

CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS  
AVANZADOS DEL IPN

DEPARTAMENTO DE CONTROL AUTOMÁTICO

**Pasividad Robusta de Sistemas No Lineales  
via Redes Neuronales Dinámicas**

Tesis que presenta el  
**M. en C. Juan Reyes Reyes\***  
para obtener el grado de  
**Doctor en Ciencias en la Especialidad de Control Automático**

Directores de Tesis:

**Dr. Alexander S. Pozniak G.**  
**Dr. Wen Yu Liu**

---

\* Becario del CONACyT

*Mi'ja Maya:*  
 *Todavía no conoces la luz ni el viento,*  
 *sin embargo me haces respirar y ver a la felicidad...*  
 *...tarea que compartes excelentemente*  
 *con quien en su vientre te lleva: Mi Flaka*

*J.R.R*

A mis padres Don Juan y Doña Tina, que encaminaron mis pasos durante los primeros días de mi vida, para que actualmente sepa como utilizar y construir mis propios senderos.

A mis hermanos Saúl y Elí, cada uno por su particular manera de mostrarme actitudes ejemplares de convicción y tenacidad.

A Ma'Leoni y compañía\*, por el apoyo y sus cátedras en la escuela de la vida.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT), por el soporte económico certera y justamente dirigido para la realización de éste y otros trabajos científicos.

---

\* Lina, J. Jorge, Sally, Chuy, Nora, Ale, Allan, Lalo, Lalirou, Gus, Jorgiño, Oli, Sandra, Samuel, Samolito, César, Derrick, Xóchitl, Carlos, Tali y Kalita (ya quiero conocerla), mi único cuña'o Gus , Ame, Don Chucho y todos los no menos importantes que me falten.

# Contenido

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>11</b>
1.1	Motivación . . . . .	13
1.2	Modelado de Neuronas Biológicas . . . . .	15
1.2.1	Modelado Estático de Redes Neuronales . . . . .	17
1.2.2	Modelado Dinámico de Redes Neuronales . . . . .	20
1.3	Objetivo de la tesis . . . . .	22
1.4	Estructura de la tesis . . . . .	23
<b>2</b>	<b>Pasividad y Equivalente Pasivo</b>	<b>26</b>
2.1	Interconexión de sistemas pasivos . . . . .	27
2.2	Sistemas Afines con la Entrada . . . . .	30
2.2.1	Conocimiento Total del Modelo . . . . .	30
2.2.2	Pasividad Robusta . . . . .	31
2.2.3	Equivalente Pasivo de Sistemas No Lineales por Retroalimentación . .	32
2.2.4	Pasividad por Retroalimentación de Sistemas No Lineales utilizando un Operador de Proyección . . . . .	34
2.3	Estabilidad Entrada Estado . . . . .	38
<b>3</b>	<b>Pasividad en Redes Neuronales Dinámicas</b>	<b>39</b>
3.1	Propiedades de Estabilidad de Redes Neuronales Dinámicas . . . . .	41
3.2	Simulación . . . . .	47
3.3	Conclusión . . . . .	49

<b>4</b>	<b>Identificación Neuronal Pasiva</b>	<b>51</b>
4.1	Descripción del Sistema y Estructura de la Red Neuronal Dinámica . . . . .	52
4.2	Neuro Identificación Mediante Técnicas de Pasividad . . . . .	53
4.3	Simulación: Un Motor de Combustión Interna . . . . .	60
4.4	Conclusiones . . . . .	66
<b>5</b>	<b>Pasividad Robusta via Redes Neuronales Dinámicas (Caso SISO)</b>	<b>67</b>
5.1	Descripción del Sistema No Lineal Incierto y Estructura de la RND (1ª Propuesta) . . . . .	67
5.1.1	Equivalente Pasivo Robusto de Sistemas No Lineales via RND . . . . .	71
5.1.2	Estructura de la Función de Almacenamiento . . . . .	76
5.1.3	Propiedades de los Umbrales . . . . .	77
5.1.4	Estabilización Robusta utilizando un Control por Retroalimentación Lineal . . . . .	77
5.1.5	Situación Libre de Incertidumbre . . . . .	78
5.1.6	Interpretación de dos Subsistemas Acoplados . . . . .	78
5.1.7	Descripción de Otras Posibles Incertidumbres . . . . .	79
5.1.8	Simulación de la 1ª Propuesta . . . . .	83
5.2	Descripción del Sistema No Lineal Incierto y Estructura de la RND (2ª Propuesta) . . . . .	89
5.2.1	Estructura de la Función de Almacenamiento . . . . .	98
5.2.2	Los Umbrales de cada Neurona . . . . .	98
5.2.3	Simulación de la 2ª Propuesta . . . . .	99
5.3	Conclusiones . . . . .	105
<b>6</b>	<b>Pasividad Robusta de Sistemas No Lineales Inciertos via Redes Neuronales Dinámicas (Caso MIMO)</b>	<b>106</b>
6.1	Descripción del Sistema No Lineal MIMO Incierto y Estructura de la RND .	107
6.1.1	Características del Sistema No Lineal . . . . .	107
6.1.2	Pasividad en Sistemas No Lineales MIMO . . . . .	109

6.1.3	Descomposición del Sistema No Lineal utilizando un Operador de Proyección . . . . .	109
6.1.4	Cancelación de la Parte Desestabilizante del Sistema . . . . .	111
6.1.5	Red Neuronal Dinámica Propuesta para el Sistema No Lineal MIMO	113
6.2	Pasividad Robusta de Sistemas No Lineales Utilizando RND . . . . .	114
6.3	Simulaciones . . . . .	119
6.3.1	Implementación . . . . .	120
6.3.2	Regulación basada en pasividad . . . . .	125
6.3.3	Simulación comparativa . . . . .	126
6.4	Conclusiones . . . . .	133
<b>7</b>	<b>Conclusiones y Trabajo Futuro</b>	<b>134</b>
7.1	Contribución de la Tesis . . . . .	134
7.2	Trabajo Futuro . . . . .	135

# Indice de Figuras

1-1	<i>Sistema pasivo de la entrada <math>v</math> a la salida <math>y</math></i>	13
1-2	<i>Sistema pasivo estabilizado con <math>v=-ky</math></i>	13
1-3	<i>Planta parcialmente conocida</i>	15
1-4	<i>Estructura simplificada de una neurona biológica</i>	16
1-5	<i>Neurona Artificial Estática</i>	18
1-6	<i>Perfil Sigmoidal</i>	18
1-7	<i>Tangente hiperbólica</i>	19
1-8	<i>Saturación</i>	19
1-9	<i>Función Escalón</i>	19
1-10	<i>Estructura de una RND</i>	21
1-11	<i>Neurona dinámica (Hopfield)</i>	22
1-12	<i>Sistema retroalimentado propuesto en la tesis</i>	23
2-1	<i>Sistemas pasivos en conexión paralela</i>	28
2-2	<i>Sistemas pasivos retroalimentados</i>	29
3-1	<i>Estructura de la RND</i>	42
3-2	<i>Pasividad en la Red Neuronal Dinámica</i>	43
3-3	<i>Respuesta a entradas acotadas</i>	48
3-4	<i>Respuesta a entrada cero</i>	48
3-5	<i>Retroalimentación de la salida</i>	49
3-6	<i>Respuesta para ISS con <math>T = \text{diag} \{[3, 3]\}</math></i>	50
3-7	<i>Respuesta para ISS con <math>T = \text{diag} \{[0.1, 0.1]\}</math></i>	50

4-1	<i>Neuro identificación para <math>x_1</math> (gradiente)</i>	63
4-2	<i>Neuro identificación para <math>x_2</math> (gradiente)</i>	64
4-3	<i>Neuro identificación para <math>x_1</math> (Zona Muerta)</i>	64
4-4	<i>Identificación para <math>x_1</math> (gradiente con perturbación acotada)</i>	65
4-5	<i>Identificación para <math>x_2</math> (gradiente con perturbación acotada)</i>	65
5-1	<i>Interpretación de subsistemas conectados</i>	79
5-2	<i>Manipulador de un eslabón</i>	83
5-3	<i>Par de entrada <math>u</math></i>	85
5-4	<i>Estados <math>z_1</math> y <math>\hat{z}_1</math></i>	85
5-5	<i>Salida y del sistema, y el estado <math>\hat{y}</math></i>	86
5-6	<i>Entrada de control <math>u</math>. Con <math>v = -y</math></i>	87
5-7	<i>Estados <math>z_1</math> y <math>\hat{z}_1</math>. Con <math>v = -y</math></i>	88
5-8	<i>Estados <math>z_2</math> y <math>\hat{z}_2</math>. Con <math>v = -y</math></i>	88
5-9	<i>Salida y con el estado <math>\hat{y}</math>. (<math>v = -y</math>)</i>	89
5-10	<i>Perfil de la fricción</i>	100
5-11	<i>Posición angular del eslabón (<math>u = 0</math>)</i>	100
5-12	<i>Velocidad angular del eslabón (<math>u = 0</math>)</i>	101
5-13	<i>Velocidad angular controlada (<math>y_{ref} = 1</math>)</i>	103
5-14	<i>Estado de la RND (<math>y_{ref} = 1</math>)</i>	104
5-15	<i>Par aplicado (<math>y_{ref} = 1</math>)</i>	104
5-16	<i>Contribución neuronal en el manipulador (<math>y_{ref} = 1</math>)</i>	105
6-1	<i>Sistema hidráulico de dos tanques</i>	119
6-2	<i>Diagrama a bloques de la simulación caso MIMO</i>	124
6-3	<i>Esquema desde el punto de vista del cambio de variable</i>	125
6-4	<i>Nivel del primer recipiente usando RND</i>	127
6-5	<i>Nivel del segundo recipiente usando RND</i>	127
6-6	<i>Contribución de la Red Neuronal</i>	128
6-7	<i>Control utilizando la RND</i>	128
6-8	<i>Evolución de los pesos</i>	129

6-9	<i>Estado de la RND</i>	129
6-10	<i>Trayectoria de la incertidumbre</i>	130
6-11	<i>Nivel del primer recipiente con el PID</i>	131
6-12	<i>Nivel del segundo recipiente con el PID</i>	132
6-13	<i>Control utilizando un controlador PID</i>	132

# Notación

$A, B, C, \dots$	Denotan matrices (letras mayúsculas)
$a, b, c, \dots$	Denotan vectores
$\alpha, \beta, \gamma, \dots$	Denotan escalares
$:=$	”definido como” o bien ”igual por definición”
$\mathfrak{R}$	Conjunto de los números reales
$\mathfrak{R}^n$	Conjunto de vectores reales de dimensión $n$ . Con $n \geq 1, 2, 3, \dots, N < \infty$
$\mathfrak{R}^{n \times m}$	Conjunto de matrices reales de $n$ filas y $m$ columnas, cuyas estradas son reales
$t$	Tiempo, $t \geq 0$
$\lambda(M)$	Es el vector $[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]^T$ de los valores propios de la matriz cuadrada $M \in \mathfrak{R}^{n \times n}$
$\lambda_{\max}(M)$	Es el máximo valor propio de la matrix $M$ . i.e. $\lambda_{\max}(M) = \max_{i=1,2,\dots,n} \{\lambda_i\}$
$\ (\cdot)\ $	Norma-2 de $(\cdot)$ , $\ (\cdot)\  := \begin{cases} \sqrt{(\cdot)^T (\cdot)} & \text{si } (\cdot) \text{ es un vector} \\ \sqrt{\lambda_{\max}((\cdot)^T (\cdot))} & \text{si } (\cdot) \text{ es una matriz} \end{cases}$
$x$	Vector de estado de un sistema
$y$	Vector de salida de un sistema
$u$	Vector de entrada de un sistema
$f(x)$	Función no lineal vectorial que representa la retroalimentación de un sistema
$f_{nom}(x)$	Parte nominal conocida de la función $f(x)$ , donde $f(x) = f_{nom}(x) + \Delta_f(x)$
$\Delta_f(x)$	Incertidumbre de $f(x)$ , donde $f(x) = f_{nom}(x) + \Delta_f(x)$
$G(x)$	Función matricial del estado, lineal con la entrada del sistema
$g(x)$	Función del estado que multiplica a la entrada del sistema
$h(x)$	Función de salida de un sistema no lineal
$L_f V(x)$	Derivada de Lie, donde $L_f V(x) := \left[ \frac{\partial V(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial V(x)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial V(x)}{\partial x_n} \right] [f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)]^T$
$W_i = W_i(t)$	Es la $i$ -ésima matriz de pesos que representa la sinapsis de una red neuronal
$W_i^*$	Es el $i$ -ésimo peso inicial de una red neuronal, es decir, $W_i^* = W_i(0)$
$\hat{x}$	Vector de estado de la red neuronal
$\varphi, \sigma, \phi$	Funciones de activación de una red neuronal
$\psi$	Umbral de salida de una neurona

MLP	Perceptrón Multicapa ( <i>Multi-Layer Perceptron</i> )
RND	Red Neuronal Dinámica
GAS	Estabilidad Global Asintótica ( <i>Global Asymptotic Stability</i> )
ISS	Estabilidad Entrada Estado ( <i>Input-State Stable</i> )
MIMO	Entrada Múltiple Salida Múltiple ( <i>Multi-Input Multi-Output</i> )
SISO	Una Entrada Una Salida (Single-Input Single-Output)

# Capítulo 1

## Introducción

En los últimos años el uso de las redes neuronales ha tomado un lugar importante dentro del control e identificación de sistemas no lineales. En este capítulo se describen de manera breve los conceptos que conciernen a la presente tesis, con el propósito de mostrar las ideas básicas de lo que son los sistemas no lineales y las redes neuronales; al final del capítulo se muestra el objetivo de la tesis y la manera en que está estructurado el trabajo.

Las primeras investigaciones en el Control Automático fueron hechas considerando a sistemas que tenían la característica de ser lineales, de manera que las investigaciones se volcaron en lo que ahora se conoce como la teoría de control clásica, en donde los modelos matemáticos de dichos sistemas podían ser expresados con ecuaciones diferenciales lineales de la forma

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} + k_{n-1} \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + k_1 \frac{dx(t)}{dt} + k_0 x(t) + u(t) = 0 \quad (1.1)$$

y la representación en variables de estado es

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx. \end{aligned} \quad (1.2)$$

donde  $x$  es el estado de la planta,  $A$  es la matriz de retroalimentación,  $B$  es la matriz de entrada,  $C$  la de salida,  $u$  la señal de control de entrada y finalmente  $y$  la salida de la planta

representada por una combinación lineal del estado. Por esta razón la teoría de control se estuvo restringiendo a plantas que pudieran ser modeladas como en (1.2). Posteriormente se empieza a abordar el problema de control para sistemas no lineales, donde los estados aparecen en el modelo como argumentos de funciones no lineales, un modelo general de un sistema no lineal es

$$\begin{aligned}\dot{x} &= F(x, u, t) \\ y &= h(x, u, t)\end{aligned}$$

donde  $F$  es una función no lineal que depende de el estado  $x$ , la entrada  $u$  y el tiempo  $t$ , y la salida  $y$  es una función no lineal de los mismos argumentos. A su vez una gran variedad de sistemas no lineales tienen la característica de que el término  $F(x, u, t)$  puede ser escrito como  $f(x) + g(x)u$ , a esta clase de sistemas se le conoce como *sistemas no lineales afines con la entrada* invariantes en el tiempo y cuyo modelo es el siguiente

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x)\end{aligned}$$

Para este último modelo se realizaron investigaciones motivadas por aplicar la amplia teoría de control lineal, por esta razón se necesitaba linealizar el sistema [14]. Para lograr esto se construyeron señales de control que transformaban al sistema no lineal en uno lineal. Esta ley de control linealizante realiza una cancelación de términos que puede llevarse a cabo entre otras condiciones dentro de una vecindad o región en el espacio de estado.

Otra aportación importante y mas reciente en el control de sistemas no lineales es lo que se refiere a la pasividad, este concepto de manera intuitiva muestra que un sistema pasivo no puede entregar mas energía de la que está recibiendo (fig. 4-1) y muestra de manera inmediata la estabilización de un sistema con esta bondad, es decir un sistema no lineal que es pasivo se puede estabilizar simplemente (fig. 1-2) haciendo una retroalimentación negativa de la salida  $v = -ky$ , con  $k > 0$ .

La pasividad es una propiedad importante entre la entrada y la salida de un sistema y



Figura 1-1: Sistema pasivo de la entrada  $v$  a la salida  $y$

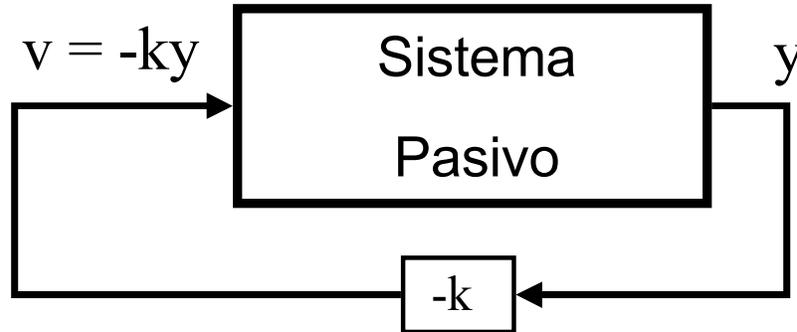


Figura 1-2: Sistema pasivo estabilizado con  $v=-ky$

ha sido ampliamente utilizada en el análisis de estabilidad de sistemas no lineales [9, 26, 57, 58]. Este concepto ha sido usado para analizar la estabilidad de sistemas interconectados y especialmente en estructuras en cascada (e.g [54], [2] y [30]). Particularmente, en [2], fue presentada una síntesis de conceptos y técnicas para la teoría de sistemas pasivos utilizando la teoría de control no lineal geométrico y muestra de manera concreta cuando un sistema de dimensión finita puede ser transformado a su equivalente pasivo a través de retroalimentación del estado. La pasividad por esta razón es una herramienta útil en el control de sistemas no lineales y cuya aplicación es utilizada ampliamente.

## 1.1 Motivación

El problema de transformar un sistema que no es pasivo a un equivalente pasivo por retroalimentación, ya ha sido resuelto para una clase de sistemas no lineales afines con la entrada de una entrada una salida (SISO) y para el caso de múltiple entrada y múltiple salida (MIMO),

una de las condiciones que se demanda en estos casos, es que el modelo de la planta en cuestión sea conocido absolutamente.

Sin embargo, el conocimiento total del modelo de una planta en general es muy difícil tenerlo, ya que el paso del tiempo, las condiciones de operación o climáticas y otros factores del entorno de la planta pueden ocasionar desgaste o degradación de sus componentes, por lo que sus parámetros pueden cambiar. De manera que si construimos un modelo de la planta antes de que sucediera este deterioro a lo largo del tiempo, seguramente nos estaríamos enfrentando a un problema en el que no se conocen completamente los parámetros del modelo, a esta falta de conocimiento sobre el modelo de la planta se le llama incertidumbre paramétrica.

A su vez, es posible que en el modelo que estemos construyendo no se hayan tomado en cuenta por alguna razón ciertas dinámicas de la planta, en este caso la estructura real de la planta tendrá diferencia con respecto a la estructura del modelo matemático, a esta falta de información del modelo de la planta se le conoce como incertidumbre estructural.

Por esta razón, un problema interesante surge cuando alguna parte o toda la dinámica del sistema no es conocida. Por esto, el diseño de controladores robustos que enfrentan esta falta de información es un tema importante para el equivalente pasivo de sistemas no lineales, y algunos trabajos que usan técnicas adaptables o no adaptables para enfrentar esto son [16, 19, 45, 51, 25].

Esto conduce a entender que un sistema que no haya sido hecho a la medida y posiblemente aunque así lo fuera, siempre tiene incertidumbre estructural o paramétrica.

Es decir, es más fácil que un ingeniero de control se enfrente a controlar una planta con incertidumbre que a una que tenga un modelo exacto.

En la sabiduría de que la incertidumbre por pequeña que sea siempre existe, podemos considerar un valor central o nominal en el cual fluctúan valores inciertos por arriba o por abajo de este valor.

Por esta razón, una manera natural de modelar las plantas que tienen incertidumbre ([35], [36], [37]), es considerando un modelo que tenga términos nominales o valores centrales conocidos mas otra parte no modelada o incierta; en la figura 1-3 se muestra esta idea. Este punto de vista es utilizado como una forma de enfrentar los sistemas no lineales con

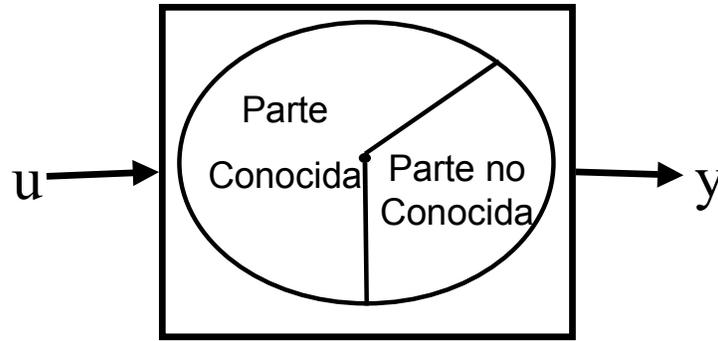


Figura 1-3: *Planta parcialmente conocida*

incertidumbre en la presente tesis, debido a que la incertidumbre es parcial algunos autores definen a este sistema como caja gris, en lugar de caja negra que es la situación en la que hay una incertidumbre total del sistema y sólo se tiene lectura de la salida e introducción de señales en la entrada.

Por otra parte, el uso de las redes neuronales dinámicas (RND) o también llamadas recurrentes han mostrado que poseen mejor desempeño en la identificación. A su vez, una variedad de arquitecturas de redes neuronales para control han sido propuestas para el control de sistemas no lineales con incertidumbre [12, 23, 31, 42]. Una de las principales ventajas de las redes neuronales en el diseño de control no lineal es precisamente la capacidad de construir mapeos no lineales complejos.

Por esto, las metodologías con redes neuronales podemos considerarlas como una manera certera para identificar no linealidades desconocidas en un sistema y después utilizar este modelo identificado para construir una ley de control que logre los propósitos de control deseados.

Bajo estos antecedentes en la presente tesis se aborda el problema de la pasivación e identificación de una clase de sistemas no lineales cuyo modelo es parcialmente conocido.

## 1.2 Modelado de Neuronas Biológicas

Una red neuronal artificial es el modelo matemático simplificado de una red neuronal biológica. Para comprender mejor este modelado iniciemos describiendo la estructura de una neurona

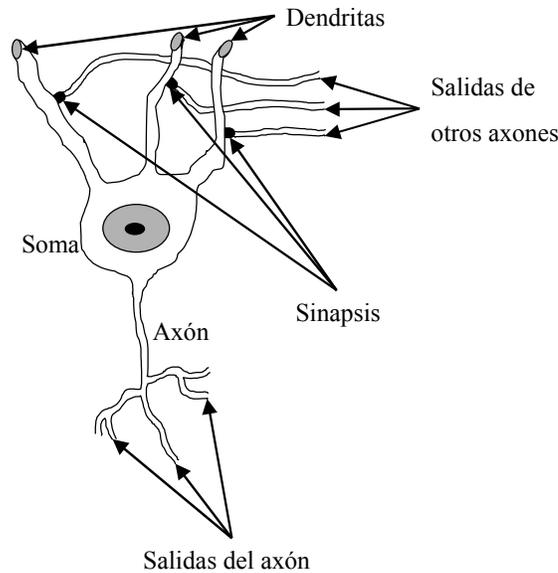


Figura 1-4: *Estructura simplificada de una neurona biológica*

biológica. Se sabe que el cerebro humano posee de  $10^{10}$  a  $10^{11}$  neuronas comunicadas con una red nerviosa altamente interconectada. Una estructura simplificada de una neurona es la mostrada en la figura 1-4. Las partes básicas mostradas en el esquema son:

- Soma o cuerpo celular, es la parte central de la neurona en la que son realizadas casi todas las funciones lógicas, es en esta parte donde se encuentra el mecanismo genético y metabólico que mantiene viva a la neurona, así como la síntesis de proteínas.
- El axón o salida es un nervio conectado al soma, que posteriormente está altamente ramificado, en el segmento inicial del axón la señal es transformada en impulsos nerviosos los cuales se propagan sin atenuación a células receptoras, musculares o bien otras neuronas.
- Las dendritas son ramificaciones densas de fibras nerviosas largas y de forma irregular y están conectadas al soma, por cada neurona hay de  $10^3$  a  $10^4$  dendritas. Las dendritas reciben señales de otras neuronas por medio de un contacto especializado conocido como sinapsis.
- Las sinapsis son los puntos terminales de los axones de otras neuronas. La función de

la sinapsis tiene una naturaleza excitatoria o inhibitoria, por esto tiene la habilidad de incrementar o atenuar la excitación de la neurona. La sinapsis humana y en general la de los animales son un proceso químico muy complejo, pero la sinapsis de animales primitivos como los insectos están basados en transmisiones puramente eléctricas. ([1], [6], [29])

Cabe recordar que una neurona biológica posee procesos muy complejos que en su totalidad no han sido conocidos. Sin embargo, existe flexibilidad en el modelado de una neurona biológica, es decir, una neuronal artificial es diseñada para realizar funciones o cálculos que sean específicos, de manera que la arquitectura de la misma es muy particular para cada problema que se desee resolver con esta técnica.

### 1.2.1 Modelado Estático de Redes Neuronales

Una neurona artificial estática muestra un mapeo estático de las entradas hacia la salida. Una forma básica de este modelo es como el que propuso McCulloch Pitts [1], [28] en la cual se expresa la salida  $y$  de la neurona de la siguiente manera

$$\begin{aligned} y &= \varphi(w_1x_1 + w_2x_2 + \dots + w_nx_n + \theta) = \varphi(Wx + \theta) \\ &= \varphi\left(\sum_{i=1}^n w_ix_i + \theta\right). \end{aligned}$$

Otra forma que es común encontrar de los modelos de las neuronas artificiales, es a través de representaciones en esquemas gráficos, los cuales son muy útiles para visualizar la analogía que tienen con una neurona biológica. Para el caso del modelo McCulloch Pitts el esquema correspondiente es el de la figura 1-5, donde  $x_i$  es la  $i$ -ésima entrada de la neurona.  $w_i$  es el  $i$ -ésimo peso de la neurona y modela la acción de la sinapsis de una neurona biológica. El punto suma, el umbral  $\theta$  y la función de activación  $\varphi(u)$  corresponden a el cuerpo de la neurona.

Finalmente la salida  $y$  representa el axon de la neurona biológica. La función de activación en general es no lineal y acotada, generalmente se escoge el perfil sigmoideal, pero puede tener entre otros perfiles el de saturación o la función escalón, los cuales se muestran en las figuras

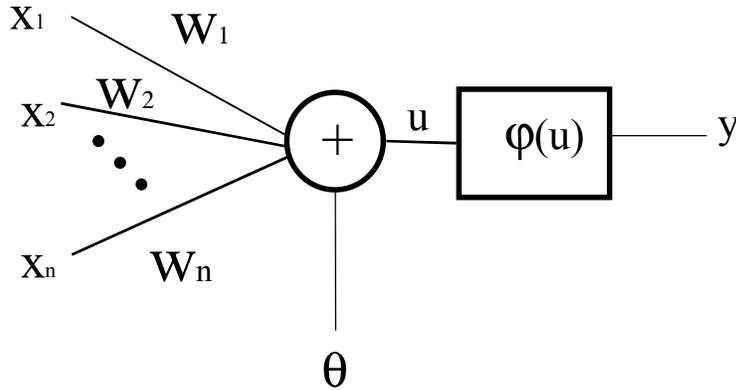


Figura 1-5: *Neurona Artificial Estática*

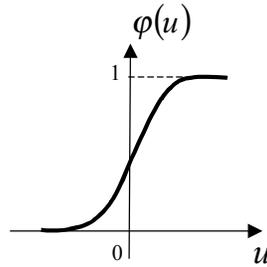


Figura 1-6: *Perfil Sigmoidal*

1-6, 1-8 y 1-9

El perfil sigmoidal (figuras 1-6 y 1-7) es utilizado en arquitecturas de redes neuronales en las que la ley de aprendizaje utiliza métodos que requieren de funciones suaves, como el algoritmo de retropropagación [55] o el de gradiente por mencionar algunos. Pero es posible que las leyes de aprendizaje no demanden que las funciones de activación sean suaves (fig. 1-8, fig. 1-9), tal es el caso del perceptrón ([38], [39], [1], [56]) que utiliza la función escalón. El problema de interés en cualquier arquitectura es el ajuste de las sinapsis o pesos para realizar una tarea determinada, a esta estrategia de ajuste se le conoce como *ley de aprendizaje*. La estrategia mas básica de una ley de aprendizaje consiste en el ajuste de los pesos de una red neuronal para minimizar una función de costo, por lo cual es fácil encontrar el uso de las redes neuronales para resolver problemas de optimización [3].

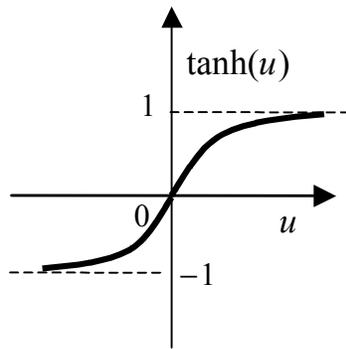


Figura 1-7: *Tangente hiperbólica*

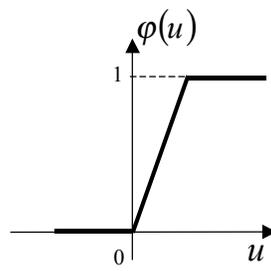


Figura 1-8: *Saturación*

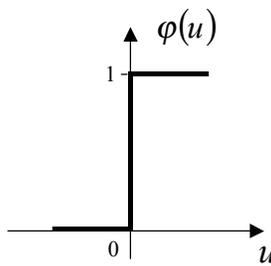


Figura 1-9: *Función Escalón*

Si el ajuste de pesos se realiza antes de implementar la red neuronal, se le conoce como ley de aprendizaje fuera de línea, y una vez realizado el ajuste, la red neuronal se implementa con sus pesos fijos. Pero si este ajuste se realiza simultáneamente con la red neuronal implementada, este ajuste es conocido como ley de aprendizaje en línea. En este caso los pesos o aprendizaje puede sufrir modificaciones ante posibles perturbaciones en la tarea que realizan.

## 1.2.2 Modelado Dinámico de Redes Neuronales

Las Redes neuronales dinámicas poseen al menos una señal retroalimentada. Esta retroalimentación puede estar hecha en tiempo discreto o en tiempo continuo. Cuando es en tiempo discreto involucran el uso de unidades de retraso. Esta unidad se denota por  $q^{-1}$ , tal que  $q^{-1} u(k) = u(k - 1)$ , con  $k$  indicando el  $k$ -ésimo muestreo en el tiempo.

Por ejemplo una estructura de red neuronal dinámica en tiempo discreto podría tener la siguiente arquitectura

$$\begin{aligned}\hat{x}(k) &= \varphi \left( W_1 \begin{bmatrix} x(k) \\ \hat{x}(k-1) \end{bmatrix} + \theta_1 \right) \\ y(k) &= \sigma \left( W_2 \begin{bmatrix} x(k) \\ \hat{x}(k) \end{bmatrix} + \theta_2 \right)\end{aligned}$$

donde  $x(k)$  es la entrada de la red el instante  $k$ ,  $\hat{x}(k)$  es el estado de la red neuronal y la salida en este caso está construida con una neurona que depende del estado y está denotada como  $y$ .

Una versión en tiempo continuo de una red neuronal dinámica podría ser como la siguiente

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= \varphi \left( W_1 \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \theta_1 \right) \\ y &= \sigma \left( W_2 \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \theta_2 \right)\end{aligned}\tag{1.3}$$

La estructura de la red neuronal dinámica mostrada en (1.3) se encuentra dibujada en el

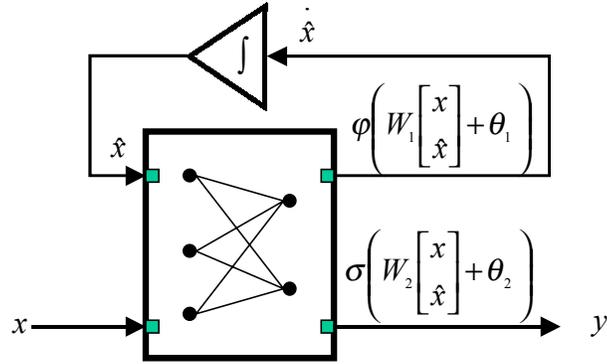


Figura 1-10: Estructura de una RND

esquema (1-10). Para el esquema en tiempo discreto simplemente se cambia  $x$  por  $x(k)$ ,  $\hat{x}$  por  $\hat{x}(k-1)$ ,  $y$  por  $y(k)$ ,  $\dot{\hat{x}}$  por  $\hat{x}(k)$  y finalmente el bloque del integrador por el de un retardo.

Uno de los modelos mas populares de una red neuronal dinámica es el propuesto por Hopfield [11], el modelo de una neurona dinámica bajo esta propuesta es la siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -w_a u + Wx + \theta \\ y &= \varphi(u) \end{aligned} \quad (1.4)$$

donde,  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$  es el vector de entrada,  $W = [w_1, w_2, \dots, w_n]$  es el vector de pesos sinápticos,  $u$  es el argumento de la función de activación, ésta última es escogida con un perfil como el de la tangente hiperbólica, finalmente la señal  $y$  es la salida de la neurona. El modelo de Hopfield se puede implementar con un circuito eléctrico Resistivo-Capacitivo (RC) conectado a un amplificador no lineal con una función de perfil sigmoideal como se muestra en la figura (1-11). Donde la correspondencia de los parámetros del circuito con respecto al modelo matemático (1.4), se construye con

$$w_a = \frac{1}{CR_0}; \quad w_j = \frac{1}{CR_i}, \quad j = 1, 2, \dots, n;$$

el umbral simplemente es la fuente independiente de corriente, esto es,  $\theta = i$ ; una sinapsis excitatoria se construye escogiendo a la entrada correspondiente como  $+x_j$ , y a la acción

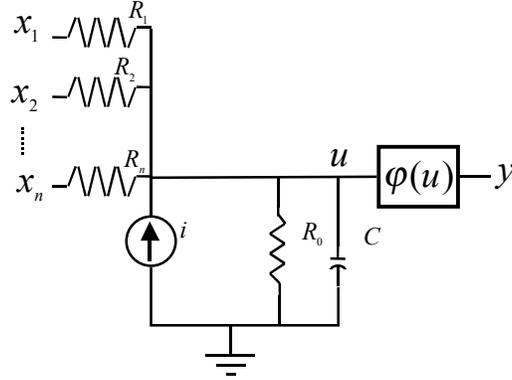


Figura 1-11: *Neurona dinámica (Hopfield)*

excitatoria de la sinapsis se construye escogiendo a la entrada correspondiente como  $-x_j$ .

Como puede observarse una RND es un sistema no lineal dinámico, que tiene la característica de cambiar su comportamiento a lo largo del tiempo para lograr un propósito a través del ajuste de sus pesos (aprendizaje). Por esta razón es que se aprovechan las redes neuronales dinámicas en la identificación y control de sistemas con no linealidades complejas.

### 1.3 Objetivo de la tesis

Partiendo de un sistema no lineal parcialmente conocido, se desea construir una red neuronal dinámica cuya ley de aprendizaje contribuya conjuntamente con una ley de control, para construir un equivalente pasivo del sistema retroalimentado.

Por lo tanto el propósito de esta tesis es diseñar una ley de control de equivalencia pasiva por retroalimentación para una clase de sistemas no lineales MIMO usando una identificación de la incertidumbre con una red neuronal dinámica.

Con los resultados de [2], [60], [47] y motivado por el esquema propuesto en [53], se hace una propuesta para la construcción del control equivalente pasivo por retroalimentación. Para enfrentar la incertidumbre nos apoyamos en los estudios hechos en [25] a cerca de pasividad robusta de sistemas no lineales con incertidumbre estructural y en la arquitectura de la RND se utiliza una ley de aprendizaje dinámica adaptable. En la figura 1-12, se muestra el esquema retroalimentado que expresa gráficamente el objetivo de esta tesis. Tenemos

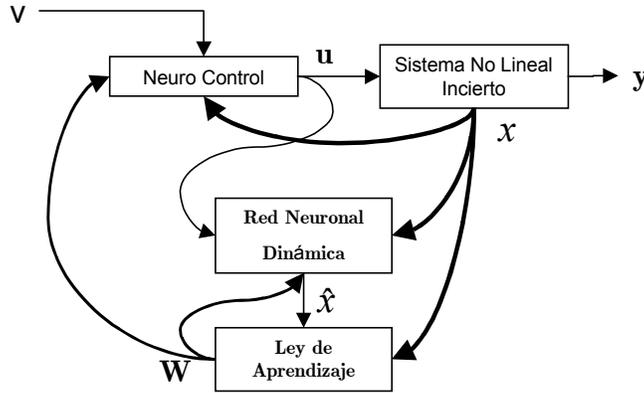


Figura 1-12: *Sistema retroalimentado propuesto en la tesis*

un sistema no lineal con incertidumbre cuya entrada es  $u$  y la salida es  $y$ ; los bloques correspondientes a la identificación de la incertidumbre son la RND con su correspondiente ley de aprendizaje dinámica, los cuales reciben las señales del estado  $x$  y de la entrada  $u$  del sistema no lineal incierto. Finalmente con la información de los pesos  $W$  y el estado  $x$  del sistema no lineal incierto se construye una ley de control  $u$ . Todo esto se conjuga para obtener un sistema pasivo de la nueva entrada  $v$  a la salida  $y$ .

## 1.4 Estructura de la tesis

La tesis está constituida por siete capítulos. El capítulo actual aborda una introducción hacia el panorama general de las investigaciones actuales sobre pasividad y el interesante reto de enfrentar la incertidumbre de sistemas no lineales utilizando redes neuronales dinámicas.

En el segundo capítulo se definen los conceptos de pasividad y de equivalente pasivo y la metodología que existe acerca de la pasividad por retroalimentación.

La investigación hecha en esta tesis partió de resultados preliminares que se encuentran documentados del tercero al quinto capítulo. Cabe recordar que cada uno de estos capítulos podrían ser abordados directamente en el sentido de que en cada uno de ellos se hacen las definiciones y descripciones pertinentes.

En el tercer capítulo se desarrolla a partir de un procedimiento que garantiza la pasividad

de redes neuronales dinámicas. De manera que se podrán encontrar en este capítulo varias propiedades de estabilidad para una clase de redes neuronales dinámicas, tales como, pasividad, estabilidad asintótica, estabilidad entrada estado, estabilidad en el sentido entrada acotada salida acotada.

En el cuarto capítulo se utiliza el resultado mostrado en el anterior capítulo pero dirigido a la utilización de las redes neuronales en sistemas con incertidumbre para realizar una identificación, tema que se le conoce de manera corta como neuroidentificación. Se muestran los resultados pertinentes a neuroidentificación para redes neuronales de una capa y para multicapa. La principal contribución de este capítulo es utilizar el enfoque de pasividad para obtener propiedades de estabilidad en la neuroidentificación. Concluimos que el algoritmo de ajuste de pesos de gradiente descendente es estable en el sentido  $L_\infty$ , y es robusto para cualquier incertidumbre acotada

En el capítulo cinco se construye una ley de control neuronal para lograr un equivalente pasivo de una clase de sistemas no lineales de una entrada y una salida (SISO). Se considera que el sistema no lineal tiene incertidumbre parcial. Aprovechando que hay una parte del modelo que es conocida, se construye la red neuronal dinámica utilizando dicha parte junto con una neurona que posee una ley de aprendizaje que contribuye a compensar la incertidumbre del sistema. Por lo tanto en este capítulo se logra la pasividad de una clase de sistemas no lineales SISO que tienen un modelo parcialmente conocido, utilizando una RND con una ley de aprendizaje adaptable. Con una simple red neuronal dinámica (RND) que contiene solo dos neuronas, se identifica el sistema no lineal incierto. La metodología propuesta puede ser considerada con las ya existentes, como una alternativa para el equivalente pasivo por retroalimentación para una clase de sistemas no lineales con incertidumbre.

La parte final de la investigación se encuentra en el capítulo seis, donde se aborda el problema de pasivación robusta a incertidumbres para una clase de sistemas no lineales MIMO (Múltiple Entrada Múltiple Salida). La estructura de la RND, conjuntamente con la ley de aprendizaje y la ley de control que se proponen en este estudio, logran la pasivación del sistema no lineal incierto. La metodología propuesta permite escoger parámetros de diseño que pueden mejorar el desempeño del sistema retroalimentado. En la parte final del capítulo, se muestra la efectividad del resultado principal a través de una simulación

comparativa contra el control PID, el cual es el uno de los mas populares controladores utilizados en la industria. En esta simulación se considera el control del nivel de un sistema hidráulico de dos tanques con incertidumbre

Las conclusiones sobre la aplicación y relevancia de los resultados de esta tesis, se describen en el capítulo siete, además de describir los trabajos futuros que surgieron en la realización de esta tesis.

# Capítulo 2

## Pasividad y Equivalente Pasivo

En este capítulo mostraremos la importancia que tienen los sistemas pasivos como herramienta de estabilización para sistemas no lineales, para llegar a esto el capítulo está estructurado como sigue. Iniciaremos definiendo a los sistemas pasivos. Posteriormente mostraremos la facilidad con que se estabiliza un sistema pasivo, y como la interconexión entre sistemas pasivos dan como resultado sistemas que son también pasivos. En una etapa intermedia del presente capítulo mostraremos las condiciones suficientes y necesarias dadas en el resultado de ([10], [2]) para construir un equivalente pasivo en sistemas no lineales afines con la entrada.

La pasividad es una propiedad que definiremos primeramente para un sistema no lineal general invariante en el tiempo que puede ser expresado por

$$\begin{aligned} \dot{x}_t &= f(x_t, u_t) \\ y_t &= h(x_t, u_t) \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde  $x_t \in \mathfrak{R}^n$  es el estado,  $u_t \in \mathfrak{R}^m$  es el vector de entrada,  $y_t \in \mathfrak{R}^m$  es el vector de salida. La función  $f : \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^m \rightarrow \mathfrak{R}^n$  es continua, la función  $h : \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^m \rightarrow \mathfrak{R}^m$  también es continua. Otra especificación del sistema es que consideramos que la energía almacenada en el sistema (2.1) es acotada, es decir, para cualquier  $x^0 = x_0 \in \mathfrak{R}^n$ , la salida  $y_t = h(\Phi(t, x^0, u))$  del sistema (2.1) es tal que  $\int_0^t |u_s^T y_s| ds < \infty$ , para toda  $t \geq 0$ .

En seguida mostramos algunas propiedades de los sistemas pasivos (vea [2] y [9]).

**Definición 2.1** El sistema (2.1) se dice que es pasivo de la entrada  $u_t$  a la salida  $y_t$ , si existe una función  $C^r$  no negativa  $S(x_t) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , llamada función de almacenamiento, tal que, para toda  $u_t$ , toda condición inicial  $x^0$  y todo  $t \geq 0$  la siguiente desigualdad se satisface:

$$\dot{S}(x_t) \leq u_t^T y_t - \varepsilon u_t^T u_t - \delta y_t^T y_t - \rho \psi(x_t), \quad (x_t, u_t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m.$$

donde  $\varepsilon$ ,  $\delta$  y  $\rho$  son constantes no negativas,  $\psi(x_t)$  es una función de  $x_t$  positiva semidefinida, tal que  $\psi(0) = 0$ . El término  $\rho \psi(x_t)$  es llamado tasa de disipación. Además, el sistema se dice que es

- sin pérdidas si  $\varepsilon = \delta = \rho = 0$  y  $\dot{S}(x_t) = u_t^T y_t$ ;
- estrictamente pasivo por la entrada si  $\varepsilon > 0$
- estrictamente pasivo por la salida si  $\delta > 0$
- estrictamente pasivo por el estado si  $\rho > 0$
- estrictamente pasivo si existe una función positiva definida  $V(x_t) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\dot{S}(x_t) \leq u_t^T y_t - V(x_t)$

**Propiedad 2.1.** Si la función  $S(x_t)$  es diferenciable y el sistema dinámico es pasivo, la función de almacenamiento  $S(x_t)$  satisface

$$\dot{S}(x_t) \leq u_t^T y_t$$

## 2.1 Interconexión de sistemas pasivos

El la figura 2-1 se muestra un esquema que representa a dos sistemas que se encuentran en una conexión paralela. Consideremos a ambos sistemas pasivos de manera que tenemos dos funciones de almacenamiento,  $V_a$  para el primer sistema cuya entrada es  $u_a$  y su salida  $y_a$ , y  $V_b$  la segunda función de almacenamiento correspondiente al segundo sistema con entrada

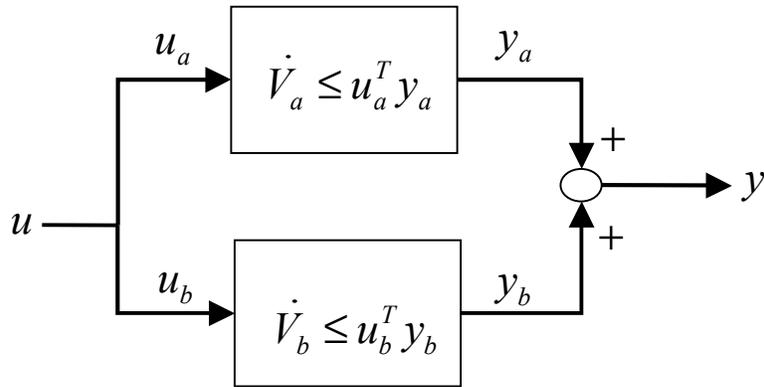


Figura 2-1: *Sistemas pasivos en conexión paralela*

$u_b$  y salida  $y_b$ . Por lo tanto se satisface que

$$\begin{aligned}\dot{V}_a &\leq u_a^T y_a, \\ \dot{V}_b &\leq u_b^T y_b.\end{aligned}$$

Nótese que debido a la manera en que están conectados los sistemas, tenemos que la entrada  $u$  se conecta a ambos sistemas  $u = v_a = v_b$ ; y la salida total resultante de la conexión paralela es  $y = y_a + y_b$ . Por otra parte, sabemos que la función de almacenamiento se puede interpretar como la energía del sistema, por consiguiente la función de almacenamiento de los sistemas conectados en paralelo es simplemente la suma de sus correspondientes funciones de almacenamiento, esto es

$$\begin{aligned}\dot{V}_a + \dot{V}_b &\leq u^T y_a + u^T y_b \\ \dot{V}_a + \dot{V}_b &\leq u^T (y_a + y_b)\end{aligned}$$

$$\dot{V}_a + \dot{V}_b \leq u^T y$$

Por lo tanto dos sistemas pasivos que son conectados de manera paralela (fig. 2-1) dan como resultado un sistema pasivo.

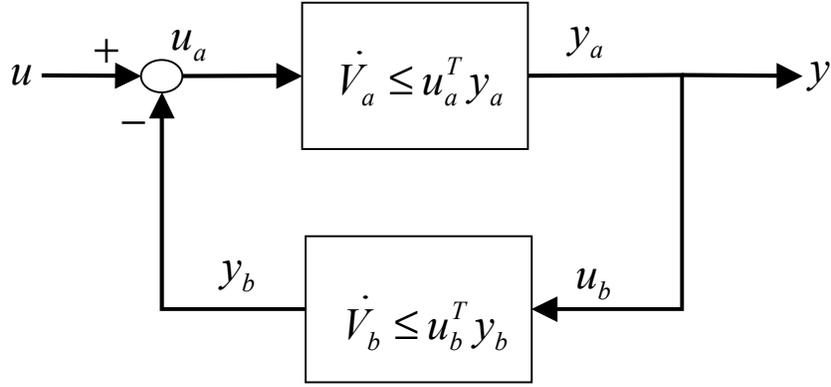


Figura 2-2: *Sistemas pasivos retroalimentados*

Ahora abordemos la situación en la que dos sistemas pasivos son conectados en retroalimentación como se muestra en la figura 2-2 nuevamente se satisface que

$$\begin{aligned}\dot{V}_a &\leq u_a^T y_a, \\ \dot{V}_b &\leq u_b^T y_b\end{aligned}$$

y por la disposición de las señales en la figura vemos que la salida total del sistema retroalimentado es igual a la salida del primer sistema y a su vez es igual a la entrada del segundo sistema  $y = y_a = u_b$ , la entrada del primer sistema está expresada por  $u_a = u - y_b$ . Una vez definido esto podemos hacer las manipulaciones algebraicas

$$\begin{aligned}\dot{V}_a + \dot{V}_b &\leq u_a^T y_a + u_b^T y_b, \\ \dot{V}_a + \dot{V}_b &\leq (u - y_b)^T y + y^T y_b \\ \dot{V}_a + \dot{V}_b &\leq u^T y - y_b^T y + y_b^T y \\ \dot{V}_a + \dot{V}_b &\leq u^T y\end{aligned}$$

las cuales expresan que la pasividad permanece en un sistema construido por la retroalimentación de dos sistemas pasivos como se muestra en la figura 2-2.

Estas propiedades de los sistemas pasivos conectados en paralelo o en retroalimentación, hacen una apertura de alternativas interesantes para los problemas de pasivación, en los que

en un momento dado se pueden separar en subsistemas.

## 2.2 Sistemas Afines con la Entrada

Un sistema no lineal expresado en su manera mas general posee la siguiente estructura:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= F(x, u, t) \\ y &= h(x)\end{aligned}$$

donde  $F(x, u, t)$  es una función no lineal que depende del tiempo  $t$ , el estado del sistema  $x$  y de la entrada  $u$ . Sin embargo, una amplia gama de sistemas no lineales pueden expresar la parte derecha  $F(x, u, t)$  de la ecuación dinámica, como la suma de un término  $f(x)$  que expresa la función no lineal de retroalimentación, mas otro término no lineal  $G(x)$  que multiplica a la entrada  $u$ . Esta clase de sistema no lineal se le conoce como sistema no lineal *afin con la entrada*. La estructura de esta clase de sistemas se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + G(x)u \\ y &= h(x)\end{aligned}\tag{2.2}$$

En esta sección consideraremos esta clase de sistemas no lineales, para mostrar los resultados acerca de pasividad existentes. Asi pues, iniciaremos citando los resultados que se pueden realizar cuando tenemos conocimiento total del modelo y posteriormente citaremos los resultados en los que se tiene una falta de información sobre la estructura del modelo (pasivación robusta).

### 2.2.1 Conocimiento Total del Modelo

Considere el sistema no lineal MIMO afin con la entrada (2.2), donde donde  $f(0) = 0$ ,  $x \in \mathfrak{R}^n$ , la entrada y la salida son vectores de la misma dimensión, es decir,  $u \in \mathfrak{R}^m$ ,  $y \in \mathfrak{R}^m$ .

**Definición 2.2** *El sistema (2.2) se dice que es pasivo si existe una función no negativa  $V_A : \mathfrak{R}^n \rightarrow R^+$ , de clase  $C^0$ , con  $V_A(0) = 0$ , llamada función de almacenamiento, tal que*

para toda  $u \in \mathfrak{R}^m$  y toda condición inicial  $x_0 \in \mathfrak{R}^n$

$$V_A(x) - V_A(x_0) \leq \int_0^t y^T(\tau)u(\tau)d\tau \quad (2.3)$$

donde  $x(t)$  denota la solución de (2.2) iniciando en  $x(0) = x_0$ .

Una propiedad fundamental de los sistemas pasivos está caracterizada por la versión no lineal del lema de Kalman-Yacubovitch-Popov (abreviado KYP) el cual puede resumirse en el siguiente lema.

**Lema 2.1** *El sistema (2.2) es pasivo si y solamente si existe una función de almacenamiento no negativa  $V_A : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^+$  de clase  $C^1$  con  $V_A(0) = 0$  tal que*

$$\begin{cases} L_f V_A \leq 0 \\ L_G V_A = h^T(x) \end{cases}$$

donde  $L_f V_A := \left[ \frac{\partial V_A}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V_A}{\partial x_n} \right] f(x)$  es una función escalar y  $L_G V_A := \left[ \frac{\partial V_A}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V_A}{\partial x_n} \right] G(x)$  es un vector.

**Observación 2.1** *El sistema (2.2) es estrictamente pasivo si y solamente si [10] [2] existe una función positiva definida  $V(x)$  de clase  $C^1$  tal que*

$$\begin{cases} L_f V < 0, \forall x \neq 0 \\ L_G V = h^T(x) \end{cases} \quad (2.4)$$

## 2.2.2 Pasividad Robusta

Hasta este momento todo lo que se ha mostrado en este capítulo tiene la particularidad de partir del conocimiento absoluto del modelo de la planta. Ahora citaremos los resultados teóricos de pasividad robusta encontrada en [24].

**Lema 2.2** *Considere la clase de sistemas no lineales descrita por*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_{nom}(x) + \Delta_f(x) + G(x)u \\ y &= h(x) \end{aligned} \quad (2.5)$$

donde  $f_{nom}(x)$  es la parte nominal conocida de  $f(x)$ ,  $\Delta_f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  representa la incertidumbre caracterizada por

$$\Delta_f(x) = F(x)\delta(x)$$

donde  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  es una función suave y conocida y  $\delta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función incierta, la cual pertenece al siguiente conjunto compacto

$$\Omega = \{\delta(x) : \|\delta(x)\| \leq \|\rho(x)\|, \forall x \in \mathbb{R}^n\}$$

con la función  $\rho(x)$  escogida por el diseñador. El sistema (2.5) es robustamente pasivo con respecto a una función  $V(x)$  de clase  $C^1$ , la cual es no negativa con  $V(0) = 0$ , si y solamente si

$$\begin{cases} L_{f_{nom}}V + \|L_F V(x)\| \|\delta(x)\| \leq 0, \forall x \neq 0 \\ L_G V = h^T(x) \end{cases}$$

Este último resultado muestra una caracterización de la incertidumbre que permite la construcción de cotas finas del término incierto, ya que al caracterizar  $\Delta_f(x) = F(x)\delta(x)$ , el diseñador tiene la holgura de escoger la función matricial y suave  $F(x)$  conjuntamente con  $\rho(x)$  para afinar la cota de la incertidumbre

### 2.2.3 Equivalente Pasivo de Sistemas No Lineales por Retroalimentación

Si un sistema no lineal libre de incertidumbre y afin con la entrada, no satisface a las condiciones expresadas en (2.4), existe la alternativa de construir un equivalente pasivo.

**Definición 2.3** *Un sistema (2.2) se dice que es equivalente  $C^r$  pasivo localmente por retroalimentación, o bien, localmente  $C^r$  pasivo por retroalimentación, si existe una ley de control*

$$u = \alpha(x) + \beta(x)w \tag{2.6}$$

donde  $\beta(x) \neq 0$  en una vecindad en  $x = 0$ , y tal que el sistema (2.2), con la nueva entrada  $w$  (2.6) es  $C^r$ -pasivo. Si el sistema en lazo cerrado es  $C^r$ -libre de pérdidas o estrictamente  $C^r$ -pasivo, entonces el sistema (2.2) se dice que es localmente  $C^r$ -libre de pérdidas por retroalimentación o localmente estrictamente  $C^r$ -pasivo por retroalimentación, respectivamente.

Si suponemos que  $L_g h(x) = [\partial h / \partial x]g(x) \neq 0$  en una vecindad en  $x = 0$ , entonces el sistema (2.2) tiene *grado relativo*  $\rho = 1$  al rededor de  $x = 0$ , y existe un nuevo conjunto de coordenadas locales  $\zeta(x) = (z(x), y = h(x))$  con  $z(x) = [z_1(x) \cdots z_{n-1}(x)]^T$ , bajo las cuales el sistema (2.2) puede ser representado en la *forma normal* [2]

$$\dot{y} = a(y, z) + b(y, z)u, \quad \dot{z} = c(y, z) \quad (2.7)$$

donde  $b(y, z) \neq 0$  para toda  $(y, z)$  cercana a  $(0, 0)$ .

La *dinámica cero* de un sistema son aquellas dinámicas internas que obedecen a la restricción externa de  $y = 0$ . Para el sistema (2.7), la *dinámica cero* está dada por

$$\dot{z} = c(0, z) := f_0(z). \quad (2.8)$$

Por esto, el sistema (2.7) puede ser escrito nuevamente como [2]

$$\dot{y} = a(y, z) + b(y, z)u, \quad \dot{z} = f_0(z) + p(y, z)y \quad (2.9)$$

donde  $p(y, z)$  es una función de dimensión  $n - 1$  y de clase  $C^\infty$ .

**Definición 2.4** *Suponga que  $L_g h(x) = [\partial h / \partial x]g(x) \neq 0$  en una vecindad en  $x = 0$ . Entonces el sistema (2.2) se dice que es*

- i** *localmente de fase mínima si su dinámica cero es asintóticamente estable en una vecindad cercana a  $z = 0$ .*
- ii** *localmente débilmente de fase mínima si existe una función positiva y diferenciable  $W_0(z)$ , con  $W_0 = 0$ , tal que  $L_{f_0} W_0(z) = [\partial W_0 / \partial z] \leq 0$  para toda  $z$  en una vecindad  $z = 0$ .*

Con una caracterización geométrica de un sistema se muestra en [2] que se puede hacer  $C^2$ -pasivo. En esta publicación se demuestra que un sistema (2.2) puede hacerse equivalente pasivo por retroalimentación localmente con una función de almacenamiento positiva definida de clase  $C^2$ , si y solamente si el sistema (2.2) tiene grado relativo  $\rho = 1$  en  $x = 0$  y es localmente debilmente de fase mínima (vea [2], Teorema 4.7, p. 1235).

Las propiedades de estabilidad de un sistema pasivo son particularmente útiles. Supongamos que el sistema (2.2) ha sido transformado a un equivalente  $C^2$  pasivo por retroalimentación localmente

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\alpha(x) + g(x)\beta(x)w := \bar{f}(x, w), \quad y = h(x). \quad (2.10)$$

Entonces, si para este sistema existe una vecindad  $X$  al rededor de 0 tal que, para toda  $x \in \mathfrak{R}^n$ ,  $h(\Phi(t, x, 0)) = 0$  implica que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t, x, 0) = 0$  (i.e. el sistema (2.10) es *localmente estado cero detectable*), entonces su punto de equilibrio  $x = 0$  puede hacerse localmente asintóticamente estable a través de una retroalimentación de salida

$$w = -\varphi(y) \quad (2.11)$$

donde  $\varphi : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$  es cualquier función suave que satisface  $\varphi(0) = 0$  además de  $y\varphi(y) > 0$  para cada  $y \neq 0$  [2].

**Observación 2.2** *Nótese que la función  $\varphi(y)$  podemos escogerla simplemente como  $\varphi(y) := ky$ , ( $\varphi(0) = 0$ ,  $y\varphi(y) = ky^2 > 0$ ) con lo que podemos concluir que un sistema no lineal que es pasivo, puede ser estabilizado con una retroalimentación lineal de la salida.*

## 2.2.4 Pasividad por Retroalimentación de Sistemas No Lineales utilizando un Operador de Proyección

Otra metodología interesante para lograr la pasividad de sistemas no lineales MIMO por retroalimentación es la propuesta en [47], ya que en ésta se utiliza un operador de proyección para realizar una descomposición de las fuerzas o partes que están inmersas en un sistema no lineal afin con la entrada: la parte disipativa, la parte desestabilizadora y la parte que en

nada contribuye al sistema. Además la metodolgia no demanda la necesidad de una forma normal y realiza la cancelación solamente de la parte que desestabiliza al sistema.

Considere el sistema no lineal MIMO

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + G(x)u \\ y &= h(x)\end{aligned}\tag{2.12}$$

donde  $x \in \mathcal{X} \subset \mathfrak{R}^n$ ,  $u \in U \subset \mathfrak{R}^m$ ,  $y \in Y \subset \mathfrak{R}^m$ . El conjunto  $\mathcal{X}$  denota la región de operación que contiene un punto de equilibrio de la forma  $x = \bar{x}(U)$  y está dado por la solución  $f(\bar{x}) + G(\bar{x})U = 0$ . Para  $u = 0$  se supone que  $f(\bar{x}) = 0$  implica  $\bar{x} = 0$ . Nuestro interés es hacia puntos de equilibrio en el estado que sean diferentes de cero y constantes  $x = \bar{x}$ , obtenidos de entradas de control constantes y diferentes de cero  $u = U$ . La matriz de entrada  $G$  de dimensión  $n \times m$  está construida por  $m$  columnas  $[g_1(x), \dots, g_m(x)]$  las cuales generan localmente una distribución de dimensión  $m$  dentro de  $\mathcal{X}$ . También suponemos que está dada una función positiva definida  $V : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^+$ , de clase  $C^1$ , tal que  $V(0) = 0$ .

Para compactar expresiones de las derivadas se introduce el simbolismo  $L_G V$  como un vector fila dado por

$$L_G V = \frac{\partial V}{\partial x} G = \left[ \frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right] G$$

y la notación  $L_G^T V$  la utilizaremos para denotar el vector columna  $(\frac{\partial V}{\partial x} G)^T = G^T \frac{\partial V}{\partial x}$ .

**H1:** Los campos vectoriales  $g_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, m$  no son todos tangentes a la función  $V$ , en el espacio de estado del sistema que pertenece a la región de operación  $\{x \in \mathcal{X} : V(x) = \text{constant}\}$  i.e.

$$\|L_G V\| \neq 0.\tag{2.13}$$

**H2:** El vector fila  $L_G V(x)$  puede ser expresado como

$$L_G V(x) P^{-1}(x) = h^T \quad \forall x \in \mathcal{X}$$

donde  $P(x)$  es una matriz  $m \times m$  la cual es invertible en la región de operación  $\mathcal{X}$ .

Para cada  $x$  que esté en la región de operación, es decir  $x \in \mathcal{X}$  y aprovechando la condición de transversalidad (2.13), definimos un operador de proyección a lo largo del "span" de la matriz de entrada  $G$  hacia el espacio tangente de los conjuntos de nivel constante de la función  $V(x)$ , este operador es la matriz  $M(x)$  dada por

$$M(x) = \left[ I - \frac{1}{\|L_G V\|^2} G \cdot L_G^T V \cdot \frac{\partial V}{\partial x} \right] \quad (2.14)$$

Ahora mostraremos algunas propiedades de la matriz  $M(x)$  en la siguientes proposiciones.

**Proposición 2.1** *La matriz  $M(x)$  tiene las siguientes propiedades:*

$$\frac{\partial V^T}{\partial x} \in \text{Ker } M^T(x), \quad M(x)(I - M(x)) = 0, \quad G \cdot L_G^T V \in \text{Ker } M(x)$$

**Proposición 2.2** *Sea  $f(x)$  un campo vectorial suave, entonces el vector  $M(x)f(x)$  puede ser escrito como*

$$M(x)f(x) = \tilde{J}(x) \frac{\partial V^T}{\partial x}$$

donde  $\tilde{J}(x)$  es una matriz antisimétrica i.e.  $\tilde{J}(x) - \tilde{J}^T(x) = 0$ . Por otra parte el campo vectorial  $[I - M(x)]f(x)$  puede ser escrito como

$$\begin{aligned} [I - M(x)]f(x) &= N(x) \frac{\partial V^T}{\partial x} = \frac{1}{2} [N(x) - N^T(x)] + \frac{1}{2} [N(x) + N^T(x)] \\ &= -\frac{1}{2} \tilde{J}(x) + S(x) \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$N(x) = \frac{1}{\|L_G V\|^2} G \cdot L_G^T V \cdot f^T \in R^{n \times n} \quad (2.16)$$

donde  $S(x)$  es una matriz simétrica.

**Proposición 2.3** *Sea  $S(x)$  una matriz simétrica, entonces :*

- *Puede ser descompuesta como la suma de una matriz positiva definida  $S_p(x)$ , mas una semidefinida negativa  $S_n(x)$*

- Puede ser descompuesta como la suma de una matriz positiva semidefinida  $S_p(x)$ , mas una negativa definida  $S_n(x)$ .

Las proposiciones y definiciones de la sección anterior dan lugar a el siguiente corolario.

**Corolario 2.1** *Un sistema no lineal de la forma (2.12), con una función positiva definida que satisface la condición  $\|L_G V\| \neq 0$ , siempre puede ser escrito como*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{1}{2}\tilde{J}(x)\frac{\partial V^T}{\partial x} + S_n(x)\frac{\partial V^T}{\partial x} + S_p(x)\frac{\partial V^T}{\partial x} + G(x)u \\ y &= h(x)\end{aligned}$$

donde  $\tilde{J}(x)$  es una matriz skew-symmetric, la matriz  $S_n(x)$  es negativa semidefinida y  $S_p(x)$  es positiva semidefinida.

**Teorema 2.1** *Considere el sistema MIMO (2.12) con una función  $V(x)$  tal que la hipótesis **H1** y **H2** se satisfacen, si se aplica la ley de control [47]*

$$u = P(x)^{-1}v - \frac{L_G^T V}{\|L_G V\|^2} \left[ \frac{\partial V}{\partial x} S_p(x) \frac{\partial V^T}{\partial x} \right] \quad (2.17)$$

entonces el sistema en lazo cerrado es  $C^1$  pasivo por retroalimentación de la nueva entrada  $v$  a la salida  $y$  con respecto a la función de almacenamiento  $V(x)$ , esto es

$$\dot{V} \leq y^T v.$$

Para hacer mas transparente este último resultado son de utilidad las siguientes observaciones

**Observación 2.3** *El operador de proyección (2.14) permite la descomposición de  $f(x)$  en su parte ociosa  $\frac{1}{2}\tilde{J}(x)\frac{\partial V^T}{\partial x}$ , en una parte disipativa  $S_n(x)\frac{\partial V^T}{\partial x}$  y en una última parte  $S_p(x)\frac{\partial V^T}{\partial x}$  que realiza una acción desestabilizante en el sistema.*

**Observación 2.4** *De las tres partes en que es descompuesta  $f(x)$ , la ley de control (2.17) solamente cancela a la acción desestabilizante y simultaneamente permite el equivalente pasivo del sistema retroalimentado*

## 2.3 Estabilidad Entrada Estado

**Definición 2.5** *El sistema (2.1) se dice que es globalmente estable entrada-estado si existe una función  $\gamma(s)$  de clase  $\mathcal{K}$  (continua y estrictamente creciente  $\gamma(0) = 0$ ) y una función  $\beta(s, t)$  de clase  $\mathcal{KL}$  (función de clase  $\mathcal{K}$  y para toda  $s_0$  fija con  $s_0 \geq 0$ , y  $\lim_{t \rightarrow \infty} \beta(s_0, t) = 0$ ), tal que, para cualquier entrada  $u_t \in L_\infty$  ( $\sup \{\|u_t\|, t \geq 0\} < \infty$ ) y cualquier estado inicial  $x^0 \in R^n$ , se sostiene que*

$$\|x(t, x^0, u_t)\| \leq \beta[\|x^0\|, t] + \gamma[\|u_t\|].$$

para toda  $t \geq 0$  [50].

**Propiedad 2.2** De manera que interpretando la última desigualdad se puede decir que si el sistema es estable entrada salida, el comportamiento del sistema a lo largo del tiempo debe permanecer acotado si su entrada permanece acotada.

# Capítulo 3

## Pasividad en Redes Neuronales

### Dinámicas

Recientes resultados mostraron que las técnicas con redes neuronales son efectivas cuando no se tiene información completa del modelo, y han sido aplicadas para el control de una amplia clase de sistemas con no linealidades complejas, o incluso cuando la planta que va a ser controlada se considera como una caja negra [12]. Esta propuesta libre de modelo explota las ventajas que caracterizan a las redes neuronales, pero la falta de un modelo para la planta controlada dificulta la obtención de resultados teóricos de estabilidad. Es importante asegurar la estabilidad de manera teórica en las redes neuronales antes de implementarlas de manera real.

No hay muchos resultados de análisis de estabilidad de redes neuronales a pesar de sus aplicaciones exitosas. La estabilidad global asintótica (GAS) de redes neuronales dinámicas ha sido desarrollada durante la última década. En el neuro circuito del tanque de Hopfield con una matriz de interconexión negativa semidefinida se logra la estabilidad global asintótica [7]. El concepto de estabilidad diagonal fué establecido en [17] para la estabilidad de neuro circuitos. En el marco teórico de los sistemas Lur'e, la estabilidad absoluta de perceptrones multicapa (MLP) y de redes neuronales recurrentes fué propuesta en [52] y [27]. El análisis de estabilidad entrada estado (ISS) [18] es una herramienta efectiva para las redes neuronales dinámicas, y en [43] se establece que si los pesos son lo suficientemente pequeños, las redes neuronales tienen ISS y GAS con la entrada igual a cero.

La estabilidad en la identificación y en el error de seguimiento de redes neuronales han sido también estudiadas. Por ejemplo [15] y [23] estudiaron las condiciones de estabilidad para perceptrones utilizados para identificar y controlar un sistema no lineal. El análisis estilo Lyapunov es una herramienta popular para demostrar estabilidad, en [40] y [61] se discute la estabilidad de una red neuronal dinámica de una capa. Para el caso de redes neuronales de orden superior y multicapa se pueden encontrar resultados de estabilidad en [20] y [32].

La teoría de pasividad [44] es otra herramienta efectiva para analizar la estabilidad de un sistema no lineal. A través de esta teoría se pueden enfrentar a los sistemas no lineales utilizando las características del mapeo entrada salida de la dinámica, y ofrece soluciones elegantes sobre la demostración de estabilidad. El marco teórico de la pasividad es un medio generoso para el análisis de estabilidad de redes neuronales, ya que se puede llegar a conclusiones de estabilidad usando solamente características entrada salida. Las propiedades de pasividad en el MLP fueron estudiadas en [23] y en [5]. Ellos mostraron una relación entre la pasividad y la estabilidad en lazo cerrado por medio de un análisis de la interconexión de los errores de modelo. A su vez cabe recordar que, el análisis utilizando la metodología de pasividad en lazo abierto para redes neuronales dinámicas no ha sido aún establecido en la literatura.

En este capítulo se muestra que un algoritmo gradiente en la ley de aprendizaje de una red neuronal dinámica, permite la estabilidad mediante la pasividad. Agregando algunas condiciones, se puede concluir que la red neuronal es GAS y ISS. En este capítulo la sección 1 la dedicamos a definiciones preliminares y las principales propiedades de estabilidad. La sección 2 muestra una simulación y en la última sección hacemos unas conclusiones que resumen los resultados mostrados de este capítulo.

## 3.1 Propiedades de Estabilidad de Redes Neuronales Dinámicas

Considere una clase de sistemas no lineales dados por

$$\begin{aligned} \dot{x}_t &= f(x_t, u_t) \\ y_t &= h(x_t, u_t) \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde  $x_t \in \mathfrak{R}^n$  es el estado,  $u_t \in \mathfrak{R}^m$  es el vector de entrada,  $y_t \in \mathfrak{R}^m$  es el vector de salida.  $f : \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^m \rightarrow \mathfrak{R}^n$  es una función que es localmente Lipschitz, la función  $h : \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^m \rightarrow \mathfrak{R}^m$  es continua. Consideramos que para cualquier  $x^0 = x_0 \in \mathfrak{R}^n$ , la salida  $y_t = h(\Phi(t, x^0, u))$  del sistema (3.1) es tal que  $\int_0^t |u_s^T y_s| ds < \infty$ , para toda  $t \geq 0$ , *i.e.* la energía almacenada en el sistema (3.1) es acotada.

Ahora consideremos a la red neuronal dinámica

$$\dot{x}_t = Ax_t + W_{1,t}\sigma(V_{1,t}x_t) + W_{2,t}\phi(V_{2,t}x_t)u_t \tag{3.2}$$

donde  $x_t \in \mathfrak{R}^n$  es el estado de la red neuronal,  $u_t \in \mathfrak{R}^m$  es la entrada de control,  $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  es una matriz estable.  $W_{1,t} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ ,  $W_{2,t} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  son las matrices de pesos de las capas de salida,  $V_{1,t} \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ ,  $V_2 \in \mathfrak{R}^{m \times n}$  son las matrices de pesos de las capas internas. El campo vectorial  $\sigma(x_t) : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^m$  lo consideramos con elementos monótonicamente crecientes. La función  $\phi(\cdot)$  es una transformación de  $\mathfrak{R}^n$  a  $\mathfrak{R}^{m \times m}$ . La forma típica de presentar los elementos de  $\sigma_i(\cdot)$  y de  $\phi_{ij}(\cdot)$  es por funciones sigmoidales

$$\sigma_i(x_{i,t}) = a_i / (1 + e^{-b_i x_{i,t}}) - c_i.$$

La estructura de la red neuronal dinámica (5.36) se muestra en la figura.3-1.

**Observación 3.1** *Esta clase de redes neuronales dinámicas han sido discutidas por muchos autores, por ejemplo [20], [32], [40] y [61]. Inclusive se puede ver que el modelo de Hopfield [11] (ecuación 1.4 y fig. 1-11) es un caso especial de esta clase de redes neuronales donde  $A = \text{diag}\{a_i\}$ , donde  $i = 1, \dots, n$ ,  $a_i := -1/R_{0i}C_i$ ,  $R_{0i} > 0$  y  $C_i > 0$ . Los parámetros  $R_{0i}$  y*

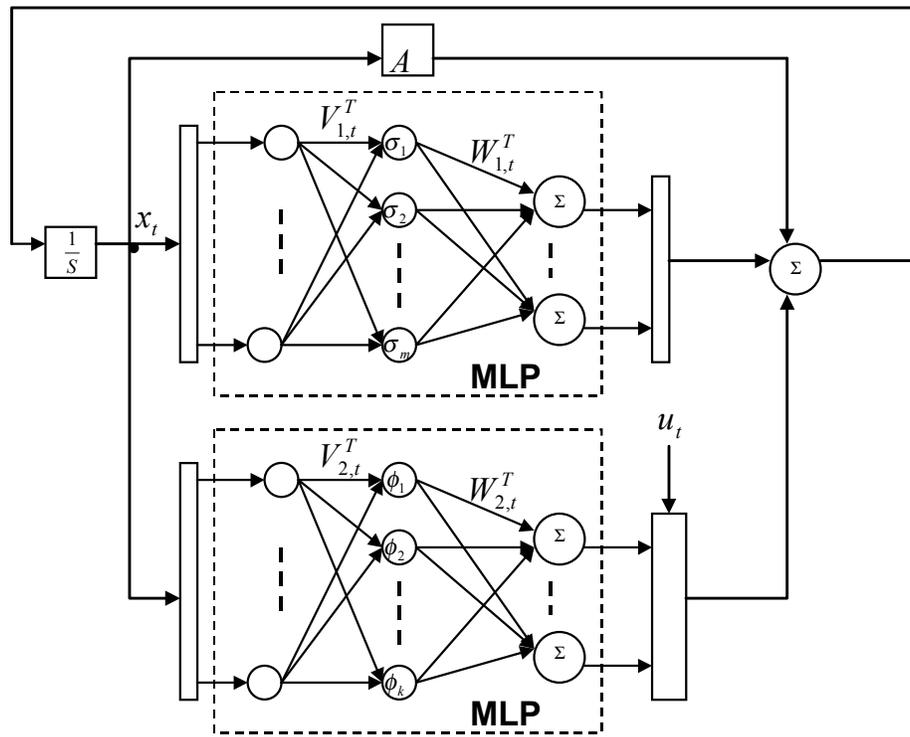


Figura 3-1: Estructura de la RND

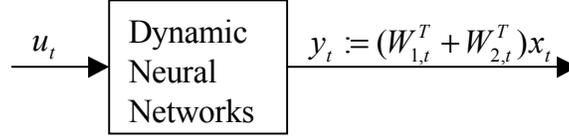


Figura 3-2: Pasividad en la Red Neuronal Dinámica

$C_i$  son las resistencias y los capacitores de la  $i$  –ésima neurona de la red respectivamente.

**Observación 3.2** La sub estructura  $W_{1,t}\sigma(V_{1,t}x_t) + W_{2,t}\phi(V_{2,t}x_t)u_t$  Es una estructura con el estilo del perceptrón multicapa. La ley de aprendizaje en tiempo continuo fue estudiada en [23]. Casi todos los estudios de redes neuronales dinámicas han sido utilizando el método de Lyapunov.

**Teorema 3.1** Si los pesos  $W_{1,t}$  y  $W_{2,t}$  de la RND definidos en (3.2) son actualizados con

$$\begin{aligned}\dot{W}_{1,t} &= -Px_t\sigma^T + \frac{1}{2}x_tu_t^T \\ \dot{W}_{2,t} &= -Px_t(\phi u_t)^T + \frac{1}{2}x_tu_t^T\end{aligned}\tag{3.3}$$

donde  $P$  es la solución de la siguiente ecuación de Lyapunov

$$PA + A^T P = -Q,\tag{3.4}$$

$Q \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  es una matriz dada positiva definida, entonces la red neuronal dinámica (3.2) es estrictamente pasiva de la entrada  $u_t$  a la salida  $y_t$  (vea Fig.3-2)

$$y_t := (W_{1,t}^T + W_{2,t}^T) x_t\tag{3.5}$$

**Prueba.** Seleccionamos una función de Lyapunov  $S_t$  (o bien función de almacenamiento) expresada como

$$S_t = x_t^T P x_t + tr \{W_{1,t}^T W_{1,t}\} + tr \{W_{2,t}^T W_{2,t}\}\tag{3.6}$$

donde  $P \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  es una matriz positiva definida,  $tr \{ \cdot \}$  denota la traza y está definida como la suma de todos los elementos de la diagonal de una matriz. De acuerdo a (3.2), la derivada de  $S_t$  es:

$$\begin{aligned} \dot{S}_t = & x_t^T (PA + A^T P) x_t + 2x_t^T P W_{1,t} \sigma(V_{1,t} x_t) \\ & + 2x_t^T P W_{2,t} \phi(V_{2,t} x_t) u_t + 2tr \left\{ \dot{W}_{1,t}^T W_{1,t} \right\} + 2tr \left\{ \dot{W}_{2,t}^T W_{2,t} \right\} \end{aligned}$$

Sumando y restando el término  $x_t^T (W_{1,t} + W_{2,t}) u_t$  y utilizando a (3.4), obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{S}_t = & -x_t^T Q x_t + x_t^T (W_{1,t} + W_{2,t}) u_t \\ & + 2tr \left\{ \dot{W}_{1,t}^T W_{1,t} \right\} + 2x_t^T P W_{1,t} \sigma(V_{1,t} x_t) - x_t^T W_{1,t} u_t \\ & + 2x_t^T P W_{2,t} \phi(V_{2,t} x_t) u_t + 2tr \left\{ \dot{W}_{2,t}^T W_{2,t} \right\} - x_t^T W_{2,t} u_t \end{aligned}$$

Si imponemos la ley de actualización como (3.3), tenemos

$$\dot{S}_t = -x_t^T Q x_t + x_t^T (W_{1,t} + W_{2,t}) u_t \quad (3.7)$$

De la *Definición 2.1* vemos que si la entrada es definida como  $u_t$  y a la salida como  $(W_{1,t}^T + W_{2,t}^T) x_t$ , entonces la red neuronal dinámica dada por (3.2) es estrictamente pasiva, donde

$$V_t = x_t^T Q x_t \geq 0$$

■

**Observación 3.3** Como  $\sigma(\cdot)$  y  $\phi(\cdot)$  son acotadas, la pasividad no tiene relación con los pesos de la capa escondida  $V_{1,t}$  y  $V_{2,t}$ . Los pesos de la capa escondida pueden ser fijos. Podemos concluir que las propiedades de estabilidad de la red neuronal dinámica (3.2) no es influenciada por la capa escondida.

**Corolario 3.1** Si la red neuronal dinámica (3.2) tiene entrada nula ( $u_t = 0$ ), la ley de actualización (3.3) hace estable el punto de equilibrio  $x_t = 0$ .

**Prueba.** Partiendo de que el sistema dinámico (3.2) es pasivo, la función de almacenamiento  $S(x_t)$  satisface (*Propiedad 2.1*)

$$\dot{S}(x_t) \leq u_t^T y_t = 0$$

Por lo tanto el equilibrio  $x_t = 0$  de  $\dot{x} = f(x_t, 0)$  es estable. ■

**Corolario 3.2** *Si la entrada de control de la red neuronal dinámica (3.2) es seleccionada como*

$$u_t = -\mu y_t = -\mu (W_{1,t}^T + W_{2,t}^T) x_t, \quad \mu > 0 \quad (3.8)$$

la ley de actualización (3.3) estabiliza asintóticamente el equilibrio  $x_t = 0$ .

**Prueba.** Ya que la salida  $y_t = h(x_t)$  es independiente de  $u_t$ , el lazo de retroalimentación  $u_t = -\mu y_t$  hace a la derivada de  $S$  menor o igual a cero, es decir

$$\dot{S}(x_t) \leq -\mu y_t^T y_t \leq 0$$

Por lo que el equilibrio  $x_t = 0$  de la dinámica  $\dot{x}_t = f(x_t, -y_t)$  es estable. Basado en el principio de invarianza (sección 2.3 de [44]), las soluciones acotadas de  $\dot{x} = f(x, -y)$  convergen al conjunto invariante mas grande de  $\dot{x}_t = f(x_t, 0)$ . Como este conjunto está contenido en  $E = \{x_t \mid h(x_t) = 0\}$ , este conjunto es  $x_t = 0$ , entonces el equilibrio  $x_t = 0$  es asintóticamente estable. ■

**Teorema 3.2** *Si la cota superior de los pesos satisface*

$$\lambda_{\max}(\overline{W}_1 + \overline{W}_2) \leq \lambda_{\min}(Q) \quad (3.9)$$

donde  $\overline{W}_1 = \sup \|W_{1,t}\|_{\Lambda_1^{-1}}^2$ ,  $\overline{W}_2 = \sup \|W_{2,t}\|_{\Lambda_2^{-1}}^2$ , con la norma ponderada de una matriz definida como  $\|A\|_B^2 := A^T B A$ . Las matrices  $\Lambda_1$  y  $\Lambda_2$  son positivas definidas,  $\lambda_{\max}(\cdot)$  y  $\lambda_{\min}(\cdot)$  son el máximo y el mínimo eigenvalor de la matriz  $(\cdot)$ . Entonces la ley de actualización (3.3) hace a la red neuronal dinámica (3.2) estable entrada estado (ISS).

**Prueba.** Tomando en cuenta la desigualdad matricial

$$X^T Y + (X^T Y)^T \leq X^T \Lambda^{-1} X + Y^T \Lambda Y \quad (3.10)$$

la cual es válida para cualquier  $X, Y \in \mathfrak{R}^{n \times k}$  y cualquier matriz positiva definida  $0 < \Lambda = \Lambda^T \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ , por lo que (3.7) puede ser expresada como

$$\begin{aligned} \dot{S}_t &= -x_t^T Q x_t + x_t^T (W_{1,t} + W_{2,t}) u_t \\ &\leq -\lambda_{\min}(Q) \|x_t\|^2 + x_t^T W_{1,t} \Lambda_1^{-1} W_{1,t}^T x_t + x_t^T W_{2,t} \Lambda_2^{-1} W_{2,t}^T x_t + u_t^T \Lambda_1 u_t + u_t^T \Lambda_2 u_t \\ &\leq -\lambda_{\min}(Q) \|x_t\|^2 + x_t^T (\overline{W}_1 + \overline{W}_2) x_t + u_t^T \Lambda_1 u_t + u_t^T \Lambda_2 u_t \\ &\leq -\alpha_{\|x_t\|} \|x_t\| + \beta_{\|u_t\|} \|u_t\| \end{aligned}$$

donde  $\alpha_{\|x_t\|} := [\lambda_{\min}(Q) - \lambda_{\max}(\overline{W}_1 + \overline{W}_2)] \|x_t\|$ ,  $\beta_{\|u_t\|} := \lambda_{\max}(\Lambda_1 + \Lambda_2) \|u_t\|$ . Si la condición (3.9) se satisface,  $\alpha_{\|x_t\|}$  y  $\beta_{\|u_t\|}$  son funciones  $\mathcal{K}_\infty$ ,  $V_t$  es una función de Lyapunov para estabilidad entrada estado (ISS). Utilizando el Teorema 1 de [50], se concluye la estabilidad entrada estado de la red neuronal dinámica (3.2). ■

**Observación 3.4** *Considere la Propiedad 2.2; el concepto de ISS significa que el comportamiento de la red neuronal dinámica debe permanecer acotado cuando sus entradas permanecen acotadas. Si se consideran como entrada algunas perturbaciones acotadas, la red neuronal también tiene una evolución acotada con respecto a las perturbaciones. Entonces la red neuronal dinámica (3.2) es estable en el sentido BIBO (entrada-acotada salida-acotada).*

**Observación 3.5** *Si  $P$  es seleccionada lo suficientemente grande, entonces la condición (3.9) no se dificulta satisfacerla. De (3.4) tenemos*

$$TPA + TA^T P = -TQ, \quad Q = Q^T > 0, \quad T = T^T > 0 \quad (3.11)$$

*Si la matriz positiva definida  $T$  es lo suficientemente grande, (3.9) se satisface, i.e.*

$$\lambda_{\max}(\overline{W}_1 + \overline{W}_2) \leq \lambda_{\min}(TQ)$$

## 3.2 Simulación

Para mostrar los resultados teóricos, mostramos las siguientes simulaciones. La arquitectura de la red neuronal dinámica es

$$\dot{x}_t = Ax_t + W_{1,t}\sigma(V_{1,t}x_t) + W_{2,t}\phi(V_{2,t}x_t)u_t \quad (3.12)$$

donde  $x_t \in \mathfrak{R}^2$ ,  $u_t \in \mathfrak{R}^3$ ,  $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ . Las condiciones iniciales son  $x_0 = [2, 5]^T$ ,  
 $W_{1,0} = \begin{bmatrix} -5 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$ ,  $W_{2,0} = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 \\ -6 & 2 & -6 \end{bmatrix}$ . Los pesos de la capa interna  $V_{1,t}$  y  $V_{2,t}$   
son fijos y el valor de cada uno es  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ . Las funciones sigmoideas las definimos como

$$\sigma(x) = 2/(1 + e^{-2x}) - \frac{1}{2}, \quad \phi(x) = 0.2/(1 + e^{-0.2x}) - \frac{1}{20}$$

*Primero*, verifiquemos la pasividad de la red neuronal (3.12). Si seleccionamos  $Q = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$ , la solución de la ecuación de Lyapunov (3.4) es  $P = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ . La ley de actualización de los pesos  $W$ , es decir, el aprendizaje de la red neuronal, es (3.3).

La Fig.3-3 muestra la respuesta acotada de las entradas ( $u_1$  es un escalón unitario que inicia en  $t = 2$ ,  $u_2$  es un perfil senoidal de amplitud 2 y  $u_3$  es un perfil coseno también de amplitud 2). La Fig.3-4 muestra la respuesta con entrada cero. En la Fig.3-5 esta graficada la respuesta en lazo cerrado agregándole la retroalimentación de la salida (3.8) con  $\mu = 1$ . Claramente, podemos observar que la ley de actualización (3.3) hace pasiva a la red neuronal dinámica (3.12) con entradas acotadas, estable con entrada cero y asintóticamente estable con el control de retroalimentación de la salida.

Como *segundo* resultado de simulación, verifiquemos la estabilidad entrada estado (ISS). Sabemos que (3.4) al ser multiplicada  $T$  obtenemos (3.11). Si  $T = \text{diag}\{[3, 3]\}$ , entonces

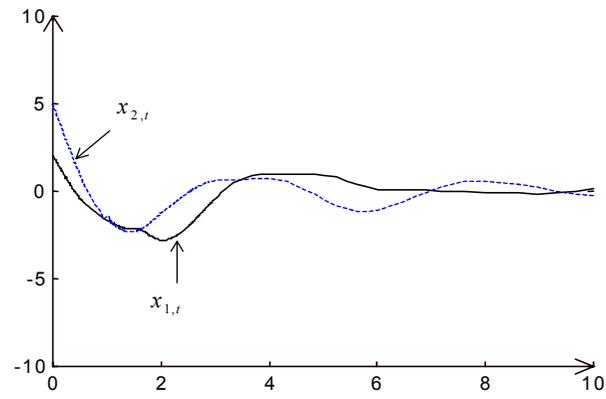


Figura 3-3: *Respuesta a entradas acotadas*

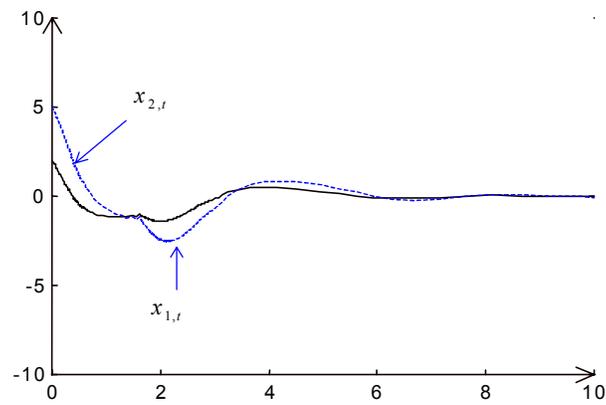


Figura 3-4: *Respuesta a entrada cero*

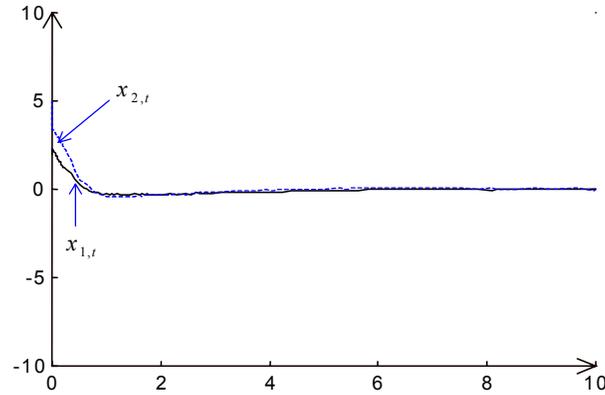


Figura 3-5: *Retroalimentación de la salida*

$P = \begin{bmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 15 \end{bmatrix}$ . La ley de actualización de los pesos sigue siendo (3.3). Si utilizamos las mismas entradas, presentan como resultado la gráfica de la figura 3-6. Si seleccionamos  $T = \text{diag} \{[0.1, 0.1]\}$ , de manera que  $P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$ , la gráfica de la figura 3-7 muestra lo que sucede bajo estas circunstancias de simulación. Puede observarse como repercute la condición (3.9) de manera importante para la estabilidad entrada estado.

### 3.3 Conclusión

En este capítulo se muestran resultados de estabilidad para la redes neuronales dinámicas (3.2), basándonos en técnicas de pasividad. Con un sencillo algoritmo de gradiente (5.38) se puede lograr la pasividad, la estabilidad, la estabilidad asintótica, la estabilidad entrada estado y en cierto sentido la estabilidad BIBO de la red neuronal.

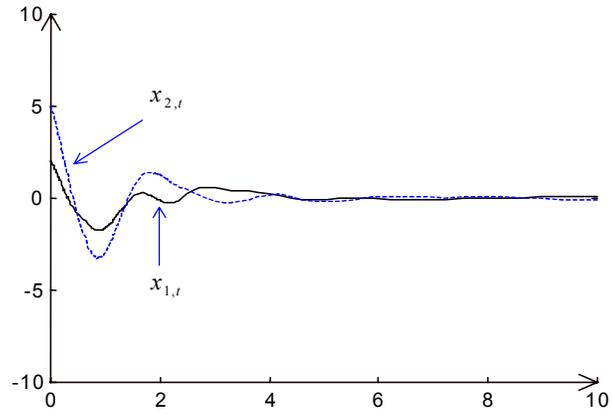


Figura 3-6: Respuesta para ISS con  $T = \text{diag}\{[3, 3]\}$

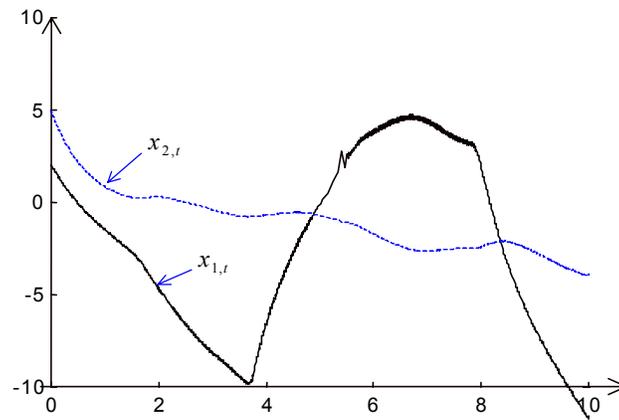


Figura 3-7: Respuesta para ISS con  $T = \text{diag}\{[0.1, 0.1]\}$

# Capítulo 4

## Identificación Neuronal Pasiva

En este capítulo se utiliza como herramienta a la teoría de pasividad para analizar la estabilidad de una identificación con una Red Neuronal Dinámica para un sistema no lineal. Utilizando la pasividad se pueden enfrentar los sistemas no lineales ofreciendo soluciones elegantes en la demostración de la estabilidad absoluta. Esto puede dirigirnos a conclusiones generales de estabilidad desde el punto de vista entrada-salida.

La metodología en este capítulo se basa en un análisis estilo Lyapunov; cabe recordar que este tipo de análisis, es común encontrarlo en el diseño de redes neuronales dinámicas. Por ejemplo en [40] y [61] se discute el caso de una sola capa. En [20] y [32] se estudiaron redes neuronales dinámicas de orden superior y redes neuronales dinámicas multicapa.

Por otra parte, algunas publicaciones hechas para realizar la identificación de un sistema no lineal con redes neuronales han introducido en algunas modificaciones robustas [13] que han sido aplicadas al algoritmo de gradiente descendente [40][52], y al algoritmo de retro-propagación [15][61].

El presente capítulo muestra como las técnicas robustas a incertidumbre comúnmente utilizadas tales como zona muerta o modificación- $\sigma$  podrían no necesitarse.

La idea que ha sido establecida en la neuro identificación es que el sistema incierto puede ser considerado como una caja negra y mostraremos que una ley de aprendizaje estilo gradiente construida a partir de un análisis estilo Lyapunov, puede hacer el error de identificación asintóticamente estable y lograr una estabilidad entrada-estado.

Para mostrar la efectividad de este resultado mostramos una simulación en la parte final

de este capítulo, en la cual realizamos la identificación de la velocidad en punto muerto de un motor de combustión interna.

## 4.1 Descripción del Sistema y Estructura de la Red Neuronal Dinámica

Considere una clase de sistemas no lineales descritos como:

$$\dot{x}_t = f(x_t, u_t), \quad y_t = h(x_t, u_t) \quad (4.1)$$

donde  $x_t \in \mathfrak{R}^n$  es el estado,  $u_t \in \mathfrak{R}^m$  es el vector de entrada,  $y_t \in \mathfrak{R}^m$  es el vector de salida.  $f : \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^m \rightarrow \mathfrak{R}^n$  es una función localmente Lipschitz,  $h : \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^m \rightarrow \mathfrak{R}^m$  es continua. También se supone que para cualquier  $x^0 = x_0 \in \mathfrak{R}^n$ , la salida  $y_t = h(\Phi(t, x^0, u))$  del sistema (4.1) es tal que  $\int_0^t |u_s^T y_s| ds < \infty$ , para toda  $t \geq 0$ , *i.e.*, la energía almacenada en el sistema (4.1) es acotada. De acuerdo con [2], utilizaremos algunas propiedades de pasividad así como algunas propiedades de estabilidad de los sistemas pasivos introducidas en el capítulo 2.

**Definición 4.1** *Un sistema (4.1) se dice que es pasivo si existe una función  $C^r$  nonnegativa  $S(x_t) : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ , llamada función de almacenamiento, tal que, para toda  $u_t$ , toda condición inicial  $x^0$  y toda  $t \geq 0$  la siguiente desigualdad se satisface:*

$$\begin{aligned} \dot{S}(x_t) &\leq u_t^T y_t - \varepsilon u_t^T u_t - \delta y_t^T y_t - \rho \alpha(x_t) \\ (x_t, u_t) &\in \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^m \end{aligned}$$

donde  $\varepsilon$ ,  $\delta$  y  $\rho$  son constantes no negativas,  $\alpha(x_t)$  es una función de  $x_t$  positiva semidefinida, tal que  $\gamma(0) = 0$ .  $\rho \alpha(x_t)$  es conocido como tasa de disipación del estado. Además, el sistema se dice que es estrictamente pasivo si existe una función positiva definida  $V(x_t) : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$  tal que

$$\dot{S}(x_t) \leq u_t^T y_t - V(x_t)$$

**Propiedad 4.1.** Si la función de almacenamiento  $S(x_t)$  es diferenciable y la dinámica del sistema es pasiva, la función de almacenamiento  $S(x_t)$  satisface  $\dot{S}(x_t) \leq u_t^T y_t$ .

**Definición 4.2** El sistema (4.1) se dice que es globalmente entrada-estado estable si existe una función  $\gamma(s)$  de clase  $\mathcal{K}$  (continua y estrictamente creciente con  $\gamma(0) = 0$ ) y una función  $\beta(s, t)$  de clase  $\mathcal{KL}$  (función de clase  $\mathcal{K}$  y para cada valor fijo  $s_0 \geq 0$ , se tiene que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \beta(s_0, t) = 0$ ), tal que, para cada entrada  $u \in L_\infty$  ( $\sup \{\|u(t)\|, t \geq 0\} < \infty$ ) y cada condición inicial  $x^0 \in \mathbb{R}^n$ , se cumple que

$$\|x(t, x^0, u_t)\| \leq \beta(s, t) (\|x^0\|, t) + \gamma(s) \|u_t\|$$

para toda  $t \geq 0$ .

**Propiedad 4.2.** Si un sistema es entrada-estado estable, el comportamiento del sistema permanecería acotado cuando su entrada es acotada.

## 4.2 Neuro Identificación Mediante Técnicas de Pasividad

El sistema no lineal identificado está dado por

$$\dot{x}_t = f(x_t, u_t, t), \quad x_t \in \mathbb{R}^n, u_t \in \mathbb{R}^m \quad (4.2)$$

Construimos la siguiente red neuronal dinámica para la identificación

$$\dot{\hat{x}}_t = A\hat{x}_t + W_{1,t}\sigma(\hat{x}_t) + W_{2,t}\phi(\hat{x}_t)\gamma(u_t), \quad (4.3)$$

donde  $\hat{x}_t \in \mathbb{R}^n$  es el estado de la red neuronal,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz estable.  $W_{1,t} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $W_{2,t} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  son las matrices de pesos de la red neuronal, los cuales tienen valores iniciales que podrían haber sido escogidos en un aprendizaje fuera de línea, donde:

$$W_{1,0} =: W_1^*, W_{2,0} =: W_2^*. \quad (4.4)$$

Las funciones vectoriales  $\sigma(x_t) \in \mathfrak{R}^n$  son de dimensión  $n$  con sus elementos monotónicamente crecientes. La función matricial  $\phi(\cdot)$  se considera diagonal y de dimensión  $\mathfrak{R}^{n \times m}$  donde  $\phi(\hat{x}_t) = \text{diag}(\phi_1(\hat{x}_1) \cdots \phi_n(\hat{x}_n))$ .  $\gamma(u_t) \in \mathfrak{R}^m$ . La función  $\gamma(\cdot)$  es seleccionada para que satisfaga  $\|\gamma(u_t)\|^2 \leq \bar{u}$  donde  $\bar{u}$  es una constante escogida por diseño. La presentación típica de los elementos  $\sigma_i(\cdot)$  y  $\phi_i(\cdot)$  es como funciones sigmoideas, i.e.

$$\sigma_i(x_i) = \frac{a_i}{1 + e^{-b_i x_i}} - c_i$$

Definamos el error de identificación como

$$\Delta_t = \hat{x}_t - x_t$$

Como tanto  $\sigma(\cdot)$  y  $\phi(\cdot)$  son seleccionadas como funciones sigmoideas, claramente satisfacen la siguiente propiedad *Lipshitz*

$$\tilde{\sigma}^T \Lambda_1 \tilde{\sigma} \leq \Delta_t^T D_\sigma \Delta_t, \quad \left( \tilde{\phi}_t \gamma(u_t) \right)^T \Lambda_2 \left( \tilde{\phi}_t \gamma(u_t) \right) \leq \bar{u} \Delta_t^T D_\phi \Delta_t, \quad (4.5)$$

donde  $\tilde{W}_{1,t} = W_{1,t} - W_1^*$ ,  $\tilde{W}_{2,t} = W_{2,t} - W_2^*$ ,  $\tilde{\sigma} = \sigma(\hat{x}_t) - \sigma(x_t)$ ,  $\tilde{\phi} = \phi(\hat{x}_t) - \phi(x_t)$ ,  $\Lambda_1$ ,  $\Lambda_2$ ,  $D_\sigma$  y  $D_\phi$  son escalares constantes.

Generalmente, la red neuronal dinámica (4.3) no puede lograr un seguimiento exacto del sistema no lineal (4.2). Por lo que el sistema no lineal puede ser escrito como

$$\dot{x}_t = Ax_t + W_1^* \sigma(x_t) + W_2^* \phi(x_t) \gamma(u_t) - \tilde{f}_t \quad (4.6)$$

tomando en cuenta a (4.4) podemos construir las siguientes restricciones sobre  $W_1^*$  y  $W_2^*$

$$W_1^* \Lambda_1^{-1} W_1^{*T} \leq \bar{W}_1, \quad W_2^* \Lambda_2^{-1} W_2^{*T} \leq \bar{W}_2 \quad (4.7)$$

donde  $\bar{W}_1$  y  $\bar{W}_2$  son matrices seleccionadas por el diseñador, la función vectorial  $\tilde{f}_t$  puede ser considerada como error de modelado o perturbaciones.

La dinámica del error es obtenida de (4.3) y (4.6)

$$\dot{\Delta}_t = A\Delta_t + \widetilde{W}_{1,t}\sigma(\widehat{x}_t) + \widetilde{W}_{2,t}\phi(\widehat{x}_t)\gamma(u_t) + W_1^*\tilde{\sigma} + W_1^*\tilde{\phi}\gamma(u_t) + \tilde{f}_t \quad (4.8)$$

Si definimos

$$R = \overline{W}_1 + \overline{W}_2, \quad Q = D_\sigma + \bar{u}D_\phi + Q_0 \quad (4.9)$$

y las matrices  $A$  y  $Q_0$  son seleccionadas de manera que satisfagan las siguientes condiciones:

- (1) el par  $(A, R^{1/2})$  es controlable, el par  $(Q^{1/2}, A)$  es observable,
- (2) se satisface [59] la condición

$$A^T R^{-1} A - Q \geq \frac{1}{4} [A^T R^{-1} - R^{-1} A] R [A^T R^{-1} - R^{-1} A]^T \quad (4.10)$$

entonces se puede establecer la siguiente hipótesis:

**H1:** Existe una matriz  $A$  y una matriz estrictamente positiva definida  $Q_0$  tal que la ecuación de Riccati matricial

$$A^T P + PA + PRP + Q = 0 \quad (4.11)$$

tiene una solución positiva definida  $P = P^T > 0$ .

Esta condición puede ser fácilmente cumplida si seleccionamos  $A$  como una matriz estable y diagonal. El siguiente teorema muestra el procedimiento de la neuroidentificación.

**Teorema 4.1** *Si la hipótesis **H1** se satisface, y los pesos  $W_{1,t}$  y  $W_{2,t}$  son ajustados con la ley de aprendizaje adaptable*

$$\begin{aligned} \dot{W}_{1,t} &= -K_1 P \Delta_t \sigma^T(\widehat{x}_t) \\ \dot{W}_{2,t} &= -K_2 P \phi(\widehat{x}_t) \gamma(u_t) \Delta_t^T \end{aligned} \quad W_{1,0} =: W_1^*, \quad W_{2,0} =: W_2^* \quad (4.12)$$

donde  $P$  es la solución de la ecuación de Riccati (4.11), entonces la dinámica del error (4.8) es estrictamente pasiva del error de modelado  $\tilde{f}_t$  (entrada) al error de identificación

$2P\Delta_t$  (salida) con respecto a la función de almacenamiento

$$S_t = \Delta_t^T P \Delta_t + tr \left\{ \widetilde{W}_{1,t}^T K_1^{-1} \widetilde{W}_{1,t} \right\} + tr \left\{ \widetilde{W}_{2,t}^T K_2^{-1} \widetilde{W}_{2,t} \right\} \quad (4.13)$$

**Prueba.** Iniciemos construyendo la derivada de la función de almacenamiento (Lyapunov) donde  $P \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  es una matriz positiva definida. De acuerdo con (4.8), su derivada es

$$\begin{aligned} \dot{S}_t = & \Delta_t^T (PA + A^T P) \Delta_t + 2\Delta_t^T P \widetilde{W}_{1,t} \sigma(\widehat{x}_t) + 2\Delta_t^T P \widetilde{W}_{2,t} \phi(\widehat{x}_t) \gamma(u_t) + 2\Delta_t^T P \widetilde{f}_t \\ & + 2\Delta_t^T P \left[ W_1^* \widetilde{\sigma} + W_1^* \widetilde{\phi} \gamma(u_t) \right] + 2tr \left\{ \widetilde{W}_{1,t}^T K_1^{-1} \widetilde{W}_{1,t} \right\} + 2tr \left\{ \widetilde{W}_{2,t}^T K_2^{-1} \widetilde{W}_{2,t} \right\} \end{aligned}$$

Como  $\Delta_t^T P W_1^* \widetilde{\sigma}_t$  es escalar, utilizando (4.5) y la desigualdad matricial

$$X^T Y + (X^T Y)^T \leq X^T \Lambda^{-1} X + Y^T \Lambda Y \quad (4.14)$$

donde  $X, Y, \Lambda \in \mathfrak{R}^{n \times k}$  son cualquier matriz, con  $\Lambda$  como cualquier matriz positiva definida, obtenemos

$$\begin{aligned} 2\Delta_t^T P W_1^* \widetilde{\sigma}_t & \leq \Delta_t^T P W_1^* \Lambda_1^{-1} W_1^{*T} P \Delta_t + \widetilde{\sigma}_t^T \Lambda_1 \widetilde{\sigma}_t \leq \Delta_t^T (P \overline{W}_1 P + D_\sigma) \Delta_t \\ 2\Delta_t^T P W_2^* \widetilde{\phi}_t \gamma(u_t) & \leq \Delta_t^T (P \overline{W}_2 P + \bar{u} D_\phi) \Delta_t \end{aligned} \quad (4.15)$$

Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \dot{S}_t \leq & \Delta_t^T [PA + A^T P + P(\overline{W}_1 + \overline{W}_2)P + (D_\sigma + \bar{u}D_\phi + Q_0)] \Delta_t \\ & + 2tr \left\{ \widetilde{W}_{1,t}^T K_1^{-1} \widetilde{W}_{1,t} \right\} + 2\Delta_t^T P \widetilde{W}_{1,t} \sigma(\widehat{x}_t) + 2\Delta_t^T P \widetilde{f}_t \\ & + 2tr \left\{ \widetilde{W}_{2,t}^T K_2^{-1} \widetilde{W}_{2,t} \right\} + 2\Delta_t^T P \widetilde{W}_{2,t} \phi(\widehat{x}_t) \gamma(u_t) - \Delta_t^T Q_0 \Delta_t \end{aligned}$$

Y como  $\dot{\widetilde{W}}_{1,t} = \dot{W}_{1,t}$ , si usamos la ley de aprendizaje (4.12) y a **H1**, tenemos

$$\dot{S}_t \leq -\Delta_t^T Q_0 \Delta_t + 2\Delta_t^T P \widetilde{f}_t \quad (4.16)$$

De la Definición 2.1, si definimos a  $\tilde{f}_t$  como la entrada y a  $2P\Delta_t$ , como la salida, entonces tenemos un sistema estrictamente pasivo considerando a  $V_t = \Delta_t^T Q_0 \Delta_t \geq 0$ . ■

**Observación 4.1** Como el factor de aprendizaje es  $K_i P$  ( $i = 1, 2$ ), y  $K_i$  puede ser seleccionado como cualquier matriz positiva definida, el proceso de aprendizaje de la red neuronal dinámica (4.12) es independiente de la solución de la ecuación de Riccati (4.11).

**Corolario 4.1** Si solamente hay incertidumbre paramétrica ( $\tilde{f}_t = 0$ ), entonces la ley de aprendizaje (4.12) puede hacer al error de identificación asintóticamente estable,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta_t = 0, \quad W_{1,t} \in L_\infty, \quad W_{2,t} \in L_\infty, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{W}_{1,t} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{W}_{2,t} = 0 \quad (4.17)$$

**Prueba.** Sabemos que la dinámica del error de identificación (4.8) es pasiva y que  $\tilde{f}_t = 0$ , de la Propiedad 2.1 la función de almacenamiento  $S(x_t)$  satisface

$$\dot{S}(x_t) \leq \tilde{f}_t^T 2P\Delta_t = 0$$

Como  $S(x_t)$  es positiva definida, implica que  $\Delta_t$ ,  $W_{1,t}$  y  $W_{2,t}$  son acotados. De la ecuación del error (4.8)  $\dot{\Delta}_t \in L_\infty$

$$\dot{S} \leq -\Delta_t^T Q_0 \Delta_t \leq 0$$

Integrando de ambos lados de (4.16) tenemos

$$\int_0^\infty \|\Delta_t\|_{Q_0} \leq S_0 - S_\infty < \infty$$

Entonces  $\Delta_t \in L_2 \cap L_\infty$ , usando el lema de Barlat [13] podemos satisfacer lo expresado en (4.17). Como  $u_t$ ,  $\sigma(\hat{x}_t)$ ,  $\phi(\hat{x}_t)$  y  $P$  son acotados entonces,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{W}_{1,t} = 0$  y  $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{W}_{2,t} = 0$ . ■

**Observación 4.2** Para el caso de igualación de modelo, el análisis estilo Lyapunov puede lograr el mismo resultado (vea el Corolario 1 el Corolario 2 en [61]). Pero si esta presente el error de modelado, damos un resultado absolutamente diferente: el algoritmo de gradiente descendente (4.12) es también robusto respecto a la dinámica no modelada que es acotada.

**Teorema 4.2** *Si la hipótesis H1 se satisface y existe una matriz positiva definida  $\Lambda_f$  tal que*

$$\lambda_{\max}(P\Lambda_f P) \leq \lambda_{\min}(Q_0) \quad (4.18)$$

*entonces la ley de aprendizaje (4.12) puede hacer que la dinámica del neuroidentificador (4.8) sea estable entrada estado (ISS).*

**Prueba.** Tomando en cuenta la desigualdad matricial (4.14),

$$2\Delta_t^T P \tilde{f}_t \leq \Delta_t^T P \Lambda_f P \Delta_t + \tilde{f}_t^T \Lambda_f^{-1} \tilde{f}_t \quad (4.19)$$

(4.16) puede ser representada como

$$\begin{aligned} \dot{S}_t &\leq -\Delta_t^T Q_0 \Delta_t + 2\Delta_t^T P \tilde{f}_t \leq -\lambda_{\min}(Q_0) \|\Delta_t\|^2 + \Delta_t^T P \Lambda_f P \Delta_t + \tilde{f}_t^T \Lambda_f^{-1} \tilde{f}_t \\ &\leq -\alpha_{\|\Delta_t\|} \|\Delta_t\| + \beta_{\|\tilde{f}_t\|} \|\tilde{f}_t\| \end{aligned}$$

donde  $\alpha_{\|\Delta_t\|} := [\lambda_{\min}(Q_0) - \lambda_{\max}(P\Lambda_f P)] \|\Delta_t\|$ ,  $\beta_{\|\tilde{f}_t\|} := \lambda_{\max}(\Lambda_f^{-1}) \|\tilde{f}_t\|$ . Podemos seleccionar una matriz positiva definida  $\Lambda_f$  tal que la restricción (4.18) se cumpla. Entonces  $\alpha$  y  $\beta$  son funciones  $\mathcal{K}_\infty$ ,  $S_t$  es una función de Lyapunov ISS. Y por el Teorema 1 de [50], la dinámica del error de identificación (4.8) es estable entrada estado. ■

**Observación 4.3** *Primero, podemos escoger a las matrices  $A$  y  $Q_0$  tales que la ecuación de Riccati (4.11) tenga una solución  $P$  positiva definida. Entonces  $\Lambda_f$  puede ser construida de acuerdo a la condición (4.18). Como (4.19) se cumple para cualquier matriz positiva definida, (4.18) puede satisfacerse si se selecciona a  $\Lambda_f$  como una matriz constante lo suficientemente pequeña. Cabe recordar que la condición (4.18) no tiene efecto sobre la dinámica de la red neuronal (4.3) ni en su aprendizaje (4.12).*

**Corolario 4.2** *Si el error de modelado  $\tilde{f}_t$  es acotado, entonces la ley de aprendizaje (4.12) puede hacer el proceso de identificación estable*

$$\Delta_t \in L_\infty, \quad W_{1,t} \in L_\infty, \quad W_{2,t} \in L_\infty$$

**Prueba.** De la Propiedad 2.2 sabemos que la estabilidad entrada estado significa que el comportamiento de la red neuronal dinámica permanece acotado cuando su entrada es acotada. ■

**Observación 4.4** *Sabiendo que el estado y las variables de salida están acotadas, entonces el error de modelado  $\tilde{f}_t$  se puede considerar acotado también (vea por ejemplo [15][32][40]). A diferencia de las metodologías como zona muerta [32] y la de modificación  $\sigma$  [20], en las leyes robustas adaptables no es necesario tener una cota superior en el error de modelado para el entrenamiento de la neurona.*

**Observación 4.5** *Es bien sabido que la incertidumbre estructural causa que los parámetros para el control adaptable queden a la deriva, entonces es necesario utilizar una modificación robusta para hacer el error de identificación estable [13]. Los métodos robustos adaptables pueden extenderse a la neuro identificación de manera directa [15] [32] [40]. De manera que la neuro identificación es en cierto modo un método de caja negra, la información de la estructura no se necesita y todas las incertidumbres están dentro de la caja negra. Por medio de una técnica adaptable, pudimos llegar a la siguiente conclusión: el algoritmo de gradiente descendente utilizado para el ajuste de los pesos, es robusto con respecto a cualquier incertidumbre acotada.*

**Teorema 4.3** *Si el error de modelado es acotado en el siguiente sentido*

$$\tilde{f}_t^T \Lambda_f^{-1} \tilde{f}_t \leq \eta_{\tilde{f}}$$

*y se escoge a  $Q_0$  de tal manera que satisfaga que  $Q_0 \geq P\Lambda_f P$ , entonces la seminorma cuadrática ponderada de  $\Delta_t$  es acotada, es decir:*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \|\Delta_\tau\|_{Q_a}^2 d\tau < \infty$$

*donde  $Q_a = Q_0 - P\Lambda_f P$ .*

**Prueba.** Tomando en cuenta a la desigualdad (4.16) y realizando una manipulación

como la que se muestra en (4.14) podemos expresar lo siguiente

$$\begin{aligned}\dot{S}_t &\leq -\Delta_t^T Q_0 \Delta_t + \Delta_t^T P \Lambda_f P \Delta_t + \tilde{f}_t^T \Lambda_f^{-1} \tilde{f}_t \\ &\leq \Delta_t^T [-Q_0 + P \Lambda_f P] \Delta_t + \eta_{\tilde{f}}\end{aligned}$$

como  $-Q_a = -Q_0 + P \Lambda_f P$ , entonces

$$\dot{S}_t \leq -\Delta_t^T Q_a \Delta_t + \eta_{\tilde{f}} = -\|\Delta_t\|_{Q_a}^2 + \eta_{\tilde{f}}$$

integrando ambos lados obtenemos

$$\begin{aligned}S_T - S_0 &\leq -\int_0^T \|\Delta_\tau\|_{Q_a}^2 d\tau + \int_0^T \eta_{\tilde{f}} d\tau \\ S_T - S_0 &\leq -\int_0^T \|\Delta_\tau\|_{Q_a}^2 d\tau + T\eta_{\tilde{f}} \\ \int_0^T \|\Delta_\tau\|_{Q_a}^2 d\tau &\leq -S_T + S_0 + T\eta_{\tilde{f}} \leq S_0 + T\eta_{\tilde{f}}\end{aligned}$$

dividiendo entre  $T$ , y aplicando el límite  $T \rightarrow \infty$ ,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \|\Delta_\tau\|_{Q_a}^2 d\tau \leq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} S_0 + \eta_{\tilde{f}}$$

finalmente obtenemos lo siguiente

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \|\Delta_\tau\|_{Q_a}^2 d\tau \leq \eta_{\tilde{f}} < \infty$$

por lo que queda demostrado el teorema. ■

### 4.3 Simulación: Un Motor de Combustión Interna

La operación de un motor de combustión interna en ralentí (cuando no se encuentra el motor funcionando a la menor velocidad y libre de cargas mecánicas externas) es un proceso no lineal que está lejos de su rango óptimo. Por esto no se requiere de un alto grado de

instrumentación para la medición de señales externas, el control de velocidad en ralentí está accesible y puede ser considerado un formato como un problema de análisis comparativo (benchmark) para la sociedad de control. El proceso del motor en ralentí tiene retardos que varían a razón inversa con respecto a la velocidad del motor y es variante en el tiempo debido al desgaste o degradación de los componentes y a las condiciones del entorno, como el cambio ascendente de temperatura después de encender el motor. La medición de las salidas del sistema ocurren de manera asíncrona con respecto al cálculo de las señales de control. Consideramos que son posibles perturbaciones en la planta, las que pudieran ocurrir pero no son directamente medidas, como lo es el ocupar el compresor del aire acondicionado, el cambio de punto neutro a drive en transmisiones automáticas, la aplicación y liberación de cargas eléctricas, la dirección hidráulica, etc..

El modelo dinámico del motor de combustión interna es un sistema de dos entradas y dos salidas [34]:

$$\begin{aligned} \dot{P} &= k_P (\dot{m}_{ai} - \dot{m}_{ao}), & \dot{N} &= k_N (T_i - T_L) \\ \dot{m}_{ai} &= (1 + k_{m1}\theta + k_{m2}\theta^2) g(P), & \dot{m}_{ao} &= -k_{m3}N - k_{m4}P + k_{m5}NP + k_{m6}NP^2 \end{aligned}$$

Los parámetros de un motor de 1.6 litros, de 4 cilindros de inyección de combustible son

$$\begin{aligned} g(P) &= \begin{cases} 1 & P < 50.6625 \\ 0.0197\sqrt{101.325P - P^2} & P \geq 50.6625 \end{cases} \\ T_i &= -39.22 + 325024m_{ao} - 0.0112\delta^2 + 0.635\delta \\ &+ \frac{2\pi}{60} (0.0216 + 0.000675\delta) N - \left(\frac{2\pi}{60}\right)^2 0.000102N^2 \\ T_L &= \left(\frac{N}{263.17}\right)^2 + T_d \\ m_{ao} &= \dot{m}_{ao} (t - \tau) / (120N) \end{aligned}$$

donde  $k_P = 42.40$ ,  $k_N = 54.26$ ,  $k_{m1} = 0.907$ ,  $k_{m2} = 0.0998$ ,  $k_{m3} = 0.0005968$ ,  $k_{m4} = 0.0005341$ ,  $k_{m5} = 0.000001757$ ,  $\tau = 45/N$ .

Las salidas del sistema son la presión del colector múltiple del escape  $P$  en kPa y la velocidad del motor  $N$  en rpm. Las señales de entrada de control son el ángulo de la válvula de admisión  $\theta$  en grados y el avance de ejecución de la chispa  $\delta$  también en grados.

Las perturbaciones antes descritas actúan sobre el motor a manera de un torque que no es medible  $T_d$  en N-m. Las variables  $\dot{m}_{ai}$  y  $\dot{m}_{ao}$  se refieren al flujo de masa de aire que entra y sale del múltiple. Donde  $m_{ao}$  es la masa de aire en el cilindro. El parámetro  $\tau$  es un retardo dinámico del tiempo. La función  $g(P)$  es una función que influye en la presión del múltiple.  $T_i$  es el torque desarrollado internamente en el motor,  $T_L$  es el torque de carga.

Si definimos a el estado como  $x = (P, N)^T$ , y a la entrada como  $u = (\theta, \delta)^T$ , entonces la dinámica del motor se puede expresar por

$$\dot{x}_t = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x, u) \\ f_2(x, u) \end{pmatrix}$$

donde  $f_1$  y  $f_2$  se consideran desconocidas y solo el estado  $x$  y la entrada  $u$  son medibles. Para hacer la simulación, seleccionamos la entrada  $\delta = 30 \sin \frac{t}{2}$ , y a  $\theta$  como una onda diente de sierra de amplitud 10, y frecuencia de  $\frac{1}{2}Hz$ ,  $T_d$  es una onda cuadrada de amplitud 20 y frecuencia de  $\frac{1}{4}Hz$ ,  $x_0 = [10, 500]^T$ . Seleccionamos la red neuronal dinámica como

$$\dot{\hat{x}}_t = A\hat{x}_t + W_{1,t}\sigma(\hat{x}_t) + W_{2,t}\phi(\hat{x}_t)u_t, \quad W_{1,t}, W_{2,t} \in R^{2 \times 2}$$

Las funciones sigmoiales son  $\sigma(x_i) = \frac{2}{1+e^{-2x_i}} - 0.5$ ,  $\phi(x_i) = \frac{0.2}{1+e^{-0.2x_i}} - 0.05$ . Seleccionamos la matriz  $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ ,  $K_1P = K_2P = 2I$ ,  $\hat{x}_0 = [-5, -5]^T$ . Utilizando la ley de aprendizaje

$$\begin{aligned} \dot{W}_{1,t} &= -K_1P\Delta_t\sigma(\hat{x}_t)^T \\ \dot{W}_{2,t} &= -K_2P\phi(\hat{x}_t)^T u_t \Delta_t^T \end{aligned} \tag{4.20}$$

$$W_{1,0} = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 10 & 1 \end{bmatrix}, \quad W_{2,0} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}.$$

La siguiente simulación muestra la capacidad de identificación de la red neuronal dinámica. Las figuras 4-1 y 4-2 son con incertidumbre (dinámicas no modeladas y el torque correspon-

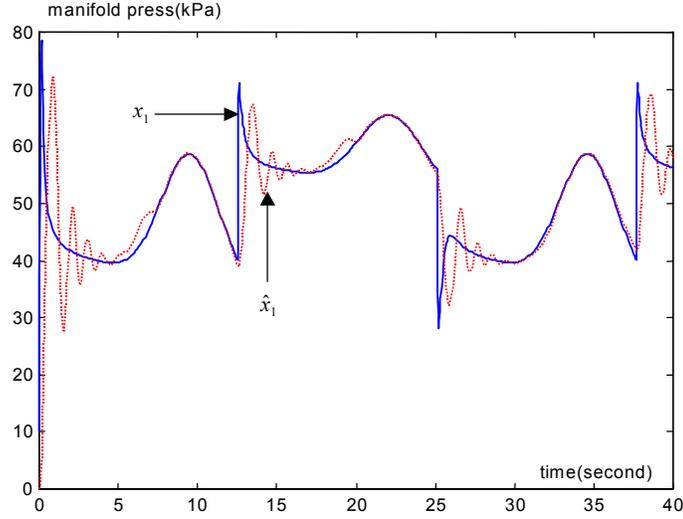


Figura 4-1: *Neuro identificación para  $x_1$  (gradiente)*

diente al uso de accesorios). Si definimos el error relativo de identificación como

$$\bar{e}_i = \frac{\int \Delta_{it}^2 dt}{\int x_{it} dt}, \quad \Delta_{it} = \hat{x}_{it} - x_{it}, \quad i = 1, 2, \dots, n;$$

donde  $\bar{e}_1$  correspondiente a la figura 4-1 es de 7.40%, y  $\bar{e}_2$  correspondiente a la figura 4-2 es de 4.73%. Si usamos un algoritmo con modificación robusta, por ejemplo zona muerta [61], con la cota superior del error de modelo es seleccionada como 10, el error de identificación se muestra en la figura 4-3. El error relativo de identificación  $\bar{e}_1$  correspondiente a la figura 4-3 es de 12.05%. La precisión de identificación de (4.20) es mejor que el algoritmo con modificación robusta [61].

Ahora ponemos incertidumbre externa en la planta. Introducimos dos ondas cuadradas en las mediciones de la salida, las frecuencias son de 1Hz, sus amplitudes son 0.5 y 10. Las figuras 4-4 y 4-5 muestran los resultados de la identificación con perturbaciones acotadas. Los errores relativos de identificación son  $\bar{e}_1 = 7.81\%$ ,  $\bar{e}_2 = 4.67\%$ . Podemos ver que el algoritmo gradiente de la red neuronal dinámica es también robusto con respecto a perturbaciones acotadas

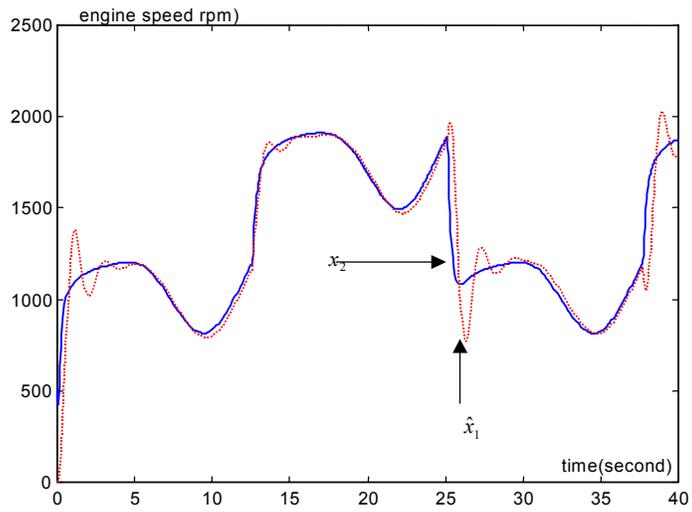


Figura 4-2: *Neuro identificación para  $x_2$  (gradiente)*

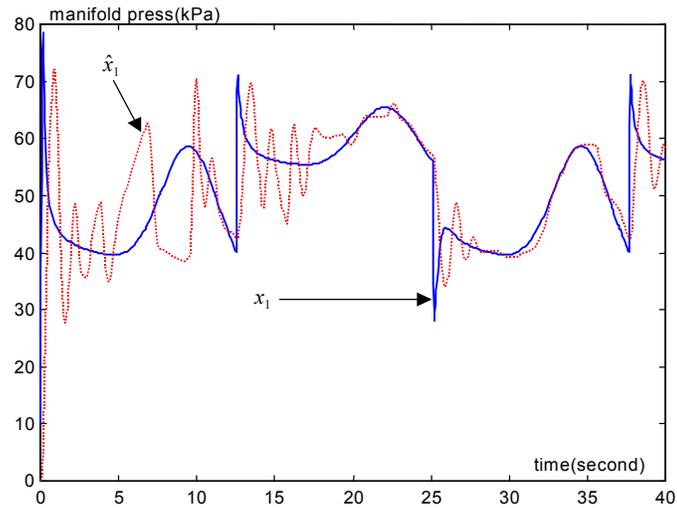


Figura 4-3: *Neuro identificación para  $x_1$  (Zona Muerta)*

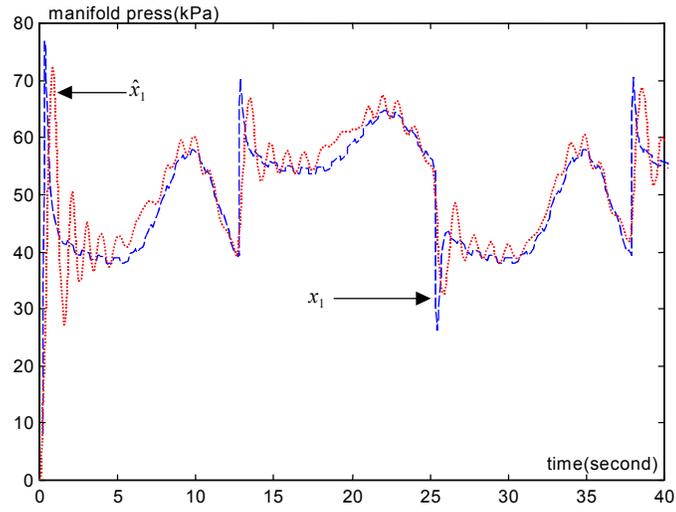


Figura 4-4: Identificación para  $x_1$  (gradiente con perturbación acotada)

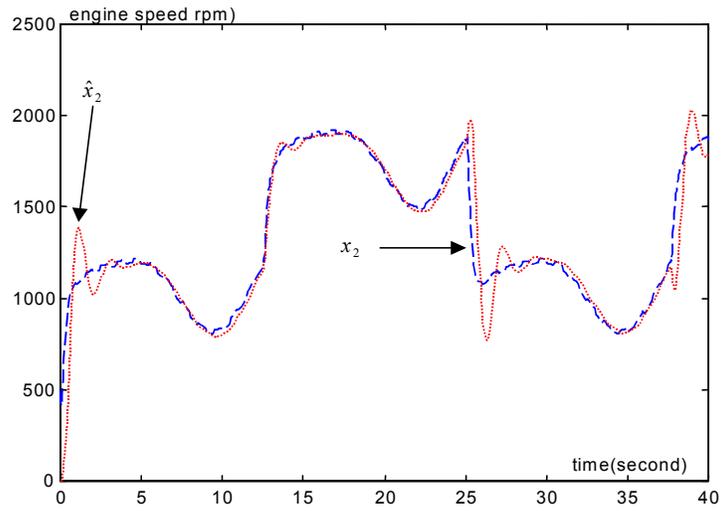


Figura 4-5: Identificación para  $x_2$  (gradiente con perturbación acotada)

## 4.4 Conclusiones

En este capítulo se utiliza la pasividad para demostrar que un algoritmo de gradiente descendente para el ajuste de los pesos es estable y robusto para cualquier incertidumbre acotada. A su vez concluimos que dicho algoritmo muestra un mejor desempeño que las técnicas que comúnmente se usan para fines robustos tales como zona muerta o modificación  $\sigma$ .

Una aportación interesante de esta metodología es que el sistema no lineal es de estructura incierta, pero se considera que tenemos lectura del estado y acceso a la entrada del sistema, como en una caja negra. Esto puede concluirse observando la estructura de la RND expresada en (4.3), en la cual los pesos de ésta son los que son ajustados en una ley de aprendizaje (4.12) que depende del error de identificación  $\Delta_t = \hat{x}_t - x_t$ , de la entrada  $u_t$ , reiteramos pues, que para implementar esta neuroidentificación necesitamos del estado del sistema no lineal y tener acceso a la entrada del mismo, pero no el conocimiento de su estructura.

# Capítulo 5

## Pasividad Robusta via Redes Neuronales Dinámicas (Caso SISO)

En este capítulo se muestran los resultados preliminares que obtuvimos durante el trabajo de tesis que concierne al estudio de la pasivación de una clase de sistemas no lineales SISO con incertidumbre, donde dicha pasivación es efectuada con redes neuronales dinámicas y una ley de control que toma información de la RND (neurocontrol). Por lo tanto estos estudios preliminares están estructurados en el presente capítulo en dos secciones. En la primera sección mostramos el resultado preliminar publicado en ([36]) y en la segunda sección se documenta el trabajo posterior para afinar dicho resultado y mejorarlo.

### 5.1 Descripción del Sistema No Lineal Incierto y Estructura de la RND (1<sup>a</sup> Propuesta)

Consideremos el sistema no lineal de una entrada y una salida (SISO) [2], [4] descrito por

$$\begin{aligned}\dot{z} &= f_0(z) + p(z, y)y, \\ \dot{y} &= a(z, y) + b(z, y)u\end{aligned}\tag{5.1}$$

donde

$\zeta := [z^T, y]^T \in \mathfrak{R}^n$  es el estado considerando el tiempo  $t \geq 0$ ,

$u \in \mathfrak{R}$  es la entrada y la salida del sistema es  $y \in \mathfrak{R}$ .

Las funciones  $f_0(\cdot)$  y  $p(\cdot)$  se consideran campos vectoriales  $C^1$  y las funciones  $a(\cdot, \cdot)$  y  $b(\cdot, \cdot)$  son funciones reales de clase  $C^1$  donde  $b(z, y) \neq 0$  para cualquier  $z$  ó  $y$ . Una característica mas es

$$f_0(0) = 0.$$

Consideramos a su vez que el conjunto  $U_{ad}$  de entradas admisibles  $u$ , consiste de todas las funciones evaluadas en  $\mathfrak{R}$ , continuas por partes definidas en  $\mathfrak{R}$ , que poseen la siguiente propiedad: para cualquier condición inicial  $\zeta^0 = \zeta(0) \in \mathfrak{R}^n$  la salida del sistema (5.1) es

$$y(t) = h(\Phi(t, \zeta^0, u))$$

<sup>1</sup> la cual satisface

$$\int_0^t |y(s)u(s)| ds < \infty, \text{ para toda } t \geq 0,$$

i.e., la energía almacenada en el sistema (5.1) es acotada.

**Definición 5.1** La *Dinámica cero* del sistema no lineal (5.1) describe la *dinámica interna* la cual está definida por la restricción externa  $y = 0$ , i.e., la *dinámica cero* está expresada en la siguiente ecuación diferencial

$$\dot{z} = f_0(z). \tag{5.2}$$

Para el sistema no lineal (5.1) considerado en esta sección, consideramos que las siguientes hipótesis se satisfacen:

**H1:** La *dinámica cero*  $f_0(z)$  y la función  $b(z, y)$  son conocidas completamente.

---

<sup>1</sup> $\Phi(t, \zeta^0, u)$  denota el flujo de  $[f_0(z) + p(z, y), a(z, y) + b(z, y)u]^T$  correspondiente a la condición inicial  $\zeta^0 = [(z^0)^T, y^0]^T \in \mathfrak{R}^n$  y a la entrada  $u \in U_{ad}$ .

**H2:**  $f_0(\cdot)$  satisface globalmente la condición Lipschitz, i.e. para cualquier  $z_1, z_2 \in \mathfrak{R}^{n-1}$

$$\|f_0(z_1) - f_0(z_2)\| \leq L_{f_0} \|z_1 - z_2\|, \quad L_{f_0} > 0. \quad (5.3)$$

**H3:** La dinámica cero en (5.1) es estable en el sentido de Lyapunov, i.e., existe una función  $\mathcal{W}_0: \mathfrak{R}^{n-1} \rightarrow \mathfrak{R}^+$ , con  $\mathcal{W}_0(0) = 0$ , tal que para toda  $z \in \mathfrak{R}^{n-1}$

$$\frac{\partial \mathcal{W}_0(z)}{\partial z} f_0(z) \leq 0.$$

**H4:** La parte incierta del sistema (5.1) que concierne a las funciones  $a(z, y)$ ,  $p(z, y)$  poseen cotas superiores, i.e.,

$$\|a(z, y)\| \leq \bar{a}(z, y), \quad \|p(z, y)\| \leq \bar{p}(z, y)$$

donde  $\bar{a}(z, y)$  y  $\bar{p}(z, y)$  son funciones Lipschitz (seleccionadas por diseño) y satisfacen lo siguiente:

$$\begin{aligned} \bar{a}(z, y) &\leq a_0 + a_1 (\|z\| + |y|) \\ \bar{p}(z, y) &\leq p_0 + p_1 (\|z\| + |y|) \end{aligned}$$

De las investigaciones de [41] y [33], proponemos la siguiente estructura de la RND para identificar al sistema no lineal parcialmente incierto:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{z}} &= f_0(\hat{z}) + [W_1 \varphi_1(\hat{z}, \hat{y}) + \psi_1] y, \\ \dot{\hat{y}} &= W_2 \varphi_2(\hat{z}, \hat{y}) + \psi_2 + b(z, y)u. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Donde

$(\hat{z}, \hat{y}) \in \mathfrak{R}^n$  es el estado de la RND,

$W_1 \in \mathfrak{R}^{(n-1) \times n}$ ,  $W_2 \in \mathfrak{R}^{1 \times n}$  son el peso matricial y el vectorial respectivamente,

las funciones  $\psi_1 \in \mathfrak{R}^{n \times 1}$  y  $\psi_2 \in \mathfrak{R}^{n \times 1}$  son los umbrales de salida de cada neurona, las funciones de activación  $\varphi_1(\cdot, \cdot) \in \mathfrak{R}^{n \times 1}$  y  $\varphi_2(\cdot, \cdot) \in \mathfrak{R}^{n \times 1}$  están definidas como sigue:

$$\varphi_i(\alpha, \beta) = [\tanh(k_i \cdot \alpha_1), \dots, \tanh(k_i \cdot \alpha_{n-1}), \tanh(k_i \cdot \beta)]^T, \\ k_i \in \mathfrak{R}, i = 1, 2.$$

Como puede observarse en (5.4), la estructura de la RND es construida utilizando la parte conocida  $f_0(z)$ ,  $b(z, y)$  y la parte incierta es identificada por dos neuronas:

la neurona  $[W_1 \varphi_1(\hat{z}, \hat{y}) + \psi_1]$  corresponde a la identificación de la función  $p(z, y)$

y la neurona  $[W_2 \varphi_2(\hat{z}, \hat{y}) + \psi_2]$  correspondiente a función  $a(z, y)$ .

Es un hecho, que en general, el sistema no lineal incierto (5.1) no pertenezca obligatoriamente a la clase de sistemas que puedan modelarse exactamente por la RND (5.4). Por esta razón, para cualquier  $t \geq 0$  y cualquier selección de pesos iniciales fijos (denotados por  $W_1^*$  y  $W_2^*$ ) de la RND, existe un *error de identificación*  $(\nu_1, \nu_2)$  definido como

$$\nu_1 := \dot{z} - f_0(z) + [W_1^* \varphi_1(z, y) + \psi_1] y, \\ \nu_2 := \dot{y} - W_2^* \varphi_2(z, y) + \psi_2 + b(z, y)u. \tag{5.5}$$

Haciendo referencia a (5.1) y a (5.5), podemos obtener una expresión algebraica del error de identificación:

$$\nu_1 = B_1(z, y)y - \psi_1 y, \\ \nu_2 = B_2(z, y) - \psi_2 \tag{5.6}$$

donde:

$$B_1(z, y) := p(z, y) - W_1^* \varphi_1(z, y), \\ B_2(z, y) := a(z, y) - W_2^* \varphi_2(z, y).$$

>De la hipótesis **H4** y por el hecho de que  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  son acotadas, podemos concluir que  $B_1$

y  $B_2$  lo son también, ya que satisfacen lo siguiente

$$\begin{aligned}\|B_1(z, y)\| &\leq \bar{p}(z, y) + \|W_1^*\| \cdot \|\varphi_1\| =: \bar{B}_1(z, y), \\ \|B_2(z, y)\| &\leq \bar{a}(z, y) + \|W_2^*\| \cdot \|\varphi_2\| =: \bar{B}_2(z, y).\end{aligned}\tag{5.7}$$

Ahora es el momento de discutir el siguiente problema: ¿Cómo incorporar esta RND en una retroalimentación interna del sistema no lineal dado, tal que el sistema obtenido en lazo cerrado sea un sistema que posea la propiedad de ser pasivo?.

### 5.1.1 Equivalente Pasivo Robusto de Sistemas No Lineales via RND

Con el propósito de simplificar las expresiones, utilizaremos la siguiente notación:

$$\begin{aligned}\varphi_i &:= \varphi_i(z, y), \quad \hat{\varphi}_i := \varphi_i(\hat{z}, \hat{y}), \\ \tilde{\varphi}_i &:= \varphi_i(\hat{z}, \hat{y}) - \varphi_i(z, y) \quad (i = 1, 2),\end{aligned}$$

$$\Delta := \begin{bmatrix} \Delta_z \\ \Delta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{z} - z \\ \hat{y} - y \end{bmatrix}.\tag{5.8}$$

Para cualquier vector  $\omega \in \mathfrak{R}^m$  y cualquier entero  $m = 2, 3, \dots$  denotamos

$$|\omega| := \begin{bmatrix} |\omega_1| & |\omega_2| & \dots & |\omega_m| \end{bmatrix}^T$$

$$diag(\omega) := diag\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m\} = \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \omega_m \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{m \times m}$$

y para un escalar  $\kappa \in \mathfrak{R}$  y un entero positivo  $l = 1, 2, \dots$  donotamos

$$vec_l(\kappa) := \begin{bmatrix} \kappa & \kappa & \cdots & \kappa \end{bmatrix}^T \in \mathfrak{R}^l.$$

Consideremos la clase de sistemas no lineales descritos por

$$\begin{aligned} \dot{z} &= f_0(z) + [W_1^* \varphi_1(z, y) + \psi_1] y + \nu_1, \\ \dot{y} &= W_2^* \varphi_2(z, y) + \psi_2 + b(z, y)u + \nu_2 \end{aligned} \quad (5.9)$$

donde se satisfacen las hipótesis H1- H4 y la dinámica no modelada  $(\nu_1, \nu_2)$  está definida por (5.6).

El siguiente teorema muestra el resultado para pasivación de un sistema no lineal SISO cuyo modelo es parcialmente conocido utilizando RND

**Teorema 5.1** *Consideremos que el sistema no lineal (5.9) está identificado por la RND (5.4) con la siguiente ley de aprendizaje*

$$\begin{aligned} \dot{W}_1^T &= \eta_1 \left( -2\hat{\varphi}_1 y \Delta_z^T P_z + \varphi_1 y \frac{\partial \mathcal{W}_0(z)}{\partial z} \right), \quad W_1(0) = W_1^* \\ \dot{W}_2^T &= \eta_2 \left( -2\hat{\varphi}_2 \Delta_y P_y + \varphi_2 y \right), \quad W_2(0) = W_2^*. \end{aligned} \quad (5.10)$$

donde  $P_z \in R^{(n-1) \times (n-1)}$  es la solución positiva definida de la siguiente ecuación matricial de Riccati

$$P_z A + A P_z + P_z \Lambda_{\hat{f}'}^{-1} P_z + I_z \cdot L_{\hat{f}'}^2 \|\Lambda_{\hat{f}'}\| = 0, \quad (5.11)$$

$P_y$  es una constante positiva, con la matriz  $\Lambda_{\hat{f}'} = \Lambda_{\hat{f}'}^T > 0$  que es un parámetro de diseño. Los umbrales de salida de la RND tienen la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \psi_1 &= -\text{sign}(\text{diag}(\Delta_z P_z)) \left[ \|W_1^*\| \|\tilde{\varphi}_1\| + \text{vec}_{n-1}(\overline{B}_1) \right] \text{sign}(y), \\ \psi_2 &= -\text{sign}(\Delta_y P_y) \left[ \|W_2^*\| \cdot \|\tilde{\varphi}_2\| + \overline{B}_2 \right]. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Si la ley de control es construida como sigue:

$$u = b^{-1}(z, y) \left[ v - \frac{\partial W_0(z)}{\partial z} W_1 \varphi_1 - \left[ \overline{B}_2 + \left\| \frac{\partial W_0(z)}{\partial z} \right\| \overline{B}_1 \right] \text{sign}(y) - W_2 \varphi_2 \right] \quad (5.13)$$

entonces el sistema en lazo cerrado resultante es  $C^1$  pasivo (con respecto a la nueva entrada  $v$ ) cuya función de almacenamiento es

$$V = \Delta^T P \Delta + \frac{1}{2} y^2 + \mathcal{W}_0(z) + \frac{\eta_2^{-1}}{2} \widetilde{W}_2 \widetilde{W}_2^T + \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ \widetilde{W}_1 \eta_1^{-1} \widetilde{W}_1^T \right\},$$

$$P = \begin{bmatrix} P_z & 0 \\ 0 & P_y \end{bmatrix} \in R^{n \times n}, 0 < \eta_1 \in R^{n \times n}, 0 < \eta_2 \in R. \quad (5.14)$$

i.e., para cualquier  $t \geq 0$

$$\dot{V} \leq v y.$$

**Demostración.** Definamos a

$$\widetilde{W}_i := W_i - W_i^*, \quad i = 1, 2. \quad (5.15)$$

Ahora iniciamos calculando la derivada de la función de almacenamiento (5.14) a lo largo de las trayectorias de los sistemas (5.9) y (5.4):

$$\dot{V} = 2\Delta^T P \dot{\Delta} + \frac{\partial \mathcal{W}_0(z)}{\partial z} \dot{z} + y \dot{y} + \eta_2^{-1} \cdot \widetilde{W}_2 \dot{\widetilde{W}}_2^T + \text{tr} \left\{ \widetilde{W}_1 \eta_1^{-1} \dot{\widetilde{W}}_1^T \right\} \quad (5.16)$$

Vamos a calcular las cotas superiores de  $\dot{V}$  de tal manera que esta cota sea una función que tenga información conocida. Para lograrlo, nos auxiliaremos de las hipótesis H1-H4. Iniciemos con el término

$$2\Delta^T P \dot{\Delta} = 2\Delta_z^T P_z \dot{\Delta}_z + 2\Delta_y^T P_y \dot{\Delta}_y.$$

>De (5.9), (5.4), (5.15) y (5.8) obtenemos

$$\begin{aligned}
2\Delta_z^T P_z \dot{\Delta}_z &= \hat{f}_0 - f_0 + \left( \widetilde{W}_1 \widehat{\varphi}_1 + W_1^* \widetilde{\varphi}_1 \right) y - \nu_1, \\
2\Delta_y^T P_y \dot{\Delta}_y &= \widetilde{W}_2 \widehat{\varphi}_2 + W_2^* \widetilde{\varphi}_2 - \nu_2.
\end{aligned} \tag{5.17}$$

La ecuación (5.17) puede ser escrita como

$$\begin{aligned}
2\Delta_z^T P_z \dot{\Delta}_z &= 2\Delta_z^T P_z [f_0(\hat{z}) - f_0(z) + (A\Delta_z - A\Delta_z) + \\
&\quad \left( \widetilde{W}_1 \widehat{\varphi}_1 + W_1^* \widetilde{\varphi}_1 \right) y - \nu_1] \\
&= 2\Delta_z^T P_z \left[ \tilde{f}' + A\Delta_z + \left( \widetilde{W}_1 \widehat{\varphi}_1 + W_1^* \widetilde{\varphi}_1 \right) y - \nu_1 \right]
\end{aligned}$$

donde

$$\tilde{f}' := f_0(\hat{z}) - f_0(z) - A(\hat{z} - z)$$

es una función, que tomando en cuenta **H2**, satisface la siguiente condición de Lipschitz:

$$\left\| \tilde{f}' \right\| \leq L_{\tilde{f}'} \|\Delta_z\|, \quad L_{\tilde{f}'} > 0. \tag{5.18}$$

>De la ecuación (5.6) obtenemos

$$\begin{aligned}
2\Delta_z^T P \dot{\Delta}_z &= 2\Delta_z^T P_z \left[ \tilde{f}' + A\Delta_z \right] + \\
&\quad + 2\Delta_z^T P_z \widetilde{W}_1 \widehat{\varphi}_1 y + \\
&\quad + 2\Delta_z^T P_z [W_1^* \widetilde{\varphi}_1 - B_1 + \psi_1] y.
\end{aligned}$$

y haciendo referencia a la desigualdad (5.18) podemos estimar el primer término de la parte derecha  $2\Delta_z^T P_z \left[ \tilde{f}' + A\Delta_z \right]$  como

$$2\Delta_z^T P_z \left[ \tilde{f}' + A\Delta_z \right] \leq \Delta_z^T \left[ P_z A + A P_z + P_z \Lambda_{\tilde{f}'}^{-1} P_z + I_z \cdot L_{\tilde{f}'}^2 \|\Lambda_{\tilde{f}'}\| \right] \Delta_z$$

El cálculo de la cota superior de  $2\Delta_z^T P_z [W_1^* \tilde{\varphi}_1 - B_1 + \psi_1] y$  es:

$$\begin{aligned} & 2\Delta_z^T P_z [W_1^* \tilde{\varphi}_1 - B_1 + \psi_1] y \leq \\ & \leq 2 |\Delta_z^T P_z| (\|W_1^*\| |\tilde{\varphi}_1| + \text{vec}_{n-1}(\overline{B}_1)) |y| + 2\Delta_z^T P_z \psi_1 y = \\ & = 2\Delta_z^T P_z [\text{sign}(\text{diag}(\Delta_z^T P_z)) (\|W_1^*\| |\tilde{\varphi}_1| + \text{vec}_{n-1}(\overline{B}_1)) \text{sign}(y) + \psi_1] y. \end{aligned}$$

La cota superior de  $2\Delta_z^T P \dot{\Delta}_z$  es

$$\begin{aligned} 2\Delta_z^T P \dot{\Delta}_z & \leq \Delta_z^T \left[ P_z A + A P_z + P_z \Lambda_{\tilde{f}'}^{-1} P_z + I_z \cdot L_{\tilde{f}'}^2 \|\Lambda_{\tilde{f}'}\| \right] \Delta_z + \\ 2\Delta_z^T P_z [\text{sign}(\text{diag}(\Delta_z^T P_z)) (\|W_1^*\| |\tilde{\varphi}_1| + \text{vec}_{n-1}(\overline{B}_1)) \text{sign}(y) + \psi_1] y + & \quad (5.19) \\ & \text{tr} \left\{ \widetilde{W}_1 [2\tilde{\varphi}_1 y \Delta_z^T P_z] \right\}. \end{aligned}$$

Utilizando (5.6), análogamente a las manipulaciones previas, podemos estimar el segundo término en (5.17) como sigue:

$$2\Delta_y P_y \dot{\Delta}_y \leq \widetilde{W}_2 \hat{\varphi}_2 2\Delta_y P_y + 2\Delta_y P_y [\text{sign}(\Delta_y P_y) (\|W_2^*\| \tilde{\varphi}_2 + \overline{B}_2) + \psi_2]. \quad (5.20)$$

La cota superior del término  $\frac{\partial \mathcal{W}_0(z)}{\partial z} \dot{z}$  es

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{W}_0(z)}{\partial z} \dot{z} & \leq \frac{\partial \mathcal{W}_0(z)}{\partial z} f_0 + \text{tr} \left\{ \widetilde{W}_1 \left[ -\varphi_1 y \frac{\partial \mathcal{W}_0(z)}{\partial z} \right] \right\} + \\ & + \left[ \left\| \frac{\partial \mathcal{W}_0(z)}{\partial z} \right\| \overline{B}_1 \text{sign}(y) + \frac{\partial \mathcal{W}_0(z)}{\partial z} W_1 \varphi_1 \right] y. \end{aligned} \quad (5.21)$$

El término  $y \dot{y}$  está acotado como sigue:

$$y \dot{y} \leq [W_2 \varphi_2 + bu + \overline{B}_2 \text{sign}(y)] y + \widetilde{W}_2 [-\varphi_2 y]. \quad (5.22)$$

Combinando a (5.16) con las desigualdades (5.19), (5.20), (5.21) y (5.22), finalmente obtenemos la cota superior de la derivada de la función de almacenamiento (5.14) expresada de la

siguiente manera:

$$\begin{aligned}
2\Delta^T P \dot{\Delta} \leq & \Delta_z^T \left[ P_z A + A P_z + P_z \Lambda_{\tilde{f}'}^{-1} P_z + I_z \cdot L_{\tilde{f}'}^2 \|\Lambda_{\tilde{f}'}\| \right] \Delta_z + \\
2\Delta_z^T P_z & \left[ \text{sign}(\text{diag}(\Delta_z^T P_z)) (\|W_1^*\| |\tilde{\varphi}_1| + \text{vec}_{n-1}(\overline{B}_1)) \text{sign}(y) + \psi_1 \right] y + \\
2\Delta_y P_y & \left[ \text{sign}(\Delta_y P_y) (\|W_2^*\| \cdot \|\tilde{\varphi}_2\| + \overline{B}_2) + \psi_2 \right] + \\
\text{tr} \left\{ \widetilde{W}_1 \right. & \left. \left[ \eta_1^{-1} \dot{\widetilde{W}}_1 + 2\hat{\varphi}_1 y \Delta_z^T P_z - \varphi_1 y \frac{\partial \mathcal{W}_0(z)}{\partial z} \right] \right\} + \\
& \widetilde{W}_2 \left[ \eta_2^{-1} \dot{\widetilde{W}}_2 + \hat{\varphi}_2 2\Delta_y P_y - \varphi_2 y \right] + \\
\frac{\partial \mathcal{W}_0(z)}{\partial z} f_0 & + \left[ \left\| \frac{\partial \mathcal{W}_0(z)}{\partial z} \right\| \overline{B}_1 \text{sign}(y) + \frac{\partial \mathcal{W}_0(z)}{\partial z} W_1 \varphi_1 \right] y + \\
& [W_2 \varphi_2 + bu + \overline{B}_2 \text{sign}(y)] y.
\end{aligned} \tag{5.23}$$

>De esta expresión, se sigue que:

- *El primer término de la derecha* contiene una ecuación algebraica de Riccati dentro de los corchetes, y por lo tanto es idénticamente igual a cero.
- *El segundo y el tercer término* son cancelados por los umbrales de salida  $\psi_1$  y  $\psi_2$  seleccionándolos como en (5.12).
- Como  $\dot{\widetilde{W}}_i = \dot{W}_i$  ( $i = 1, 2$ ), entonces la ley de aprendizaje de ajuste de los pesos cancelan a *el cuarto y el quinto término* de (5.23).

Por la hipótesis **H3** y aplicando la ley de control (5.13), finalmente obtenemos que

$$\dot{V} \leq vy.$$

El teorema es demostrado. ■

Las siguientes observaciones son útiles para hacer mas perceptible la contribución de esta sección, formulada por la demostración del teorema.

### 5.1.2 Estructura de la Función de Almacenamiento

La función de almacenamiento (5.14) consiste de tres partes:

- La primera  $\Delta^T P \Delta$  hace el error de identificación mas pequeño.
- La segunda parte

$$y^2 + W_0(z)$$

está constituida con términos relacionados con la pasividad.

- La tercera

$$\frac{1}{2} \text{tr} \left\{ \widetilde{W}_1 \eta_1^{-1} \widetilde{W}_1^T \right\} + \frac{1}{2} \eta_2^{-1} \widetilde{W}_2 \widetilde{W}_2^T$$

es utilizada para generar la ley de aprendizaje de la RND.

### 5.1.3 Propiedades de los Umbrales

Los umbrales de salida  $\psi_1$  y  $\psi_2$  son introducidos para cancelar la influencia de los términos inciertos. Estos umbrales están expresados en función de  $\overline{B}_1$  y  $\overline{B}_2$ , las cuales son funciones que acotan la incertidumbre, por esta razón es preferible seleccionar estas funciones de tal manera que sean lo mas fino posible. Una selección de estas características puede mejorar significativamente el desempeño del sistema interconectado.

### 5.1.4 Estabilización Robusta utilizando un Control por Retroalimentación Lineal

La ley de control  $u$  está construida basada en la información recibida de las neuronas con la correspondiente actualización de los pesos de la RND ( $W_1 \varphi_1(z, y)$ ,  $W_2 \varphi_2(z, y)$ ). La parte neuronal de la ley de control identifica los términos inciertos del sistema. De modo que, la ley de control hace pasivo al sistema y simultaneamente cancela la influencia de los términos inciertos. Seleccionando una retroalimentación lineal negativa, i.e.,

$$v = -ky, \quad k > 0$$

obtenemos

$$\dot{V} \leq vy = -ky^2 \leq 0.$$

Entonces, el sistema en lazo cerrado es estable para cualquier retroalimentación lineal negativa.

### 5.1.5 Situación Libre de Incertidumbre

Si las funciones  $f_0(z)$ ,  $p(z, y)$ ,  $a(z, y)$  y  $b(z, y)$  son conocidas, entonces la ley de control (5.13) puede ser construida reemplazando la neurona  $W_1\varphi_1$  por la función conocida  $p(z, y)$ , y a  $W_2\varphi_2$  reemplazarla por  $a(z, y)$ . Las funciones  $\bar{B}_1$  y  $\bar{B}_2$  pueden ser reemplazadas por ceros ya que estos términos están relacionados con la incertidumbre del sistema (dinámicas no modeladas). La ley de control, la cual hace pasivo al sistema con modelo conocido de la entrada  $v$  a la salida  $y$ , ahora es

$$u = b^{-1}(z, y) \left[ v - \frac{\partial \mathcal{W}_0(z)}{\partial z} p(z, y) - a(z, y) \right]$$

La correspondiente función de almacenamiento es

$$V_c = \frac{1}{2}y^2 + \mathcal{W}_0(z).$$

Esto coincide con los resultados en [2].

### 5.1.6 Interpretación de dos Subsistemas Acoplados

Podemos considerar al sistema no lineal dado (5.1) como dos subsistemas acoplados (fig. 5-1). Uno de ellos (sea el subsistema  $F$ ) es

$$\dot{y} = a(z, y) + b(z, y)u$$

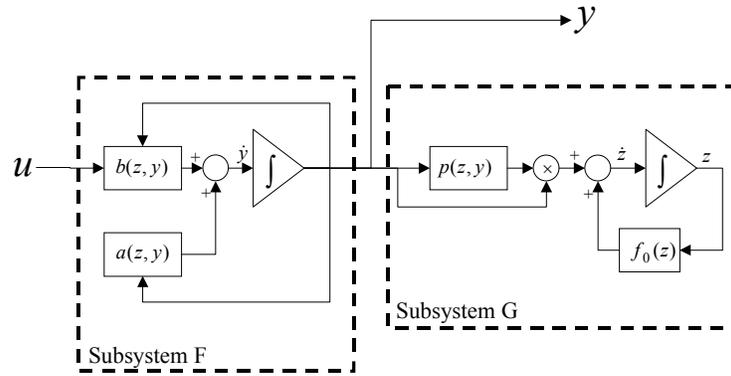


Figura 5-1: *Interpretación de subsistemas conectados*

con la entrada  $u$  y la salida  $y$ . El otro (subsistema  $G$ ) es

$$\dot{z} = f_0(z) + p(z, y)y$$

con la correspondiente entrada  $y$  y la salida  $z$  relacionada con la dinámica interna del sistema completo. La entrada del sistema completo (5.1,  $F$  acoplado con  $G$ ) es  $u$  y su salida es  $y$ . De modo que en este sentido podemos decir que la función  $p(z, y)$  es el "término de acoplamiento" de este sistema no lineal. Una vez realizada esta observación, podemos decir que la incertidumbre descrita anteriormente está relacionada con el término de acoplamiento  $p(z, y)$  y el término  $a(z, y)$ .

### 5.1.7 Descripción de Otras Posibles Incertidumbres

#### Caso 1: Incertidumbre en el Término $p(z, y)$

Si las funciones del sistema no lineal (5.1)  $f_0(z)$ ,  $a(z, y)$ ,  $b(z, y)$  son conocidas y la función  $p(z, y)$  es incierta pero acotada, i.e.,

$$\|p(z, y)\| \leq \bar{p}(z, y)$$

( $\bar{p}(z, y)$  es seleccionada por el diseñador), la RND en particular para dicho sistema incierto puede ser seleccionada como

$$\dot{\hat{z}} = f_0(\hat{z}) + [W_1\varphi_1(\hat{z}, y) + \psi_1] y$$

con la ley de aprendizaje

$$\dot{W}_1^T = \eta_1 \left( -2\varphi_1(\hat{z}, y)\Delta_z^T P_z + \varphi_1(z, y)\frac{\partial W_0(z)}{\partial z} \right) y, \quad W_1(0) = W_1^* \quad (5.24)$$

y el umbral de salida dado por

$$\psi_1 = -\text{sign}(\text{diag}(\Delta_z P_z)) \left[ \|W_1^*\| \cdot |\varphi_1(\hat{z}, y) - \varphi_1(z, y)| + \text{vec}_{n-1}(\bar{B}_1) \right] \text{sign}(y). \quad (5.25)$$

La ley de control es

$$u = b^{-1}(z, y) \left[ v - \frac{\partial W_0(z)}{\partial z} W_1 \varphi_1(z, y) - \left[ \left\| \frac{\partial W_0(z)}{\partial z} \right\| \bar{B}_1 \right] \text{sign}(y) - a(z, y) \right] \quad (5.26)$$

con la función de almacenamiento

$$V_p = \Delta_z^T P_z \Delta_z + W_0(z) + \frac{1}{2}y^2 + \text{tr} \left\{ \widetilde{W}_1 \eta_1^{-1} \dot{\widetilde{W}}_1^T \right\}. \quad (5.27)$$

Por otra parte, el término de acoplamiento  $p(z, y)$  puede ser expresado como

$$p(z, y) = p_0(z, y) + \delta_p(z, y)$$

donde  $p_0(z, y)$  es una parte conocida y  $\delta_p(z, y)$  es desconocida, pero satisface

$$\|\delta_p(z, y)\| \leq \bar{\delta}_p(z, y).$$

En este caso la correspondiente RND puede ser estructurada como

$$\dot{\hat{z}} = f_0(\hat{z}) + [p_0(z, y) + W_1\varphi_1(\hat{z}, y) + \psi_1] y$$

con el cambio de la función  $\overline{B}_1$  a

$$\overline{B}_1 = \overline{\delta}_p(z, y) + \|W_1^*\| \cdot \|\varphi_1\|.$$

El control y la ley de aprendizaje, así como los umbrales de salida y la función de almacenamiento permanecen como en (5.26, 5.24, 5.25 y 5.27). Entonces tenemos dos posibles alternativas para describir la incertidumbre del término  $p(z, y)$ . Pero en ambos casos, la ley de control sugerida (5.26) logra hacer pasivo al sistema de manera robusta con respecto a la incertidumbre de este término de acoplamiento.

### **Caso 2: Incertidumbre en el Término $a(z, y)$**

El resultado principal mostrado de esta sección, formulado en el teorema anterior, involucra la incertidumbre en los términos  $p(z, y)$  y  $a(z, y)$ . Como un caso parcial, podemos formular este resultado para la situación en la que la incertidumbre solo existe en  $a(z, y)$ . Si las funciones  $f_0(z)$ ,  $p(z, y)$  y  $b(z, y)$  en (5.1) son conocidas y  $a(z, y)$  es incierta pero acotada

$$\|a(z, y)\| \leq \overline{a}(z, y)$$

donde  $\overline{a}(z, y)$  la selecciona el diseñador, entonces la RND, que identifica la parte desconocida, puede ser construida como

$$\dot{\hat{y}} = W_2 \varphi_2(z, \hat{y}) + \psi_2 + b(z, y)u$$

con el ajuste de pesos obedeciendo a la ley de aprendizaje

$$\dot{W}_2^T = \eta_2 (-2\varphi_2(z, \hat{y})\Delta_y P_y + \varphi_2(z, y)y), \quad W_2(0) = W_2^* \quad (5.28)$$

y el umbral de salida seleccionado como

$$\psi_2 = -\text{sign}(\Delta_y P_y) [\|W_2^*\| \cdot \|\varphi_2(z, \hat{y}) - \varphi_2(z, y)\| + \overline{B}_2]. \quad (5.29a)$$

La ley de control

$$u = b^{-1}(z, y) \left[ v - \frac{\partial W_0(z)}{\partial z} p(z, y) - \overline{B}_2 \text{sign}(y) - W_2 \varphi_2 \right] \quad (5.30)$$

hace pasivo al sistema no lineal correspondiente, con la función de almacenamiento

$$V_a = \Delta_y^T P_y \Delta_y + \frac{1}{2} y^2 + \mathcal{W}_0(z) + \frac{\eta_2^{-1}}{2} \widetilde{W}_2 \widetilde{W}_2^T. \quad (5.31)$$

A su vez, se puede modelar la incertidumbre en la función  $a(z, y)$  como

$$a(z, y) = a_0(z, y) + \delta_a(z, y)$$

donde  $a_0(z, y)$  es la parte conocida de  $a(z, y)$  y  $\delta_a(z, y)$  es la parte incierta, que satisface

$$\|\delta_a(z, y)\| \leq \overline{\delta}_a(z, y).$$

Entonces la RND es construida aprovechando a  $a_0(z, y)$  y su estructura es:

$$\hat{y} = a_0(z, y) + W_2 \varphi_2(z, \hat{y}) + \psi_2 + b(z, y)u. \quad (5.32)$$

La función  $\overline{B}_2$  ahora es

$$\overline{B}_2 = \overline{\delta}_a(z, y) + \|W_2^*\| \cdot \|\varphi_2\|,$$

con respecto a la ley de control, la ley de aprendizaje, el umbral y la función de almacenamiento permanecen con la misma estructura dada en (5.30), (5.28), (5.29a) y (5.31). Por ejemplo, en un manipulador de un solo eslabón, podemos considerar que la fricción que existe en la articulación es la única parte incierta del modelo correspondiente. De modo que el término incierto  $\delta_a(z, y)$  puede ser identificado por la RND dada en (5.32). Con respecto a este ejemplo en la siguiente subsección se discute con mas detalles.

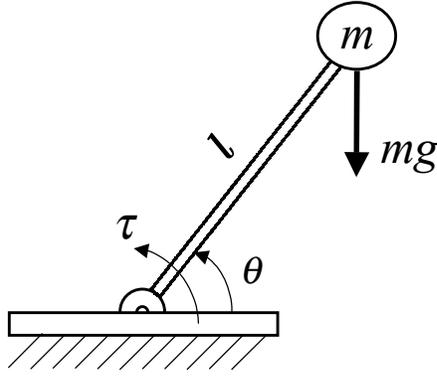


Figura 5-2: Manipulador de un eslabón

### 5.1.8 Simulación de la 1ª Propuesta

#### Manipulador de un Eslabón

Consideremos el siguiente sistema no lineal (manipulador de un eslabón). La ecuación que rige la dinámica del sistema es la siguiente:

$$\ddot{\theta} = -\frac{1}{ml^2}mgl \cos(\theta) - \frac{1}{ml^2}\lambda(\dot{\theta}) + \frac{1}{ml^2}\tau$$

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ -\frac{g}{l} \cos(z_1) - \lambda(y) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix} u \quad (5.33)$$

donde:

$m$  es la masa y  $l$  es la longitud del eslabón,

$\lambda(y)$  es la fricción de la articulación, considerada incierta

$z_1 \in \mathfrak{R}$  es la variable de articulación,

$y \in \mathfrak{R}$  es la velocidad de  $z_1$ ,

$u$  es el par de control.

Puede observarse fácilmente que el sistema (5.33) puede ser nuevamente escrito en la

forma (5.1), i.e.,

$$\begin{aligned}\dot{z} &= f_0(z) + p(z, y)y, \\ \dot{y} &= a(z, y) + b(z, y)u\end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned}f_0(z_1) &= 0, \\ p(z, y) &= 1, \\ a(z, y) &= -\frac{g}{l} \cos(z_1) - \lambda(y), \\ b(z, y) &= \frac{1}{ml^2}.\end{aligned}$$

La dinámica cero del sistema (5.33) es estable y la función de Lyapunov de esta dinámica es

$$W_0(z_1) = \frac{1}{2}z_1^2.$$

Ahora podemos realizar la simulación del manipulador de un solo eslabón tomando en cuenta que los términos  $p(z, y)$  y  $b(z, y)$  son conocidos. Escogiendo a

$$v = -y.$$

Las condiciones iniciales del manipulador son de 1.0 rad. en la posición y de 1.0 rad/seg en la velocidad, es decir

$$[z_1(0), y(0)]^T = [1, 1]^T,$$

y las condiciones iniciales en la red neuronal

$$[\hat{z}_1(0), \hat{y}(0)]^T = [5, 0]^T.$$

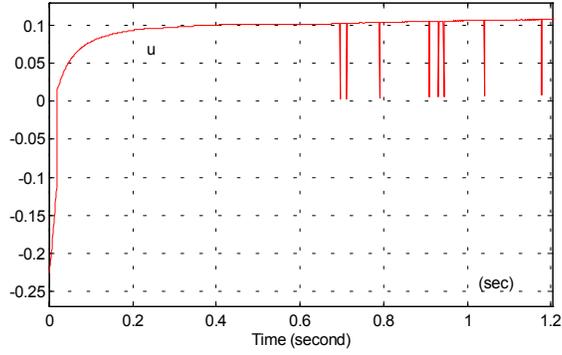


Figura 5-3: *Par de entrada u*

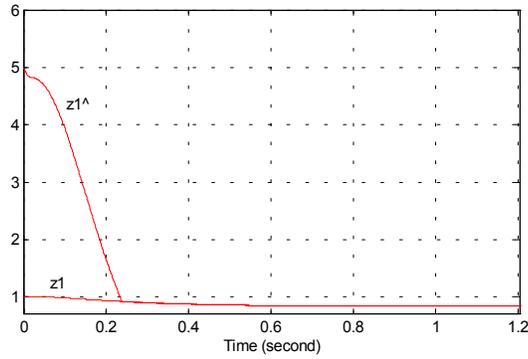


Figura 5-4: *Estados  $z_1$  y  $\hat{z}_1$*

Para la simulación se seleccionaron los siguientes parámetros:

$$\begin{aligned}
 m &= \frac{0.5}{9.8}, \quad l = 0.3, \\
 A &= -2, \quad W_1^* = [9.8521, 11.8528], \quad W_2^* = [3.6141, 3.5260], \\
 P_z &= 0.5359, \quad \Lambda_{\hat{f}'} = 1, \quad L_{\hat{f}'} = 2 \\
 \bar{B}_1 &= 15.4127 \|\varphi_1\| + 3, \quad \bar{B}_2 = 5.0492 \|\varphi_2\| + |y| + 4 \\
 \eta_1 &= \text{diag}\{2, 2\}, \quad \eta_2 = 2, \quad k_1 = 1, \quad k_2 = 1.
 \end{aligned}$$

y como término incierto se considera a la fricción

$$\lambda(y) = 0.1(y + \tanh(50y)),$$

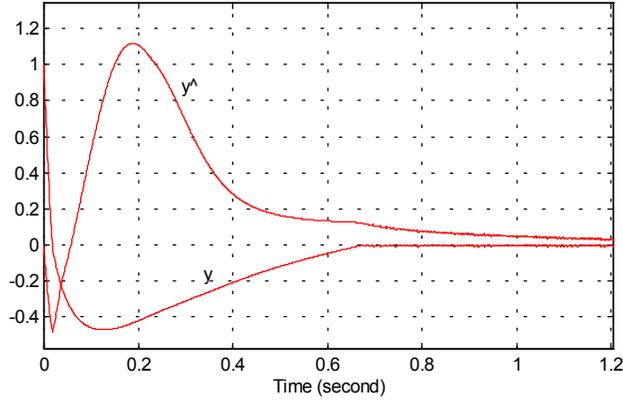


Figura 5-5: Salida y del sistema, y el estado  $\hat{y}$

### Simulación Comparativa

Consideremos el siguiente sistema no lineal para realizar una simulación comparativa (benchmark) [19]

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5z_1^2 \\ -1.5 \\ 0 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (5.34)$$

Un controlador que hace pasivo a este sistema esta documentado en [19], [51] y [4]. Podemos expresar el sistema (5.34) en la forma (5.1) considerando

$$a(z, y) = 0, \quad b(z, y) = 1, \quad f_0 = [-z_1 \ 0]^T, \quad p(y, z) = [-5z_1^2 \ -1.5]^T.$$

La dinámica cero del sistema (5.34) es estable, con la correspondiente función de Lyapunov igual a

$$\mathcal{W}_0(z) = \frac{1}{2}(z_1^2 + z_2^2).$$

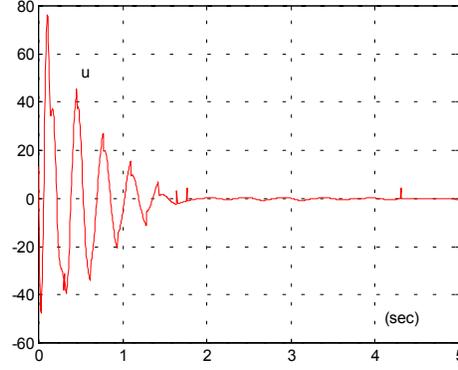


Figura 5-6: *Entrada de control u. Con  $v = -y$*

Consideramos que  $f_0(z)$  y  $b(y, z)$  son conocidas y que  $p(y, z)$  junto con  $a(y, z)$ , son términos inciertos. Las condiciones iniciales son

$$\begin{aligned} [z_1(0), z_2(0), y(0)]^T &= [-1, 1, -2]^T, \\ [\hat{z}_1(0), \hat{z}_2(0), \hat{y}(0)]^T &= [1, -1, 1]^T. \end{aligned}$$

La retroalimentación es seleccionada como

$$v = -y.$$

La correspondiente simulación se muestra en las siguientes gráficas.

Los parámetros fueron seleccionados como:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad W_1^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad W_2^* = [0, 0, 0], \\ P_z &= \begin{bmatrix} 2.2918 & 0 \\ 0 & 2.2918 \end{bmatrix}, \quad \Lambda_{\tilde{f}'} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad L_{\tilde{f}'} = 2 \\ \bar{B}_1 &= 1.5\sqrt{25 * z_1^2 + 2.25 + .01y^2}, \quad \bar{B}_2 = \sqrt{0.01 \cdot z_2^2 + 0.001(z_1^2 + y^2)} \\ \eta_1 &= \text{diag}\{20, 20, 20\}, \quad \eta_2 = 20, \quad k_1 = 1, \quad k_2 = 1. \end{aligned}$$

Como puede observarse de los ejemplos anteriores, el resultado propuesto ofrece una propiedad de estabilidad para sistemas no lineales con modelo parcialmente conocido, al

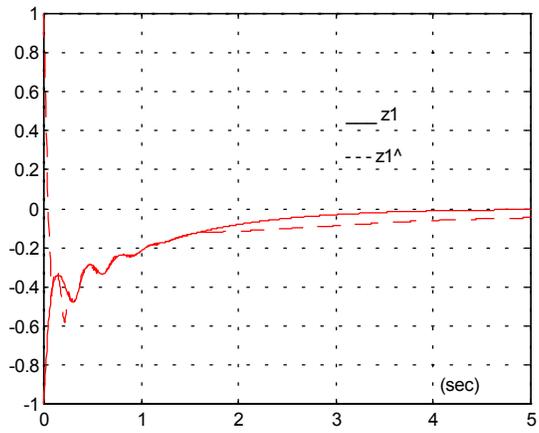


Figura 5-7: Estados  $z_1$  y  $\hat{z}_1$ . Con  $v = -y$

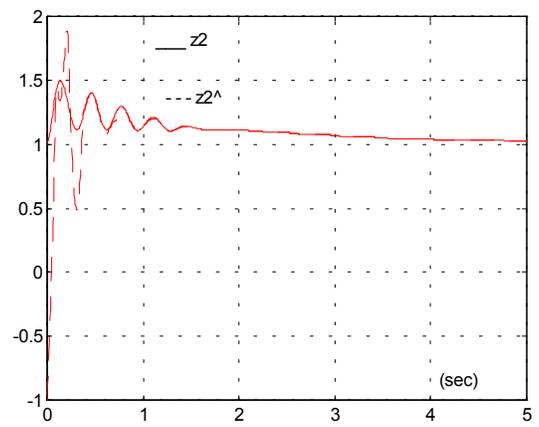


Figura 5-8: Estados  $z_2$  y  $\hat{z}_2$ . Con  $v = -y$

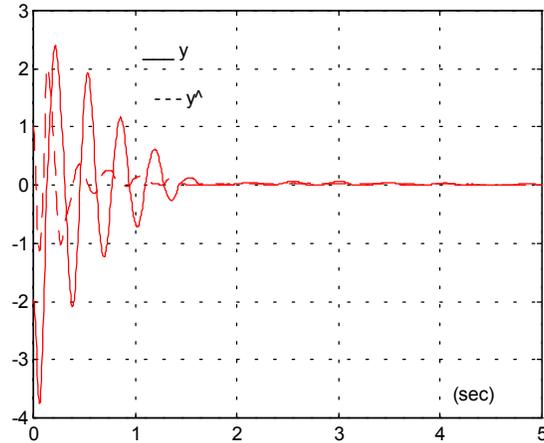


Figura 5-9: Salida  $y$  con el estado  $\hat{y}$ . (  $v = -y$  )

cerrar el lazo con una simple retroalimentación lineal negativa.

**Observación 5.1** *Nótese que la parte conocida del sistema no lineal parcialmente incierto (5.35) es utilizada en la estructura de la RND, el término  $p(z, y)$  es identificado por la neuronas  $W_{pz}\varphi_{pz}(\hat{z})$ ,  $W_{py}\varphi_{py}(\hat{y})$  y el umbral  $\psi_p$ , el término  $a(z, y)$  es identificado por la neurona  $W_a\varphi_a(\hat{z}, \hat{y})$  y el umbral  $\psi_a$ .*

## 5.2 Descripción del Sistema No Lineal Incierto y Estructura de la RND (2ª Propuesta)

En esta sección se desarrolla otra alternativa para la pasivación de una clase de sistemas no lineales inciertos SISO. Esta metodología permite relajar las restricciones y carece de la necesidad de la solución de una función de Riccati

Considere el sistema no lineal SISO

$$\begin{aligned}\dot{z} &= f_o(z) + p(z, y)y \\ \dot{y} &= a(z, y) + b(z, y)u.\end{aligned}$$

Los términos  $p(z, y)$  y  $a(z, y)$  poseen incertidumbre, y son expresados por la suma de una parte nominal conocida mas otra que contiene la incertidumbre i.e.

$$\begin{aligned}\dot{z} &= f_o(z) + [p_0(z, y) + \Delta_p(z, y)] y \\ \dot{y} &= a_0(z, y) + \Delta_a(z, y) + b(z, y)u\end{aligned}\tag{5.35}$$

Las funciones que son inciertas las hemos expresado como  $\Delta_p(z, y)$  para denotar la incertidumbre de  $p(z, y)$ , y la función  $\Delta_a(z, y)$  expresa la incertidumbre de  $a(z, y)$ .

Las siguientes dos hipótesis  $\mathbf{H}_a$  y  $\mathbf{H}_b$  describen la clase a la que pertenece el sistema (5.35) .

$\mathbf{H}_a$ : El sistema es débilmente de fase mínima, en otras palabras, existe una función  $\mathcal{W}(z) \leq 0$ , tal que

$$\frac{\partial \mathcal{W}(z)}{\partial z} f_o(z) \leq 0$$

$\mathbf{H}_b$ : Los términos inciertos  $\Delta_p(z, y)$  y  $\Delta_a(z, y)$  son acotados

$$\|\Delta_p(z, y)\| \leq \overline{\Delta_p(z, y)}$$

$$\|\Delta_a(z, y)\| \leq \overline{\Delta_a(z, y)}$$

donde  $\overline{\Delta_p(z, y)}$  y  $\overline{\Delta_a(z, y)}$  son parametros dados por el diseñador

La RND propuesta tiene la siguiente estructura:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{z}} &= f_0(z) + [p_0(z, y) + W_{pz}\varphi_{pz}(\hat{z}) + W_{py}\varphi_{py}(\hat{y}) + \psi_p] y \\ \dot{\hat{y}} &= a_0(z, y) + W_a\varphi_a(\hat{z}, \hat{y}) + \psi_a + b(z, y)u\end{aligned}\tag{5.36}$$

donde estamos utilizando la parte conocida del modelo del sistema no lineal expresada en  $f_0(z)$ ,  $p_0(z, y)$  y la función  $a_0(z, y)$

**Teorema 5.2** *Considerare al sistema (5.35) identificado con la red neuronal dinámica (5.36) con los umbrales*

$$\begin{aligned}\psi_p &= -\Theta(e_z) \left( \|W_{pz}\tilde{\varphi}_{pz} + W_{py}\tilde{\varphi}_{py} + W_{pz}^*\varphi_{pz} + W_{py}^*\varphi_{py}\| + \overline{\Delta_p} \right) \text{sign}(y) \\ \psi_a &= -\text{sign}(e_y) \left\{ |W_a\tilde{\varphi}_a + W_a^*\varphi_a| + \overline{\Delta_a} \right\}\end{aligned}\quad (5.37)$$

cuya ley de aprendizaje dinámica es

$$\begin{aligned}\dot{W}_{pz} &= \eta_{pz} \left( \varphi_{pz}y \frac{\partial \mathcal{W}(z)}{\partial z} - \varphi_{pz}y e_z^T \right)^T \\ \dot{W}_{py} &= \eta_{py} \left( \varphi_{py}y \frac{\partial \mathcal{W}(z)}{\partial z} - \varphi_{py}y e_z^T \right)^T \\ \dot{W}_a &= \eta_a (\varphi_a y - \varphi_a e_y)^T\end{aligned}\quad (5.38)$$

Imponiendo la ley de control neuronal

$$\begin{aligned}u &= -\frac{1}{b(z,y)} \left[ a_0 + W_a\varphi_a + \text{sign}(y) (\overline{\Delta_a} + |W_a^*\varphi_a|) \right] \\ &\quad - \frac{1}{b(z,y)} \left[ \frac{\partial \mathcal{W}(z)}{\partial z} [p_0 + W_{pz}\varphi_{pz} + W_{py}\varphi_{py}] - v \right].\end{aligned}\quad (5.39)$$

Si las hipótesis  $H_a$  y  $H_b$  se satisfacen, Entonces el sistema (5.35) es pasivo desde la entrada  $v$  a la salida  $y$ , con respecto a la función de almacenamiento

$$V = V_{pass} + V_{err} + V_{learn}$$

donde

$$\begin{aligned}V_{pass} &= \frac{y^2}{2} + \mathcal{W}(z) \\ V_{err} &= \frac{1}{2}e_z^T e_z + \frac{1}{2}e_y^2 \\ V_{learn} &= \frac{1}{2}tr \left\{ \tilde{W}_{pz}\eta_{pz}^{-1}\tilde{W}_{pz}^T \right\} + \frac{1}{2}tr \left\{ \tilde{W}_{py}\eta_{py}^{-1}\tilde{W}_{py}^T \right\} + \frac{1}{2}tr \left\{ \tilde{W}_a\eta_a^{-1}\tilde{W}_a^T \right\}\end{aligned}$$

$$\Theta(\cdot) = \text{sign}(\text{diag}\{\cdot\})\quad (5.40)$$

$$e_z = \hat{z} - z$$

$$e_y = \hat{y} - y$$

$$\begin{aligned}\tilde{W}_{pz} &= W_{pz} - W_{pz}^* \\ \tilde{W}_{py} &= W_{py} - W_{py}^* \\ \tilde{W}_a &= W_a - W_a^*\end{aligned}\tag{5.41}$$

y con los pesos iniciales<sup>2</sup> denotados como

$$\begin{aligned}W_{pz}^* &= W_{pz}(0) \\ W_{py}^* &= W_{py}(0) \\ W_a^* &= W_a(0)\end{aligned}\tag{5.42}$$

### Demostración

Primeramente expresamos el sistema (5.35) en función de los valores iniciales de los pesos

$$\begin{aligned}\dot{z} &= f_o(z) + [p_0(z, y) + W_{pz}^* \varphi_{pz}(z) + W_{py}^* \varphi_{py}(y) + \psi_p + v_p] y \\ \dot{y} &= a_0(z, y) + W_a^* \varphi_a(z, y) + \psi_a + b(z, y)u + v_a\end{aligned}\tag{5.43}$$

$$\dot{e}_y = W_a \varphi_a(\hat{z}, \hat{y}) - W_a^* \varphi_a(z, y) - v_a$$

la discrepancia que siempre puede existir en la nueva expresión (5.43) y la original (5.35) esta expresada en  $v_p$  y  $v_a$ .

$$\begin{aligned}v_p &= \Delta_p(z, y) - [W_{pz}^* \varphi_{pz}(z) + W_{py}^* \varphi_{py}(y) + \psi_p] \\ v_a &= \Delta_a(z, y) - [W_a^* \varphi_a(z, y) + \psi_a]\end{aligned}$$

---

<sup>2</sup>Los pesos iniciales  $W_{pz}^*$ ,  $W_{py}^*$  y  $W_a^*$ , pueden haber sido escogidos de un proceso de aprendizaje fuera de línea.

Si le extraemos la derivada a la función de almacenamiento

$$\dot{V} = \dot{V}_{pas} + \dot{V}_{err} + \dot{V}_{apr}$$

podemos calcular separadamente la derivada de cada término que compone a la función de almacenamiento.

La metodología para demostrar el teorema consiste en calcular la cota superior de la derivada de la función de almacenamiento. Por lo que iniciaremos por hacer esto con el término  $V_{pass}$

$$\dot{V}_{pass} = y\dot{y} + \frac{\partial \mathcal{W}(z)}{\partial z} \dot{z}$$

de (5.43) se tiene

$$\begin{aligned} \dot{V}_{pass} &= y [a_0(z, y) + W_a^* \varphi_a(z, y) + \psi_a + b(z, y)u + v_a] \\ &+ \frac{\partial \mathcal{W}(z)}{\partial z} [f_o(z) + [p_0(z, y) + W_{pz}^* \varphi_{pz}(z) + W_{py}^* \varphi_{py}(y) + \psi_p + v_p] y] = \\ &y [a_0(z, y) + b(z, y)u] \\ &+ y [W_a^* \varphi_a(z, y) + \psi_a + v_a] + \\ &+ \frac{\partial \mathcal{W}(z)}{\partial z} [f_o(z) + p_0(z, y)y] \\ &+ \frac{\partial \mathcal{W}(z)}{\partial z} [W_{pz}^* \varphi_{pz}(z) + W_{py}^* \varphi_{py}(y) + \psi_p + v_p] y. \end{aligned}$$

Se puede observar que  $\dot{V}_{pass}$  en este momento está expresada con términos conocidos, los cuales son  $y [a_0(z, y) + b(z, y)u]$  junto con  $\frac{\partial \mathcal{W}(z)}{\partial z} [f_o(z) + p_0(z, y)y]$ , por lo que solo falta calcular la cota superior de los términos restantes, esto es, por una parte tenemos

$$\begin{aligned}
& y [W_a^* \varphi_a + \psi_a + v_a] = \\
& y [W_a \varphi_a - \tilde{W}_a \varphi_a + \psi_a + v_a] = \\
& tr \left\{ \tilde{W}_a [-\varphi_a y] \right\} + y [W_a \varphi_a + \psi_a + v_a] = \\
& tr \left\{ \tilde{W}_a [-\varphi_a y] \right\} + y \{W_a \varphi_a + \Delta_a - W_a^* \varphi_a\} \leq \\
& \leq tr \left\{ \tilde{W}_a [-\varphi_a y] \right\} + W_a \varphi_a y + \\
& y \{sign(y) [|\Delta_a| + |W_a^* \varphi_a|]\},
\end{aligned}$$

y el otro término que contiene incertidumbre es

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \mathcal{W}(z)}{\partial z} [W_{pz}^* \varphi_{pz}(z) + W_{py}^* \varphi_{py}(y) + \psi_p + v_p] y = \\
& \frac{\partial \mathcal{W}(z)}{\partial z} [W_{pz} \varphi_{pz} - \tilde{W}_{pz} \varphi_{pz} + W_{py} \varphi_{py} - \tilde{W}_{py} \varphi_{py}] y + \\
& \frac{\partial \mathcal{W}(z)}{\partial z} [\psi_p + v_p] y \leq \\
& tr \left\{ \tilde{W}_{pz} \left[ -\varphi_{pz} y \frac{\partial \mathcal{W}(z)}{\partial z} \right] \right\} + tr \left\{ \tilde{W}_{py} \left[ -\varphi_{py} y \frac{\partial \mathcal{W}(z)}{\partial z} \right] \right\} + \\
& \frac{\partial \mathcal{W}(z)}{\partial z} [W_{pz} \varphi_{pz} + W_{py} \varphi_{py}] y + \\
& \frac{\partial \mathcal{W}(z)}{\partial z} \left\{ \Theta \left( \frac{\partial \mathcal{W}(z)}{\partial z} \right) [|\Delta_p| + \|W_{pz}^* \varphi_{pz} + W_{py}^* \varphi_{py}\|] sign(y) \right\} y
\end{aligned}$$

donde  $\Theta(\cdot)$  esta definida en (5.40).

Ahora haciendo uso de la hipótesis  $H_b$ , podemos construir la cota superior de  $\dot{V}_{pass}$

$$\begin{aligned}
\dot{V}_{pass} & \leq \left[ \frac{\partial \mathcal{W}(z)}{\partial z} f_o(z) + \frac{\partial \mathcal{W}(z)}{\partial z} p_0(z, y) + a_0(z, y) + b(z, y)u \right] y + \\
& tr \left\{ \tilde{W}_a [-\varphi_a y] \right\} + W_a \varphi_a y + \{sign(y) [\overline{\Delta}_a + |W_a^* \varphi_a|]\} y + \\
& tr \left\{ \tilde{W}_{pz} \left[ -\varphi_{pz} y \frac{\partial \mathcal{W}(z)}{\partial z} \right] \right\} + tr \left\{ \tilde{W}_{py} \left[ -\varphi_{py} y \frac{\partial \mathcal{W}(z)}{\partial z} \right] \right\} + \\
& \frac{\partial \mathcal{W}(z)}{\partial z} [W_{pz} \varphi_{pz} + W_{py} \varphi_{py}] y + \\
& \frac{\partial \mathcal{W}(z)}{\partial z} \left\{ \Theta \left( \frac{\partial \mathcal{W}(z)}{\partial z} \right) [\overline{\Delta}_p + \|W_{pz}^* \varphi_{pz} + W_{py}^* \varphi_{py}\|] sign(y) \right\} y.
\end{aligned}$$

La siguiente función por acotar es  $V_{err}$

$$\dot{V}_{err} = e_z^T \dot{e}_z + e_y \dot{e}_y.$$

Iniciemos acotando a  $e_z^T \dot{e}_z$  de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
e_z^T \dot{e}_z &= e_z^T [W_{pz} \hat{\varphi}_{pz} + W_{py} \hat{\varphi}_{py} - W_{pz}^* \varphi_{pz} - W_{py}^* \varphi_{py} - v_p] y = \\
e_z^T [W_{pz} \hat{\varphi}_{pz} + W_{py} \hat{\varphi}_{py} - (W_{pz} - \tilde{W}_{pz}) \varphi_{pz} - (W_{py} - \tilde{W}_{py}) \varphi_{py} - v_p] y &= \\
e_z^T [W_{pz} \tilde{\varphi}_{pz} + W_{py} \tilde{\varphi}_{py} + \tilde{W}_{pz} \varphi_{pz} + \tilde{W}_{py} \varphi_{py} - v_p] y &= \\
tr \left\{ \tilde{W}_{pz} [\varphi_{pz} y e_z^T] \right\} + tr \left\{ \tilde{W}_{py} [\varphi_{py} y e_z^T] \right\} + & \\
e_z^T [W_{pz} \tilde{\varphi}_{pz} + W_{py} \tilde{\varphi}_{py} - \Delta_p + W_{pz}^* \varphi_{pz} + W_{py}^* \varphi_{py} + \psi_p] y &
\end{aligned}$$

por la hipótesis  $H_b$ , tenemos que

$$\begin{aligned}
e_z^T \dot{e}_z &\leq tr \left\{ \tilde{W}_{pz} [\varphi_{pz} y e_z^T] \right\} + tr \left\{ \tilde{W}_{py} [\varphi_{py} y e_z^T] \right\} \\
e_z^T [\Theta(e_z) (\|W_{pz} \tilde{\varphi}_{pz} + W_{py} \tilde{\varphi}_{py} + W_{pz}^* \varphi_{pz} + W_{py}^* \varphi_{py}\|) sign(y)] y & \\
e_z^T [\Theta(e_z) \overline{\Delta}_p sign(y) + \psi_p] y &
\end{aligned}$$

y al término  $e_y \dot{e}_y$  se le construye la cota superior auxiliándonos también de la hipótesis  $H_b$ , de la manera siguiente

$$\begin{aligned}
e_y \dot{e}_y &= e_y [W_a \hat{\varphi}_a - W_a^* \varphi_a - v_a] = \\
e_y [W_a \tilde{\varphi}_a + \tilde{W}_a \varphi_a - v_a] &= \\
tr \left\{ \tilde{W}_a [\varphi_a e_y] \right\} + & \\
e_y [W_a \tilde{\varphi}_a - \Delta_a + W_a^* \varphi_a + \psi_a] &\leq \\
tr \left\{ \tilde{W}_a [\varphi_a e_y] \right\} + & \\
e_y [sign(e_y) |W_a \tilde{\varphi}_a + W_a^* \varphi_a| + \overline{\Delta}_a + \psi_a] &.
\end{aligned}$$

Por lo que podemos expresar la cota superior de  $V_{err}$  como

$$\begin{aligned}
\dot{V}_{err} &\leq tr \left\{ \tilde{W}_{pz} [\varphi_{pz} y e_z^T] \right\} + tr \left\{ \tilde{W}_{py} [\varphi_{py} y e_z^T] \right\} + tr \left\{ \tilde{W}_a [\varphi_a y e_y] \right\} + \\
e_z^T [\Theta(e_z) (\|W_{pz} \tilde{\varphi}_{pz} + W_{py} \tilde{\varphi}_{py} + W_{pz}^* \varphi_{pz} + W_{py}^* \varphi_{py}\|) sign(y)] y & \\
e_z^T [\Theta(e_z) \overline{\Delta}_p + \psi_p] + & \\
e_y [sign(e_y) \{|W_a \tilde{\varphi}_a + W_a^* \varphi_a| + \overline{\Delta}_a\} + \psi_a] &.
\end{aligned}$$

La derivada de la función  $V_{appr}$  simplemente queda expresado por

$$\dot{V}_{apr} = tr \left\{ \tilde{W}_{pz} \eta_{pz}^{-1} \dot{\tilde{W}}_{pz}^T \right\} + tr \left\{ \tilde{W}_{py} \eta_{py}^{-1} \dot{\tilde{W}}_{py}^T \right\} + tr \left\{ \tilde{W}_a \eta_a^{-1} \dot{\tilde{W}}_a^T \right\}$$

simpleza que posteriormente será de utilidad para construir el aprendizaje de la RND.

Ahora se suman las cotas superiores de los términos  $V_{pas}$ ,  $V_{err}$  y  $V_{apr}$  y realizando algunas manipulaciones algebraicas, podemos obtener finalmente la cota superior de la *función de almacenamiento*

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{V}_{pass} + \dot{V}_{err} + \dot{V}_{learn} \leq \\ &\left[ \frac{\partial \mathcal{W}(z)}{\partial z} f_o + \frac{\partial \mathcal{W}(z)}{\partial z} p_0 + a_0 + bu \right] y + \\ &\frac{\partial \mathcal{W}(z)}{\partial z} [W_{pz} \varphi_{pz} + W_{py} \varphi_{py}] y + \\ &W_a \varphi_a y + \{ \text{sign}(y) [\overline{\Delta}_a + |W_a^* \varphi_a|] \} y + \\ &\frac{\partial \mathcal{W}(z)}{\partial z} \left\{ \Theta \left( \frac{\partial \mathcal{W}(z)}{\partial z} \right) [\overline{\Delta}_p + \|W_{pz}^* \varphi_{pz} + W_{py}^* \varphi_{py}\|] \text{sign}(y) \right\} y + \\ e_z^T &[\Theta(e_z) (\|W_{pz} \tilde{\varphi}_{pz} + W_{py} \tilde{\varphi}_{py} + W_{pz}^* \varphi_{pz} + W_{py}^* \varphi_{py}\|) \text{sign}(y)] y + \\ &e_z^T [\Theta(e_z) \overline{\Delta}_p \text{sign}(y) + \psi_p] y + \\ &e_y [\text{sign}(e_y) \{ |W_a \tilde{\varphi}_a + W_a^* \varphi_a| + \overline{\Delta}_a \} + \psi_a] \\ &tr \left\{ \tilde{W}_{pz} \left[ \eta_{pz}^{-1} \dot{\tilde{W}}_{pz} - \varphi_{pz} y \frac{\partial \mathcal{W}(z)}{\partial z} + \varphi_{pz} y e_z^T \right] \right\} + \\ &tr \left\{ \tilde{W}_{py} \left[ \eta_{py}^{-1} \dot{\tilde{W}}_{py} - \varphi_{py} y \frac{\partial \mathcal{W}(z)}{\partial z} + \varphi_{py} y e_z^T \right] \right\} + \\ &tr \left\{ \tilde{W}_a \left[ \eta_a^{-1} \dot{\tilde{W}}_a - \varphi_a y + \varphi_a e_y \right] \right\}. \end{aligned} \tag{5.44}$$

Ahora vamos a hacer uso de las expresiones de los umbrales de salida (5.37), sustituyéndolos en la expresión de la cota superior de la derivada de la función de almacenamiento (5.44),

obtenemos

$$\begin{aligned}
\dot{V} \leq & \left[ \frac{\partial \mathcal{W}(z)}{\partial z} f_o + \frac{\partial \mathcal{W}(z)}{\partial z} p_0 + a_0 + bu \right] y + \\
& \frac{\partial \mathcal{W}(z)}{\partial z} [W_{pz} \varphi_{pz} + W_{py} \varphi_{py}] y + \\
& W_a \varphi_a y + \left\{ \text{sign}(y) [\overline{\Delta}_a + |W_a^* \varphi_a|] \right\} y + \\
& \text{tr} \left\{ \tilde{W}_{pz} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{W}}_{pz}^T \\ \tilde{W}_{pz} - \varphi_{pz} y \frac{\partial \mathcal{W}(z)}{\partial z} + \varphi_{pz} y e_z^T \end{bmatrix} \right\} + \\
& \text{tr} \left\{ \tilde{W}_{py} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{W}}_{py}^T \\ \tilde{W}_{py} - \varphi_{py} y \frac{\partial \mathcal{W}(z)}{\partial z} + \varphi_{py} y e_z^T \end{bmatrix} \right\} + \\
& \text{tr} \left\{ \tilde{W}_a \begin{bmatrix} \dot{\tilde{W}}_a^T \\ \tilde{W}_a - \varphi_a y + \varphi_a e_y \end{bmatrix} \right\}.
\end{aligned}$$

Según las ecuaciones que definen a  $\tilde{W}_{pz}$ ,  $\tilde{W}_{py}$  y a  $\tilde{W}_a$  en (5.41) sabemos que

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{W}}_{pz} &= \dot{W}_{pz} \\
\dot{\tilde{W}}_{py} &= \dot{W}_{py} \\
\dot{\tilde{W}}_a &= \dot{W}_a
\end{aligned}$$

ya que  $W_{pz}^*$ ,  $W_{py}^*$  y  $W_a^*$  son los valores iniciales de los pesos por lo que son constantes.

Entonces si aplicamos la ley de aprendizaje (5.38) y la ley de control (5.39) obtenemos

$$\dot{V} \leq v y + \frac{\partial \mathcal{W}(z)}{\partial z} f_o.$$

como nuestro sistema considerado es débilmente de fase mínima (hipótesis  $H_a$ ), esto es  $\frac{\partial \mathcal{W}(z)}{\partial z} f_o \leq 0$ , obtenemos un sistema pasivo de la entrada  $v$  a la salida  $y$  con respecto a la función de almacenamiento  $V$  i.e.

$$\dot{V} \leq v y.$$

El teorema es demostrado ■

### 5.2.1 Estructura de la Función de Almacenamiento

La función de almacenamiento  $V = V_{pass} + V_{err} + V_{learn}$ , la constituyen la suma de tres funciones cuyas características son

- $V_{pass} = \frac{1}{2}y^2 + \mathcal{W}(z)$  nos permite construir la ley de control y está relacionada con la construcción de la pasividad del sistema retroalimentado.
- $V_{err} = \frac{1}{2}e_z^T e_z + \frac{1}{2}e_y^2$  es una función que nos permite mantener el error pequeño.
- Finalmente  $V_{learn} = \frac{1}{2}tr \left\{ \tilde{W}_{pz} \eta_{pz}^{-1} \tilde{W}_{pz}^T \right\} + \frac{1}{2}tr \left\{ \tilde{W}_{py} \eta_{py}^{-1} \tilde{W}_{py}^T \right\} + \frac{1}{2}tr \left\{ \tilde{W}_a \eta_a^{-1} \tilde{W}_a^T \right\}$  nos permite construir la ley de aprendizaje de la Red Neuronal Dinámica (RND).

### 5.2.2 Los Umbrales de cada Neurona

Esta propuesta para la pasivación de sistemas no lineales SISO utilizando RND, se hizo partiendo de la primera propuesta mostrada en la sección anterior, con la ventaja de que no hay necesidad de solucionar una ecuación de Riccati (5.11) y ni de demandar una condición Lipschitz (5.3) en  $f_0$ .

Esta ventaja no sería posible sin el uso de los umbrales de salida  $\psi_p$  y  $\psi_a$ , los cuales son escogidos de manera que compensan la incertidumbre del sistema.

Por otra parte se puede observar que la estructura de las dos neuronas es sencilla, un peso sináptico multiplicado por una función de activación mas un umbral de salida, es decir,

$$W_{pz} \varphi_{pz} + W_{py} \varphi_{py} + \psi_p$$

$$W_a \varphi_a + \psi_a.$$

Esto da lugar a que en un momento dado se podría pensar fácilmente que para identificar las no linealidades del sistema habría necesidad de capas escondidas o de un número mayor de neuronas en la arquitectura propuesta.

Esto no es tan necesario porque si observamos la estructura de los umbrales

$$\begin{aligned}\psi_p &= -\Theta(e_z) \left( \|W_{pz}\tilde{\varphi}_{pz} + W_{py}\tilde{\varphi}_{py} + W_{pz}^*\varphi_{pz} + W_{py}^*\varphi_{py}\| + \overline{\Delta_p} \right) \text{sign}(y) \\ \psi_a &= -\text{sign}(e_y) \left\{ |W_a\tilde{\varphi}_a + W_a^*\varphi_a| + \overline{\Delta_a} \right\},\end{aligned}$$

y en la sabiduría de que los modelos de las redes neuronales artificiales son muy variados, entonces los umbrales  $\psi_p$  y  $\psi_a$  los podemos interpretar como dos redes neuronales con estructura y funciones de activación muy particulares, que se suman a los efectos de las neuronas  $W_{pz}\varphi_{pz}$ ,  $W_{py}\varphi_{py}$  y  $W_a\varphi_a$  que poseen una arquitectura mas cercana a lo convencional.

### 5.2.3 Simulación de la 2ª Propuesta

El sistema que se utilizará para simulación es como en la sección anterior, mostrado en la figura (5-2) un manipulador de un solo eslabón ligero y con una masa  $m$  en el punto terminal del mismo. En la articulación se aplica un torque  $\tau$  el cual tiene por objetivo mantener una velocidad angular constante  $\dot{\theta} = cte$ , cabe recordar que se asume que existe una fricción desconocida  $\lambda(\dot{\theta})$  en la articulación del sistema. En ecuaciones de variables de estado considerando a  $x_1 = \theta$ , y a  $x_2 = y = \dot{\theta}$  obtenemos

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{l} \cos(x_1) - \frac{1}{ml^2} \lambda(x_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix} \tau \\ y &= x_2\end{aligned}$$

Donde la fricción de la articulación es desconocida pero en la simulación se considera como

$$\lambda_x(x_2) = 10^{-2}x_2 + 5 \times 10^{-3} \tanh(30x_2)$$

El perfil de la fricción (fig. 5-10) puede interpretarse como la unión de una fricción estática mas otra viscosa. Si colocamos el eslabón cercano a  $90^\circ$ , por ejemplo  $\theta(0) = x_1(0) = \frac{\pi}{2} - 0.1$  rad, y con  $\dot{\theta}(0) = y(0) = 0$ , y dejamos que el sistema evolucione sólo con la fuerza de gravedad, es decir la señal de entrada de control  $u = 0$ , entonces el sistema se comporta como se muestra en las figuras 5-11 y 5-12.

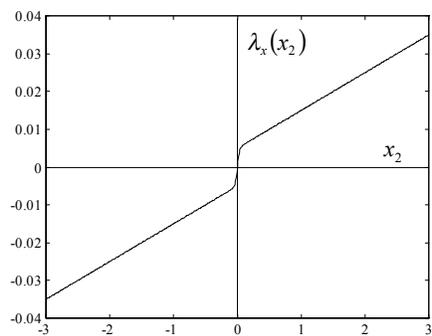


Figura 5-10: *Perfil de la fricción*

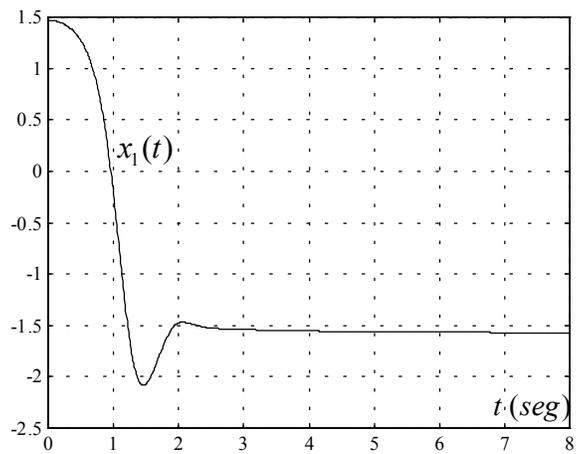


Figura 5-11: *Posición angular del eslabón ( $u = 0$ )*

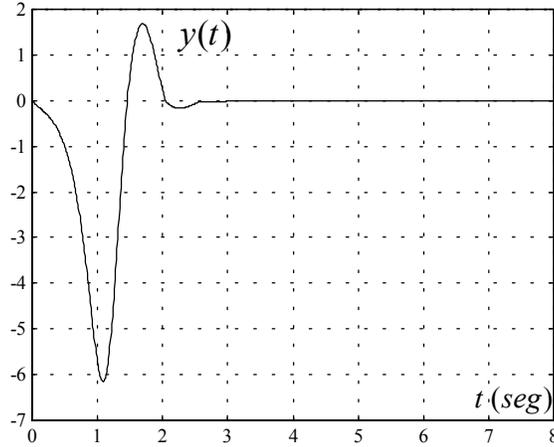


Figura 5-12: Velocidad angular del eslabón ( $u = 0$ )

El eslabón se detiene aproximadamente en 8 segundos (fig. 5-11), esto da una primera idea intuitiva del efecto de la incertidumbre en el sistema, en este caso es la fricción. También podemos notar en la gráfica de la figura 5-12 hay un lapso de tiempo con mucho movimiento con una duración aproximada de 4 seg. y posteriormente empieza a actuar la fricción estática ya que la velocidad es cercana a cero, por lo que  $\theta(t)$  se empieza a detener en el punto por encima de  $-\frac{\pi}{2}$  radianes, lo que muestra que la fricción estática en la articulación tiene un torque igual al que produce la masa del punto terminal del eslabón por efecto de la gravedad.

Nótese que para el caso SISO,  $z = x_1$ , y para seguir una referencia constante de velocidad sólo se hace un cambio de variable  $\bar{y} = y - y_{ref}$ , donde  $y_{ref}$  es una constante, de tal forma que para el modelo

$$\begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0(z) + p(z, \bar{y})\bar{y} \\ a(z, \bar{y}) + b(z, \bar{y})u \end{bmatrix}$$

las funciones serían definidas como  $f_0(z) = 0$ ,  $p(z, \bar{y}) = 1$ ,  $a(z, \bar{y}) = -\frac{g}{l} \cos(z) - \frac{1}{ml^2} \lambda(\bar{y})$  y finalmente  $b(z, \bar{y}) = \frac{1}{ml^2}$ . Por lo tanto fácilmente puede verse que  $a(z, \bar{y})$  es el término que

es parcialmente conocido, es decir

$$a(z, \bar{y}) = a_0(z, \bar{y}) + \Delta_a(z, \bar{y})$$

donde  $a_0(z, \bar{y})$  es la parte conocida  $-\frac{1}{ml^2}mgl \cos(z)$ , y  $\Delta_a(z, \bar{y})$  es la incertidumbre de la función la cual es  $-\frac{1}{ml^2}\lambda(\bar{y})$ .

Como el único término que tiene incertidumbre es  $a(\bar{y}, z)$ , entonces la RND para este caso particular es

$$\dot{\hat{y}} = -\frac{1}{l}g \cos(z) + W_a \varphi_a(z_1, \hat{y}) + \psi_a + \frac{1}{ml^2}u \quad (5.45)$$

con los umbrales

$$\psi_a = -\text{sign}(\bar{e}_y) \{ |W_a \tilde{\varphi}_a + W_a^* \varphi_a| + \overline{\Delta_a} \}$$

cuya ley de aprendizaje dinámica es

$$\dot{W}_a = \eta_a \varphi_a (\bar{y} - \bar{e}_y)^T \quad (5.46)$$

Imponiendo la ley de control neuronal

$$u = -ml^2 \left[ \frac{1}{l}g \cos(z_1) + W_a \varphi_a + \text{sign}(\bar{y}) (\overline{\Delta_a} + |W_a^* \varphi_a|) \right] - ml^2 \left[ \frac{\partial \mathcal{W}(z)}{\partial z} - v \right]. \quad (5.47)$$

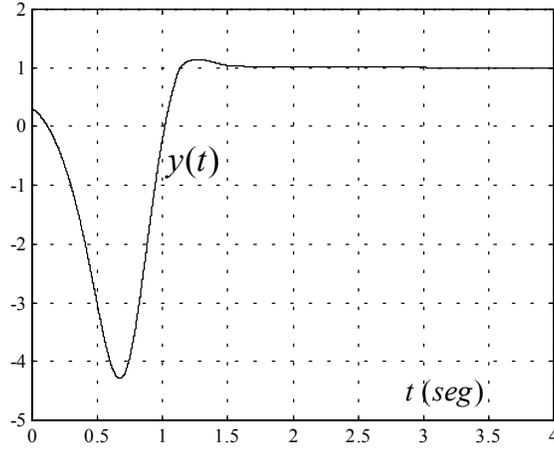


Figura 5-13: *Velocidad angular controlada* ( $y_{ref} = 1$ )

Como la dinámica cero del sistema  $f_0(z) = 0$ , se puede escoger  $\mathcal{W}(z) = \frac{k}{2}z^2$  con  $k > 0$ .

$$W_a^* = [0 \ 0]$$

$$\overline{\Delta}_a = \frac{1}{ml^2} [0.012 |\bar{y}| + 0.007\bar{y} \tanh(45\bar{y})]$$

$$z_1(0) = 0, \quad y(0) = 0.3$$

$$\hat{z}_1(0) = 0, \quad \hat{y}(0) = 0$$

$$k = 3$$

$$v = -\bar{y}$$

$$\bar{y} = y - 1$$

$$\eta_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nótese que en la figura (5-13) que después de 3 seg. adquiere velocidad constante. Hay un lapso relativamente corto de aprendizaje (menos de 0.25 seg), y posteriormente  $\hat{y}$  (fig. 5-14) hace un seguimiento de  $y$ , en el momento que hay una velocidad cero hay un torque constante (fig. 5-15) de alrededor de 0.0063 N-m. La contribución de la neurona  $W_a\varphi_a + \psi_a$  que identifica la incertidumbre dentro de la estructura dinámica de la red (5.45) se encuentra en la figura 5-16.

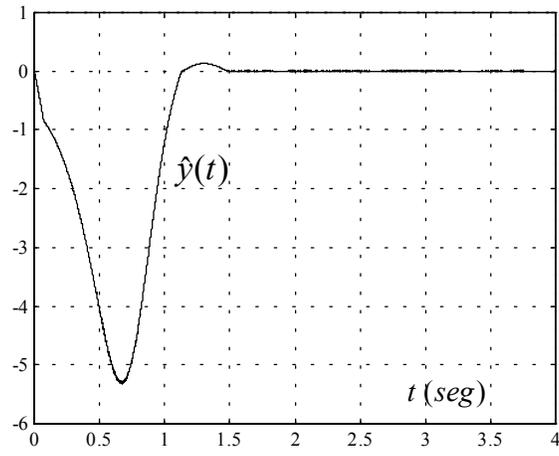


Figura 5-14: Estado de la RND ( $y_{ref} = 1$ )

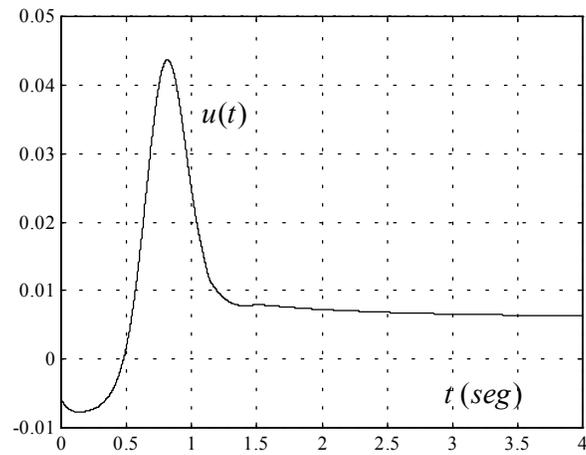


Figura 5-15: Par aplicado ( $y_{ref} = 1$ )

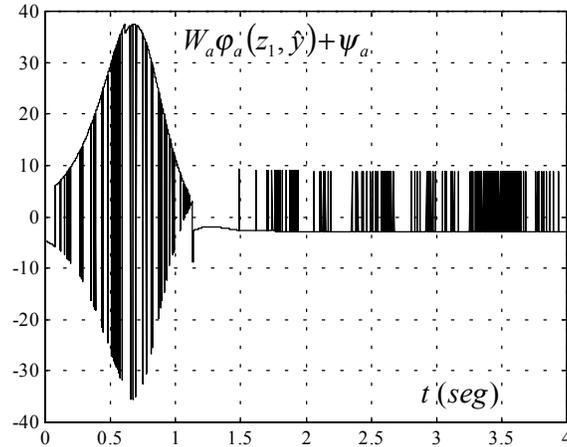


Figura 5-16: *Contribución neuronal en el manipulador ( $y_{ref} = 1$ )*

### 5.3 Conclusiones

En esta sección se logra la pasividad de una clase de sistemas no lineales SISO que tienen un modelo parcialmente conocido, utilizando una RND con una ley de aprendizaje adaptable. Con una simple red neuronal dinámica (RND) que contiene sólo dos neuronas, se identifica el sistema no lineal incierto. La metodología propuesta puede ser considerada con las ya existentes, como una alternativa para el equivalente pasivo por retroalimentación para una clase de sistemas no lineales. La estructura de la Red Neuronal Dinámica es construida utilizando la parte conocida del modelo del sistema no lineal.

Los umbrales de salida correspondientes se ajustan de tal manera que compensan a la incertidumbre. La ley de aprendizaje se construye por medio de un análisis estilo Lyapunov. La ley de control que hace pasivo al sistema, así como la ley de aprendizaje de la red neuronal dinámica, contienen algunos parámetros de diseño los cuales con una adecuada selección pueden mejorar el desempeño del correspondiente lazo cerrado.

# Capítulo 6

## Pasividad Robusta de Sistemas No Lineales Inciertos via Redes Neuronales Dinámicas (Caso MIMO)

En este capítulo se muestra una metodología para realizar la pasivación de una clase de sistemas no lineales MIMO afines con la entrada que poseen un modelo con incertidumbre. Para realizar esto se utiliza una red neuronal dinámica para identificar a la incertidumbre, cuya ley de aprendizaje contribuye conjuntamente con una ley de control para lograr un equivalente pasivo del sistema por retroalimentación. La ley de control propuesta utiliza información de la RND y por medio de un operador de proyección permite construir un equivalente pasivo por retroalimentación.

## 6.1 Descripción del Sistema No Lineal MIMO Incierto y Estructura de la RND

### 6.1.1 Características del Sistema No Lineal

Considere el sistema no lineal MIMO

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + G(x)u \\ y &= h(x) \end{aligned} \tag{6.1}$$

donde  $x \in \mathcal{X} \subset \mathfrak{R}^n$ ,  $u \in U \subset \mathfrak{R}^m$ ,  $y \in Y \subset \mathfrak{R}^m$ . El conjunto  $\mathcal{X}$  denota la región de operación que contiene un punto de equilibrio de la forma  $x = \bar{x}(U)$  y está dado por la solución  $f(\bar{x}) + G(\bar{x})U = 0$ . Para  $u = 0$  se supone que  $f(\bar{x}) = 0$  implica  $\bar{x} = 0$ . La matriz de entrada  $G$  de dimensión  $n \times m$  esta construida por  $m$  columnas  $[g_1(x), \dots, g_m(x)]$  las cuales generan localmente una distribución de dimensión  $m$  dentro de  $\mathcal{X}$ . También suponemos que está dada una función positiva definida  $V : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^+$ , de clase  $C^1$ , tal que  $V(0) = 0$ .

Para compactar expresiones de las derivadas se intriduce el simbolismo  $L_G V$  como un vector fila dado por

$$L_G V = \frac{\partial V}{\partial x} G = \left[ \frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right] G$$

y la notación  $L_G^T V$  la utilizaremos para denotar el vector columna  $\left( \frac{\partial V}{\partial x} G \right)^T = G^T \frac{\partial V}{\partial x}$ .

Para enfrentar el problema de la incertidumbre en algún sistema, es mas natural conocer una parte nominal del modelo y asumir otra parte incierta, que considerar un modelo con completa incertidumbre. Partiendo de este motivo consideramos al campo vectorial  $f(x)$  con incertidumbre, o bien, parcialmente conocido; de tal forma que puede ser expresada como

$$f(x) = f_{nom}(x) + \Delta_f(x)$$

donde  $f_{nom}(x)$  es la parte conocida o nominal del modelo de  $f(x)$ , y  $\Delta_f(x)$  es la parte desconocida que representa la incertidumbre estructural o paramétrica del sistema, también puede ser entendida como la fluctuación que tiene  $f(x)$  con respecto a su valor nominal

$f_{nom}(x)$ .

Por lo tanto podemos expresar al sistema (6.1) de la manera siguiente

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f_{nom}(x) + \Delta_f(x) + G(x)u \\ y &= h(x).\end{aligned}$$

Las siguientes hipótesis muestran las características que tienen los sistemas no lineales MIMO con incertidumbre que son considerados en este capítulo.

**H1:** Los campos vectoriales  $g_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, m$  no son todos tangentes a la función  $V$ , en el espacio de estado del sistema que pertenece a la región de operación  $\{x \in \mathcal{X} : V(x) = constant\}$  i.e.

$$\|L_G V\| \neq 0. \quad (6.2)$$

**H2:** La incertidumbre del sistema  $\Delta_f(x)$  puede ser caracterizada por

$$\Delta_f(x) = F(x)\delta(x), \quad \forall x \in \mathcal{X}$$

donde  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función suave y conocida y  $\delta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es una función desconocida, la cual pertenece al siguiente conjunto compacto

$$\Omega = \{\delta(x) : \|\delta(x)\| \leq \|\rho(x)\|, \forall x \in \mathcal{X}\}.$$

El mapeo suave  $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  está dado por el diseñador, tomando en cuenta que  $\rho(0) = 0$ . El término  $\Delta_f(x)$  o  $\delta(x)$  se dice que es admisible si  $\delta \in \Omega$ .

**H3:** El vector fila  $L_G V(x)$  puede ser expresado como

$$L_G V(x)P^{-1}(x) = h^T \quad \forall x \in \mathcal{X} \quad (6.3)$$

donde  $P(x)$  es una matriz  $m \times m$  la cual es invertible en la región de operación  $\mathcal{X}$ .

### 6.1.2 Pasividad en Sistemas No Lineales MIMO

Tocante a la pasividad de sistemas MIMO, damos las siguientes definiciones y resultados.

**Definición 6.1** *El sistema (6.1) se dice que es pasivo si existe una función no negativa  $V_A : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^+$ , de clase  $C^0$ , con  $V_A(0) = 0$ , llamada función de almacenamiento, tal que para toda  $u \in \mathfrak{R}^m$  y toda condición inicial  $x_0 \in \mathfrak{R}^n$*

$$V_A(x) - V_A(x_0) \leq \int_0^t y^T(\tau)u(\tau)d\tau \quad (6.4)$$

donde  $x(t)$  denota la solución de (6.1) iniciando en  $x(0) = x_0$ .

Una propiedad fundamental de los sistemas pasivos está caracterizada por la versión no lineal del lema de Kalman-Yacubovitch-Popov (abreviado KYP) el cual fue introducido en el segundo capítulo de esta tesis como el Lema 2.1.

Los resultados teóricos de pasividad robusta encontrada en [24], que se encuentra estructurado en el lema 2.2 de esta tesis

### 6.1.3 Descomposición del Sistema No Lineal utilizando un Operador de Proyección

En esta subsección mostraremos como a partir de un operador de proyección podemos descomponer la parte conocida del sistema no lineal  $f_{nom}(x)$  en tres partes [47], una parte desestabilizante, otra estabilizante o disipativa y una última parte que en nada contribuye dentro del sistema.

Iniciemos pues, aprovechando la condición de transversalidad (6.2) para definir un operador de proyección para cada  $x$  que esté en la región de operación, es decir  $x \in \mathcal{X}$  y a lo largo del "span" de la matriz de entrada  $G$  hacia el espacio tangente de los conjuntos de nivel constante de la función  $V(x)$ , este operador es la matriz  $M(x)$  dada por

$$M(x) = \left[ I - \frac{1}{\|L_G V\|^2} G \cdot L_G^T V \cdot \frac{\partial V}{\partial x} \right]$$

Ahora mostraremos algunas propiedades de la matriz  $M(x)$  en las siguientes proposiciones [47].

**Proposición 6.1** *La matriz  $M(x)$  tiene las siguientes propiedades:*

$$\frac{\partial V^T}{\partial x} \in \text{Ker } M^T(x), \quad M(x)(I - M(x)) = 0, \quad G \cdot L_G^T V \in \text{Ker } M(x) \quad (6.5)$$

**Proposición 6.2** *Sea  $f_{nom}(x)$  un campo vectorial suave, entonces el vector  $M(x)f_{nom}(x)$  puede ser escrito como*

$$M(x)f_{nom}(x) = \tilde{J}(x) \frac{\partial V^T}{\partial x} \quad (6.6)$$

donde  $\tilde{J}(x)$  es una matriz antisimétrica i.e.  $\tilde{J}^T(x) = -\tilde{J}(x)$ . Por otra parte el campo vectorial  $[I - M(x)]f_{nom}(x)$  puede ser escrito como

$$[I - M(x)]f_{nom}(x) = N(x) \frac{\partial V^T}{\partial x} = \frac{1}{2} [N(x) - N^T(x)] + \frac{1}{2} [N(x) + N^T(x)] \quad (6.7)$$

$$= -\frac{1}{2} \tilde{J}(x) + S(x) \quad (6.8)$$

$$N(x) = \frac{1}{\|L_G V\|^2} G \cdot L_G^T V \cdot f_{nom}^T \in R^{n \times n} \quad (6.9)$$

donde  $S(x)$  es una matriz simétrica.

En el siguiente lema se muestra como a partir de la hipótesis H1 y las propiedades de  $M(x)$  se puede descomponer un campo vectorial  $f_{nom}(x)$  en una matriz antisimétrica lineal con  $\frac{\partial V^T}{\partial x}$ , mas una matriz simétrica lineal con  $\frac{\partial V^T}{\partial x}$ .

**Lema 6.1** *Un campo vectorial de dimensión  $n$ , puede ser descompuesto en la siguiente suma*

$$f_{nom}(x) = M(x)f_{nom}(x) + [I - M(x)]f_{nom}(x) = \frac{1}{2} \tilde{J}(x) \frac{\partial V^T}{\partial x} + S(x) \frac{\partial V^T}{\partial x}$$

**Prueba.**

$$f_{nom}(x) = M(x)f_{nom}(x) + [I - M(x)]f_{nom}(x)$$

de (??) y (6.7) obtenemos

$$\begin{aligned} f_{nom}(x) &= \tilde{J}(x) \frac{\partial V^T}{\partial x} + \left( -\frac{1}{2} \tilde{J}(x) \frac{\partial V^T}{\partial x} + S(x) \frac{\partial V^T}{\partial x} \right) \\ &= \frac{1}{2} \tilde{J}(x) \frac{\partial V^T}{\partial x} + S(x) \frac{\partial V^T}{\partial x} \end{aligned}$$

■

**Proposición 6.3** *Sea  $S(x)$  una matriz simétrica, entonces :*

- *Puede ser descompuesta como la suma de una matriz positiva definida  $S_p(x)$ , mas una semidefinida negativa  $S_n(x)$*
- *Puede ser descompuesta como la suma de una matriz positiva semidefinida  $S_p(x)$ , mas una negativa definida  $S_n(x)$ .*

Las proposiciones y definiciones de la sección anterior dan lugar a la siguiente proposición.

**Corolario 6.1** *Un sistema no lineal de la forma (6.1), con una función positiva definida que satisface la condición  $\|L_G V\| \neq 0$ , siempre puede ser escrito como*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{1}{2} \tilde{J}(x) \frac{\partial V^T}{\partial x} + S_n(x) \frac{\partial V^T}{\partial x} + S_p(x) \frac{\partial V^T}{\partial x} + \Delta_f(x) + G(x)u \\ y &= h(x) \end{aligned} \tag{6.10}$$

donde  $\tilde{J}(x)$  es una matriz antisimétrica, la matriz  $S_n(x)$  es negativa semidefinida y  $S_p(x)$  es positiva semidefinida.

### 6.1.4 Cancelación de la Parte Desestabilizante del Sistema

Observemos como en el sistema (6.10) el campo vectorial  $f_{nom}(x)$  que corresponde a la parte conocida de  $f(x)$ , ha sido descompuesto en tres partes, de las cuales sólo  $S_p(x) \frac{\partial V^T}{\partial x}$  es la que desestabiliza al sistema. En esta subsección mostraremos cómo cancelar esta parte desestabilizadora, a partir de una ley de control.

**Lema 6.2** Considere el sistema MIMO (6.1) con una función  $V$  tal que la hipótesis **H1** es satisfecha, si se aplica la ley de control

$$u = v - \frac{L_G^T V}{\|L_G V\|^2} \left[ \frac{\partial V}{\partial x} S_p(x) \frac{\partial V^T}{\partial x} \right] \quad (6.11)$$

entonces el sistema se transforma a

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mathcal{I}(x) \frac{\partial V^T}{\partial x} + S_n(x) \frac{\partial V^T}{\partial x} + \Delta_f(x) + G(x)v \\ y &= h(x) \end{aligned}$$

donde  $v$  es la nueva entrada del sistema,

$$\mathcal{I}(x) \frac{\partial V^T}{\partial x} = \frac{1}{2} \tilde{J}(x) + \frac{1}{\|L_G V\|^2} \left[ S_p(x) \frac{\partial V^T}{\partial x} L_G V G^T(x) - G(x) L_G^T V \frac{\partial V}{\partial x} S_p(x) \right]$$

es una matriz antisimétrica y  $S_n(x)$  es una matrix simétrica negativa semidefinida.

**Prueba.** Partamos del sistema no lineal transformado por la matriz  $M(x)$  mostrado en el corolario anterior

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{1}{2} \tilde{J}(x) \frac{\partial V^T}{\partial x} + S_n(x) \frac{\partial V^T}{\partial x} + S_p(x) \frac{\partial V^T}{\partial x} + \Delta_f(x) + G(x)u \\ y &= h(x) \end{aligned}$$

ahora apliquemos la ley de control

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{1}{2} \tilde{J}(x) \frac{\partial V^T}{\partial x} + S_n(x) \frac{\partial V^T}{\partial x} + S_p(x) \frac{\partial V^T}{\partial x} + \Delta_f(x) + G(x) \left[ v - \frac{L_G^T V}{\|L_G V\|^2} \left[ \frac{\partial V}{\partial x} S_p(x) \frac{\partial V^T}{\partial x} \right] \right] \\ &= \frac{1}{2} \tilde{J}(x) \frac{\partial V^T}{\partial x} + S_n(x) \frac{\partial V^T}{\partial x} + \left( I - G(x) \frac{L_G^T V}{\|L_G V\|^2} \frac{\partial V}{\partial x} \right) S_p(x) \frac{\partial V^T}{\partial x} + \Delta_f(x) + G(x)v \end{aligned}$$

Note que el campo vectorial

$$\left( I - G(x) \frac{L_G^T V}{\|L_G V\|^2} \frac{\partial V}{\partial x} \right) S_p(x) \frac{\partial V^T}{\partial x}$$

puede ser escrito como

$$\frac{1}{\|L_G V\|^2} \left[ S_p(x) \frac{\partial V^T}{\partial x} L_G V G^T(x) - G(x) L_G^T V \frac{\partial V}{\partial x} S_p(x) \right] \frac{\partial V^T}{\partial x} = \mathcal{K}(x) \frac{\partial V^T}{\partial x}$$

donde  $\mathcal{K}(x)$  es una matriz anti simétrica, si definimos a la nueva matriz  $\mathcal{I}(x)$  como la suma  $\mathcal{I}(x) = J(x) + \mathcal{K}(x)$ , entonces el sistema transformado (6.10) con la ley de control (6.11) se transforma en este

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mathcal{I}(x) \frac{\partial V^T}{\partial x} + S_n(x) \frac{\partial V^T}{\partial x} + \Delta_f(x) + G(x)v \\ y &= h(x) \end{aligned} \quad (6.12)$$

Por lo que el lema queda demostrado ■

### 6.1.5 Red Neuronal Dinámica Propuesta para el Sistema No Lineal MIMO

La red neuronal propuesta para identificar el sistema MIMO no lineal con incertidumbre es la siguiente

$$\dot{\hat{x}} = f_{nom}(x) + W\varphi(\hat{x}) + \psi + G(x)v,$$

puede observarse que la parte conocida del modelo del sistema  $f_{nom}(x)$  y  $G(x)$ , es utilizada en la estructura de la RND, la parte incierta del sistema  $\Delta_f(x)$ , es identificada con la neurona  $W\varphi(\hat{x}) + \psi$ . La estructura de dicha neurona esta construida por  $W \in R^{n \times n}$  que es una matriz de peso sináptico,  $\varphi : R^n \rightarrow R^n$  es un vector cuyas entradas son funciones escalares sigmoidales;  $\psi$  es el vector de umbral de salida de la neurona.

$$W\varphi(\hat{x}) + \psi = \begin{bmatrix} w_{11} & \cdots & w_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{n1} & \cdots & w_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1(x_1) \\ \vdots \\ \varphi_n(x_n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{bmatrix}$$

Nótese la arquitectura de la RND además de aprovechar la estructura conocida del modelo del sistema, utiliza el estado del sistema incierto lo cual corresponde a las funciones  $f_{nom}(x)$

y  $G(x)$ .

## 6.2 Pasividad Robusta de Sistemas No Lineales Utilizando RND

A continuación utilizamos los resultados preliminares y la metodología propuesta en el problema SISO del capítulo anterior ([36], [37]) para llevar a cabo la pasivación de sistemas no lineales MIMO a través de redes neuronales dinámicas.

**Teorema 6.1** *Considere el sistema no lineal MIMO (6.1) donde las hipótesis H1, H2 y H3 se satisfacen, el sistema es identificado por la RND*

$$\dot{\hat{x}} = f_{nom}(x) + W\varphi(\hat{x}) + \psi + G(x)v \quad (6.13)$$

con la ley de aprendizaje

$$\dot{W} = \eta \left[ \varphi \frac{\partial V}{\partial x} - \varphi e^T \right]^T, \quad W(0) =: W^* \quad (6.14)$$

el error  $e(t)$  está expresado por la diferencia  $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$  y el umbral de salida como

$$\psi = -W\tilde{\varphi} - \text{sign}_o(e) (\|W^*\varphi\| + \|F\| \|\rho\|). \quad (6.15)$$

$$\text{sign}_o(e) = \begin{bmatrix} \kappa_1 \\ \vdots \\ \kappa_n \end{bmatrix}, \quad \kappa_i = \begin{cases} 1, & e_i > 0 \\ 0, & e_i = 0 \\ -1, & e_i < 0 \end{cases}, \quad i = 1, \dots, n$$

Si se aplica la ley de control

$$u = P^{-1}(x)w - \frac{L_G^T V}{\|L_G V\|^2} \left[ \left\| \frac{\partial V}{\partial x} F(x) \right\| \cdot \|n(x)\| + \left\| \frac{\partial V}{\partial x} W^* \varphi \right\| + \frac{\partial V}{\partial x} W \varphi + \frac{\partial V}{\partial x} S_p(x) \frac{\partial V}{\partial x}^T \right] \quad (6.16)$$

entonces el sistema resultante es pasivo de la entrada  $w$  a la salida  $y$ , con respecto a la función de almacenamiento

$$\begin{aligned} V_{ST} &= V(x) + V_{err}(e) + V_{learn}(\tilde{W}) \\ V_{err} &= \frac{1}{2}e^T e \\ V_{learn} &= \frac{1}{2}tr \left\{ \tilde{W}\eta^{-1}\tilde{W}^T \right\} \end{aligned} \tag{6.17}$$

donde  $V(x)$  satisface la hipótesis H1, y finalmente  $\tilde{W}(t)$  está definido como  $\tilde{W}(t) = W(t) - W(0) = W - W^*$ .

**Prueba.** Tomando en cuenta el corolario 6.1 iniciaremos descomponiendo a  $f_{nom}(x)$  con el propósito de mostrar al sistema (6.1)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_{nom}(x) + \Delta_f(x) + G(x)u \\ y &= h(x) \end{aligned}$$

representado en la forma siguiente

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{1}{2}\tilde{J}(x)\frac{\partial V^T}{\partial x} + S_n(x)\frac{\partial V^T}{\partial x} + S_p(x)\frac{\partial V^T}{\partial x} + \Delta_f(x) + G(x)u \\ y &= h(x) \end{aligned}$$

si aplicamos la ley de control (6.16)

$$\begin{aligned} u &= P^{-1}(x)w - \frac{L_G^T V}{\|L_G V\|^2} \left[ \left\| \frac{\partial V}{\partial x} F(x) \right\| \cdot \|\rho(x)\| + \left\| \frac{\partial V}{\partial x} W^* \varphi \right\| + \frac{\partial V}{\partial x} W \varphi \right] \\ &\quad - \frac{L_G^T V}{\|L_G V\|^2} \left[ \frac{\partial V}{\partial x} S_p(x) \frac{\partial V^T}{\partial x} \right] \end{aligned}$$

y por el resultado del lema 4 se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mathcal{I}(x)\frac{\partial V^T}{\partial x} + S_n(x)\frac{\partial V^T}{\partial x} + \Delta_f(x) + G(x)v \\ y &= h(x) \end{aligned}$$

donde

$$v = P^{-1}(x)w - \frac{L_G^T V}{\|L_G V\|^2} \left[ \left\| \frac{\partial V}{\partial x} F(x) \right\| \cdot \|n(x)\| + \left\| \frac{\partial V}{\partial x} W^* \varphi \right\| + \frac{\partial V}{\partial x} W \varphi \right]$$

El sistema descrito en puede ser expresado como:

$$\dot{x} = I(x) \frac{\partial V^T}{\partial x} + S_n(x) \frac{\partial V^T}{\partial x} + W^* \varphi(x) + \psi + G(x)v + \nu_d \quad (6.18)$$

donde  $W^*$  son los pesos iniciales de la red y  $\nu_d$  es el error que tiene la red neuronal para identificar la incertidumbre  $\nu_d = \Delta_f - W^* \varphi(x) - \psi$ . Hasta este momento tenemos lo necesario para demostrar la pasividad del sistema (6.1) con respecto a la función de almacenamiento (6.17); de manera que vamos a proceder calculando la derivada de  $V$ ,  $V_{err}$  y posteriormente de  $V_{learn}$ .

$$\dot{V}_{ST} = \dot{V} + \dot{V}_{err} + \dot{V}_{learn}$$

La derivada de  $V(x)$  a lo largo de la trayectoria del sistema (6.18)

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial V}{\partial x} \mathcal{I}(x) \frac{\partial V^T}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x} S_n(x) \frac{\partial V^T}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x} [W^* \varphi + \psi + \nu_d] + L_G V v$$

para abreviar omitimos los argumentos y definimos a  $\hat{\varphi} := \varphi(\hat{x})$ ,  $\varphi := \varphi(x)$ ; dadas las características de  $\mathcal{I}(x)$  y de  $S_n(x)$ , entonces los primeros dos términos del lado derecho de la desigualdad son menores o iguales a cero, es decir

$$\frac{\partial V}{\partial x} \mathcal{I}(x) \frac{\partial V^T}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x} S_n(x) \frac{\partial V^T}{\partial x} \leq 0$$

por otra parte se procede a acotar por arriba el resto de los términos de  $\dot{V}$

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{\partial V}{\partial x} [W^* \varphi + \psi + \nu_d] + L_G V v = \\ &= \frac{\partial V}{\partial x} [W \varphi - \tilde{W} \varphi + \psi + \nu_d] + L_G V v = \\ &= \text{tr} \left\{ \tilde{W} \left[ -\varphi \frac{\partial V}{\partial x} \right] \right\} + \frac{\partial V}{\partial x} [W \varphi + \Delta_f - W^* \varphi] + L_G V v. \end{aligned}$$

para finalmente obtener

$$\dot{V} \leq tr \left\{ \tilde{W} \left[ -\varphi \frac{\partial V}{\partial x} \right] \right\} + \frac{\partial V}{\partial x} W \varphi + \left\| \frac{\partial V}{\partial x} F \right\| \|\rho\| + \left\| \frac{\partial V}{\partial x} W^* \varphi \right\| + L_G V v.$$

La derivada de  $V_{err}$  es

$$\begin{aligned} \dot{V}_{err} &= e^T \dot{e} = e^T \left( \dot{\hat{x}} - \dot{x} \right) = e^T (W \varphi(\hat{x}) + \psi - [W^* \varphi(x) + \psi + \nu_d]) = \\ &= e^T [W \hat{\varphi} - W^* \varphi - \nu_d] = e^T \left( W \hat{\varphi} - [W - \tilde{W}] \varphi - \nu_d \right) \end{aligned}$$

si definimos a  $\tilde{\varphi} := \hat{\varphi} - \varphi$

$$\begin{aligned} \dot{V}_{err} &= e^T \left( W \tilde{\varphi} + \tilde{W} \varphi - \nu_d \right) \\ &= tr \left\{ \tilde{W} [\varphi e^T] \right\} + e^T (W \tilde{\varphi} - [\Delta_f - W^* \varphi - \psi]) \\ &= tr \left\{ \tilde{W} [\varphi e^T] \right\} + e^T (W \tilde{\varphi} - \Delta_f + W^* \varphi) + \psi \end{aligned}$$

es en este momento cuando procederemos a calcular la cota superior de  $\dot{V}_{err}$ , haciendo uso de la hipótesis **H2** que concierne a la incertidumbre

$$\begin{aligned} \dot{V}_{err} &\leq tr \left\{ \tilde{W} [\varphi e^T] \right\} + e^T \{ sign_o(e) [\|W^* \varphi\| + \|\Delta_f\|] + W \tilde{\varphi} + \psi \} \leq \\ &tr \left\{ \tilde{W} [\varphi e^T] \right\} + e^T \{ sign_o(e) (\|W^* \varphi\| + \|F\| \|\rho\|) + W \tilde{\varphi} + \psi \}. \end{aligned}$$

con esto se finaliza el cálculo de la cota superior de  $\dot{V}_{err}$ , ya que la cota obtenida esta en función de términos conocidos y además tenemos un término que podemos introducir dentro de la ley de aprendizaje. La derivada de  $V_{learn}$  sencillamente es

$$\dot{V}_{learn} = tr \left\{ \tilde{W} \eta^{-1} \dot{\tilde{W}}^T \right\}$$

Uniendo las tres cotas se obtiene la cota superior de la función de almacenamiento

$$\begin{aligned} \dot{V}_{ST} &= \dot{V} + \dot{V}_{err} + \dot{V}_{learn} \leq \\ &+ \frac{\partial V}{\partial x} W \varphi + \left\| \frac{\partial V}{\partial x} F \right\| \cdot \|\rho\| + \left\| \frac{\partial V}{\partial x} W^* \varphi \right\| + L_G V v + \\ &+ e^T \{ \Theta(e) (\|W^* \varphi\| + \|F\| \|\rho\|) + W \tilde{\varphi} + \psi \} + \\ &tr \left\{ \tilde{W} \begin{bmatrix} \eta^{-1} \dot{\tilde{W}}^T & -\varphi \frac{\partial V}{\partial x} + \varphi e^T \end{bmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

imponiendo la ley de aprendizaje

$$\dot{\tilde{W}} = \eta \left[ \varphi \frac{\partial V}{\partial x} - \varphi e^T \right]^T$$

y escogiendo el vector de umbral de salida como

$$\psi = -W \tilde{\varphi} - \text{sign}_o(e) (\|W^* \varphi\| + \|F\| \|n\|)$$

obtenemos

$$\dot{V}_{ST} \leq \frac{\partial V}{\partial x} W \varphi + \left\| \frac{\partial V}{\partial x} F \right\| \cdot \|\rho\| + \left\| \frac{\partial V}{\partial x} W^* \varphi \right\| + L_G V v.$$

ahora sustituyendo a  $v$  de lo que obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{V}_{ST} &\leq \frac{\partial V}{\partial x} W \varphi + \left\| \frac{\partial V}{\partial x} F \right\| \cdot \|\rho\| + \left\| \frac{\partial V}{\partial x} W^* \varphi \right\| \\ &+ L_G V \left( P^{-1}(x) w - \frac{L_G^T V}{\|L_G V\|^2} \left[ \left\| \frac{\partial V}{\partial x} F(x) \right\| \cdot \|n(x)\| + \left\| \frac{\partial V}{\partial x} W^* \varphi \right\| + \frac{\partial V}{\partial x} W \varphi \right] \right). \end{aligned}$$

$$\dot{V}_{ST} \leq L_G V P^{-1}(x) w$$

y por la hipótesis 3

$$\dot{V}_{ST} \leq h^T w = y^T w$$

entonces el sistema identificado con la RND (6.13), aplicando la ley de control (6.16) y tomando en cuenta la propiedad 2.1, es pasivo de la entrada  $w$  a la salida  $y$  con respecto a la función de almacenamiento (6.17). El teorema ha sido demostrado ■

**Observación 6.1** • *La función de almacenamiento está construida de tres partes, cada una con un propósito diferentes*

$$V_{ST} = V + V_{err} + V_{learn}$$

- *La función  $V$  esta relacionada con la manipulación de los términos que no tienen incertidumbre y es crucial para satisfacer la condición de transversalidad (6.2).*
- *$V_{err}$  es usada para hacer pequeño el error de identificación de la RND a su vez contribuye en la construcción del umbral  $\psi$  (6.15) y parcialmente en la construcción de la parte derecha del algoritmo de aprendizaje (6.14).*
- *Finalmente la función  $V_{learn}$  es para construir la ley de aprendizaje dinámica (6.14).*

### 6.3 Simulaciones

Para realizar las simulaciones consideremos el siguiente sistema hidráulico no lineal de dos tanques

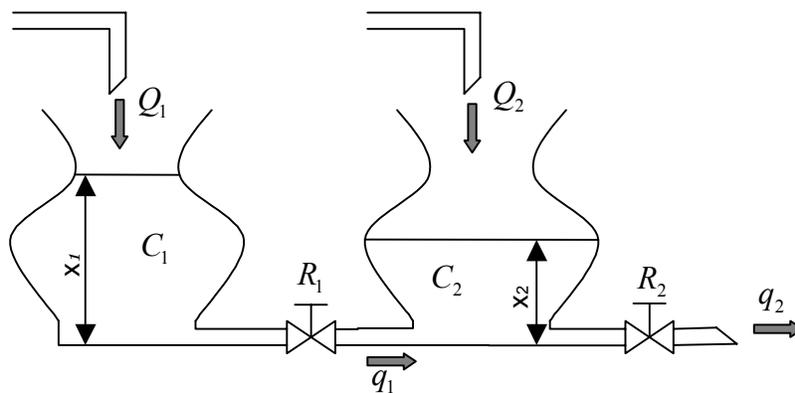


Figura 6-1: *Sistema hidráulico de dos tanques*

donde  $x_1$  y  $x_2$  son la altura del nivel de líquido del primer depósito y del segundo depósito respectivamente, como ambos tanques se consideran iguales,  $C(x_1)$  es el área transversal del primer tanque y  $C(x_2)$  la del segundo, con lo cual se puede notar que cada uno tiene área transversal que cambia de acuerdo a la altura considerada,  $R_1$  es la resistencia que ofrece el tubo que comunica al primer recipiente con el segundo,  $R_2$  es la resistencia al flujo de líquido  $q_2$ , y finalmente  $u = [u_1, u_2]^T$  es un vector de entrada donde  $u_1$  es la razón de flujo de entrada al primer recipiente y  $u_2$  para el segundo recipiente.

Estos parámetros y variables antes descritos están expresados en las siguientes ecuaciones

$$C(x_i) = 0.3 + 0.1\text{sen}(x_i) \quad i = 1, 2. \quad (6.19)$$

$$R_1 = 100 \quad (6.20)$$

$$R_2 = R_2(x_2) = 100 - 90\text{sech}(x_2)$$

$$u = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix}^T.$$

El modelo correspondiente al sistema hidráulico de la figura 6-1, corresponde a el siguiente

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{x_1-x_2}{C(x_1)R_1} \\ \frac{x_1-x_2}{C(x_2)R_1} - \frac{x_2}{C(x_2)R_2(x_2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C(x_1)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C(x_2)} \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (6.21)$$

En la siguiente subsección se mostrará la implementación del resultado principal de esta tesis en el sistema hidráulico antes descrito.

### 6.3.1 Implementación

Primeramente veamos si se satisface la hipótesis 1, sea  $V(x) = \frac{1}{2}x^T x$ , entonces

$$L_G V(x) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{C(x_1)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C(x_2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x_1}{C(x_1)} & \frac{x_2}{C(x_2)} \end{bmatrix}$$

$$\|L_G V(x)\| = \sqrt{\left(\frac{x_1}{C(x_1)}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{C(x_2)}\right)^2}$$

nótese que en (6.19),  $C(x_1)$  y  $C(x_2)$  son diferentes de cero para todo  $x$ ; por lo que se puede concluir que

$$\|L_G V(x)\| \neq 0, \quad \forall x \in \mathcal{X}$$

donde

$$\mathcal{X} = \left\{ x = [x_1, x_2]^T : x_1 > 0, x_2 > 0 \right\}$$

Como puede observarse en la región de operación  $\mathcal{X}$  se considera que la altura del líquido en cada tanque es siempre positiva, por lo que nos interesa la región de operación en la que ambos tanques tengan un nivel de líquido diferente de cero y no negativo. Y por consiguiente la primera hipótesis H1 se satisface.

Por otra parte, se considera que  $R_2(x_2)$  es una función no lineal que constituye la incertidumbre del sistema, por lo tanto la función  $f(x)$  se puede descomponer en la siguiente suma de un término conocido mas otro incierto

$$f(x) = f_{nom}(x) + \Delta_f(x)$$

donde

$$f_{nom}(x) = \begin{bmatrix} -\frac{x_1 - x_2}{C(x_1)R_1} \\ \frac{x_1 - x_2}{C(x_2)R_1} \end{bmatrix}; \quad \Delta_f(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{x_2}{C(x_2)R_2(x_2)} \end{bmatrix}$$

el término incierto  $\Delta_f(x)$ , puede ser expresado como

$$\Delta_f(x) = F(x)\delta_f(x)$$

donde

$$F(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{x_2}{C(x_2)} \end{bmatrix}; \quad \delta_f(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{R_2(x_2)} \end{bmatrix}$$

De manera que podemos construir el siguiente conjunto compacto que a su vez caracteriza la incertidumbre, sea pues

$$\Omega = \{\delta_f(x) : \|\delta_f(x)\| \leq \|\rho(x)\|, \forall x \in \mathcal{X}\}$$

donde se escoge

$$\rho(x) = \frac{1}{100 - 95\text{sech}(x_2)},$$

con esta parte del diseño satisfacemos la segunda hipótesis H2.

Ahora es necesario satisfacer la tercera, la cual expresa que existe una matriz  $P(x)$  invertible, tal que

$$L_G V(x) P^{-1}(x) = h^T(x), \forall x \in \mathcal{X}$$

fácilmente puede calcularse de

$$\begin{bmatrix} \frac{x_1}{C(x_1)} & \frac{x_2}{C(x_2)} \end{bmatrix} P^{-1}(x) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}$$

entonces

$$P^{-1}(x) = \begin{bmatrix} C(x_1) & 0 \\ 0 & C(x_2) \end{bmatrix}$$

y por las características de  $C(x_1)$  y  $C(x_2)$  expresadas en (6.19), es evidente que es invertible no solo dentro de la región de operación  $\mathcal{X}$  sino también en el plano de números reales  $\mathfrak{R}^2$ .

Una vez satisfechas las tres hipótesis podemos aplicar el resultado principal de esta tesis,

donde utilizando la red neuronal dinámica

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} -\frac{x_1-x_2}{C(x_1)R_1} \\ \frac{x_1-x_2}{C(x_2)R_1} \end{bmatrix} + W\varphi(\hat{x}) + \psi + \begin{bmatrix} \frac{1}{C(x_1)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C(x_2)} \end{bmatrix} u$$

con su ley de aprendizaje

$$\dot{W} = \eta \left[ \varphi \frac{\partial V}{\partial x} - \varphi e^T \right]^T, \quad (6.22)$$

el umbral de salida

$$\psi = -W\tilde{\varphi} - \text{sign}_o(e) (\|W^*\varphi\| + \|F(x)\| \|\rho(x)\|)$$

y aplicando la ley de control

$$u = P^{-1}(x) w - \frac{L_G^T V}{\|L_G V\|^2} \left[ \left\| \frac{\partial V}{\partial x} F(x) \right\| \cdot \|\rho(x)\| + \left\| \frac{\partial V}{\partial x} W^* \varphi \right\| + \frac{\partial V}{\partial x} W \varphi + \frac{\partial V}{\partial x} S_p(x) \frac{\partial V^T}{\partial x} \right] \quad (6.23)$$

obtenemos un sistema pasivo de la entrada  $w$  a la salida  $y$ .

La matriz  $S_p(x)$  proviene de las siguientes manipulaciones algebraicas:

- Iniciemos construyendo a la matriz cuadrada  $N(x)$

$$\begin{aligned} N(x) &= \frac{1}{\|L_G V\|^2} G (L_G V)^T f_{nom}^T \\ &= \frac{1}{\left\| \begin{bmatrix} \frac{x_1}{C_1} & \frac{x_2}{C_2} \end{bmatrix} \right\|^2} \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{x_1}{C_1} \\ \frac{x_2}{C_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{x_1-x_2}{C_1 R_1} & \frac{x_1-x_2}{C_2 R_1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- A partir de la matriz  $N(x)$  construimos la matriz simétrica  $S(x)$  de la manera siguiente

$$S(x) = S^T(x) = \frac{1}{2} [N(x) + N(x)^T]$$

$$S(x) = \frac{0.5}{\left|\frac{x_1}{C_1}\right|^2 + \left|\frac{x_2}{C_2}\right|^2} \left( \begin{bmatrix} -\frac{x_1}{C_1^3} \frac{x_1-x_2}{R_1} & \frac{x_1}{C_1^2} \frac{x_1-x_2}{C_2 R_1} \\ -\frac{x_2}{C_2^2} \frac{x_1-x_2}{C_1 R_1} & \frac{x_2}{C_2^3} \frac{x_1-x_2}{R_1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{x_1}{C_1^3} \frac{x_1-x_2}{R_1} & \frac{x_1}{C_1^2} \frac{x_1-x_2}{C_2 R_1} \\ -\frac{x_2}{C_2^2} \frac{x_1-x_2}{C_1 R_1} & \frac{x_2}{C_2^3} \frac{x_1-x_2}{R_1} \end{bmatrix}^T \right)$$

$$S(x) = \frac{0.5}{\left|\frac{x_1}{C_1}\right|^2 + \left|\frac{x_2}{C_2}\right|^2} \begin{bmatrix} -\frac{2}{C_1^3} x_1 \frac{x_1-x_2}{R_1} & \frac{1}{C_1^2} x_1 \frac{x_1-x_2}{C_2 R_1} - \frac{1}{C_2^2} x_2 \frac{x_1-x_2}{C_1 R_1} \\ \frac{1}{C_1^2} x_1 \frac{x_1-x_2}{C_2 R_1} - \frac{1}{C_2^2} x_2 \frac{x_1-x_2}{C_1 R_1} & \frac{2}{C_2^3} x_2 \frac{x_1-x_2}{R_1} \end{bmatrix}$$

- Finalmente descomponemos a la matriz simétrica en la suma de  $S_n(x)$  mas  $S_p(x)$

$$S(x) = S_n(x) + S_p(x)$$

$$S_n(x) = \frac{0.5}{\left|\frac{x_1}{C_1}\right|^2 + \left|\frac{x_2}{C_2}\right|^2} \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1^3 R_1} x_1^2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{C_2^3 R_1} x_2^2 \end{bmatrix}$$

$$S_p(x) = \frac{0.5}{\left|\frac{x_1}{C_1}\right|^2 + \left|\frac{x_2}{C_2}\right|^2} \begin{bmatrix} \frac{2}{C_1^3 R_1} x_1 x_2 & \frac{1}{C_1^2} x_1 \frac{x_1-x_2}{C_2 R_1} - \frac{1}{C_2^2} x_2 \frac{x_1-x_2}{C_1 R_1} \\ \frac{1}{C_1^2} x_1 \frac{x_1-x_2}{C_2 R_1} - \frac{1}{C_2^2} x_2 \frac{x_1-x_2}{C_1 R_1} & \frac{2}{C_2^3 R_1} x_2 x_1 \end{bmatrix}$$

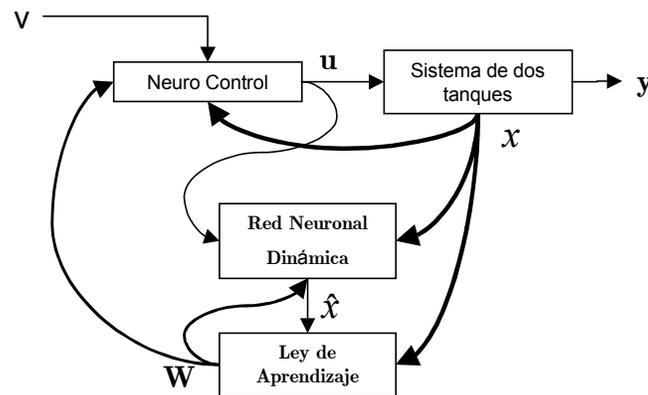


Figura 6-2: Diagrama a bloques de la simulación caso MIMO

En la figura (6-2) se muestra un diagrama a bloques de la implementación a nivel simu-

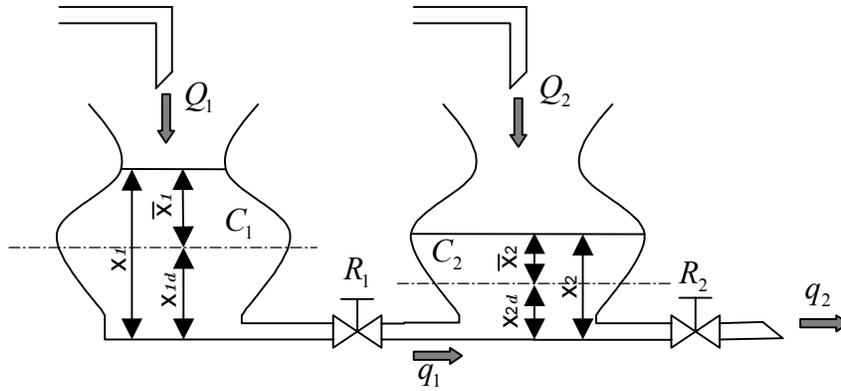


Figura 6-3: Esquema desde el punto de vista del cambio de variable

lación del sistema no lineal de dos tanques anteriormente descrito, con el resultado principal de la tesis.

Por otra parte, una de las manipulaciones interesantes que concierne al uso de la propiedad de pasividad, es la de utilizarla para realizar una regulación de la salida de la planta, esta sencilla manipulación se describe en la siguiente sección.

### 6.3.2 Regulación basada en pasividad

Cabe recordar que si escogemos a  $v = -Ky$ , donde la matriz  $K > 0$ , entonces nuestro sistema no lineal hidráulico con incertidumbre es estable; sin embargo, si hacemos esto en las actuales coordenadas del sistema, corremos el riesgo de que la salida  $y = [x_1, x_2]$  sea cero y por consiguiente el estado también lo sea, si esto sucede, estaríamos fuera de la región de operación  $\mathcal{X}$  en la que están definidas nuestras hipótesis.

Es por esto que podemos hacer un cambio de variable como

$$\bar{x}(t) = x(t) - x_d$$

donde  $x_d$  es un valor constante, de manera que si  $\bar{x}(t)$  tiene una trayectoria que tiende a cero, entonces  $x(t)$  tiende a  $x_d$ . Desde el punto de vista del modelo de la planta podemos hacer referencia a la figura 6-3, en la que se muestra físicamente en donde se encuentran nuevas coordenadas  $\bar{x} = [\bar{x}_1, \bar{x}_2]^T$  y el valor constante  $x_d = [x_{1d}, x_{2d}]^T$ . Como puede observarse, si

ahora  $\bar{x} \rightarrow 0$ , entonces  $x(t) \rightarrow x_d$ . Por lo tanto si escogemos a  $v = -Ky$  en el sistema con las nuevas coordenadas  $\bar{x}$ , puede implementarse una regulación de la planta donde el valor deseado de la salida de la planta es  $y_d = x_d$ .

### 6.3.3 Simulación comparativa

Una de los controles mas populares utilizado en la industria es el control PID, debido a que su implementación no requiere necesariamente del conocimiento del modelo de la planta que va a ser controlada. Por esta razón en esta sección se hacen simulaciones comparativas del control PID contra el control para sistemas no lineales con incertidumbre basado en pasividad con redes neuronales, propuesto en esta tesis.

En esta simulación se considera que el parámetro incierto es variante en el tiempo, y esta definido por

$$R_2(x_2, t) = 100 - \left[ 80 + 10 \sin \left( \frac{1}{4} \pi t \right) \right] \operatorname{sech}(x_2).$$

En las simulaciones consideramos como propósito dirigir el nivel de líquido de cada depósito a  $0.2m$ , donde el primer tanque posee una altura inicial del nivel del líquido en  $0.0m$ , y el segundo tanque en  $0.5m$ , es decir,  $y_d = [x_{d1}, x_{d2}] = [0.2, 0.2] m$ . con  $x(0) = [0, 0.5]^T$ . El coeficiente de aprendizaje se escogió como  $\eta = \operatorname{diag} \{1, 1, 1, 1\}$ , en la nueva entrada  $v$  se aplica un valor  $v = -Ky = [-0.1y_1, -y_2]^T$ . Una vez definido esto, podemos proceder a las simulaciones comparativas.

### Control de Nivel Basado en Pasividad Utilizando la RND

Las simulaciones muestran en la figura (6-4) la trayectoria de  $x_1(t)$ , que corresponde al nivel del líquido en el primer tanque y la evolución del nivel del líquido del segundo tanque es la que se muestra en la figura (6-5). La parte que corresponde a la neurona que identifica a la incertidumbre se muestra en la figura (6-6), y la razón de flujo que entra en cada tanque se muestra graficada en la figura (6-7) lo cual corresponde a la ley de control expresada en la ecuación (6.23). En lo que respecta a la dinámica de la red neuronal se encuentran graficados los pesos y el estado en las figuras (6-8) y (6-9) respectivamente. Finalmente la

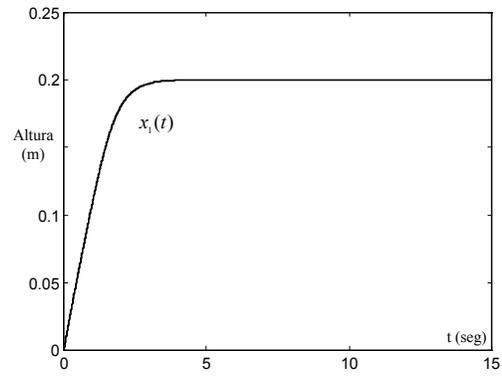


Figura 6-4: Nivel del primer recipiente usando RND

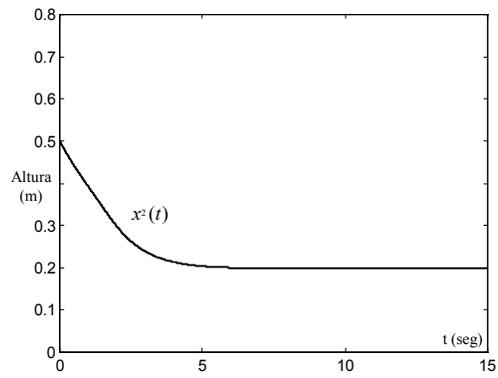


Figura 6-5: Nivel del segundo recipiente usando RND

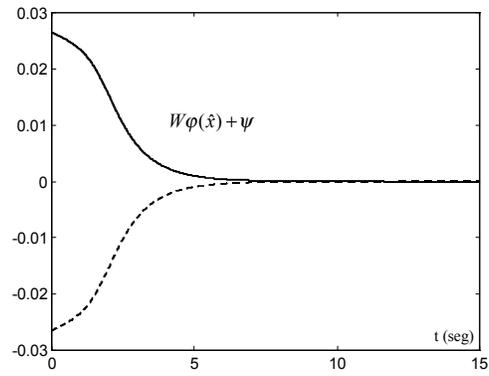


Figura 6-6: *Contribución de la Red Neuronal*

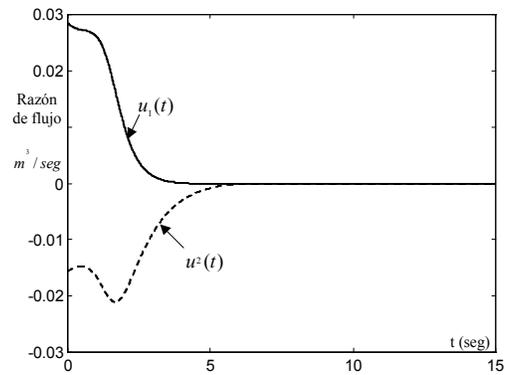


Figura 6-7: *Control utilizando la RND*

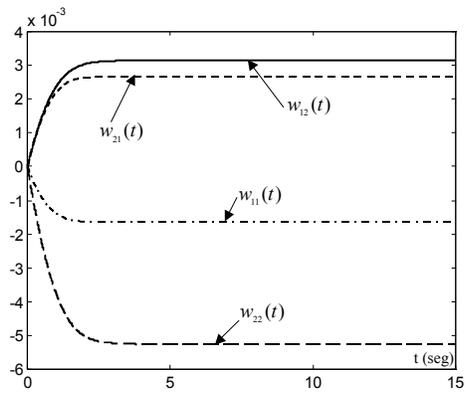


Figura 6-8: *Evolución de los pesos*

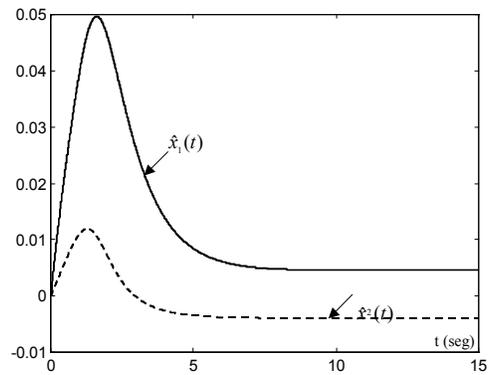


Figura 6-9: *Estado de la RND*

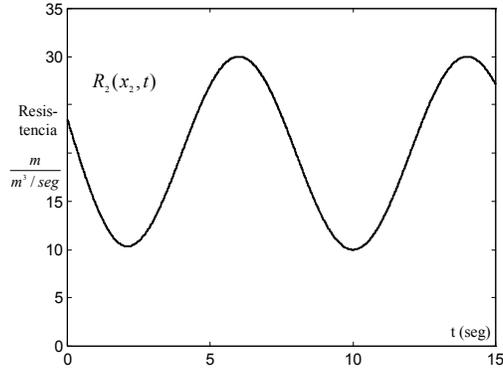


Figura 6-10: *Trayectoria de la incertidumbre*

trayectoria que tiene el término incierto en la simulación se muestra en la figura (6-10).

El primer tanque inicia con una altura cero (fig. 6-4) y el segundo con medio metro de altura (fig. 6-5), por lo que la ley de control inicia aplicando cerca de  $30 \text{ lt/seg}$  en el primer tanque y aproximadamente extrae  $10 \text{ lt/seg}$  del segundo tanque (fig. 6-7), esta razón de flujo es tal que poco antes de los 10 segundos el control es cero y puede observarse como ambos tanques adquieren una altura en el nivel de líquido de  $0.2 \text{ m}$ .

La ley de control junto con la RND prácticamente cancelan el efecto de la incertidumbre a pesar de ser variante en el tiempo (fig. 6-10). Durante la primera parte de la simulación puede notarse como existe un aprendizaje en la RND, que puede observarse en la evolución de los pesos (fig. 6-8), los cuales posteriormente permanecen constantes. La neurona a su vez contribuye en el proceso (fig. 6-6) mientras el nivel del líquido en ambos tanques no sea el deseado.

## Control de Nivel Utilizando un Controlador PID

La conocida ley de control PID está expresada en la siguiente ecuación

$$u(t) = K_p \Delta_y(t) + K_i \int_0^t \Delta_y(\tau) d\tau + K_d \dot{\Delta}_y(t)$$

$$\Delta_y(t) = [0.2, 0.2]^T - y(t)$$

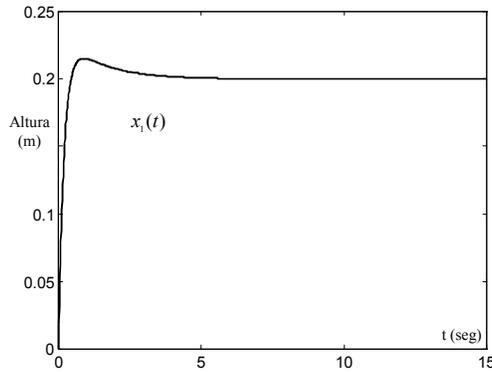


Figura 6-11: Nivel del primer recipiente con el PID

los parámetros utilizados para controlar el nivel de líquido en cada tanque en la simulación se escogieron como

$$\begin{aligned}
 K_p &= \text{diag}\{3, 3\} \\
 K_i &= \text{diag}\{2, 2\} \\
 K_d &= \text{diag}\left\{\frac{1}{5}, \frac{1}{4}\right\}.
 \end{aligned}$$

La ejecución de las simulaciones muestran en la figura (6-11) el comportamiento del nivel del líquido en el primer tanque, la figura (6-12) muestra la evolución del nivel del líquido del segundo tanque. Estas trayectorias a lo largo del tiempo en ambos niveles del líquido son el efecto de la ley de control graficada en la figura (6-13).

El efecto de la incertidumbre se puede evidenciar en la gráfica del nivel del líquido del segundo tanque (fig. 6-12), ya que como la incertidumbre es la resistencia al flujo de líquido  $R_2$  es mas inmediato el efecto sobre el segundo tanque que en el primero (ver fig. 6-1). Este cambio en el parámetro  $R_2$  por consiguiente provoca que la razón de flujo de entrada en el segundo tanque tenga las fluctuaciones mostradas en  $u_2(t)$  (fig. 6-13), sin embargo esta acción de control no logra mantener constante el nivel de líquido del segundo tanque  $x_2(t)$ .

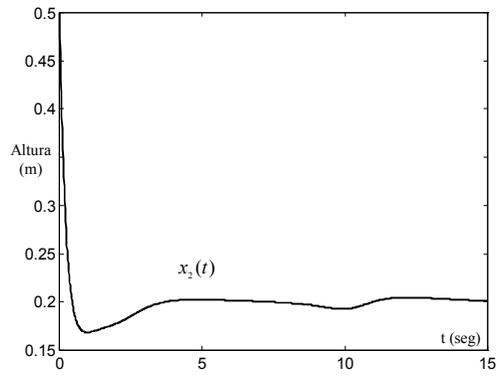


Figura 6-12: Nivel del segundo recipiente con el PID

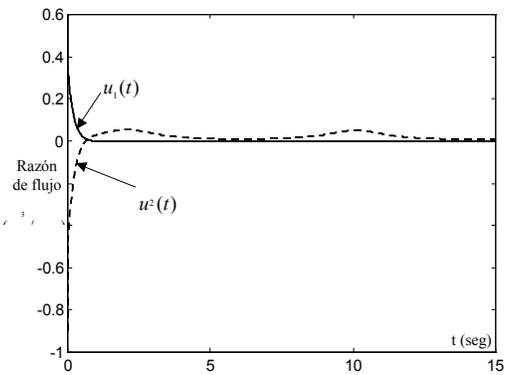


Figura 6-13: Control utilizando un controlador PID

## 6.4 Conclusiones

Al construir el modelo de una planta, a pesar de que lo hagamos cuidadosamente, en general tendremos por pequeño que sea, un error de modelado conocido como incertidumbre. Si en un momento dado construyéramos una planta "hecha a la medida" partiendo de un modelo, es muy probable que también se generen discrepancias entre la planta construida y el modelo.

Si a esto le agregamos que una planta esta sometida a condiciones del entorno o de trabajo que causan desgaste o degradación de ciertos componentes, necesariamente tenemos que enfrentar la incertidumbre generada por estos cambios a lo largo del tiempo.

Sin embargo, los términos inciertos del modelo se pueden expresar como la suma de una parte nominal conocida mas otra parte incierta.

Esta idea se introdujo en este capítulo para resolver la pasivación de sistemas no lineales inciertos MIMO utilizando una red neuronal dinámica. En esta RND propuesta mostramos una arquitectura que utiliza la parte conocida del sistema no lineal. Dentro de esta arquitectura se propone una estructura neuronal con un umbral de salida que es de utilidad para compensar la incertidumbre del sistema.

Finalmente con una ley de control que utiliza información de la RND, realiza la pasivación del sistema por retroalimentación auxiliándose de un algoritmo de proyección.

Por lo tanto se puede concluir que la técnica propuesta en el presente capítulo es una buena alternativa para enfrentar el equivalente pasivo de sistemas no lineales con incertidumbre.

# Capítulo 7

## Conclusiones y Trabajo Futuro

### 7.1 Contribución de la Tesis

- En la presente tesis se muestra primeramente un resultado sobre la pasividad en redes neuronales dinámicas, en esta parte se utiliza la pasividad para demostrar que un algoritmo de gradiente descendente para el ajuste de los pesos es estable y robusto para cualquier incertidumbre acotada. Una aportación interesante de esta metodología es que el sistema no lineal es de estructura incierta, pero se considera que tenemos lectura del estado y acceso a la entrada del sistema, como en una caja negra.
- En la parte intermedia de la tesis se documentan los resultados obtenidos para la pasivación de sistemas no lineales inciertos SISO con redes neuronales dinámicas, en ella se logra la pasividad de una clase de sistemas no lineales SISO que tienen un modelo parcialmente conocido, utilizando una RND con una ley de aprendizaje adaptable. Con una simple red neuronal dinámica (RND) que contiene solo dos neuronas, se identifica el sistema no lineal incierto. La metodología propuesta puede ser considerada con las ya existentes, como una alternativa para el equivalente pasivo por retroalimentación para una clase de sistemas no lineales. La estructura de la Red Neuronal Dinámica es construida utilizando la parte conocida del modelo del sistema no lineal.
- En la parte final se mostró un resultado para la pasivación de sistemas no lineales con entrada y salida múltiple, considerando que el sistema no lineal es afin con la entrada

y posee incertidumbre en el término de retroalimentación. Este término incierto de manera natural se puede expresar como la suma de un valor nominal mas otro incierto. Para identificar a la incertidumbre se utiliza una red neuronal dinámica, la correspondiente ley de aprendizaje y una ley de control que utiliza un operador de proyección, permiten obtener el equivalente pasivo del sistema.

- La arquitectura de la red neuronal propuesta tiene como umbral de salida una función vectorial que contribuye en la compensación de la incertidumbre. La manera en que está caracterizada la incertidumbre permite que el diseñador construya cotas finas de la incertidumbre, con lo cual pueda modificar el desempeño del resultado propuesto.
- La formalización matemática del resultado para la pasivación de sistemas no lineales MIMO con redes neuronales dinámicas mostrada en la presente tesis, fortalece su efectividad en una simulación comparativa de un sistema hidráulico de dos tanques, dicha simulación muestra mejores resultados que los del controlador PID tan popularmente utilizado en la industria.

## 7.2 Trabajo Futuro

- Como perspectivas de trabajo consideramos la utilización de la señal de entrada y la de salida de la planta no lineal, para construir un neuroobservador y aplicar una ley de control que permita la pasivación del sistema.
- Otra alternativa interesante de investigación es considerar además de la incertidumbre en el término de retroalimentación, también considerarla en la matrix de entrada y en la función de salida, con el propósito de lograr el equivalente pasivo del sistema. Primeramente definiendo que el estado está accesible, y posteriormente considerar que sólo se puede tener lectura de la entrada y de la salida del sistema.
- Una de las cosas a las que se enfrenta un ingeniero de control son las perturbaciones hechas por ruidos, debido a que la planta puede encontrarse inmersa en un ambiente en el que el ruido no puede ser eliminado y contamina constantemente las lecturas o a

la dinámica del sistema. Esta situación puede considerarse como trabajo futuro de la presente tesis, ya que la incertidumbre puede estar involucrada de cierta manera con las perturbaciones.

- Todo este panorama muestra una apertura interesante también hacia el posterior trabajo con redes neuronales con arquitectura multicapa.

# Bibliografía

- [1] J. A. Anderson and E. Rosenfeld Neurocomputing Foundation of Research, Cambridge: The MIT Press, 1988
- [2] Byrnes C.I., Isidori A., Willems J.C., "Passivity, Feedback Equivalence, and the Global Stabilization of Minimum Phase Nonlinear Systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol.36, no.11, pp.1228-1240, 1991.
- [3] Cichicki Andrzej, Unbehauen R., Neural Networks for Optimization and Signal Processing. John Wiley & Sons, 1993.
- [4] R. Castro-Linares, Wen Yu and Alexander S. Poznyak, "Passivity Feedback Equivalence of Nonlinear Systems via Neural Network Aproximation", European Control Conference (ECC'99) Dusseldorf, 1999
- [5] S.Commuri and F.L.Lewis, CMAC Neural Networks for Control of Nonlinear Dynamical Systems: Structure, Stability and Passivity, *Automatica*, vol.33, vo.4, 635-641, 1996.
- [6] J. S. Denker Neural Networks for Computing, New York; American Institute of Physics, 1986
- [7] M.Forti, S.Manetti and M.Marini, Necessary and Sufficient Condition for Absolute Stability of Neural Networks, *IEEE Trans. on Circuit and Systems-I*, Vol. 41, 491-494, 1994.
- [8] S.Haykin , *Neural Networks- A comprehensive Foundation*, Macmillan College Publ. Co., New York, 1994.

- [9] D. Hill and P. Moylan, "Stability results for nonlinear feedback systems," *Automatica*, Vol. 13, pp. 373-382, 1976.
- [10] D.Hill. and P.J. Moylan, "The stability of nonlinear dissipative systems" *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol.21, 708-711, 1976
- [11] J.J.Hopfield, "Neurons with grade response have collective computational properties like those of a two-state neurons", *Proc. of the National Academy of Science, USA*, vol. 81, 3088-3092, 1984.
- [12] K.J.Hunt, D.Sbarbaro, R.Zbikowski and P.J.Gawthrop, Neural Networks for Control Systems- A Survey, *Automatica*, Vol. 28, 1083-1112, 1992.
- [13] P.A.Ioannou and J.Sun, *Robust Adaptive Control*, Prentice-Hall, Inc, Upper Saddle River: NJ, 1996
- [14] A. Isidori, "Nonlinear Control Systems", Third edition, Springer-Verlag London 1995
- [15] S.Jagannathan and F.L. Lewis, Identification of Nonlinear Dynamical Systems Using Multilayered Neural Networks, *Automatica*, vol.32, no.12, 1707-1712, 1996.
- [16] I. Kanellakopoulos, "Passive adaptive control of non-linear systems," *Int. J. Adaptive Control Signal Processing*, vol. 7, pp. 339-352, 1993.
- [17] K.Kaszakurewics and A.Bhaya, On a Class of Globally Stable Neural Circuits, *IEEE Trans. on Circuit and Systems-I*, vol. 41, no.2, pp.171-174, 1994.
- [18] H.K.Khalil, *Nonlinear Systems*, 2nd Edition, Prentice-Hall, Inc., 1996.
- [19] P. Kokotovic, M. Krstic and I. Kanellakopoulos, Backstepping to passivity: recursive design of adaptive systems, Proc. of 31st IEEE Conf. on Decision and Control, Tucson, Arizona, pp. 3276-3280, 1997
- [20] E.B.Kosmatopoulos, M.M.Polycarpou, M.A.Christodoulou and P.A.Ioannpu, "High-Order Neural Network Structures for Identification of Dynamical Systems", *IEEE Trans. on Neural Networks*, Vol.6, no.2, no.2, pp.422-431, 1995

- [21] E.B.Kosmatopoulos, M.M.Polycarpou, M.A.Christodoulou and P.A.Ioannpu, "High-Order Neural Network Structures for Identification of Dynamical Systems", *IEEE Trans. on Neural Networks*, Vol.6, No.2, 442-431, 1995.
- [22] F.L.Lewis, K.Liu and A.Yesildirek , Multilayer Neural-Net Robot Controller with Guaranteed Tracking Performance, *IEEE Trans. on Neural Network*, vol. 7, no 2, pp.388-398, 1996.
- [23] F.L. Lewis and T. Parisini, "Neural network feedback control with guaranteed stability," *Int. J. Control*, vol.70, pp. 337-340, 1998
- [24] W. Lin and T. Shen "Robust passivity and feedback design for minimum-phase nonlinear systems with structural uncertainty", *Automatica*, Vol.35, 35-47, 1999
- [25] W.Lin and T.Shen, "Robust Passivity and Control of Nonlinear Systems with Structural Uncertainty," *Proc. of 36th IEEE Conf. on Decison and Control*, San Diego, California, pp. 2837-2842, 1997.
- [26] W.Lin, "Feedback Stabilization of General Nonlinear Control System: A Passive System Approach," *Syst. Control Lett.*, Vol.25, 41-52, 1995.
- [27] K.Matsouka, Stability Conditions for Nonlinear Continuous Neural Networks with Asymmetric Connection Weights, *Neural Networks*, Vol.5, 495-500, 1992
- [28] W. S. McCulloch and W. Pitts, A Logical Calculus of the Ideas Immanent in Nervous Activity, *Bulletin of Mathematical Biophysics*, vol. 5, 1943, pp 115-133
- [29] C. A. Mead, *Analog VLSI and Neural Syatems*. Reading, MA; Addison-Wesley, 1989
- [30] R.Ortega, A.Loria, R.Kelly and L.Praly, On passivity based output feedback global stabilization of Euler-Lagrange systems, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Vol.5, 313-324, 1995
- [31] M.M. Polycarpou and M.J. Mears, "Stable adaptive tracking of uncertain systems using nonlinearly parametrized on-line approximators," *Int. J. Control*, vol.70, pp. 363-384, 1998.

- [32] Alexander S.Poznyak, Wen Yu, Edgar N. Sanchez and Jose P. Perez, Nonlinear Adaptive Trajectory Tracking Using Dynamic Neural Networks, *IEEE Trans. Neural Networks*, vol.6, no.10, pp.1402-1411,1999
- [33] A.S. Poznyak, W.Yu , E.N. Sanchez and Jose P. Perez, Stability Analysis of Dynamic Neural Control, *Expert System with Applications*, Vol.14, No.1, 227-236, 1998.
- [34] G.V.Puskorius and L.A.Feldkamp, Neurocontrol of nonlinear dynamical systems with Kalman filter trained recurrent networks, *IEEE Trans. on Neural Networks*, Vol.5, No.2, 279-297, 1994
- [35] J. Reyes Reyes,"Flitrado Robusto de Sistemas Lineales Discretos Variantes en el Tiempo: Perturbaciones Deterministicas" Tesis de Maestría, Departamento de Ingeniería Eléctrica, CINVESTAV-IPN, Nov. 1997
- [36] J. Reyes-Reyes, W. Yu, A. S. Poznyak, "Passivation and Control of Partially Known SISO Nonlinear Systems via Dynamic Neural Networks", *Mathematical Problems in Engeneering*, Vol. 6 pp 61-83, 2000
- [37] J. Reyes-Reyes, W. Yu, A. S. Poznyak, R. Martinez-Guerra, "Robust Feedback Passivity of Unknown Nonlinear Systems via Neural Networks", *IASTED International Conference, Control and Application*, pp 247-248, May 24-27, 2000
- [38] F. Rossenblat, *Principles of Neurodynamics*. East Lansing, MI. Spartan Books, 1962
- [39] F. Rossenblat, *The Perceptron a Perceiving and Recognizing Automation*, Cornell Aeronautical Laboratory Report, No 85-460-1 Jan., 1957
- [40] G.A.Rovithakis and M.A.Christodoulou, " Adaptive Control of Unknown Plants Using Dynamical Neural Networks", *IEEE Trans. on Syst., Man and Cybern.*, Vol. 24, 400-412, 1994.
- [41] G.A.Rovithakis and M.A.Christodoulou, "Direct Adaptive Regulation of Unknown Nonlinear Dynamical System via Dynamical Neural Networks", *IEEE Trans. on Syst., Man and Cybern.*, Vol. 25, 1578-1594, 1995.

- [42] N. Sadegh, "A multilayer nodal link perceptron network with least squares training algorithm," *Int. J. Control*, vol.70, pp. 385-404, 1998.
- [43] Wen Yu and Xiaou Li, Some Stability Properties of Dynamic Neural Networks, *IEEE Trans. Circuits and Systems, Part I*, accepted for publication.
- [44] R.Sepulchre, M.Jankovic and P.V.Kokotovic, *Constructive Nonlinear Control*, Springer-Verlag, London, 1997
- [45] M.A. Seron, D.J. Hill and A.L. Fradkov, "Nonlinear adaptive control of feedback passive systems," *Automatica*, vol.31, pp. 1053-1060, 1995.
- [46] H.Sira-Ramírez, R.Ortega, R.A.Pérez-Moreno and M García-Esteban, Passivity based controllers for the stabilization of dc-dc power converters, *Automatica*, Vol.33, 499-513, 1997
- [47] H.Sira-Ramírez and M Rios-Bolívarn, Feedback passivity of nonlinear multivariable systems, 4th World Congress of IFAC, Beijing China, 1999
- [48] H.Sira-Ramírez and M.I.Angulo-Núñez, Passivity based control of nonlinear chemical processes, *International Journal of Control*, Vol.68, 971-996, 1997
- [49] J.J.Slotine and W.Li, Adaptive manipulator control, a case study, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol.33
- [50] E.D.Sontag and Y.Wang, On Characterization of the Input-to-State Stability Property, *System & Control Letters*, vol.24, no.5, pp.351-359, 1995
- [51] W. Su and L. Xie, Robust control of nonlinear feedback passive systems, *Syst. Control Lett.*, vol.28, pp. 85-93, 1996.995-1003, 1976
- [52] J.A.K.Suykens, J.Vandewalle and B.De Moor, Lur's Systems with Multilayer Perceptron and Recurrent Neural Networks; Absolute Stability and Dissipativity, *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol.44, 770-774, 1999.

- [53] E. Tzirkel-Hancock and F. Fallside, "A direct control method for a class of nonlinear systems using neural networks," *Proc. of the IEE Second Int. Conf. ANN*, pp. 134-138, 1991.
- [54] M. Vidyasagar, "New passivity-type criteria for large-scale interconnected systems," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol.24, pp.575-579, 1979.
- [55] P. Werbos, Backpropagation Through Time What it does and How to do it. Proc. IEEE, vol 78, No. 10, 1990, pp 1550-1560. C.I. Byrnes, A. Isidori and J.C. Willems, "Passivity, Feedback Equivalence, and the Global Stabilization of Minimum Phase Nonlinear Systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol.36, 1228-1240, 1991.
- [56] B. Widrow and M. Lee, 30 Years of Adaptive Neural Networks: Perceptron, Adaline and Backpropagation, Proc. IEEE, vol. 78, No. 9. 1990, pp. 1415-1442
- [57] J. C. Willems, "Dissipative dynamical systems part I: General theory," *Arch. Ration. Mech. Anal.*, vol.45, pp. 325-351, 1972.
- [58] J. C. Willems, "Dissipative dynamical systems part II: Linear systems with quadratic supply rates," *Arch. Ration. Mech. Anal.*, vol.45, pp. 352-393, 1972.
- [59] J.C.Willems, "Least Squares Optimal Control and Algebraic Riccati Equations", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol.16, 621-634, 1971
- [60] A. Yesildirek and F. L. Lewis, "Feedback Linearization Using Neural Networks", *Automatica*, pp1659-1664, vol 31 No 11, Nov. 1995
- [61] Wen Yu and Alexander S.Poznyak, Indirect Adaptive Control via Parallel Dynamic Neural Networks, *IEEE Proceedings - Control Theory and Applications*, Vol.146, No.1, 25-30, 1999.