente que el movimiento del carro es en dirección  $x$ , el carro



Figura 2.4: Grúa en tres dimensiones

sigue la señal de referencia cuadrada controlado por la posición. La carga oscila libremente, la simulación comienza sin control después de 30 *segundos*.

La idea es hacer tres simulaciones en tiempo real en lazo abierto, en la primera simulación en  $x$ , con su respectivo ángulo en movimiento alfa, para la segunda simulación en  $y$ , con su respectivo ángulo en movimiento beta y finalmente en  $z$ , con su movimiento en ángulo gama.

Comenzamos con un experimento en tiempo real es para poder verificar como se comporta nuestro sistema de la grúa en tres dimensiones de posicionamiento en  $x, y, z$  así como los ángulos en alfa, beta y gama.

Para la Figura 2.6, con un tiempo de 9 segundos el sistema en lazo abierto con una entrada escalón tenemos oscilación en la posición aproximado, también para la Figura 2.7 que nos representa el ángulo alfa el seguimiento de nuestra entrada se observa que no sigue el ángulo.

Ahora para la posición y el ángulo en  $y$  con un tiempo de 10 segundos, tenemos que el sistema en lazo abierto es inestable como lo muestra la Figura 2.8 y 2.9.

Finalmente para la posición y ángulo  $z$  con un tiempo de 15 segundos como lo muestra en la Figura 2.10 y 2.11.

El momento de inercia del carro  $J$  esta en términos de ( $kgm^2$ ), se determina de una parte de giro en el sistema. Para el caso del momento de inercia este no es un factor dominante en la representación del sistema en conjunto, el hecho es que se puede describir teniendo un segundo método alterado en la representación del sistema. Entonces para el calculo del momento de inercia sera una aproximación. Se supone que la aproximación es hecho cuando el sistema es un cuerpo rígido alrededor del eje.

Entonces para calcular el momento de inercia usamos la formula  $J = \sum mr^2$  donde  $r$  es el radio de rotación,  $m$  es la masa del cuerpo rígido. Estrictamente hablando  $m$  es la masa en un punto. El radio es una función de la distancia lineal (en metros  $x$ ), esto es por que al viajar el carro de la grúa en tres dimensiones y la rotación del eje angular del motor ( $\theta$  en radianes).

Entonces el radio efectivo en el carro es  $r_c = \frac{x}{\theta}$ .

$$M_r = 6.5kg, \quad M_c = 0.8kg, \quad M_m = 1.3kg, \quad I = 0.01kg \cdot m^2$$

Para calcular el momento de inercia tenemos que:  $M = M_c + M_m$ .

### 2.5.1. Propiedades de la descripción de la grúa en 3 dimensiones

La grúa en tres dimensiones es un grupo en *Matlab*, esto nos da acceso a todos las características de la tarjeta *RT – DAC/PCI* equipado con el modelo lógico para la grúa en tres dimensiones. La tarjeta *RT – DAC/PCI* es una interfase entre software de control ejecutando por la computadora y la interfase electrónica del modelo de la grúa en tres dimensiones. La lógica de la tarjeta contiene los siguientes bloques:

- Incrementa los registros en los encoders, 5 registros de 16 bits para medir la posición en el incremento de los encoders. Hay 5 encoders idénticos para 5 estados, 2 de posi-

cionamiento del carro y el plano horizontal, la longitud de la línea izquierda y 2 para la derivación en los ángulos de la carga.

- Los encoder que incrementan para el reset lógico. Los encoder que incrementan están disponibles para generar ondas en diferentes salidas, cuando los encoders giran en el sentido de las manecillas del reloj y el sentido contrario a las manecillas del reloj. Los encoders no pueden detectar la posición de referencia cero. Para determinar la posición cero en el registro del incremento en los encoders pueden configurarse a cero en el programa de la computadora o en el registro del encoder se resetea cuando la correspondiente limite del switch al encoder es alcanzado.
- La generación de bloques *PWM*, generan 3 configuraciones del señales. Cada configuración contiene la señal en salida el *PWM*, la dirección de la señal y la señal de paro. El *PWM* determina la frecuencia de todas las ondas del *PWM*. El bloque lógico *PWM* puede prevenir que el movimiento del carro este fuera de los límites del riel y los ángulos de la línea izquierda para no estar fuera del rango de operación. Los rangos de operación son detectados dos veces por los límites en los switch y por 3 límites de registros.
- Interfase de encendido para señales térmicas, cuando la temperatura en la interfase de encendido para los motores en *DC* es tan alto que las señales térmicas pueden usarse para deshabilitar la operación en las correspondientes sobre el calor de los motores en *DC*.

## 2.6. Conclusiones del capítulo

- Con respecto al modelo de [28], al igual que nuestro modelo se obtiene la dinamica de la grua en tres dimensiones utilizando el metodo de Euler-lagrange, como siguiente paso se linealiza el modelo, una ves obtenido las ecuaciones del modelo dinamico al rededor de los estado de equilibrio, se obtiene una matriz de dimensiones de  $4 \times 4$ .

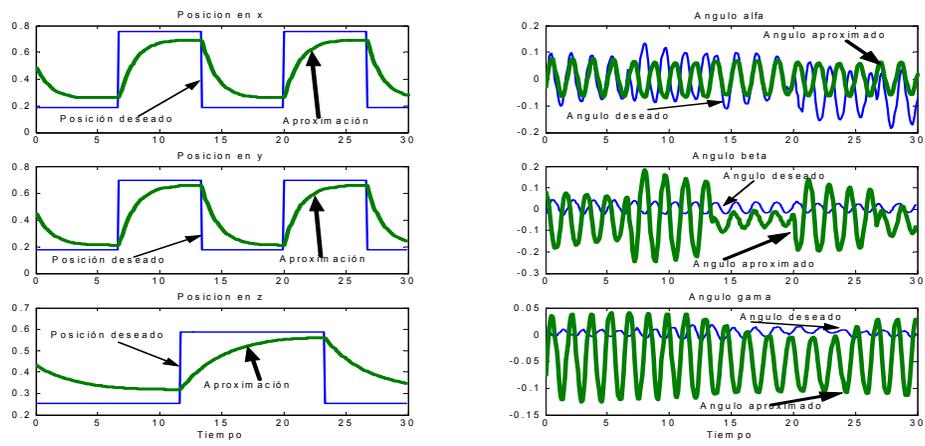


Figura 2.5: Gráficas en Posición  $x, y, z$ . Ángulos alfa, beta y gama ( $\alpha, \beta, \delta$ )

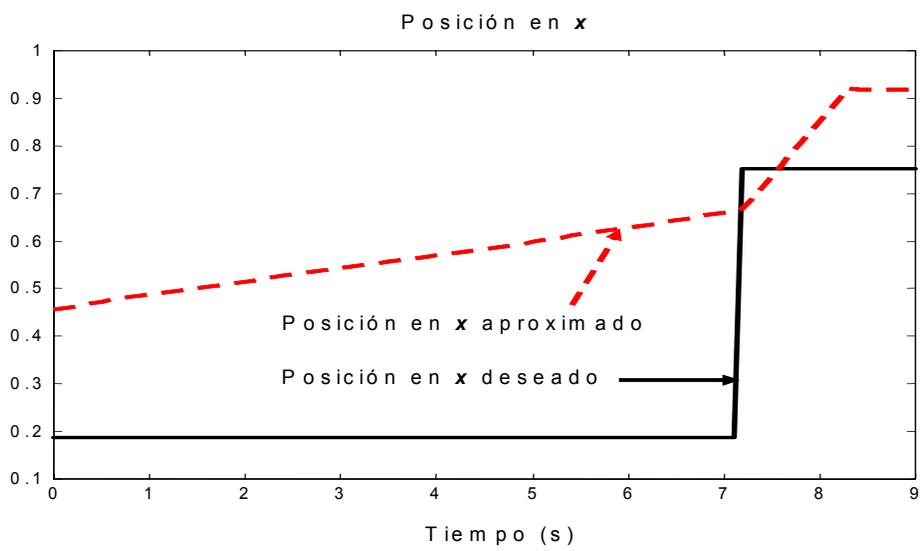


Figura 2.6: Posición en lazo abierto de la grúa en  $x$

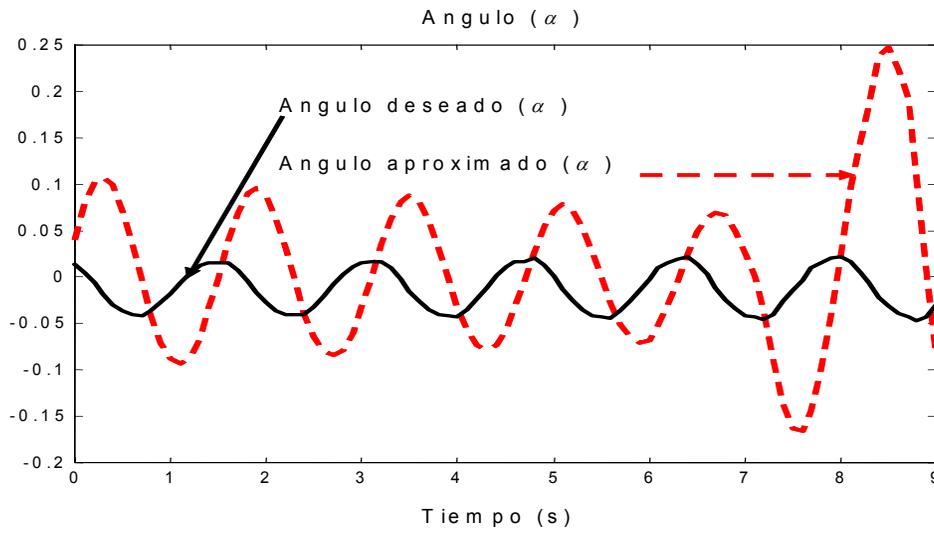


Figura 2.7: Ángulo de la grúa ( $\alpha$ )

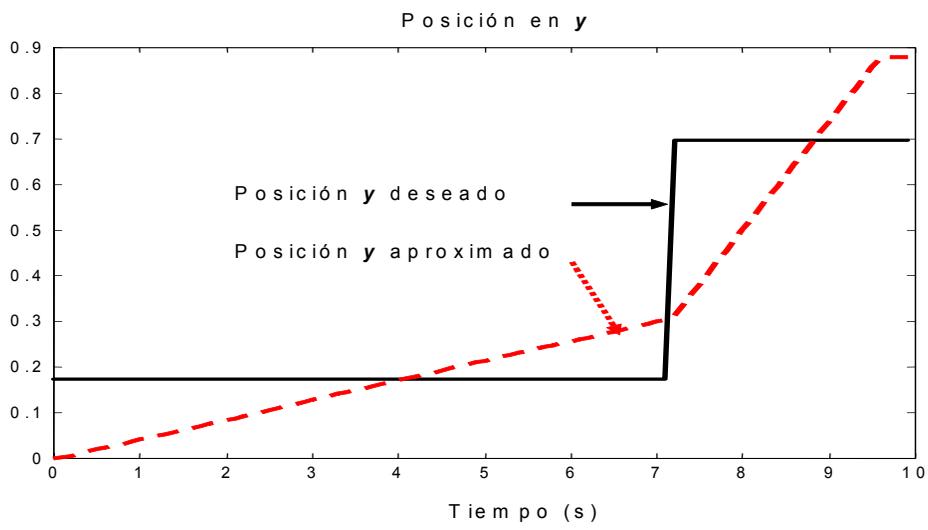
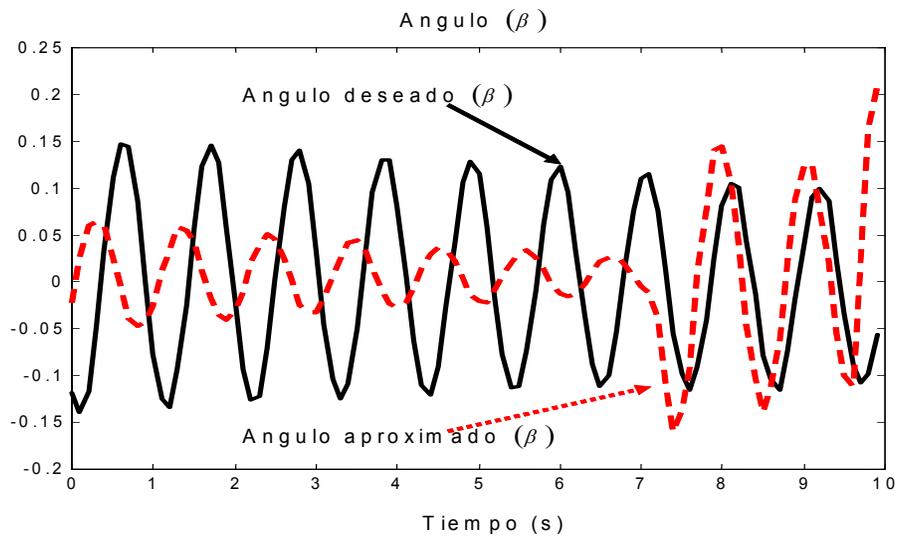
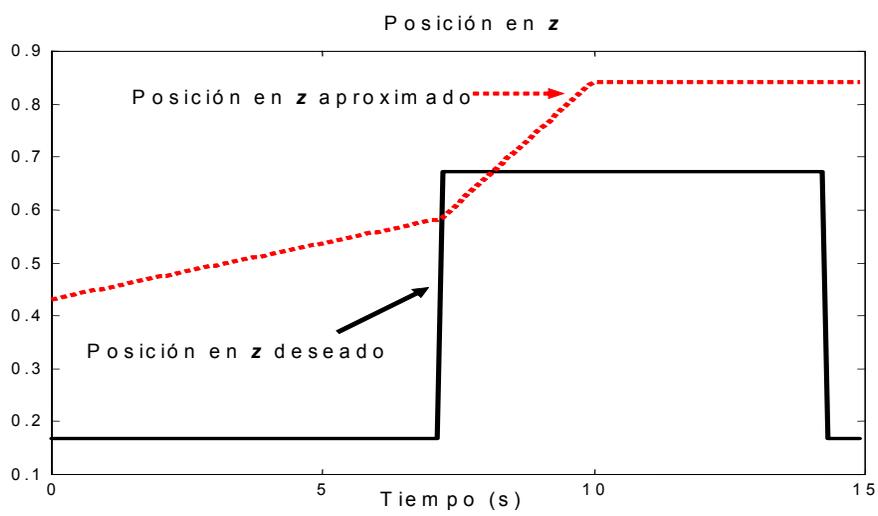


Figura 2.8: Posición en lazo abierto de la grúa en  $y$

Figura 2.9: Ángulo de la grúa ( $\beta$ )Figura 2.10: Posición en lazo abierto de la grúa en  $z$

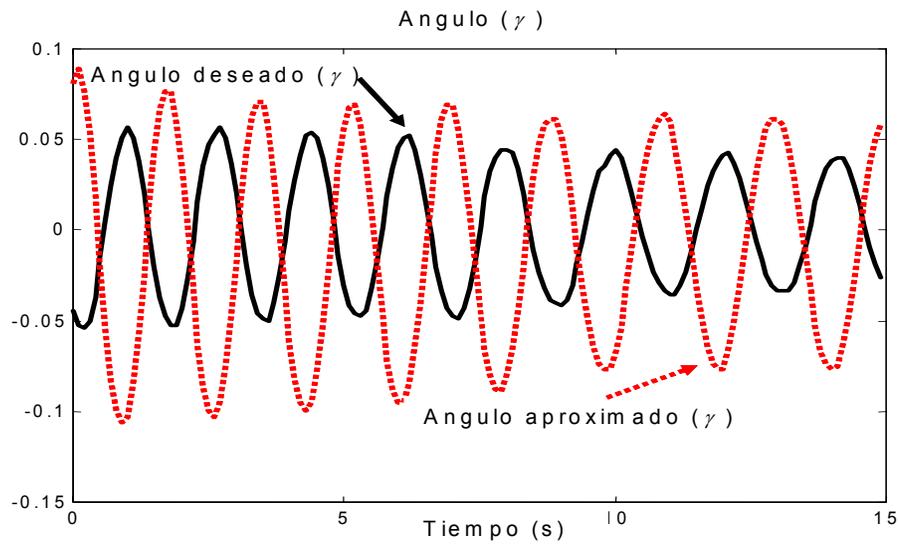


Figura 2.11: Ángulo de la grúa ( $\delta$ )

- Para el diseño del controlador utilizan la definición de controlabilidad donde

$$C = [B, AB, A^2B, A^3B]$$

que tenga rango pleno.

- Finalmente en este modelo se simula y se obtienen resultado.
- Para nuestro modelo nosotros mediante las ecuaciones obtenidas por el metodo de Euler-Lagrange nosotros no linealizamos el modelo en nuestro sistema.
- Con respecto a [15], en este modelo la dinámica de la grúa utiliza la ecuación de un Robot como en nuestro sistema

$$M(q)\ddot{q} + V(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = u$$

las matrices  $M(q), V(q, \dot{q}) \in R^{4 \times 4}$ ,  $q = [x, y, \theta, \phi]$ , en nuestro modelo las dimensiones de las matrices son  $M(q), V(q, \dot{q}) \in R^{5 \times 5}$ ,  $q = [x, y, \alpha, \beta, R]$ . En este modelo no se

considera la longitud de la cuerda, para nuestro modelo si consideramos la longitud de la cuerda.

- En este modelo se analiza en lazo abierto.
- Para el análisis de control y el diseño, primero, ellos ponen la carga a cero es decir  $\theta(t) \rightarrow 0$ .
- Finalmente se presentan los experimentos.

# Capítulo 3

## Control PD con anti-oscilación y compensación Neuronal

### 3.1. Introducción

Los sistemas de las grúas son muy importantes para el manejo del material de género pesado. La necesidad de mover la carga más rápido requiere que el control del movimiento de la grúa en su dinámica se perfeccione. Las grúas automáticas son comparativamente raras en la práctica industrial [44], debido a la relación entre los costos de la inversión y la economía para reducir costos. El control de sistemas de la grúa viajera tiene dos objetivos: regular la posición y el control con anti-oscilación. Varios autores han considerado aplicar técnicas de control para la operación de la grúa. La primera idea en la automatización de la grúa se propone en [4], donde el control en tiempo óptimo es considerando las condiciones en las cotas. Esta idea se desarrolla más allá por [3] y [45]. Para aumentar la robustez, algunos requisitos de tiempo de optimización tienen que ser superiores, por ejemplo la velocidad angular cero en el punto en la tarjeta [36]. Para aumentar la exactitud, es fijar la ganancia en un método factible como en [12]. El control de la retroalimentación basado en observadores fue presentado por [44].

La posición más simple para controlar los sistemas mecánicos es utilizar una parte pro-

porcional y derivativo también conocidos como controladores (PD). Se sabe bien que la mayoría de los manipuladores industriales está provisto con controladores PD. Debido a la existencia de fricción, la fuerza de gravedad y otras incertidumbres, el controlador PD no puede garantizar que el error constante se vuelva a cero. El controlador PID puede reducir este error sin la necesidad de algún componente en la dinámica, pero le falta la estabilidad global asintoticamente [24]. Se han hecho varios esfuerzos para mejorar los controladores PD. Estabilidad Global asintoticamente el control PD se realizo anexando compensación en la gravedad [47]. El control PD de sistemas de la grúa viajera se discute en [15] y [25]. En [25], un controlador PD para un sistema vertical de la grúa se desarrolla, donde sólo requiere las medidas en los ángulos y sus derivadas en lugar de las medidas en los ángulo del cable. En [15], el controlador basado en pasividad se combina con un controlador PD, la regulación asintotica de la grúa y la posición de la carga es demostrado. Pero ambos requieren que el modelo de la grúa sea conocido.

Los modelos matemáticos exactos para sistemas de la grúa son muy importantes para diseñar el controlador. Se hicieron muchos esfuerzos para introducir a los modelos simplificados para construir al controlador "basado en el modelo" [44], por ejemplo el funcionamiento planar [12], sin fricción [36], etc. [33] combina controladores armonizando el mismo controlador con perceptrones multicapa, simulando los sistemas de la grúa viajeras se proponen para detallar el algoritmo. El controlador de [11] consiste de la posición del control del servo y la lógica difusa en el controlador anti-oscilación. Si la fricción y gravedad son desconocidas, se usan las redes neuronales para aproximar la no linealidad en la dinámica del robot en [32]. Cuando los parámetros en el vector del torque gravitacional son desconocidos, el control PD con la compensación de gravedad se introduce por [50].

En esta sección, nosotros proponemos a un nuevo controlador PD para los sistemas de la grúa viajera. Puesto que las redes neuronales son muy eficaces para identificar una categoría ancha en los sistemas complejos no lineales cuando nosotros no tenemos la información completa para el sistema, nosotros lo usamos para estimar la fricción, gravedad y un poco de incertidumbres. El algoritmo de aprendizaje de las redes neuronales del neuro compensador se obtiene del análisis de estabilidad del error de seguimiento por el método de Lyapunov y

la técnica de estabilidad de entrada-a-estado.

El problema de control con anti-oscilación es reducir la oscilación de la carga mientras este moviéndolo a la posición deseada tan rápido como sea posible. Desde que la oscilación de la carga que depende de la aceleración del tranvía (riel), mientras que minimizando el tiempo del funcionamiento y minimizar la oscilación de la carga son parcialmente los requisitos contradictorios [1]. En particular el seguimiento se aproxima, formando la entrada [46] ha demostrado ser un método especialmente práctico y eficaz de reducir las vibraciones en los sistemas flexibles. El problema de planear el movimiento anti-oscilación se resuelve en el modelo base de la cinemática en [30]. Un controlador con anti-oscilación para una grúa viajera de tres dimensiones se propone en [34], el cual envía la supresión de la oscilación en la carga. En [54], el controlador no lineal con anti-oscilación en el método base de perturbación singular se presenta. También, estos controladores con anti-oscilación son modelos base.

En esta sección, nosotros exponemos un modelo libre para el control con anti-oscilación, que tiene control PID. El acoplamiento entre la posición y los controladores con anti-oscilación son compensados por las redes neuronales. Al mejor de nuestro conocimiento, el modelo libre con anti-oscilación y su análisis de estabilidad con el compensador neuronal no se ha establecido todavía en las literaturas. Una comparación experimental de varios controladores de la grúa en 3D se analiza en nuestro sistema.

## 3.2. Control PD

El sistema de la grúa viajera en 3D se describe esquemáticamente en la Figura 3.1 (a), puede ser formado por un sistema donde su estructura esta denotado como lo muestra la Figura 3.1 (b). El sistema dinámico de la grúa en tres dimensiones se obtiene utilizando el método de Lagrange, como se analizo en el capítulo anterior.

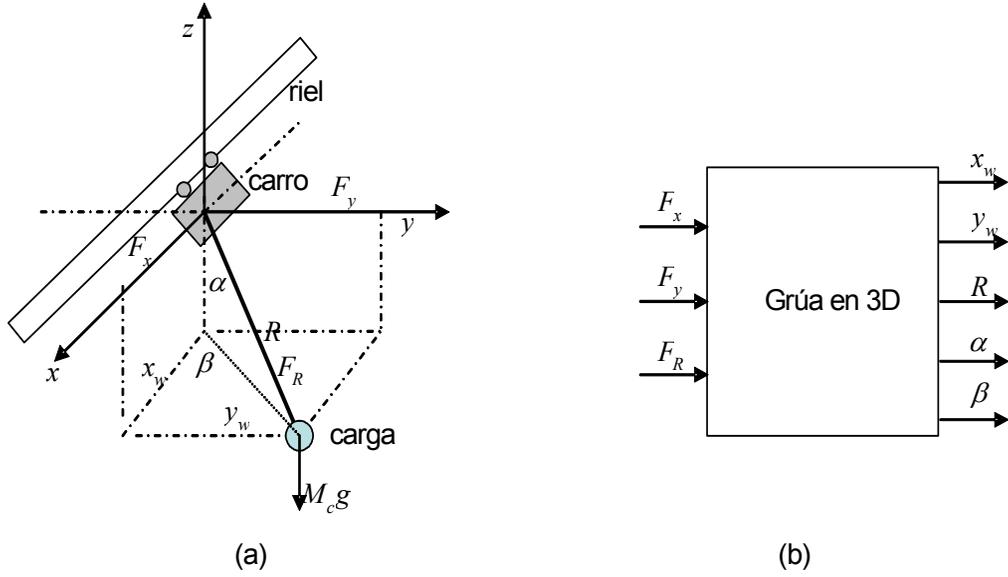


Figura 3.1: Grúa viajera

Las ecuaciones de movimiento de Lagrange son:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} \right] - \frac{\partial L}{\partial \alpha} = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}} \right] - \frac{\partial L}{\partial \beta} = 0 \quad (3.2)$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_w} \right] - \frac{\partial L}{\partial x_w} = F_x - T_x \quad (3.3)$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_w} \right] - \frac{\partial L}{\partial y_w} = F_y - T_y \quad (3.4)$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{R}} \right] - \frac{\partial L}{\partial R} = F_R - T_R \quad (3.5)$$

donde  $F_x$ ,  $F_y$  y  $F_R$  representan las fuerzas de control que actúan en el carro y el riel a lo largo de la trayectoria de elevación,  $T_x$ ,  $T_y$  y  $T_z$  son las fricciones, usamos el modelo de la

fricción de viscosidad para expresar entonces:

$$T_x = \mu_x \dot{x}_w, \quad T_y = \mu_y \dot{x}_y, \quad T_R = \mu_R \dot{R}$$

Calculando las ecuaciones (3.1) se puede formar la siguiente ecuación

$$M(x) \ddot{x} + V(x, \dot{x}) \dot{x} + G(x) + T\dot{x} = u \quad (3.6)$$

donde  $x = [x_w, y_w, \alpha, \beta, R]^T$ ,

$$M(x) = \begin{bmatrix} M & 0 & M_c R c_1 c_2 & M_c R s_1 s_2 & m s_1 c_2 \\ 0 & M_m + M_c & M_c R c_1 c_2 & -M_c R s_1 s_2 & 0 \\ M_c R c_1 s_2 & M_c R c_1 c_2 & M_c R^2 + I & 0 & 0 \\ M_c R s_1 c_2 & -M_c R s_1 s_2 & 0 & M_c R^2 s_1^2 + I & 0 \\ M_c s_1 c_2 & M_c s_2 & 0 & 0 & M_r + M_c \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

donde  $M = M_m + M_c + M_r$ ,  $c_1 = \cos \alpha$ ,  $c_2 = \cos \beta$ ,  $s_1 = \sin \alpha$ ,  $s_2 = \sin \beta$ ,

$$V(x, \dot{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -M_c R s_1 s_2 \dot{\alpha} + M_c R c_1 c_2 \dot{\beta} & M_c R c_1 c_2 \dot{\alpha} - M_c R s_1 s_2 \dot{\beta} & 0 \\ 0 & 0 & -M_c R s_1 c_2 \dot{\alpha} - M_c R c_1 s_2 \dot{\beta} & -M_c R c_1 s_2 \dot{\alpha} - M_c R s_1 c_2 \dot{\beta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -M_c R^2 s_1 c_1 \dot{\beta} & 0 \\ 0 & 0 & M_c R^2 s_1 c_1 \dot{\alpha} & M_c R^2 s_1 c_1 \dot{\beta} & 0 \\ 0 & 0 & -m R c_2^2 \dot{\alpha} & -m R \dot{\beta} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} G(x) &= [0, 0, M_c g R s_1 c_2, M_c g R c_1 s_2, M_c g c_1 c_2]^T \\ T &= [\mu_x, \mu_y, 0, 0, \mu_R]^T \\ u &= [F_x, F_y, 0, 0, F_R]^T \end{aligned} \quad (3.9)$$

**Propiedad 3.1** *En esta sección nosotros proponemos un nuevo modelo dinámico para analizar la estabilidad de control del PD con la compensación neuronal en la ecuación (3.6), que es diferentes con los otros. Por ejemplo, la longitud de la elevación del carga no es considerada en [15], de manera que las dimensiones de  $M$  es de  $4 \times 4$ . En [34], el control para la oscilación y el control de posición son diseñados, así que las dimensiones de  $M$  es  $3 \times 3$ . En [29], las dimensiones de  $M$  es  $5 \times 5$  como en nuestro problema. Pero tiene algunas incertidumbres como fricción, la oscilación de control de acoplamiento no se incluyen en el modelo.*

*Propiedad 1.* La matriz que nos representa la fuerza centrípeta y la de coriolis es anti-simétrica, entonces satisface la siguiente relación:

$$x^T \left[ \dot{M}(x) - 2C(x, \dot{x}) \right] x = 0$$

Control normal PD es:

$$\tau = -K_p(x - x^d) - K_d(\dot{x} - \dot{x}^d) \quad (3.10)$$

donde  $K_p$  y  $K_d$  son definidas positivas, matrices constantes y simétricas, el cual corresponde a la parte proporcional y al coeficiente derivativo,  $x^d \in R^5$  es la posición deseada,  $\dot{x}^d \in R^5$  es la velocidad de la junta deseada. En esta sección, nosotros discutimos el problema de regulación, por eso  $\dot{x}^d = 0$ .

Considere una clase del sistema no lineal descrito por:

$$\dot{x}_t = f(x_t, u_t) \quad (3.11)$$

donde  $x_t \in R^n$  es el estado,  $u_t \in R^m$  es el vector de entrada,  $y_t \in R^m$  es el vector de salida.  $f : R^n \times R^m \rightarrow R^n$  es localmente Lipschitz. Siguiendo a [10], ahora nosotros recordamos algunas propiedades de pasividad así como algunas propiedades de estabilidad de sistemas pasivos.

**Definición 3.2** *Un sistema como en la ecuación (3.11) se dice pasivo si ahí existe un  $C^r$  y una función no negativa  $S(x_t) : R^n \rightarrow R$ , conocido como función de almacenamiento, tal que, para todo  $u_t$ , todas las condiciones iniciales  $x^0$  y todo  $t \geq 0$  la siguiente desigualdad*

$$\dot{S}(x_t) \leq u_t^T y_t - \varepsilon u_t^T u_t - \delta y_t^T y_t - \rho \psi(x_t)$$

donde  $\varepsilon$ ,  $\delta$  y  $\rho$  son constantes no negativas,  $\psi(x_t)$  es una función semidefinida positiva de  $x_t$  tal que  $\psi(0) = 0$ ,  $\rho\psi(x_t)$  se conoce como velocidad en el estado.

Además, se dice que el sistema es estrictamente pasivo si ahí existe una función definida positiva  $V(x_t) : R^n \rightarrow R$  tal que  $\dot{S}(x_t) \leq u_t^T y_t - V(x_t)$

*Propiedad 2.* Si la función del almacenamiento  $S(x_t)$  es diferenciable y el sistema dinámico es pasivo, entonces la función del almacenamiento,  $S(x_t)$  satisface  $\dot{S}(x_t) \leq u_t^T y_t$ .

**Definición 3.3** *El sistema ecuación (3.11) se dice globalmente estable entrada a estado si ahí existe una función  $\mathcal{K}$ ,  $\gamma(s)$  (continuo y estrictamente creciente  $\gamma(0) = 0$ ) y una función  $\mathcal{KL}$ ,  $\beta(s, t)$  (función  $\mathcal{K}$  y fijo para cada  $s_0 \geq 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \beta(s_0, t) = 0$ ), tal que, para cada  $u_t \in L_\infty$  ( $\|u(t)\|_\infty < \infty$ ) y cada estado inicial  $x^0 \in R^n$ , esto nos da que*

$$\|x(t, x^0, u_t)\| \leq \beta(\|x^0\|, t) + \gamma(\|u_t\|_\infty)$$

para cada  $t \geq 0$ .

*Propiedad 3.* Si un sistema estable entrada a estado, el comportamiento del sistema debe permanecer acotado cuando sus entradas son acotados.

Las redes neuronales, las funciones radiales base (RBF) ha ganado recientemente la atención considerablemente. Las ventajas de la aproximación de las RBF, son tales que como la linealidad en los parametros y la disponibilidad en los métodos de entrenamiento son rápidos y eficaces, han sido nombrados en varias publicaciones [16]. Las redes neuronales de RBF tienen una capa oculta y una capa lineal en la salida. La salida de la red neuronal quizás se presente como

$$y_j = \sum_{i=1}^N w_{i,j} \phi_i(Vx) + b \quad (3.12)$$

donde  $N$  es el número de nodos ocultos,  $w_{i,j}$  es el peso de conexión entre la capa oculta y la capa de salida,  $x$  es el vector de entrada  $x \in R^m$  ( $m$  es el número de nodo en la entrada),  $V \in R^{N \times m}$  es la matriz de los pesos en la capa oculta,  $b$  es el umbral. La importancia del umbral es que los valores en la salida no tengan ceros. Puede combinarse con el primer término como  $w_{0,j} = b$ ,  $\phi_0(Vx) = 1$ , por eso la salida es  $y_j = \sum_{i=0}^N w_{i,j} \phi_i(Vx)$ ,  $\phi_i(Vx)$  es la función radial el cual nosotros seleccionamos como función gaussiana

$$\phi_j(Vx) = \exp \left\{ -\frac{\|Vx - c_j\|^2}{2\sigma_j^2} \right\} \quad (3.13)$$

donde  $c_j$  y  $\sigma_j^2$  representan el centro y la función base propagado.

### 3.3. Control PD con oscilación

Para el problema de control es diseñar un controlador  $u$  que mueva el riel de tal manera que la posición actual de la carga sea uno de los alcances deseados. En la entrada de control son tres  $[F_x, F_y, F_R]$  que pueden forzar la grúa a la posición  $[x_w, y_w, R]$ , pero los ángulos de oscilación  $[\alpha, \beta]$  no se pueden controlar con el modelo dinámico directamente de la ecuación (3.6). En esta sección se analiza un control para la oscilación, vamos a analizar el modelo para linealizar los ángulos  $[\alpha, \beta]$ . Por que la aceleración de la grúa es mas pequeño que la aceleración gravitacional, la longitud de la cuerda sigue variando despacio y la oscilación no es grande, entonces tomando las consideraciones siguientes:

$$\begin{aligned} |\ddot{x}_w| &\ll g, & |\ddot{y}_w| &\ll g, & |\ddot{R}| &\ll g \\ |\dot{R}| &\ll R, & |\dot{\alpha}| &\ll 1, & |\dot{\beta}| &\ll 1 \\ s_1 = \sin \alpha &\approx \alpha, & c_1 = \cos \alpha &\approx 1, \end{aligned}$$

La aproximación dinámica de los ángulos  $[\alpha, \beta]$  son

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} + \ddot{x}_w + g\alpha &= 0 \\ \ddot{\beta} + \ddot{y}_w + g\beta &= 0 \end{aligned}$$

Puesto que  $\ddot{x}_w = \frac{F_x}{M_r}$ ,  $\ddot{y}_w = \frac{F_y}{M_m}$ , la dinámica de los ángulos de oscilación son

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} + g\alpha &= -\frac{F_x}{M_r} \\ \ddot{\beta} + g\beta &= -\frac{F_y}{M_m} \end{aligned} \tag{3.14}$$

Implica que la fuerza de control  $F_x$  y  $F_y$  tienen la forma siguiente

$$\begin{aligned} F_x &= A_1(x_w, \dot{x}_w) + A_2(\alpha, \dot{\alpha}) \\ F_y &= B_1(y_w, \dot{y}_w) + B_2(\beta, \dot{\beta}) \end{aligned} \tag{3.15}$$

de donde  $A_1(x_w, \dot{x}_w)$  y  $B_1(y_w, \dot{y}_w)$  son posiciones de control,  $A_2(\alpha, \dot{\alpha})$  y  $B_2(\beta, \dot{\beta})$  son oscilaciones de control.

Substituyendo la ecuación (3.15) en la ecuación (3.14), se obtiene el modelo de control con oscilación

$$\begin{aligned}\ddot{\alpha} + g\alpha + \frac{A_1}{M_r} &= -\frac{A_2}{M_r} \\ \ddot{\beta} + g\beta + \frac{B_1}{M_m} &= -\frac{B_2}{M_m}\end{aligned}\quad (3.16)$$

Si nosotros consideramos  $\frac{A_1}{M_r}$  y  $\frac{B_1}{M_m}$  como las perturbaciones,  $\frac{A_2}{M_r}$  y  $\frac{B_2}{M_m}$  como entradas de control, ecuación (3.16) es un sistema lineal de segundo orden con perturbaciones. El tipo de control PID se puede aplicar para ajustar  $\alpha$  y  $\beta$ . El control con oscilación es:

$$\begin{aligned}A_2(\alpha, \dot{\alpha}) &= k_{pa2}\alpha + k_{da2}\dot{\alpha} + k_{ia2}\int_0^1 \alpha dt \\ B_2(\beta, \dot{\beta}) &= k_{pb2}\beta + k_{db2}\dot{\beta} + k_{ib2}\int_0^1 \beta dt\end{aligned}\quad (3.17)$$

donde  $k_{pa2}$ ,  $k_{da2}$  y  $k_{ia2}$  son constantes positivas en el cual corresponden a la parte proporcional, derivativa y ganancia integral.

### 3.4. Posición de control del PD y compensación neuronal

Substituyendo la ecuación (3.15) en la ecuación (3.6), obtenemos la posición del modelo de control

$$M(x)\ddot{x} + V(x, \dot{x})\dot{x} + G(x) + T\dot{x} + D = u_1 \quad (3.18)$$

donde  $D = [A_2, B_2, 0, 0, 0]^T$ ,  $u_1 = [A_1, B_1, 0, 0, F_R]^T$ . La posición de los controladores tienen que el PD se forma con la red neuronal con compensadores, donde

$$\begin{aligned}u_1 &= [A_1(x_w, \dot{x}_w), B_1(y_w, \dot{y}_w), 0, 0, F_R]^T \\ &= -K_{p1}(x - x^d) - K_{d1}(\dot{x} - \dot{x}^d) + \widehat{W}_t\sigma(\widehat{V}_tx)\end{aligned}\quad (3.19)$$

donde  $x = [x_w, y_w, \alpha, \beta, R]^T$ ,  $x^d = [x_w^d, y_w^d, 0, 0, R^d]^T$ ,  $x_w^d$ ,  $y_w^d$  y  $R^d$  son las posiciones deseadas, en el caso de regla tenemos que  $\dot{x}_w^d = \dot{y}_w^d = \dot{R}^d = 0$ .  $K_{p1} = \text{diag}[k_{pa1}, k_{pb1}, 0, 0, k_{pr}]$ ,  $K_{d1} = \text{diag}[k_{da1}, k_{db1}, 0, 0, k_{dr}]$ .  $\widehat{W}_t$  y  $\widehat{V}_t$  son las actualizaciones de los pesos en el cual se

determinan con la ley de aprendizaje la red neuronal.  $\widehat{W}_t\sigma(\widehat{V}_tx)$  es una red neuronal de función radial base (RBF) y se puede expresar como

$$y = \widehat{W}_t\sigma(\widehat{V}_tx) \quad (3.20)$$

donde  $y = [y_1, \dots, y_5]^T$ ,  $\widehat{W}_t \in R^{5 \times n}$ ,  $\widehat{V}_t \in R^{n \times 5}$ ,  $n$  es el número de nodo en la capa oculta,  $\sigma(x) = [\sigma_1, \dots, \sigma_n]^T$ . La función de activación utilizada es

$$\sigma_i(s) = \exp\left(-\frac{(s - C_i)^2}{P_i}\right) \quad (3.21)$$

donde  $C_i$  nos representa el centro de la función base,  $P_i$  es la representación distinta de la función base. En esta sección, se da por hecho que la función gaussiana ecuación (3.9) es fija, entonces.  $C_i$  y  $P_i$  son constantes. Nuevamente en esta sección nosotros solo ajustamos  $\widehat{W}_t$  y  $\widehat{V}_t$  en la red neuronal RBF, en [53] hay mas detalles de como poner a  $\sigma(x)$ . Recordando el teorema Stone-Weierstrass [14], una función suave general no lineal se puede escribir como

$$f(x) = W^*\sigma(V^*x) + \mu(t) \quad (3.22)$$

donde  $W^*$  y  $V^*$  son los pesos óptimos,  $\mu(t)$  es el error. En esta sección nosotros utilizamos compensador neuronal ecuación (3.20) para aproximar las no linealidades desconocidas (gravedad, fricción y acoplamiento para el control de oscilación) como

$$\widehat{W}_t\sigma(\widehat{V}_tx) = G(x) + T\dot{x} + D + \mu(t) \quad (3.23)$$

### 3.5. Análisis de estabilidad

El acoplamiento entre la oscilación de control y la posición de control se pueden explicar como sigue. Para la oscilación de control ecuación (3.16), la posición de control  $A_1$  y  $B_1$  son perturbaciones, estas perturbaciones pueden decrecer con una acción integral con el control PID. La oscilación del modelo ecuación (3.16) se aproxima, pero la oscilación de control ecuación (3.17) no se utiliza en este modelo. Este modelo es libre. Por eso la oscilación de

control ecuación (3.17) no se puede omitir completamente la oscilación pero si se puede hacer que la vibración sea pequeña.

Para posicionar el control ecuación (3.18), la oscilación de control es en términos  $D = [A_2, B_2, 0, 0, 0]^T$ , también se consideran estas perturbaciones. Ahora el acoplamiento de la oscilación del control se puede compensar por la red neuronal como en la ecuación (3.23). El análisis de estabilidad de esta sección es solo para controlar la posición.

Primero consideramos una red neuronal RBF, esta puede aproximar la fricción, la gravedad y el acoplamiento de la oscilación de control exactamente, entonces  $\mu(t) = 0$

$$G(x) + T\dot{x} + D = \widehat{W}_t \sigma(\widehat{V}_0 x) \quad (3.24)$$

donde  $\widehat{W}_t$  es la actualización del peso,  $\widehat{V}_0$  es un peso contante. Si definimos la posición de regulación del error como

$$e = x - x^d \quad (3.25)$$

El siguiente teorema nos asegura estabilidad asintótica para el control PD con compensación en las redes para sistemas en las grúas viajeras.

**Teorema 3.4** *Si la red neuronal ecuación (3.20) se puede modelar la fricción, la gravedad y los ángulos de oscilación se pueden controlar exactamente, entonces el control PD con un compensador neuronal*

$$u_1 = -K_p e - K_d \dot{e} + \widehat{W}_t \sigma(\widehat{V}_0 x) \quad (3.26)$$

con la siguiente ley de aprendizaje

$$\dot{\widehat{W}}_t^T = -K_w \sigma(V^* x) \dot{e}^T, \quad K_w \in R^{n \times n}, K_w > 0 \quad (3.27)$$

se puede hacer que el lazo de control de la posición sea asintoticamente estable.

**Demostración.** Definimos la función candidata de Lyapunov como:

$$L(e, \dot{e}) = \frac{1}{2} \dot{e}^T M(x) \dot{e} + \frac{1}{2} e^T K_p e + \frac{1}{2} \text{tr}(\widetilde{W}_t^T K_w^{-1} \widetilde{W}_t) \quad (3.28)$$

donde  $\widetilde{W}_t = \widehat{W}_t - W^*$ . La derivada con respecto al tiempo de esta función propuesta es:

$$\dot{L}(e, \dot{e}) = \dot{e}^T M(x) \ddot{e} + \frac{1}{2} \dot{e}^T \dot{M}(x) \dot{e} + \dot{e}^T K_p e + tr(\dot{\widetilde{W}}_t^T K_w^{-1} \widetilde{W}_t) \quad (3.29)$$

Puesto que  $\dot{x}^d = \ddot{x}^d = 0$ , el sistema de lazo cerrado se obtiene de las ecuaciones (3.18) y (3.26) como

$$\begin{aligned} M(x) \ddot{e} + V(x, \dot{x}) \dot{e} + G(x) + T\dot{x} + D &= -K_p e - K_d \dot{e} + \widehat{W}_t \sigma(V^* x) \\ M(x) \ddot{e} &= -V(x, \dot{x}) \dot{e} - K_p e - K_d \dot{e} + \widetilde{W}_t \sigma(V^* x) \end{aligned} \quad (3.30)$$

Basado en la estructura de  $M(x)$  y  $V_m(x, \dot{x})$  dados en las ecuaciones (3.7) y (3.8), esto muestra sinceramente que la siguiente relación anti - simétrica se satisface [29].

$$\xi^T \left( \frac{1}{2} \dot{M} - V \right) \xi = 0 \quad (3.31)$$

Substituyendo la ecuación (3.30) en (3.29), por la ecuación (3.31) tenemos

$$\dot{L}(e, \dot{e}) = -\dot{e}^T K_d \dot{e} + \dot{e}^T \widetilde{W}_t \sigma(V^* x) + tr(\dot{\widetilde{W}}_t^T K_w^{-1} \widetilde{W}_t)$$

Del algoritmo de aprendizaje ecuación (3.27).

$$\dot{L}(e, \dot{e}) = -\dot{e}^T K_d \dot{e} + \leq 0$$

El cual es una función semi-definida negativa. Por consiguiente de acuerdo con el método de Lyapunov la ley del control ecuación (3.26), nos da un sistema de control cerrado estable. Nosotros estudiamos estabilidad asintótica en la región:

$$\left\{ [e, \dot{e}]^T : \dot{L}(e, \dot{e}) = 0 \right\} = \left\{ e \in R^5, \dot{e} = 0 \right\}$$

Usando el teorema de LaSalle nosotros concluimos que visualmente que es asintóticamente estable. ■

Usualmente el valor óptimo es desconocido  $\widehat{V}_0$ , y la red neuronal no puede aproximar la fricción  $T\dot{x}$ , la gravedad  $G(x)$  y los ángulos de oscilación del controlador exactamente  $D$ , tenemos que

$$G(x) + T\dot{x} + D = W^* \sigma(V^* x) + \mu(t) \quad (3.32)$$

$\mu(t)$  se propone que es cuadrática y acotada como en [29], [40], [52].

$$\mu^T(t) \Lambda_\mu \mu(t) \leq \bar{\mu} \quad (3.33)$$

Donde  $\Lambda_\mu$  es una matriz definida positiva,  $\bar{\mu}$  es una constante positiva. Es claro que la función gaussiana ecuación (3.13) satisface la condición de Lipschitz.

$$\tilde{\sigma} = \sigma(V^{*T}x) - \sigma(\widehat{V}_t^T x) = D_\sigma \widetilde{V}_t^T x + \nu_\sigma \quad (3.34)$$

Donde  $\widetilde{V}_t = V^* - \widehat{V}_t$ ,  $D_\sigma = \frac{\partial \sigma^T(Z)}{\partial Z} \Big|_{Z=\widehat{V}_t^T x}$ ,  $\|\nu_\sigma\|_{\Lambda_\sigma}^2 = \nu_\sigma^T \Lambda_\sigma \nu_\sigma \leq \bar{\eta}_\sigma$ ,  $\bar{\eta}_\sigma$  es una constante positiva. Tenemos la siguiente relación:

$$\widehat{W}_t \sigma(\widehat{V}_t x) - W^* \sigma(V^* x) = \widetilde{W}_t \sigma(\widehat{V}_t x) + W^* \tilde{\sigma} = \widetilde{W}_t \sigma(V_t x) + W^* D_\sigma \widetilde{V}_t x + \nu_\sigma \quad (3.35)$$

donde  $\widetilde{V}_t = V^* - \widehat{V}_t$ . El siguiente teorema nos da el algoritmo de aprendizaje estable para el control PD con neuro compensador ecuación (3.19).

**Teorema 3.5** *La derivada de la ganancia  $K_d$  en el control PD ecuación (3.19) se elige de tal manera que*

$$K_d > \Lambda_\mu^{-1} + \Lambda_\sigma^{-1} \quad (3.36)$$

donde  $\Lambda_\mu^{-1}$  y  $\Lambda_\sigma^{-1}$  son matrices dados en las ecuaciones (3.33) y (3.34), la ley de actualización de los pesos de un compensador neuronal en la ecuación (3.19) son:

$$\begin{aligned} \dot{\widehat{W}}_t^T &= -K_w \sigma(\widehat{V}_t x) \dot{e}^T \\ \dot{\widehat{V}}_t^T &= -K_v x W^* D_\sigma \dot{e}^T \end{aligned} \quad (3.37)$$

donde  $K_w$ ,  $K_v$  son matrices definidas positivas, entonces el control PD con neuro compensación ecuación (3.19) puede hacer que el error de seguimiento sea estable. El error de seguimiento promedio  $\dot{e}$  converge a

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \|\dot{e}\|_Q^2 dt \leq \bar{\eta}_\mu + \bar{\eta}_\sigma \quad (3.38)$$

donde  $Q = K_d - \Lambda_\mu^{-1} - \Lambda_\sigma^{-1}$ .

**Demostración.** Se propone la función de Lyapunov siguiente

$$L_1(e, \dot{e}) = \frac{1}{2} \dot{e}^T M(x) \dot{e} + \frac{1}{2} e^T K_p e + \frac{1}{2} \text{tr} \left( \widetilde{W}_t^T K_w^{-1} \widetilde{W}_t \right) + \frac{1}{2} \text{tr} \left( \widetilde{V}_t^T K_v^{-1} \widetilde{V}_t \right) \quad (3.39)$$

donde  $K_w$  y  $K_v$  son matrices constantes definidas positivas. La derivada de la ecuación (3.39) es la siguiente:

$$\dot{L}_1(e, \dot{e}) = \dot{e}^T M \ddot{e} + \frac{1}{2} \dot{e}^T \dot{M} \dot{e} + \dot{e}^T K_p \dot{e} + \text{tr} \left( \dot{\widetilde{W}}_t^T K_w^{-1} \widetilde{W}_t \right) + \text{tr} \left( \dot{\widetilde{V}}_t^T K_v^{-1} \widetilde{V}_t \right) \quad (3.40)$$

El sistema en lazo cerrado se obtiene de las ecuaciones (3.18), (3.19) y (3.35) entonces tenemos

$$\begin{aligned} M(x) \ddot{e} + V(x, \dot{x}) \dot{e} + G(x) + T \dot{x} + D &= -K_p e - K_d \dot{e} + \widetilde{W}_t \sigma(\widehat{V}_t x) \\ M(x) \ddot{e} &= -V \dot{e} - K_p e - K_d \dot{e} + \widetilde{W}_t \sigma(\widehat{V}_t x) + W^* D_\sigma \widetilde{V}_t x + \nu_\sigma - \mu(t) \end{aligned} \quad (3.41)$$

La relación de inclinación simétrica ecuación (3.31), tenemos

$$\begin{aligned} \dot{L}_1 &= -\dot{e}^T K_d \dot{e} + \dot{e}^T \widetilde{W}_t \sigma(V^* x) + \text{tr} \left( \dot{\widetilde{W}}_t^T K_w^{-1} \widetilde{W}_t \right) \\ &+ \dot{e}^T W^* D_\sigma \widetilde{V}_t x + \text{tr} \left( \dot{\widetilde{V}}_t^T K_v^{-1} \widetilde{V}_t \right) + \dot{e}^T [\nu_\sigma - \mu(t)] \end{aligned} \quad (3.42)$$

Se muestra la desigualdad en la matriz,

$$X^T Y + (X^T Y)^T \leq X^T \Lambda^{-1} X + Y^T \Lambda Y \quad (3.43)$$

es válida para algún  $X, Y \in R^{n \times k}$  y para alguna matriz definida positiva  $0 < \Lambda = \Lambda^T \in R^{n \times n}$  [52],  $\dot{e}^T [\nu_\sigma - \mu(t)]$  en la ecuación (3.42), se puede concluir que:

$$\dot{e}^T [\nu_\sigma - \mu(t)] \leq \dot{e}^T (\Lambda_\mu^{-1} + \Lambda_\sigma^{-1}) \dot{e} + \bar{\eta}_\mu + \bar{\eta}_\sigma$$

Usando la ley de aprendizaje de la ecuación (3.37) tenemos que

$$\dot{L}_1 \leq -\dot{e}^T Q \dot{e} + \bar{\eta}_\mu + \bar{\eta}_\sigma \quad (3.44)$$

donde  $Q = K_d - \Lambda_\mu^{-1} - \Lambda_\sigma^{-1}$ , de la ecuación (3.36) conocemos que  $Q > 0$ . La ecuación (3.44) se puede representar como:

$$\dot{L}_1 \leq -\lambda_{\min}(Q) \|\dot{e}\|^2 + \eta^T \Lambda_\mu \eta + \nu^T \Lambda_\sigma \nu \leq -\alpha_{\|\dot{e}\|} \|\dot{e}\| + \beta_{\|\eta\|} \|\eta\| + \beta_{\|\nu\|} \|\nu\|$$

donde  $\alpha_{\|\dot{e}\|} = \lambda_{\min}(Q)$ ,  $\beta_{\|\eta\|} = \lambda_{\max}(\Lambda_\mu) \|\eta\|$ ,  $\beta_{\|\nu\|} = \lambda_{\max}(\Lambda_\sigma) \|\nu\|$ . Por eso  $\alpha_{\|\dot{e}\|}$ ,  $\beta_{\|\eta\|}$  y  $\beta_{\|\nu\|}$  son funciones  $\mathcal{K}_\infty$ ,  $V_1$  es una función de Lyapunov-ISS. Del teorema 1 de [42], para el término de  $\eta$  y  $\nu$ , el error de seguimiento  $\|\dot{e}\|$  es estable. Integrando la ecuación (3.44) desde 0 hasta  $T$ .

$$L_{1,T} - L_{1,0} \leq - \int_0^T \dot{e}^T Q \dot{e} dt + (\bar{\eta}_\mu + \bar{\eta}_\sigma) T$$

por eso

$$\int_0^T \dot{e}^T Q \dot{e} dt \leq L_{1,0} - L_{1,T} + (\bar{\eta}_\mu + \bar{\eta}_\sigma) T \leq V_{1,0} + (\bar{\eta}_\mu + \bar{\eta}_\sigma) T$$

la ecuación (3.38) es demostrado. ■

**Propiedad 3.6** *El error de seguimiento convergerá al radio de la bola hasta el limite superior de  $(\bar{\eta}_\mu + \bar{\eta}_\sigma)$ , y esta influenciada por las matrices conocidas anteriores de  $W^*$ . En el Teorema 3.5 se muestra que  $W^*$  no influye en la propiedad de estabilidad, nosotros podemos seleccionar algún valor primero para  $W^*$ . Del Teorema 3.5 se muestra que el algoritmo ecuación (3.27) se puede hacer que el error de identificación sea convergente.  $W^*$  puede seleccionarse siguiendo los pasos fuera de línea:*

1. *Empiece de cualquier valor inicial para  $W^*$*
2. *Haga la identificación en línea con  $W^*$*
3. *Permita que  $W_t$  como un nuevo condición inicial, entonces,  $W^* = W_t$*
4. *Si el error de identificación disminuye, repita el proceso de identificación, ir al paso 2. Por otra parte, detenga la identificación fuera de línea, ahora  $W_t$  es valor final de  $W^*$ .*

**Propiedad 3.7** *De la definición de la función de Lyapunov ecuación (3.39), nosotros podemos ver que las reglas de aprendizaje ecuación (3.27) seguirá minimizando el error de seguimiento  $\dot{e}$ . Esta estructura es diferente de redes neuronales normales que se usan para la aproximación de funciones no lineal [52]. Los términos  $-K_w \sigma(\hat{V}_t x) \dot{e}^T$  y  $-K_v x W^* D_\sigma \dot{e}^T$  estos corresponden a esquemas del Backpropagation, únicamente en el Backpropagation  $W^*$  se cambia por  $W_t$ .*

### 3.6. Comparaciones de los experimentos

La anti-swing (oscilación) del control para sistemas de la grúa es implementado en el *InTeCo* para grúas viajeras para el experimento [18], como se ve en la Figura 3.2. Los parámetros físicos de la grúa viajera para el experimento son determinados con las siguientes datos:

$$M_r = 6,5kg, \quad M_c = 0,8kg, \quad M_m = 1,3kg, \quad I = 0,01kg \cdot m^2$$

El riel mide de largo 150cm. La tarjeta es A/D-D/A microprocesador Xilinx FPGA, que es multifuncional cronometrando analógico y digital la tarjeta de I/O esta diseñada para la adquisición de datos en tiempo real y control en plataforma Windows XP. La tarjeta se instala en una computadora central PC Pentium-III 500MHz. Debido a las operaciones en tiempo real de la tarjeta de adquisición de datos Xilinx FPGA sin meter ruidos causados en Windows por el sistema del tiempo, el programa de control se ejecuta en Windows XP con Matlab 6.5/Simulink. Cada uno de los controladores se implemento con una frecuencia de muestreo de  $1kHz$ .

Hay muchas técnicas para controlar los sistemas de la grúa viajera. La mayoría de ellos el modelo base, como en [12], [33], [36] y [44]. El control PD con compensación neuronal propuesto en este capítulo es un modelo libre. En [15] y [25], se discuten los controladores PD. Pero el compensador en [15] utiliza el modelo exacto del sistema de la grúa. Ahí existe el error en estado constante [25], por que en alguna compensación del control PD, la explicación de este problema puede encontrarse en [24]. Nosotros comparamos nuestro método con algunos controladores en modelos libres, como el control PD [25], el control PID [24], control sin anti-oscilación PD [15].

Primero, nosotros discutimos el control anti-oscilación ecuación (3.17). Por que el control anti-oscilación afecta en el control de la posición (ver el modelo de control de posición ecuación (3.18)). Muchas grúas viajeras no incluyen la técnica del anti-oscilación como en [15], [25], [33], [44]. Comparado con su controlador, nosotros usamos el PID ecuación (3.17)

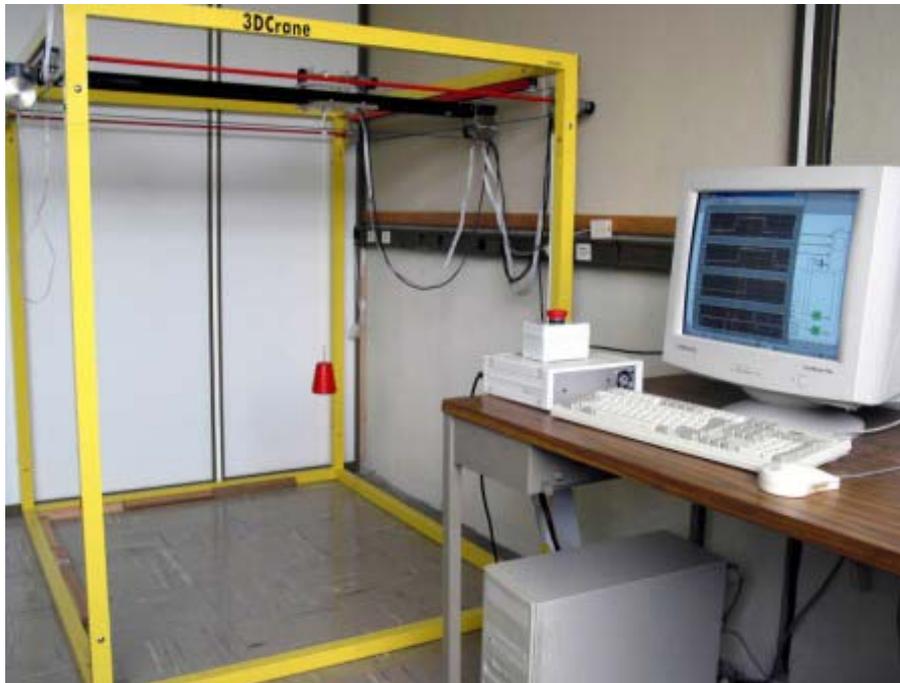


Figura 3.2: Control en tiempo real para una grúa viajera en 3D

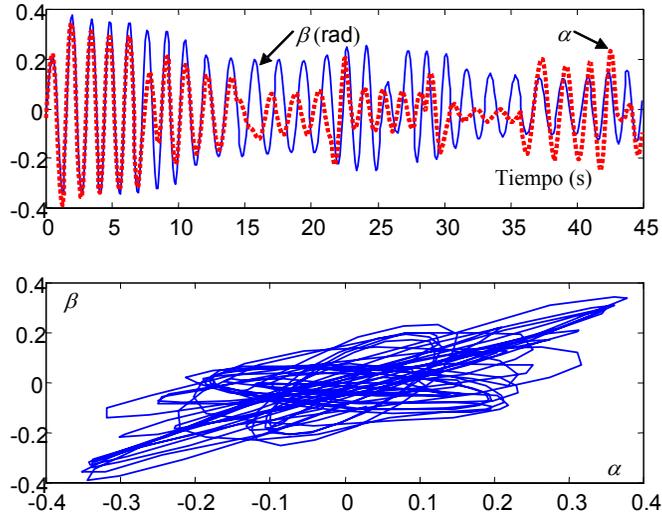


Figura 3.3: Sin oscilación en los ángulos de control

el control para disminuir la oscilación de la carga, los parámetros de control del PID son

$$\begin{aligned} k_{pa2} &= 2,5, & k_{da2} &= 18, & k_{ia2} &= 0,01 \\ k_{pb2} &= 15, & k_{db2} &= 10, & k_{ib2} &= 0,6 \end{aligned}$$

Los ángulos resultantes se muestran en la Figura 3.3, para el control de la posición sin la anti-oscilación, y la Figura 3.4 para la posición del control con anti-oscilación.

Segundo, nosotros discutimos el control en la posición ecuación (3.19). Por el teorema 3.5 nosotros conocemos el control parar asegurar la estabilidad,  $K_d$  debe ser bastante grande tal que  $K_d > \Lambda_\mu^{-1} + \Lambda_\sigma^{-1}$ . Como nosotros no sabemos los límites superiores, nosotros seleccionamos un valor grande para  $K_{d1} = \text{diag}[80, 80, 0, 0, 10]$ . La posición de la ganancia de retroalimentación no nos afecta en la estabilidad, pero debería ser la ganancia positiva, nosotros elegimos  $K_{p1} = \text{diag}[5, 5, 0, 0, 1]$ . Las redes neuronales se construyen de la siguiente forma:  $\widehat{W}_t \in R^{5 \times 20}$ ,  $\widehat{V}_t \in R^{20 \times 5}$ ,  $\sigma(s) = [\sigma_1 \cdots \sigma_{20}]^T$ , la función Gaussiana es

$$\sigma_i = \exp \left\{ - \sum_{i=1}^5 (x_i - m_i)^2 / 100 \right\}$$

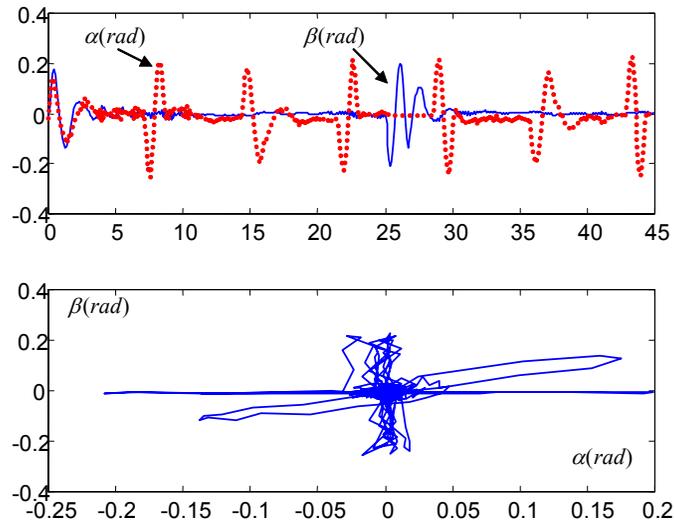


Figura 3.4: Con oscilación en los ángulos de control

donde se propaga  $\sigma_i$  se evalúa en  $\sqrt{50}$  y el centro  $m_i$  es un número aleatorio entre 0 y 1. La ley de aprendizaje en la ecuación (3.37), con  $K_w = 10$ ,  $K_v = 5$ . La posición de la grúa montada se elige con una raíz cuadrada. El resultado de las posiciones en la grúa ya montada son como se muestran en la Figura 3.5. La regulación resulta del control PD sin la compensación neuronal [25] como se muestran en la Figura 3.6. El control con PID ( $K_{d1} = \text{diag}[80, 80, 0, 0, 10]$ ,  $K_{p1} = \text{diag}[5, 5, 0, 0, 1]$ ,  $K_{i1} = \text{diag}[0,25, 0,25, 0, 0, 0,1]$ ) se muestra en la Figura 3.7.

Claramente, el control PD con la compensación neuronal puede compensar las incertidumbres con éxito como la fricción, gravedad y el acoplamiento de anti-oscilación. Por que el controlador PID no tiene mecanismo adaptable, no funciona bien por el acoplamiento anti-oscilación. Por otro lado, el compensador neuronal puede ajustar su acción de control. De otra manera, el control PID es mas rápido que el control PD con compensación neuronal en el caso de pequeñas acoplamientos anti-oscilación.

La estructura del compensador neuronal es muy importante. Los siguientes pasos son útiles para la aplicación.

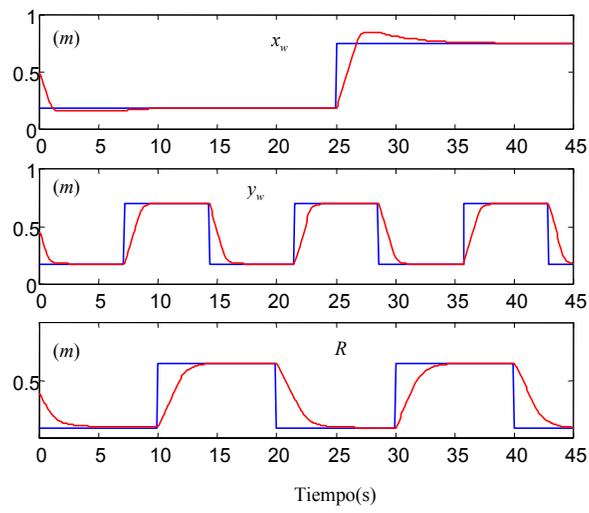


Figura 3.5: Control PD con compensación neuronal

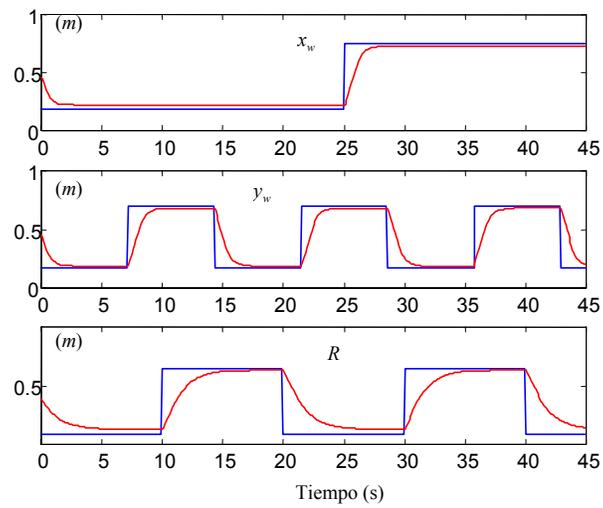


Figura 3.6: Control PD sin compensación

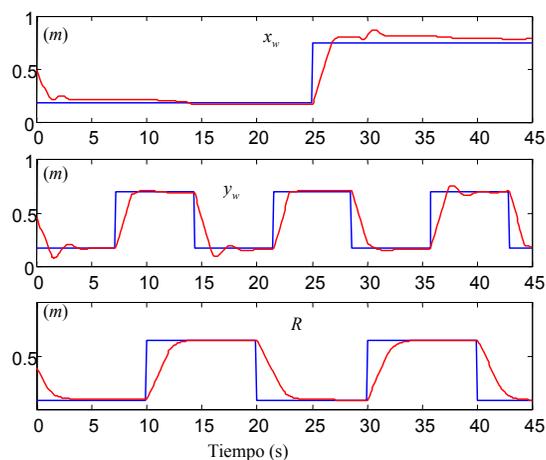


Figura 3.7: Control PID

1. Las constantes de la función Gaussiana en la ecuación (3.19) son cambiados por simulaciones o experimentos. De la teoría de las redes neuronales conocemos que la forma de la función Gaussiana no influye en la estabilidad de la red neuronal, pero en un caso especial en algunos procesos no lineales algunas funciones tienen mejor habilidades de aproximación.
2. Las dimensiones de las matrices en los pesos  $\widehat{W}_t$ ,  $\widehat{V}_t$  son problemas en la estructura para las redes neuronales. Se sabe bien que aumentando la dimensión de los pesos pueden causar el problema de traslaparse y dar mal peso al cálculo de las matrices. Cuál es la mejor dimensión de los pesos todavía es un problema abierto para la sociedad de las redes neuronales. En este ejemplo nosotros usamos 20 nodos ocultos. Puesto que es difícil de obtener la estructura de la neurona del conocimiento anterior, nosotros podemos poner varios neuro identificadores en paralelo y podemos seleccionar uno de los mejores cambiando el algoritmo. Ésta es otra manera de encontrar una estructura apropiada para los neuro identificadores.
3. Las ganancias de aprendizaje  $K_w$  y  $K_v$  influirán en la velocidad de aprendizaje, las

ganancias muy grandes pueden causar la inestabilidad de aprendizaje, las ganancias muy pequeñas pueden hacer un proceso de aprendizaje lento.

### 3.7. Conclusiones del capítulo

En este capítulo nosotros proponemos un nuevo control PD anti-oscilación con compensación neuronal para sistemas de la grúa viajera, que son estable con respecto a las incertidumbres acotadas. Las contribuciones principales en este capítulo son: 1) por la propiedad de la caja negra de redes neuronales, ambas posiciones control y control en anti-oscilación son modelos libres. 2) El análisis de la teoría se propone con el método de Lyapunov y técnicas de estabilidad de entrada-a-estado. 3) Se presentan los experimentos en tiempo real.

- Sabemos que la señal del control a la salida del controlador esta relacionada con la entrada del controlador mediante una constante proporcional, tambien sabemos que el controlador en serie es del tipo proporcional derivativo (PD), su funcion de transferencia es

$$G_c(s) = k_p + k_D s$$

estos nos indica que la interpretacion en el dominio del tiempo del control PD, en efecto el control PD sobre la respuesta transitoria de un sistema de control se puede investigar al referirse a las respuestas en el tiempo.

- Un control PD disenado adecuadamente afectara el desempeno de un sistema de control en las formas siguientes:
  - Mejora el amortiguamiento y reduce el sobrepaso maximo.
  - Reduce el tiempo de levantamiento y el tiempo de asentamiento.
  - Incrementa el ancho de banda ( $BW$ ).
  - Mejora el margen de ganacia, el margen de fase y el pico de resonancia ( $M_r$ ).

- Puede acentuar el ruido en altas frecuencias.
- No es efectivo para sistemas ligeramente amortiguados o inicialmente inestables.
- Puede requerir un capacitor muy grande en la implementación del circuito.

Para el *PID*

- El controlador *PD* puede añadir amortiguamiento a un sistema, pero no afecta la respuesta en estado estable. El controlador *PI* puede mejorar la estabilidad relativa y el error en estado estable al mismo tiempo, pero el tiempo de levantamiento se incrementa. Esto nos lleva a emplear un controlador *PID* para que se empleen las mejores características de los controladores *PI* y *PID*.
- La función de transferencia del controlador *PID* es:

$$G_c(s) = k_p + k_D s + \frac{k_I}{s}$$



# Capítulo 4

## Control PD con Anti-oscilación y Velocidad en el Observador

### 4.1. Introducción

Los observadores de alta ganancia se están usando ampliamente en control no lineal con salidas retroalimentadas. Puesto que los observadores se extienden la banda ancha del controlador es importante estudiar la robustez del diseño del controlador para el modelado dinámico (altas frecuencias).

### 4.2. Observador alta-ganancia

La dinámica de la grúa viajera ecuación (3.6) se puede describir en espacio de estado de la forma [37].

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= H_1(X, u) \\ y &= x_1\end{aligned}\tag{4.1}$$

donde  $x_1 = x = [x_w, y_w, \alpha, \beta, R]^T$  es la posición,  $x_2$  es la velocidad,  $X = [x_1^T, x_2^T]^T$ ,  $u = \tau$  es la entrada de control. Las dimensiones en la posición en la salida es,

$$H_1(X, u) = -M(x_1)^{-1} [C(x_1, x_2)\dot{x}_1 + G(x_1) + F\dot{x}_1 + u] \quad (4.2)$$

Si la velocidad de  $x_2$  no corresponden las dimensiones y la dinámica del manipulador en el cual no son desconocidas, el observador de alta ganancia se puede utilizar para calcular  $x_2$  [37].

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{x}_1 &= \hat{x}_2 + \frac{1}{\varepsilon}K_1(x_1 - \hat{x}_1) \\ \frac{d}{dt}\hat{x}_2 &= \frac{1}{\varepsilon^2}K_2(x_1 - \hat{x}_1) \end{aligned} \quad (4.3)$$

donde  $\hat{x}_1 \in R^5$ ,  $\hat{x}_2 \in R^5$  denotan los valores estimados de  $x_1$ ,  $x_2$  respectivamente;  $\varepsilon$  se elige como un parámetro positivo pequeño,  $K_1$  y  $K_2$  son matrices definidas positivas se elige de tal manera que la matriz  $\begin{bmatrix} -K_1 & I \\ -K_2 & 0 \end{bmatrix}$  es estable. Permítanos definir el error del observador como

$$\tilde{x} = x - \hat{x}, \quad \tilde{z}_1 = \tilde{x}_1, \quad \tilde{z}_2 = \varepsilon\tilde{x}_2 \quad (4.4)$$

donde  $\hat{x} = [\hat{x}_1^T, \hat{x}_2^T]^T$ . De la ecuación (4.1) y (4.3), la ecuación del error en el observador se puede formar como:

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{d}{dt}\tilde{z}_1 &= \tilde{z}_2 - K_1\tilde{z}_1 \\ \varepsilon \frac{d}{dt}\tilde{z}_2 &= -K_2\tilde{z}_1 + \varepsilon^2 H_1 \end{aligned} \quad (4.5)$$

ó en forma de matriz:

$$\varepsilon \frac{d}{dt}\tilde{z} = A\tilde{z} + \varepsilon^2 B H_1 \quad (4.6)$$

donde  $A = \begin{bmatrix} -K_1 & I \\ -K_2 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$ . La construcción de la velocidad del observador es el mismo como en [37], pero nosotros propondremos un nuevo teorema en él para combinar al observador y el neuro compensador juntos.

**Teorema 4.1** *Si el observador de alta ganancia ecuación (4.3) se usa para estimar la velocidad de la grúa viajera ecuación (4.1), entonces el error en el observador  $\tilde{x}$  convergerá al siguiente conjunto*

$$D_\varepsilon = \{\tilde{x} \mid \|\tilde{x}\| \leq \bar{K}(\varepsilon)\}$$

donde  $\bar{K}(\varepsilon) = 2\varepsilon^2 \sup_{t \in [0, T]} \|BH_1\|^T \|P\|$ ,  $P$  es la solución de la ecuación de Lyapunov:

$$A^T P + PA = -I \quad (4.7)$$

**Demostración.** Debido al hecho que los espectros de  $K_1$  y  $K_2$  está en la mitad del plano izquierdo, ecuación (4.7) tiene una solución definida positiva  $P$ . Considere la siguiente función candidata de Lyapunov:  $V_0(\tilde{z}) = \varepsilon \tilde{z}^T P \tilde{z}$ . La derivación a lo largo de las soluciones de la ecuación (4.5) es:

$$\begin{aligned} \dot{V}_0 &= \varepsilon \frac{d}{dt} \tilde{z}^T P \tilde{z} + \varepsilon \tilde{z}^T P \frac{d}{dt} \tilde{z} \\ &= \tilde{z}^T (A^T P + PA) \tilde{z} + 2\varepsilon^2 (BH_1)^T P \tilde{z} \\ &\leq -\|\tilde{z}\|^2 + 2\varepsilon^2 \|BH_1\| \|P\| \|\tilde{z}\| \end{aligned} \quad (4.8)$$

Por que el control  $u$  puede hacer que la ecuación (4.1) tenga solución para algún  $t \in [0, T]$ ,  $\|H_1\|$  es acotado para algún tiempo finito  $T$ . Nosotros quizás concluimos que  $\|BH_1\| \|P\|$  es acotada.

$$\dot{V} \leq -\|\tilde{z}\|^2 + \bar{K}(\varepsilon) \|\tilde{z}\|$$

donde  $\bar{K}(\varepsilon) = 2\varepsilon^2 \sup_{t \in [0, T]} \|BH_1\| \|P\|$ . Es conocido que

$$\|\tilde{z}(t)\| > \bar{K}(\varepsilon) \quad (4.9)$$

entonces  $\dot{V}_0 < 0$ ,  $\forall t \in [0, T]$ . Así el tiempo total durante el cual  $\|\tilde{z}(t)\| > \bar{K}(\varepsilon)$  es finito. Sea  $T_k$  denota el intervalo de tiempo durante el cual  $\|\tilde{z}(t)\| > \bar{K}(\varepsilon)$ . Si únicamente los tiempos finitos que  $\tilde{z}(t)$  permanezca fuera del radio de la bola  $\bar{K}(\varepsilon)$  (y entonces vuelve a entrar),  $\tilde{z}(t)$  eventualmente permanecerá dentro de la bola. Si  $\tilde{z}(t)$  parta los tiempos infinitos de la bola, puesto que el tiempo total  $\tilde{z}(t)$  deja la bola finita

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k < \infty, \quad T_k \rightarrow 0 \quad (4.10)$$

Así  $\tilde{z}(t)$  es acotada por un segmento de argumento invariante. De la ecuación (4.6),  $\frac{d}{dt} \tilde{z}(t)$  es también acotada. Si definimos  $\|\tilde{z}_k(t)\|_Q$  como el error de seguimiento más grande durante  $T_k$ , la ecuación (4.10) y acotando  $\frac{d}{dt} \tilde{z}(t)$  implica que  $\lim_{k \rightarrow \infty} [\|\tilde{z}_k(t)\| - \bar{K}(\varepsilon)] = 0 \|\tilde{z}_k(t)\|$ ,

convergerá a  $\bar{K}(\varepsilon)$ . Por que  $\tilde{x} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varepsilon}I \end{bmatrix} \tilde{z}$ . Y  $\varepsilon < 1$ . Así  $\|\tilde{x}\|$  converge a la bola de radio  $\bar{K}(\varepsilon)$ . ■

**Propiedad 4.2** *En [37], ellos dieron una velocidad de convergencia del observador bajo la suposición de que  $\varepsilon \rightarrow 0$ . En esta sección  $\varepsilon$  puede ser una constante positiva. Puesto que el  $\sup_{t \in [0, T]} \|BH_1\|^T \|P\|$  es acotado, nosotros podemos seleccionar  $\varepsilon$  arbitrariamente pequeño para hacer que  $\bar{K}(\varepsilon)$  sea aun mas pequeño. Por eso el error del observador  $\tilde{x}$  puede ser arbitrariamente pequeño para  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Pero la ganancia es grande del observador  $(\frac{1}{\varepsilon})$  agrandará el ruido del observador, por eso  $\varepsilon$  debe seleccionarse tan grande como sea posible si la exactitud del observador  $\bar{K}(\varepsilon)$  esta dentro de la tolerancia.*

### 4.3. Control PD y velocidad en el observador

Así que el control PD con el observador de alta ganancia es

$$\tau = -K_p(x_1 - x_1^d) - K_d(\hat{x}_2 - x_2^d) + G(x) + T\dot{x} + D \quad (4.11)$$

donde  $x_1^d \in R^5$  es la posición deseada,  $x_2^d \in R^5$  es la velocidad deseada, en el caso de regular  $x_2^d = 0$ ,  $\hat{x}_2$  es la velocidad de aproximación por el observador de alta ganancia.

La conexión entre el control con la anti-oscilación y el control de la posición puede explicarse como sigue. Para el control con la anti-oscilación ecuación (3.16), la posición de control  $A_1$  y  $B_1$  son las perturbaciones, estas perturbaciones pueden disminuirse por la acción íntegral en el control PID. El modelo con anti-oscilación en la ecuación (3.16) es aproximado, pero el control con anti-oscilación en la ecuación (3.17) no utiliza este modelo. Este modelo es libre. Por eso el control con anti-oscilación ecuación (3.17) no puede omitirse la anti-oscilación completamente, pero se puede hacer que la vibración sea pequeña.

Para la posición de control ecuación (3.18), el control con anti-oscilación esta en términos  $D = [A_2, B_2, 0, 0, 0]^T$ , nosotros también lo consideramos como perturbación. El acoplamiento del control con la anti-oscilación puede compensarse con redes neuronales. El análisis de estabilidad de esta sección sólo es para la regulación de la posición.

Definimos el error de seguimiento como

$$\bar{x}_1 = x_1 - x_1^d, \quad \dot{\bar{x}}_1 = \hat{x}_2 - \dot{x}_1^d \quad (4.12)$$

el cual es el error entre la posición real de la grúa y la posición deseada,  $\hat{x}_1$  es el observador de alta-ganancia ecuación (4.3). Para esta sección, nosotros propusimos la siguiente ley de control con un PD:

$$\tau = -K_p(x_1 - x_1^d) - K_d(\hat{x}_2 - \dot{x}_2^d) + G(x) + T\dot{x} + D \quad (4.13)$$

donde  $K_p, K_d \in R^{n \times n}$  son las matrices constantes positivas (Así que deseamos un control PD), y  $x_1^d$  es la posición deseado.

· Primero nosotros consideramos el problema de regulación, es supuesto que  $\dot{x}_1^d = 0$ . Así que el control PD es

$$u_r = -K_p\bar{x}_1 - K_d\hat{x}_2 + G(x) + T\dot{x} + D \quad (4.14)$$

Nosotros asumimos la estimación de velocidad del observador de alta ganancia ecuación (4.3) es bastante rápido como:

**A1:**

$$\|\tilde{x}_2(t)\| \leq \frac{\lambda_{\min}(K_d)}{\lambda_{\max}(K_d - F)} \|x_2(t)\|, t \in [0, T].$$

**Propiedad 4.3** *Esta suposición no es difícil si nosotros seleccionamos  $K_d$ , y el observador de alta-ganancia ecuación (4.3) quizás converga al mismo hecho si nosotros seleccionamos  $\varepsilon$  muy pequeño.*

**Teorema 4.4** *Bajo la suposición de A1, para cualquiera,  $t \in [0, T]$   $T > t_0$ . Basado en el regulador ecuación (4.14) y el observador en la ecuación (4.3), el punto de equilibrio  $(\bar{x}_1, \dot{\bar{x}}_1) = (0, 0)$  del sistema en la ecuación (4.1) es asintóticamente estable.*

**Demostración.** Nosotros proponemos la siguiente función candidata de Lyapunov para el sistema ecuación (4.1):

$$V_2(x_1, \bar{x}_1, \tilde{z}) = \frac{1}{2} \dot{x}_1^T M \dot{x}_1 + \frac{1}{2} \bar{x}_1^T K_p \bar{x}_1 \quad (4.15)$$

donde  $M$  es la matriz de inercia, ahora de la propiedad 1,  $M = M^T > 0$ ,  $F = F^T > 0$ . Utilizando las ecuaciones (4.1) y (4.14), la derivada con respecto al tiempo de  $\frac{1}{2}\dot{x}_1^T M \dot{x}_1$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \dot{x}_1^T M \dot{x}_1 \right) &= \dot{x}_1^T M \ddot{x}_1 + \frac{1}{2} \dot{x}_1^T \dot{M} \dot{x}_1 \\ &= \dot{x}_1^T M \left\{ -M(x_1)^{-1} \left[ C(x_1, x_2) \dot{x}_1 + G(x_1) + F \dot{x}_1 \right] + M(x_1)^{-1} u_r \right\} + \frac{1}{2} \dot{x}_1^T \dot{M} \dot{x}_1 \\ &= -\frac{1}{2} \dot{x}_1^T \left[ 2C(x_1, x_2) - \dot{M} \right] \dot{x}_1 - \dot{x}_1^T F \dot{x}_1 - \dot{x}_1^T K_p \bar{x}_1 - \dot{x}_1^T (K_d - F) \hat{x}_2 \end{aligned}$$

De la propiedad 3.2, el primer término es cero. Además la derivada con respecto al tiempo a lo largo de las soluciones de la ecuación (4.15) es:

$$\dot{V}_2 = -\dot{x}_1^T F \dot{x}_1 - \dot{x}_1^T K_p \bar{x}_1 - \dot{x}_1^T (K_d - F) \hat{x}_2 + \dot{\bar{x}}_1^T K_p \bar{x}_1$$

Por que  $\dot{\bar{x}}_1^T = \dot{x}_1^T$  y la ecuación (4.8)

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= -\dot{x}_1^T F \dot{x}_1 - \dot{x}_1^T (K_d - F) \hat{x}_2 \\ &= -x_2^T K_d x_2 + x_2^T (K_d - F) \tilde{x}_2 \\ &\leq -\lambda_{\min}(K_d) \|x_2\|^2 + \lambda_{\max}(K_d - F) \|x_2\| \|\tilde{x}_2\| \end{aligned}$$

En este punto, suponemos que **A1** implica:  $\dot{V}_2 \leq 0$ . Ahora, nosotros examinamos las soluciones en el conjunto  $\Omega = \left\{ \left( \tilde{x}_1, \dot{\tilde{x}}_1, z \right) \mid \dot{x}_1 = x_2 = 0; z = 0 \right\}$ , entonces el sistema en la ecuación (4.1) se simplifica a:

$$\begin{aligned} 0 &= x_2 \\ 0 &= f(x) + g(x_1) \left[ -K_p(x_1 - x_1^d) - K_d \dot{\hat{x}}_1 + G(x_1) + F \dot{\hat{x}}_1 \right] \\ 0 &= \varepsilon^2 \left[ f(x) + g(x_1) \left( -K_p(x_1 - x_1^d) - K_d \dot{\hat{x}}_1 + G(x_1) + F \dot{\hat{x}}_1 \right) \right] \end{aligned}$$

Substituyendo los valores de  $f(x)$  y  $g(x)$  en una de las ultimas dos ecuaciones (qué es el mismo) surge en:

$$\begin{aligned} 0 &= M(x_1)^{-1} \left[ -C(x_1, x_2) \dot{x}_1 - G(x_1) - F \dot{\hat{x}}_1 \right] \\ &+ M(x_1)^{-1} \left[ -K_p(x_1 - x_1^d) - K_d \dot{\hat{x}}_1 + G(x_1) + F \dot{\hat{x}}_1 \right] \end{aligned}$$

Multiplicando ambos lados por  $M(x_1)$ :

$$\begin{aligned} C(x_1, x_2)\dot{x}_1 + G(x_1) + F\dot{x}_1 + K_p(x_1 - x_1^d) \\ + K_d(\dot{\hat{x}}_1 - \dot{x}_1^d) - G(x_1) - F\dot{\hat{x}}_1 = 0 \end{aligned} \quad (4.16)$$

Ahora, aplicamos el principio de La Salle. En el conjunto  $\Omega$  esto implica que  $z = 0 \Rightarrow x_1 = \hat{x}_1$  y  $x_2 = \hat{x}_2$ , también que  $\dot{x}_2 = 0 = \dot{x}_1 \Rightarrow x_1$  es una constante y  $\ddot{x}_1 = 0$ . Aplicando esto en la ecuación (4.16):

$$C(x_1, x_2)\dot{x}_1 + F\dot{x}_1 + K_p(x_1 - x_1^d) + K_d\dot{x}_1 - F\dot{x}_1 = 0 \quad (4.17)$$

y finalmente:

$$K_p(x_1 - x_1^d) = 0 \Rightarrow x_1 = x_1^d$$

El equilibrio  $x_1 = x_1^d$  es asintóticamente estable. ■

· Segundo, nosotros discutimos el problema del seguimiento de la trayectoria ( $\dot{x}_1^d \neq 0$ ). Se asume que este camino es acotado, así como sus derivadas. Para este propósito, el control PD es:

$$u_t = -K_p\bar{x}_1 - K_d\dot{\bar{x}}_1 + G(x_1) + F\hat{x}_2 + M\ddot{x}_1^d \quad (4.18)$$

Antes de demostrar la estabilidad del sistema en lazo cerrado, algún trabajo algebraico se hace para hacer la prueba más simple. De la ecuación (4.2) nosotros obtenemos:

$$\ddot{x}_1 = M^{-1}[-C(x_1, x_2)\dot{x}_1 - G(x_1) - F\dot{x}_1] + M^{-1}u_t \quad (4.19)$$

De la ecuación (4.19)

$$u_t = M\ddot{x}_1 + C(x_1, x_2)\dot{x}_1 + G(x_1) + F\dot{x}_1 \quad (4.20)$$

Comparando la ecuación (4.20) y (4.18)

$$\begin{aligned} M \left( \ddot{\bar{x}}_1 + \dot{\tilde{x}}_2 \right) &= -C(x_1, x_2)\dot{x}_1 - (F + K_d)\dot{\bar{x}}_1 - K_p\bar{x}_1 \\ &= -C(x_1, x_2)\dot{\bar{x}}_1 - C(x_1, x_2) \left( x_2 - \bar{x}_1 \right) - (F + K_d)\dot{\bar{x}}_1 - K_p\bar{x}_1 \end{aligned} \quad (4.21)$$

donde  $\ddot{\bar{x}}_1 := \dot{\hat{x}}_2 - \ddot{x}_1^d$ ,  $\bar{x}_1$  y  $\dot{\bar{x}}_1$  son definidas como en la ecuación (4.12).

Nosotros asumimos la estimación de la velocidad del observador de alta ganancia ecuación (4.3) por conveniencia es rápido como:

**A2:**

$$\|\tilde{x}_2(t)\| + \frac{\lambda_{\max}(M)}{\lambda_{\max}(C)} \left\| \dot{\tilde{x}}_2(t) \right\| \leq \frac{\lambda_{\min}(F + K_d)}{\lambda_{\max}(C)} \|\bar{x}_2(t)\| - \left\| \dot{x}_1^d(t) \right\|$$

para  $t \in [0, T]$ .

**Propiedad 4.5** Comparado con la suposición **A1**, esta suposición también necesita la derivada del error de estimación de velocidad por que el problema de seguimiento. También requiere que la trayectoria debe ser suave, entonces,  $\left\| \dot{x}_1^d \right\|$  no puede ser grande.

**Teorema 4.6** Dentro de la suposición de **A2**, para algún  $t \in [0, T]$   $T > t_0$ . Basado en el controlador de seguimiento ecuación (4.18) y el observador ecuación (4.3), el punto de equilibrio  $(\bar{x}_1, \dot{\bar{x}}_1) = (0, 0)$  del sistema ecuación (4.1) es asintóticamente estable.

**Demostración.** Usamos la función candidata de Lyapunov como

$$V_3(\bar{x}_1, \dot{\bar{x}}_1, \tilde{z}) = \frac{1}{2} \dot{\bar{x}}_1^T M \dot{\bar{x}}_1 + \frac{1}{2} \bar{x}_1^T K_p \bar{x}_1$$

Usando la propiedad 3.2, ecuaciones (4.1), (4.21) y (4.18), la derivada con respecto al tiempo es  $\frac{1}{2} \dot{\bar{x}}_1^T M \dot{\bar{x}}_1$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \dot{\bar{x}}_1^T M \dot{\bar{x}}_1 \right) &= \dot{\bar{x}}_1^T M \ddot{\bar{x}}_1 + \frac{1}{2} \dot{\bar{x}}_1^T \dot{M} \dot{\bar{x}}_1 \\ &= \dot{\bar{x}}_1^T \left[ -C(x_1, x_2) \dot{\bar{x}}_1 - C(x_1, x_2) \left( x_2 - \dot{\bar{x}}_1 \right) - \bar{F} \dot{\bar{x}}_1 - K_p \bar{x}_1 \right] - \dot{\bar{x}}_1^T M \dot{\tilde{x}}_2 + \frac{1}{2} \dot{\bar{x}}_1^T \dot{M} \dot{\bar{x}}_1 \\ &= -\dot{\bar{x}}_1^T C(x_1, x_2) \left( x_2 - \dot{\bar{x}}_1 \right) - \dot{\bar{x}}_1^T \bar{F} \dot{\bar{x}}_1 - \dot{\bar{x}}_1^T K_p \bar{x}_1 - \dot{\bar{x}}_1^T M \dot{\tilde{x}}_2 \end{aligned}$$

donde  $\bar{F} := F + K_d$ . Por eso la derivada con respecto al tiempo, la solución de la ecuación (4.15) es:

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 &= -\dot{\bar{x}}_1^T C(x_1, x_2) \left( x_2 - \dot{\bar{x}}_1 \right) - \dot{\bar{x}}_1^T \bar{F} \dot{\bar{x}}_1 - \dot{\bar{x}}_1^T K_p \bar{x}_1 + \dot{\bar{x}}_1^T K_p \bar{x}_1 - \dot{\bar{x}}_1^T M \dot{\tilde{x}}_2 \\ &\leq \dot{\bar{x}}_1^T C(x_1, x_2) \left( -\dot{x}_1^d - \tilde{x}_2 \right) - \dot{\bar{x}}_1^T \bar{F} \dot{\bar{x}}_1 - \dot{\bar{x}}_1^T M \dot{\tilde{x}}_2 \\ &\leq -\dot{\bar{x}}_1^T \bar{F} \dot{\bar{x}}_1 + \dot{\bar{x}}_1^T (-C) \left( \dot{x}_1^d + \tilde{x}_2 \right) + \dot{\bar{x}}_1^T (-M) \dot{\tilde{x}}_2 \\ &\leq -\lambda_{\min}(\bar{F}) \left\| \dot{\bar{x}}_1 \right\|^2 + \left\| \dot{\bar{x}}_1 \right\| \left[ \|C\| \left( \left\| \dot{x}_1^d \right\| + \|\tilde{x}_2\| \right) + \|M\| \left\| \dot{\tilde{x}}_2 \right\| \right] \end{aligned}$$

Utilizando la suposición **A2** implica que:  $\dot{V}_3 \leq 0$ . Qué demuestra la estabilidad del sistema en lazo cerrado. Aplicando el principio de invariancia de La Salle como en el teorema 2, nosotros concluimos que  $x_1 = x_1^d$  es asintóticamente estable. ■

#### 4.4. Control PD y velocidad en el observador con compensación neuronal

Sin velocidad  $x_2$  sin fricción y la gravedad son conocidas, el controlador normal PD debería combinarse con la estimación de la velocidad y neuro compensación.

$$\tau = -K_p(x_1 - x_1^d) - K_d(\hat{x}_2 - x_2^d) + \hat{W}_t \sigma(\hat{V}_t s) \quad (4.22)$$

donde  $s = (x_1^T, \hat{x}_2^T)^T$ ,  $x_2^d = 0$ . Del Teorema 3.5 nosotros conocemos el observador del alta ganancia ecuación (4.3), se puede hacer  $(\hat{x}_2 - x_2)$  converga a conjunto residual, nosotros podemos escribir  $x_2 = \hat{x}_2 + \delta$ , donde  $\delta$  es acotado como  $\delta^T \Lambda_\delta \delta \leq \bar{\eta}_\delta$ . Ahora definimos el error de seguimiento como ( $x_2^d = 0$ ):

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= x_1 - x_1^d \\ \tilde{x}_2 &= \hat{x}_2 - \bar{x}_2 - \delta \end{aligned} \quad (4.23)$$

**Teorema 4.7** *Si las leyes de actualización para los pesos de las redes neuronales ecuación (3.20) es*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{W}_t &= -K_w \sigma(V_t s) \tilde{x}_2^T \\ \frac{d}{dt} \hat{V}_t &= -K_v s W^* D_\sigma^T \tilde{x}_2^T \end{aligned} \quad (4.24)$$

donde  $K_w$ ,  $K_v$  y  $\Lambda_3$  son matrices definidas positivas, y  $K_d$  satisface

$$K_d > (\Lambda_g^{-1} + \Lambda_\sigma^{-1} + \Lambda_\delta^{-1}) \quad (4.25)$$

entonces el control PD con compensación neuronal ecuación (4.22), puede hacer que el error de seguimiento sea estable. El error de seguimiento promedio  $\bar{x}_2$  converge a

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \|\bar{x}_2\|_{Q_1}^2 dt \leq \bar{\eta}_g + \bar{\eta}_\sigma + 2\bar{\eta}_\delta \quad (4.26)$$

donde  $Q_1 = K_d - (\Lambda_g^{-1} + \Lambda_\sigma^{-1} + \Lambda_\delta^{-1})$ .

**Demostración.** La función propuesta de Lyapunov es

$$V_2 = \frac{1}{2}\tilde{x}_2^T M \tilde{x}_2 + \frac{1}{2}\tilde{x}_1^T K_p \tilde{x}_1 + \frac{1}{2}tr \left( \tilde{W}_t^T K_w^{-1} \tilde{W}_t \right) + \frac{1}{2}tr \left( \tilde{V}_t^T K_v^{-1} \tilde{V}_t \right) \quad (4.27)$$

donde  $K_w$  y  $K_v$  son algunas matrices constantes definidas positivas. Usando las ecuaciones (3.6), (4.22) y (??), entonces el sistema de lazo cerrado es

$$M\dot{\tilde{x}}_2 = -C\tilde{x}_2 - K_p\tilde{x}_1 - K_d\tilde{x}_2 + \hat{W}_t\sigma(\hat{V}_t s) - W^*\sigma(V^*s) - \eta_g \quad (4.28)$$

La derivada en la ecuación (4.27) es

$$\dot{V}_2 = \tilde{x}_2^T M \dot{\tilde{x}}_2 + \frac{1}{2}\tilde{x}_2^T \dot{M} \tilde{x}_2 + \tilde{x}_2^T K_p \dot{\tilde{x}}_1 + tr \left( \dot{\tilde{W}}_t^T K_w^{-1} \tilde{W}_t \right) + tr \left( \tilde{V}_t^T K_v^{-1} \frac{d}{dt} \tilde{V}_t \right) \quad (4.29)$$

Utilizando la ecuación (4.28) y la ecuación (3.35) tenemos

$$\begin{aligned} \tilde{x}_2^T M \dot{\tilde{x}}_2 &= -\tilde{x}_2^T M \dot{x}_2^d - \tilde{x}_2^T C \tilde{x}_2 - \tilde{x}_2^T C x_2^d - \tilde{x}_2^T K_p \tilde{x}_1 - \tilde{x}_2^T K_d \tilde{x}_2 \\ &\quad - \tilde{x}_2^T \left[ \tilde{W}_t \sigma(V_t s) + W^* D_\sigma \tilde{V}_t s + \nu_\sigma + \eta_g \right] \end{aligned}$$

De la propiedad 2,  $x^T \left[ \dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q}) \right] x = 0$ , la ecuación (4.29) es

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= -\tilde{x}_2^T M \dot{x}_2^d - \tilde{x}_2^T C x_2^d - \tilde{x}_2^T K_d \tilde{x}_2^T - \tilde{x}_2^T \left[ \nu_\sigma + \eta_g \right] \\ &\quad + \tilde{x}_2^T \delta + tr \left[ \left( K_w^{-1} \frac{d}{dt} \tilde{W}_t - \sigma(V_t s) \tilde{x}_2^T \right) \tilde{W} \right] + tr \left[ \left( K_v^{-1} \frac{d}{dt} \tilde{V} - s W^* D_\sigma \tilde{x}_2^T \right) \tilde{V} \right] \end{aligned}$$

En vista de la desigualdad de matrices ecuación (3.43),  $\tilde{x}_2^T \delta$  se puede concluir como  $\tilde{x}_2^T \delta \leq \tilde{x}_2^T \Lambda_\delta^{-1} \tilde{x}_2 + \bar{\eta}_\delta$ . Puesto que  $x_2^d = \dot{x}_2^d = 0$ , usando la regla de aprendizaje ecuación (4.24)

$$\dot{V}_2 \leq -\tilde{x}_2^T Q_1 \tilde{x}_2 + \bar{\eta}_g + \bar{\eta}_\sigma + \bar{\eta}_\delta \quad (4.30)$$

donde  $Q_1 = K_d - (\Lambda_g^{-1} + \Lambda_\sigma^{-1} + \Lambda_\delta^{-1})$ , de la ecuación (4.25) nosotros conocemos  $Q > 0$ .

La ecuación (4.30) se puede representar como

$$\dot{V}_2 \leq -\lambda_{\min}(Q) \|\tilde{x}_2\|^2 + \eta_g^T \Lambda_g \eta_g + \nu_\sigma^T \Lambda_\sigma \nu_\sigma + \delta^T \Lambda_\delta \delta$$

$V_2$  es una función de Lyapunov-ISS. Utilizando el teorema 1 de [42], con las cotas de  $\eta_g$ ,  $\nu_\sigma$  y  $\bar{\eta}_\delta$ , del error de seguimiento  $\|\tilde{x}_2\|$  es estable. Integrando la ecuación (4.30) de 0 hasta  $T$

$$\begin{aligned} \int_0^T \tilde{x}_2^T Q \tilde{x}_2 dt &\leq V_{2,0} - V_{2,T} + (\bar{\eta}_g + \bar{\eta}_\sigma + \bar{\eta}_\delta) T \\ &\leq V_{2,0} + (\bar{\eta}_g + \bar{\eta}_\sigma + \bar{\eta}_\delta) T \end{aligned}$$

Puesto que  $\|\bar{x}_2\|_Q^2 = \|\tilde{x}_2\|_Q^2 + \bar{\eta}_\delta$ , la ecuación (4.26) es estabilizada. ■

**Propiedad 4.8** *El error de seguimiento convergerá al radio de la bola en la cota del límite superior  $(\bar{\eta}_g + \bar{\eta}_\sigma)$ , y se influencia por las matrices conocidas anteriormente  $W^*$ . Del teorema 3.5 muestra que  $W^*$  no influencia en la propiedad de estabilidad, nosotros podemos seleccionar algún valor para  $W^*$  al principio. Del Teorema 3.5 nosotros sabemos que el algoritmo ecuación (3.27) puede hacer el error de identificación converga en.  $W^*$  puede seleccionarse siguiendo los pasos fuera de línea:*

1. *Empezar de cualquier valor inicial para  $W^*$*
2. *Hacer la identificación en línea con  $W^*$*
3. *Permitir  $W_t$  como una nueva condición inicial, entonces,  $W^* = W_t$*
4. *Si el error de identificación disminuye, repita el proceso de identificación, ir al paso 2. Por otra parte, parar la identificación, ahora  $W_t$  es el valor final para  $W^*$ .*

## 4.5. Comparación con los experimentos

La oscilación del control para sistemas de la grúa es implementado en el *InTeCo* para grúas viajeras para el experimento [18], como se ve en la Figura 3.2. Los parámetros físicos de la grúa viajera para el experimento son determinados con las siguientes datos:

$$M_r = 6,5kg, \quad M_c = 0,8kg, \quad M_m = 1,3kg, \quad I = 0,01kg \cdot m^2$$

El riel mide de largo 150cm. La tarjeta es A/D-D/A microprocesador Xilinx FPGA, qué es multifuncional cronometrando analógico y digital la tarjeta de I/O esta diseñada para la adquisición de datos en tiempo real y control en plataforma Windows XP. La tarjeta se instala en una computadora central PC Pentium-III 500MHz. Debido a las operaciones en tiempo real de la tarjeta de adquisición de datos Xilinx FPGA sin meter ruidos causados en Windows por el sistema del tiempo, el programa de control se ejecuta en Windows XP con Matlab 6.5/Simulink. Cada uno de los controladores se implemento con una frecuencia de muestreo de  $1kHz$ .

Hay muchas técnicas para controlar los sistemas de la grúa viajera. La mayoría de ellos el modelo base, como en [12], [33], [36] y [44]. El control PD con compensación neuronal propuesto en este capítulo es un modelo libre. En [15] y [25], se discuten los controladores PD. Pero el compensador en [15] utiliza el modelo exacto del sistema de la grúa. Ahí existe el error en estado constante [25], por que en alguna compensación del control PD, la explicación de este problema puede encontrarse en [24]. Nosotros comparamos nuestro método con algunos controladores en modelos libres, como el control PD [25], el control PID [24], control sin anti-oscilación PD [15].

Primero, nosotros discutimos el control anti-oscilación ecuación (3.17). Por que el control anti-oscilación afecta en el control de la posición (ver el modelo de control de posición ecuación (3.18)). Muchas grúas viajeras no incluyen la técnica del anti-oscilación como en [15], [25], [33], [44]. Comparado con su controlador, nosotros usamos el PID ecuación (3.17) el control para disminuir la oscilación de la carga, los parámetros de control del PID son

$$\begin{aligned} k_{pa2} &= 2,0, & k_{da2} &= 15, & k_{ia2} &= 0,03 \\ k_{pb2} &= 12, & k_{db2} &= 8, & k_{ib2} &= 0,7 \end{aligned}$$

Los ángulos resultantes se muestran en la Figura 3.3, para el control de la posición sin la anti-oscilación, y la Figura 3.4 para la posición del control con anti-oscilación.

Segundo, nosotros discutimos el control en la posición ecuación (3.19). Por el teorema 3.5 nosotros conocemos el control para asegurar la estabilidad,  $K_d$  debe ser bastante grande tal que  $K_d > \Lambda_\mu^{-1} + \Lambda_\sigma^{-1}$ . Como nosotros no sabemos los límites superiores, nosotros seleccionamos un valor grande para  $K_{d1} = \text{diag}[80, 80, 0, 0, 10]$ . La posición de la ganancia de retroalimentación no nos afecta en la estabilidad, pero debería ser la ganancia positiva, nosotros elegimos  $K_{p1} = \text{diag}[5, 5, 0, 0, 1]$ . Las redes neuronales se construyen de la siguiente forma:  $\widehat{W}_t \in R^{5 \times 20}$ ,  $\widehat{V}_t \in R^{20 \times 5}$ ,  $\sigma(s) = [\sigma_1 \cdots \sigma_{20}]^T$ , la función Gaussiana es

$$\sigma_i = \exp \left\{ - \sum_{i=1}^5 (x_i - m_i)^2 / 100 \right\}$$

donde se propaga  $\sigma_i$  se evalúa en  $\sqrt{50}$  y el centro  $m_i$  es un número aleatorio entre 0 y 1. La ley de aprendizaje en la ecuación (3.37), con  $K_w = 10$ ,  $K_v = 5$ . La posición de la grúa montada se

elige con una raíz cuadrada. El resultado de las posiciones en la grúa ya montada son como se muestran en la Figura 3.5. La regulación resulta del control PD sin la compensación neuronal [25] como se muestran en la Figura 3.6. El control con PID ( $K_{d1} = \text{diag}[80, 80, 0, 0, 10]$ ,  $K_{p1} = \text{diag}[5, 5, 0, 0, 1]$ ,  $K_{i1} = \text{diag}[0, 25, 0, 25, 0, 0, 0, 1]$ ) se muestra en la Figura 3.7.

#### 4.5.1. Control PD sin Redes Neuronales

Sabemos que la señal del control a la salida del controlador esta relacionada con la entrada del controlador mediante una constante proporcional, tambien sabemos que el controlador en serie es del tipo proporcional derivativo (PD), su funcion de transferencia es

$$G_c(s) = k_p + k_D s$$

estos nos indica que la interpretacion en el dominio del tiempo del control PD, en efecto el control PD sobre la respuesta transitoria de un sistema de control se puede investigar al referirse a las respuestas en el tiempo. En la Figura 4.1, nos muestra claramente como la posición de la grua en tres dimensiones sigue la posición deseada en  $X$ , tambien sin Redes Neuronales en la posición en  $Y$ , como se muestra en la Figura 4.2.

#### 4.5.2. Control PID

El controlador  $PD$  puede anadir amortiguamiento a un sistema, pero no afecta la respuesta en estado estable. El controlador  $PI$  pude mejorar la estabilidad relativa y el error en estado estable al mismo tiempo, pero el tiempo de levantamiento se incrementa. Esto nos lleva a emplear un controlador  $PID$  para que se empleen las mejores características de los controladores  $PI$  y  $PID$ .

La funcion de transferencia del controlador  $PID$  es:

$$G_c(s) = k_p + k_D s + \frac{k_I}{s}$$

Con control  $PID$  nuestro sistema se comporta en los experimentos como se pueden observar en las Figuras 4.3, 4.5, 4.4, 4.6. El error es minimo, sin embargo aun necesitamos una etapa

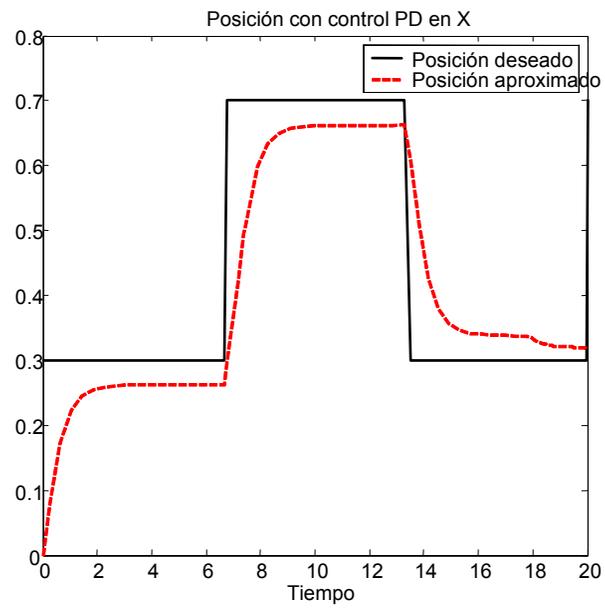


Figura 4.1: Posición de control en el eje X

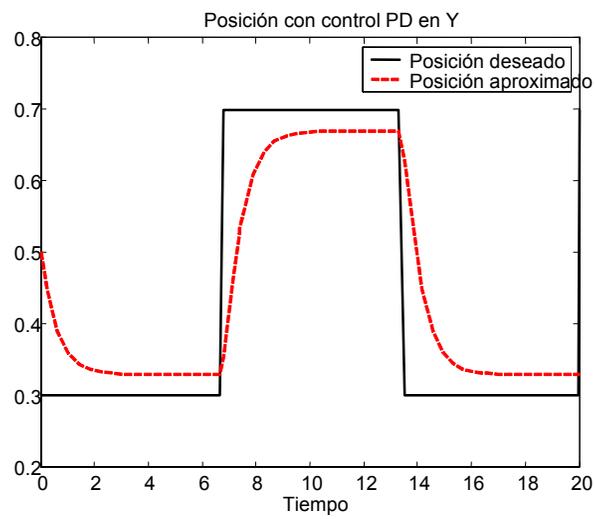


Figura 4.2: Posición de control en el eje Y

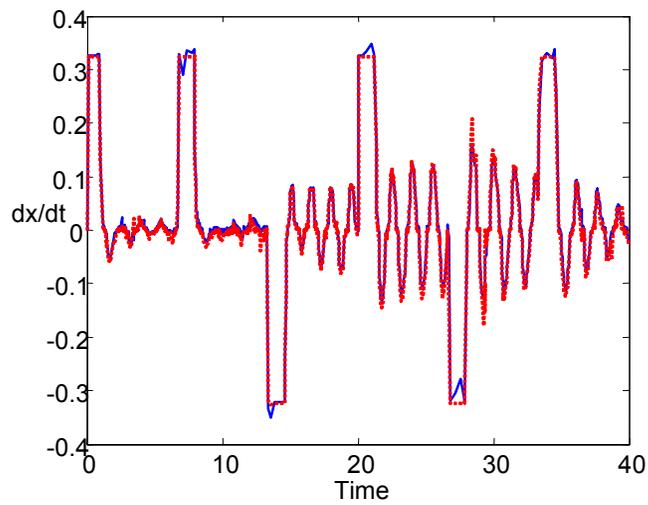


Figura 4.3: Velocidad en el eje X

mas para mejorar. En la primer figura se muestra como se comporta la velocidad con respecto al tiempo en la posición  $X$ , la posición en  $X$ ,  $Y$  y el angulo en  $X$

### 4.5.3. Control PD con Observador y Redes Neuronales

El proceso de los experiemientos en tiempo real con control PD con observador y NN, es para mejorar la incertidumbre que tenemos para que nuestro sistema o modelo de la grúa en tres dimensiones siga de una manera efectiva sin tener algun problema y la idea es minimizar el error. En las Figuras 4.7, 4.8, 4.9, 4.10, 4.11, 4.12, nos muestran como la velocidad en  $X$ ,  $Y$ , la poscición en  $X$ , la posición en  $Y$  y finalmente el angulo en  $X$ , siguen nuestro modelo propuesto en los experimentos en tiempo real.

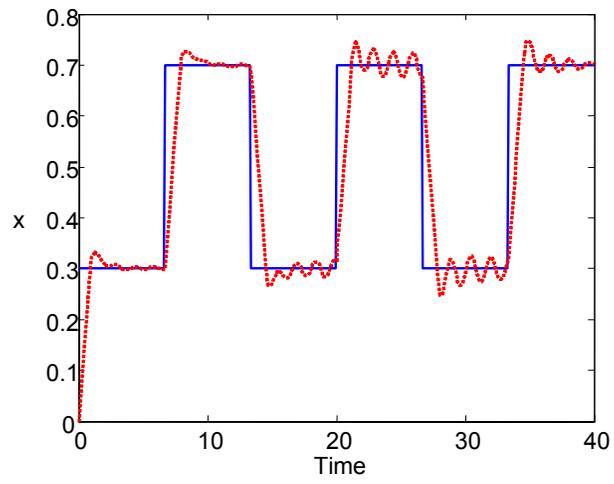


Figura 4.4: Posición en el eje X

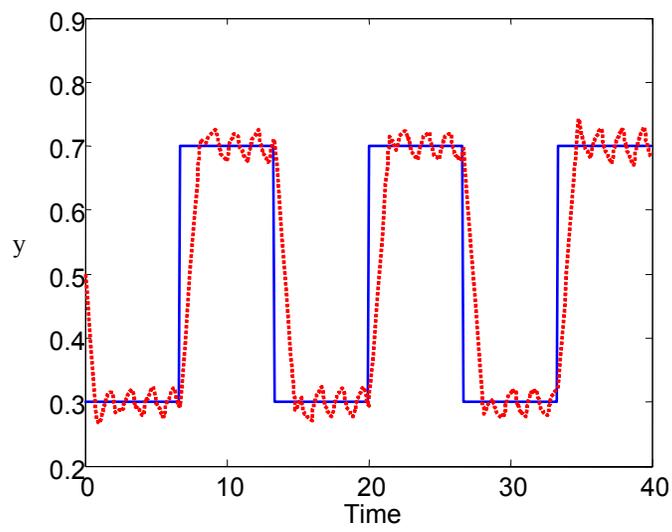


Figura 4.5: Posición en el eje Y

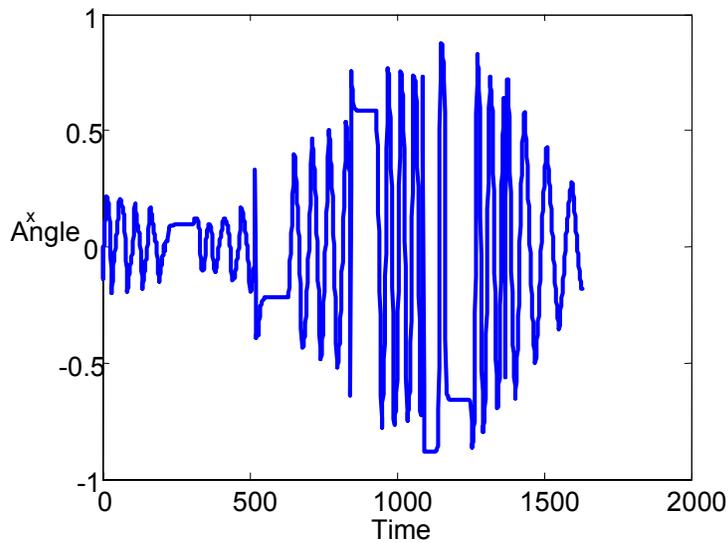


Figura 4.6: Angulo de control en X

#### 4.5.4. Control PD con Observador y Redes Neuronales sin angulo

En la Figura 4.13 y 4.14 se muestran como el control PD con observador y Redes Neuronales no sigue la entrada y se puede observar como se comporta el sistema con angulo y sin angulo.

Claramente, el control PD con la compensación neuronal puede compensar las incertidumbres con éxito como la fricción, gravedad y el acoplamiento de anti-oscilación. Por que el controlador PID no tiene mecanismo adaptable, no funciona bien por el acoplamiento anti-oscilación. Por otro lado, el compensador neuronal puede ajustar su acción de control. De otra manera, el control PID es mas rápido que el control PD con compensación neuronal en el caso de pequeñas acoplamientos anti-oscilación.

La estructura del compensador neuronal es muy importante. Los siguientes pasos son útiles para la aplicación.

1. Las constantes de la función Gaussiana en la ecuación (3.19) son cambiados por simu-

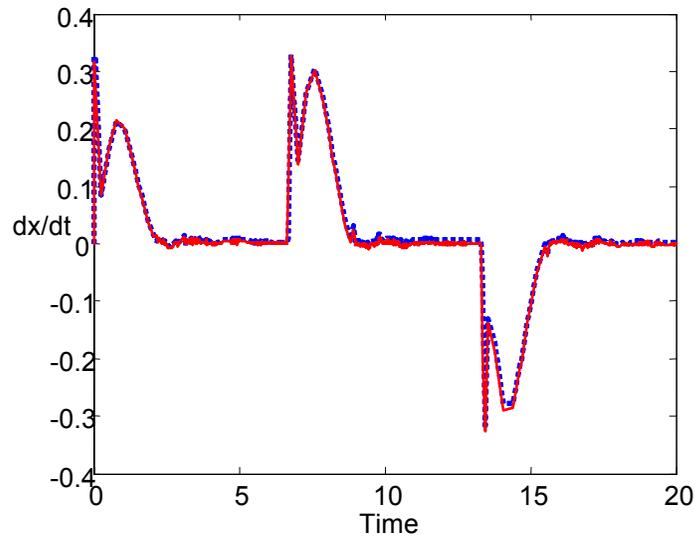


Figura 4.7: Velocidad con control PD con Observador y NN en el eje X

laciones o experimentos. De la teoría de las redes neuronales conocemos que la forma de la función Gaussiana no influye en la estabilidad de la red neuronal, pero en un caso especial en algunos procesos no lineales algunas funciones tienen mejor habilidades de aproximación.

2. Las dimensiones de las matrices en los pesos  $\widehat{W}_t$ ,  $\widehat{V}_t$  son problemas en la estructura para las redes neuronales. Se sabe bien que aumentando la dimensión de los pesos pueden causar el problema de traslaparse y dar mal peso al cálculo de las matrices. Cuál es la mejor dimensión de los pesos todavía es un problema abierto para la sociedad de las redes neuronales. En este ejemplo nosotros usamos 20 nodos ocultos. Puesto que es difícil de obtener la estructura de la neurona del conocimiento anterior, nosotros podemos poner varios neuro identificadores en paralelo y podemos seleccionar uno de los mejores cambiando el algoritmo. Ésta es otra manera de encontrar una estructura apropiada para los neuro identificadores.

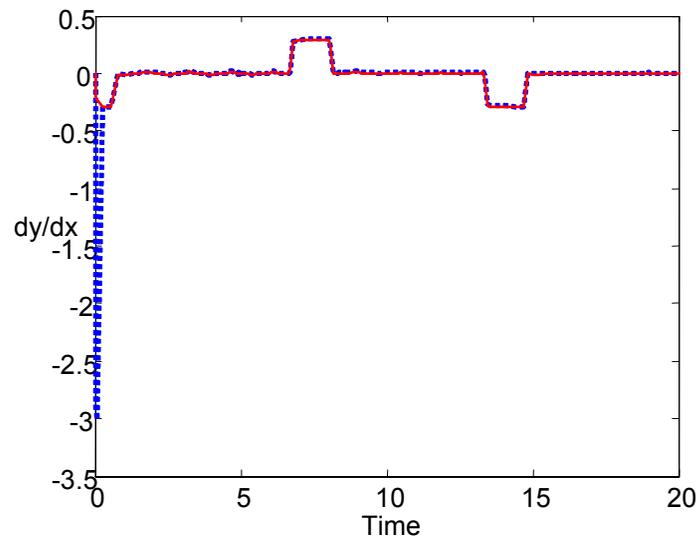


Figura 4.8: Velocidad con control PD con Observador y NN en el eje Y

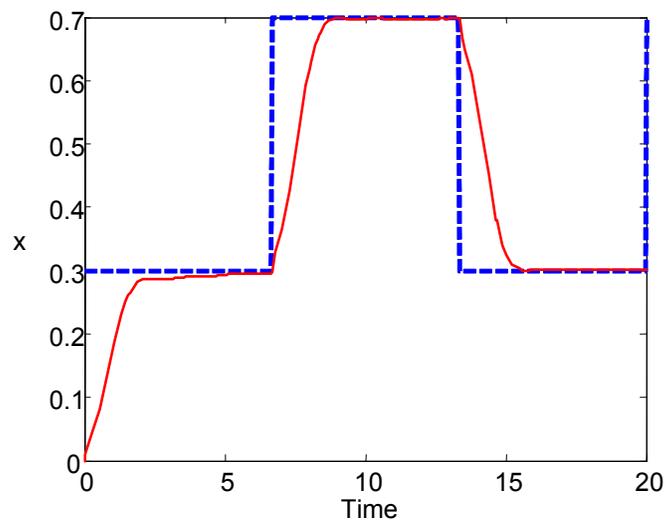


Figura 4.9: Posición con control PD con Observador y NN en el eje X

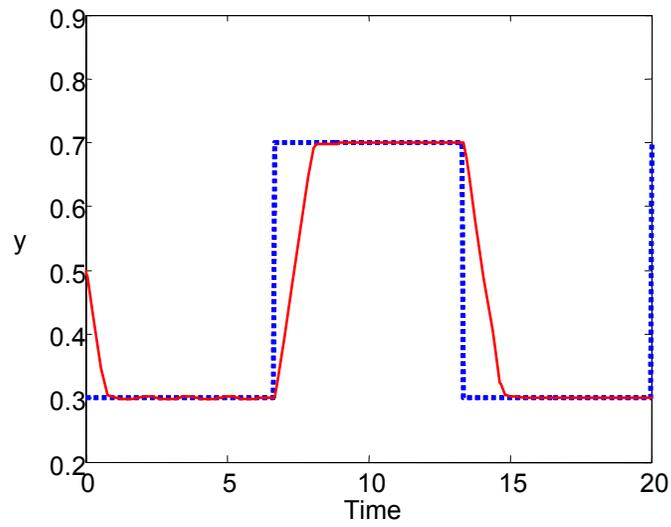


Figura 4.10: Posición con control PD con Observador y NN en el eje Y

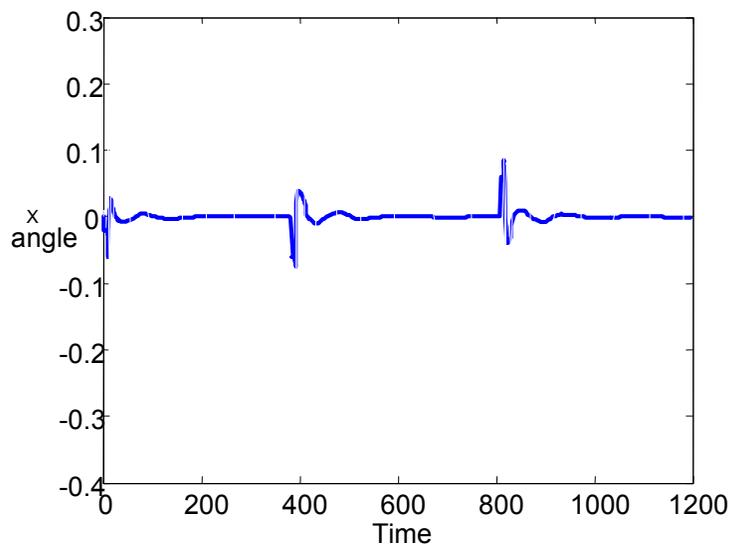


Figura 4.11: Ángulo con control PD con Observador y NN en X

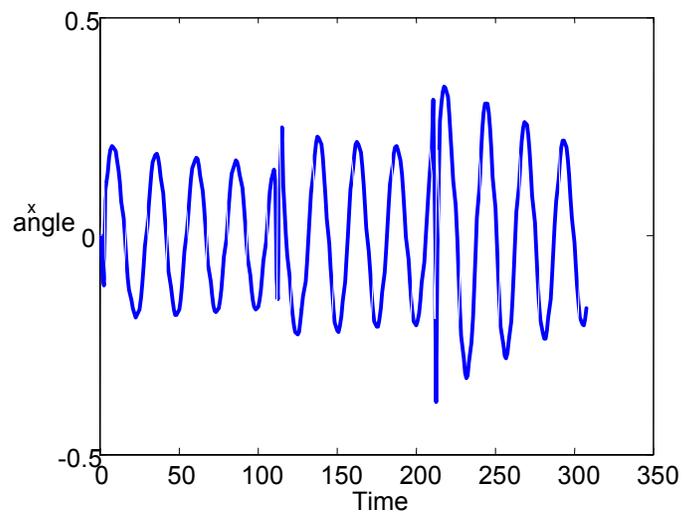


Figura 4.12: Angulo con control PD con Observador y NN en Y

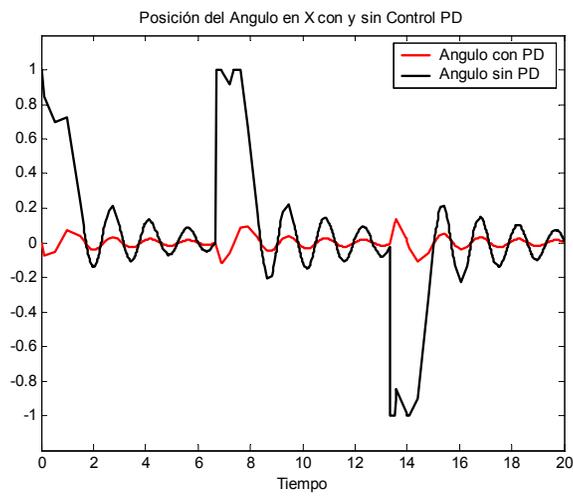


Figura 4.13: Angulo de la Grúa en X con control PD

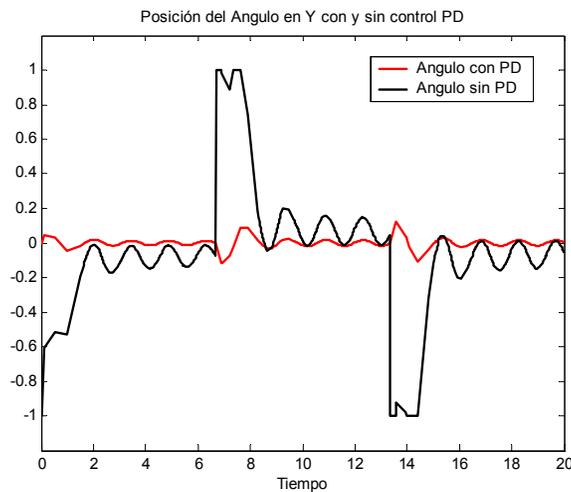


Figura 4.14: Angulo de la Grúa en Y con control PD

3. Las ganancias de aprendizaje  $K_w$  y  $K_v$  influirán en la velocidad de aprendizaje, las ganancias muy grandes pueden causar la inestabilidad de aprendizaje, las ganancias muy pequeñas pueden hacer un proceso de aprendizaje lento.

## 4.6. Conclusiones del capítulo

- Un observador de alta ganancia de orden reducido es cuando no estimas todos los estados y alta ganancia es debido al sistema que no necesariamente necesitas conocerlo así que en nuestro sistema. Los observadores de alta ganancia se han usado en salidas de control no lineal retroalimentadas, además los observadores de alta ganancia han extendido la banda de control esto es importante para el estudio de la robustez del diseño del control, también se modela la dinámica más rápido en altas frecuencias.
- La grúa en tres dimensiones se lleva aun punto central de la grúa para tener libertad en los tres ejes parte positiva y parte negativa, con la finalidad de obtener una referencia en los movimientos de los ejes sin obstruir algún lado.

- Los movimientos de los motores en las tres coordenadas son sincronizados estos motores cuando se activan deben de estabilizar el sistema.
- Nuestro sistema esta adaptado para una grúa en tres dimensiones en tiempo real, nosotros lo podemos modelar con la ecuacion del robot con tres grados de libertad, en nuestro sistema tenemos la longitud en la cuerda y tenemos que compensar la fricción y el error.



# Capítulo 5

## Conclusiones y trabajos futuros

- Nosotros proponemos a un nuevo controlador PD para los sistemas de la grúa viajera. Sabemos que las redes neuronales son muy eficaces para identificación en sistemas no lineales complejos, cuando nosotros no tenemos la información completa, nosotros lo usamos para estimar la fricción, gravedad y un poco de incertidumbres. El algoritmo de aprendizaje del neuro compensador se obtiene del análisis de estabilidad del error de seguimiento por el método de Lyapunov y la técnica de estabilidad de entrada-a-estado.
- El problema de control con anti-oscilación es reducir la oscilación de la carga mientras este moviéndolo a la posición deseada tan rápido como sea posible. Desde la oscilación de la carga que depende de la aceleración del tranvía (riel), mientras minimizando el tiempo del funcionamiento y minimizar la oscilación de la carga son parcialmente los requisitos contradictorios como [1]. En particular el seguimiento se aproxima, formando la entrada como en [46], ha demostrado ser un método especialmente práctico y eficaz de reducir las vibraciones en los sistemas flexibles. El problema de planear el movimiento anti-oscilación se resuelve basado en el modelo de la cinemática como [30]. Un controlador con anti-oscilación para una grúa viajera de tres dimensiones se propone en [34], el cual envía la supresión de la oscilación en la carga. En [54], el controlador no lineal con anti-oscilación basado en el método de perturbación singular se presenta. También, estos controladores con anti-oscilación son modelos base.

- Exponemos un modelo libre con control con anti-oscilación, que tiene control PID. El acoplamiento entre la posición y los controladores con anti-oscilación son compensados con redes neuronales, el modelo libre del control anti-oscilación y su análisis de estabilidad con el compensador neuronal no se ha establecido todavía en las literaturas. Una comparación experimental de varios controladores de la grúa se comprende en nuestro sistema 3D de la grúa.
- Como trabajo futuro sería aplicar este modelo a un robot con tres grados de libertad y comparar la leyes de control que se proponen para reafirmar nuestro modelo y así llevarlo a experimentos reales. También se puede trabajar con un mecanismo de control en una grúa real en campo sin embargo sería un poco complicado entrar a la etapa de control puesto que debido a que los motores están en lazo abierto no se tiene un control de la grúa y ahí estaríamos probando nuestro sistema.

# Bibliografía

- [1] E.M.Abdel-Rahman,A.H. Nayfeh, Z.N.Masoud, Dynamics and Control of Cranes: A Review, *Journal of Vibration and Control*, Vol.9, No.7, 863-908,2003.
- [2] B. D' Andrea-Novel and F. Boustany, "Adaptive control of a class of mechanical system using linearisation and Lyapunov methodos. A comparative study on the overhead crane example", *Proc. IEEE Decision and Control*, pages 120 - 125, 1991.
- [3] J.W.Auernig and H.Troger, Time optimal control of overhead cranes with hoisting of the payload, *Automatica*, Vol.23, No.4, 437-447, 1987.
- [4] J.W.Beeston, Closed-loop time optimatial control of a suspended payload-a design study, *4th IFAC World Congress*, 85-99, Warsaw Poland, 1969.
- [5] Boyce, William E. *Elementary differential equations* / William E. Boyce, Richard C. DiPrima. Edition: 3rd. ed. New York : Wiley, c1977.
- [6] F. Boustany and B. D' Andrea - Novel, "Adaptive control of an overhead crane using dynamic feedback linearization and estimation design", *Proc. IEEE Int. Conf. Robotics and Automation*, pages 1963-1968, 1992.
- [7] T. Burg, D. Dawson, C. Rahn and W. Rhodes, "Nonlinear Control of an Overhead Crane via the saturating control approach of Teel", *Proc. IEEE Int. Conf. Robotics and Automation*, pages 3155-3160, 1996.

- [8] H. Butler, G. Honderd, and J. Van Amerongen, Model reference adaptive control of a gantry crane scale model, *IEEE Contr. Syst. Mag.*, vol. 11, pp. 57-62, Jan. 1991.
- [9] H. Butler, G. Honderd, and J. Van Amerongen, Model reference adaptive control of a gantry crane scale model, *IEEE Contr. Syst. Mag.*, vol. 11, pp. 57-62, Jan. 1991.
- [10] Byrnes C.I., Isidori A., Willems J.C., Passivity, Feedback Equivalence, and the Global Stabilization of Minimum Phase Nonlinear Systems, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol.36, 1228-1240, 1991.
- [11] S.K.Cho, H.H.Lee, A fuzzy-logic antishock controller for three-dimensional overhead cranes, *ISA Trans.*, Vol.41, No.2, 235-43, 2002.
- [12] G.Corriga, A.Giua, and G.Usai, An implicit gain-scheduling controller for cranes, *IEEE Trans. Control Systems Technology*, Vol,6, N0.1, 15-20, 1998.
- [13] C.Canudas de Wit and J.J.E.Slotine, Sliding Observers for overhead crane Manipulator, *Automatica*, Vol.27, No.5, 859-864, 1991.
- [14] G.Cybenko, Approximation by Superposition of Sigmoidal Activation Function, *Math.Control, Sig Syst*, Vol.2, 303-314, 1989.
- [15] Y.Fang, W.E.Dixon, D.M.Dawson and E.Zergeroglu, Nonlinear Coupling Control Laws for an Underactuated Overhead Crane System, *IEEE/ASME TRANSACTIONS ON MECHATRONICS*, VOL.8, NO.3, 418-423, 2003.
- [16] S.Haykin, *Neural Networks- A comprehensive Foundation*, Macmillan College Publ. Co., New York, 1994.ol.2, 303-314, 1989.
- [17] T. Hesketh, "A state-space pole-placing self-tuning regulator using input-output values", *IEE Proc. Part D*, Vol 129, pages 123-228,1982.
- [18] InTeCo, *3DCrane: Installation and Commissioning Version 1.2*, Krakow, Poland, 2000.

- [19] 3DCrane, Getting Started, Printed by InTeCo Ltd. Y. Fang, W. E. Dixon, D. M. Dawson, and E. Zergeroglu.
- [20] *3DCrane: Installation and Commissioning Version 1.3*, InTeCo, Krakow, Poland, 2000.
- [21] P.A.Ioannou and J.Sun, *Robust adaptive control*, Prentice-Hall Inc., NJ, 1996.
- [22] Y.H.Kim and F.L.Lewis, Neural Network Output Feedback Control of overhead crane Manipulator, *IEEE Trans. Neural Networks*, Vol.15, 301-309, 1999.
- [23] R.Kelly, Global Positioning on overhead crane Manipulators via PD control plus a Class of Nonlinear Integral Actions, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol.43, No.7, 934-938, 1998.
- [24] R.Kelly, A Tuning Procedure for Stable PID Control of Robot Manipulators, *Robotica*, Vol.13, 141-148, 1995.
- [25] B. Kiss, J. Levine, and P. Mullhaupt, A simple output feedback PD controller for nonlinear cranes, *Proc. Conf. Decision and Control*, pp. 5097–5101, 2000.
- [26] H.K.Khalil, *Nonlinear Systems*, 3rd Edition, Prentice Hall, NJ 07458, 2002.
- [27] *Automatic control systems*, Kuo, Benjamin C. 8th ed. New York : John Wiley and Sons, c2003.
- [28] kalman A. F. Moustafa and A.M. Ebeid. Nonlinear Modeling and control of Overhead Crane load Sway, *Transaction of the ASME*, Vol. 110, 266-271, 1988.
- [29] H.H.Lee, Modeling and control of a three-dimensional overhead crane, *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol.120,471-476, 1998.
- [30] H.H.Lee, A New Motion-Planning Scheme for Overhead Cranes With High-Speed Hoisting, *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol.126,359-364, 2004.

- [31] J. Yu, F. L. Lewis y T. Huang, "Non linear feedback control of a gantry crane", *Proc. American Control Conference*, pages 4310-4315, 1995.
- [32] F.L. Lewis and T.Parisini, Neural Network Feedback Control with Guaranteed Stability, *Int. J. Control*, Vol.70, No.3, 337-339,1998.
- [33] J. A.Méndez, L.Acosta, L.Moreno, S.Torres, G.N.Marichal, An Application of a Neural Self-Tuning Controller to an Overhead Crane, *Neural Computing and Applications*, Vol.8, No.2, 143-150,1999.
- [34] K.A.Moustafa and A.M.Ebeid, Nonlinear modeling and control of overhead crane load sway, *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol.110, 266-271, 1988.
- [35] B.M.Mohan, A.V.Patel, Analytical structures and analysis of the simplest fuzzy PD controller, *IEEE Trans. on Syst., Man and Cybern. Part B*, Vol.32, No.2, 239-248, 2002.
- [36] M.W.Noakes, J.F.Jansen, Generalized input for damped-vibration control of suspended payloads, *Journal of Robotics and Autonomous Systems*, Vol.10, No.2, 199-205, 1992.
- [37] S.Nicosia and A.Tornambe, High-Gain Observers in the State and Parameter Estimation of overhead cranes Having Elastic Joins, *System & Control Letter*, Vol.13, 331-337, 1989.
- [38] R.Ortega and M.W.Spong, Adaptive Motion Control of Rigid overhead crane: A Tutorial, *Automatica*, Vol.25, no.6, 877-888, 1989.
- [39] J. K. Pieper and B. W. Surgenor, "Discrete time sliding mode control applied to a gantry crane", *Proc. IEEE Decision and Control*, Vol 1, pages 829-834, 1994.
- [40] M.M.Polycarpou, Stable adaptive neural control scheme for nonlinear systems, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol.416, No.2, 447-451, 1996.
- [41] A. J. Ridout, "Anti-swing control of the over head crane using linear feedback". *Journal of Electrical and Electronic Engineering*, Australia Vol 9, No 1. Pages 17-26, 1989.

- [42] E.D.Sontag and Y.Wang, On Characterization of the Input-to-State Stability Property, *System & Control Letters*, Vol.24, 351-359, 1995.
- [43] Ali Saberi, Hassan Khalil, Quadratic-Type Lyapunov Functions for Singularly Perturbed Systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-29, No. 6, June 1984.
- [44] O.Sawodny, H.Aschemann and S.Lahres, An automated gantry crane as a large workspace robot, *Control Engineering Practice*, Vol.10, No.12, 1323-1338, 2002.
- [45] Y.Sakawa and Y.Shindo, Optimal control of container cranes, *Automatica*, Vol.18, No.3, 257-266, 1982.
- [46] W. Singhose, W. Seering and N. Singer, Residual Vibration Reduction using Vector Diagrams to Generate Shaped Inputs, *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol.116, 654 -659,1994.
- [47] M.Takegaki and S.Arimoto, A New Feedback Method for Dynamic control of Manipulator, *ASME J. Dynamic Syst. Measurement, and Contr.*, Vol.103, 119-125, 1981.
- [48] A. R. Teel, "Feedback Stabilisation: Nonlinear Solutions to Inherently Nonlinear Problems", University of California, Memorandum No, UCB/ERL M92/65, 1992.
- [49] A. R. Teel, "Examples of saturation using saturation: An input-output approach", Nolicos (*Third IFAC symposium on nonlinear control systems design*), 1995.
- [50] P.Tomei, Adaptive PD Controller for Robot Manipulator, *IEEE Tran. on Automatic Control*, Vol. 36, 556-570, 1992.
- [51] D. J. Woods and D. J. Clements. *Nonlinear Control of Overhead Crane*. I. E. Aust. Control '92 pages 29-40, 1992.
- [52] W.Yu, X.Li, Some new results on system identification with dynamic neural networks, *IEEE Trans. Neural Networks*, Vol.12, No.2, 412-417, 2001.

- [53] W.Yu and X.Li, System Identification Using Adjustable RBF Neural Network with Stable Learning Algorithms, *Advances in Neural Networks -ISNN 2004*, Srpinger-Verlgag, Lecture Notes in Computer Science, Vol.3174, 212-217, 2004.
- [54] J.Yu, F.L.Lewis and T.Huang, Nonlinear feedback control of a gantry crane, *1995 American Control Conference*, Seattle, 4310-4315, USA, 1995.
- [55] Y.Fang, W.E. Dixon, D.M. Dawson, and E. Zergeroglu. "Nonlinear Coupling Control Laws for an Underactuated Overhead Crane System, *IEEE/ASME Transaction s on Mechatronics*, vol. 8, No 3, pp 418-423, September 2003.
- [56] W. Yu, X. Li, Some new results on system identification with dynamic neural networks, *IEEE Trans. Neural Networks*, Vol.12, No.2, 412-417, 2001.

# Apéndice A

## Publicaciones

1. Rigoberto Toxqui y Wen Yu, Stable anti-swing PD control for overhead crane systems with velocity estimation and uncertainties compensation, *International Journal of Automation and Control*, aceptado para publicación.
2. Rigoberto Toxqui y Wen Yu, Anti-swing control for overhead crane with neural compensation, *International Joint Conference on Neural Networks, IJCNN'06*, Vancouver, Canada, 9478-9453, 2006.
3. Rigoberto Toxqui y Wen Yu, PD Control of Overhead Crane Systems with Neural Compensation, *Advances in Neural Networks -ISNN 2006*, *Srpinger-Verlgag, Lecture Notes in Computer Science*, LNCS 3972, 1110-1115, 2006.
4. Rigoberto Toxqui y Wen Yu, PD control of overhead crane with velocity estimation and uncertainties compensation, *The 6th World Congress on Control and Automation*, 139-143, Dalian, China, 2006,

### Artículos en revisión

1. Rigoberto Toxqui y Wen Yu, Stable anti-swing PD control for overhead crane systems with neural compensation, sometido para *IEE Proceedings - Control Theory and Applications*.