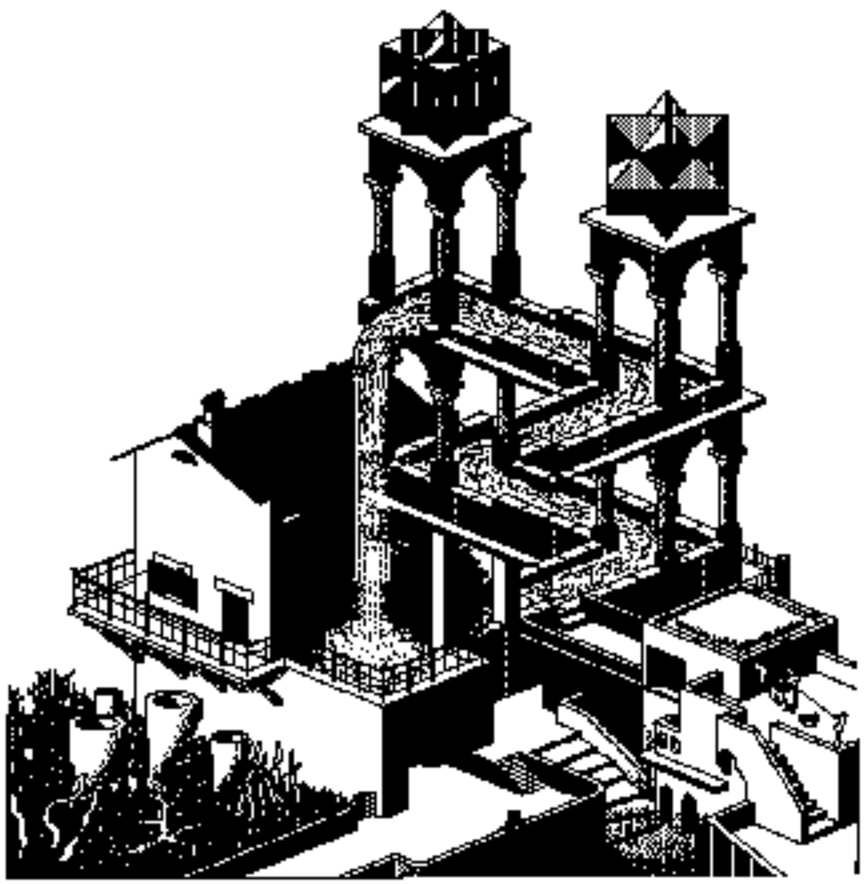
INTRODUCCIÓN A FUNCIONES ANALÍTICAS Y TRANSFORMACIONES CONFORMES



Gabriel D. Villa Salvador
Centro de Investigación y
Estudios Avanzados del
Instituto Politécnico Nacional

PREFACIO

En estas notas se da una introducción a transformaciones conformes y algunas de sus aplicaciones a la teoría del potencial.

En los primeros Capítulos se estudian algunos de los temas básicos de la variable compleja con el fin de hacer estas notas casi autocontenidas y a su vez presentar una introducción a la teoría de una variable compleja. Sin embargo se han dejado de lados temas de suma importancia como son prolongación analítica, aplicación de la teoría de los residuos al cálculo de integrales, superficies de Riemann, etc.

El lector interesado en transformación conforme puede leer directamente el Capítulo 3, § 3 y los Capítulos 6 y 7, haciendo caso omiso del resto de las notas.

Febrero de 1989.

NOTACIONES

$\mathbb{R}$	Números Reales.
$\mathbb{Q}$	Números Racionales.
$\mathbb{N}$	Números Naturales.
$\mathbb{Z}$	Números Enteros.
$\mathbb{C}$	Números Complejos.
$\mathbb{R}^n$	$\{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R},\ 1 \le i \le n\}$.
$[a,b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$.
$[a,b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$.
(a,b)	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$.
$(a,b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$.
♦	Final de una demostración.
Ø	Conjunto vacío.
F^c	Complemento del conjunto F.
U	$\{z \in \mathbb{C} \mid \lvert z\rvert < 1\}$.
$\forall$	Para todo.
$\bar{z}$	Conjugado de z.
$\lvert z\rvert$	Norma de z.
sup A	supremo del conjunto A.
inf	ínfimo del conjunto A.
$\in$	pertenece.
[•]	referencia a la bibliografía.
$\subset, \subseteq$	Contención entre conjuntos.
$\xrightarrow[n\to\infty]{}$	Límite cuando n se va a ∞.

Notaciones

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$	Serie.
$\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$	Sucesión.
$\underline{\lim}_{n\to\infty}$	Límite inferior.
$\overline{\lim}_{n\to\infty}$	Límite superior.
$\{s_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$	Subsucesión.
$\Rightarrow$	Implica.
$B(z_0, \varepsilon)$	bola abierta.
$\overline{B}(z_0,\varepsilon)$	bola cerrada.
$\int_\gamma f(\xi)\, d\xi$	integral de línea.
H^+	semiplano superior.
H^-	semiplano inferior.

CONTENIDO

Contenido

CAPITULO 1.

LOS NUMEROS COMPLEJOS

§ 1. Propiedades Básicas.

En esta primer sección se definirá el campo de los Números Complejos y se estudiarán sus propiedades elementales.

DEFINICION 1.1.1:

El Campo de los Números Complejos ó Plano Complejo $\mathbb{C}$ se define como el conjunto $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ junto con dos operaciones + y • llamadas suma y producto respectivamente y definidas del siguiente modo

$$+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ +((a,b), (c,d)) = (a + c, b + d) = (a,b) + (c,d)$$

$$\bullet : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ \bullet((a,b), (c,d)) = (ac - bd, ad + bc) = (a,b) \bullet (c,d).$$

La suma y el producto tienen las propiedades que se enuncian en la siguiente Proposición; su verificación es inmediata de las propiedades conocidas para los reales y se deja como ejercicio al lector.

PROPOSICION 1.1.2:

(S1) Asociatividad de +

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3 \qquad \forall\, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$$

(S2) Idéntico Aditivo

Existe un elemento $0 = (0,0) \in \mathbb{C}$ tal que $z + 0 = 0 + z = z \quad \forall\, z \in \mathbb{C}$

(S3) Inverso Aditivo

Dado $z = (a,b) \in \mathbb{C}$, existe un elemento $-z = (-a,-b) \in \mathbb{C}$ tal que $z + (-z) = (-z) + z = 0$

(S4) <u>Conmutatividad de +</u>

$z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \qquad \forall\, z_1, z_2, \in \mathbb{C}$

(M1) <u>Asociatividad de •</u>

$z_1 \bullet \left(z_2 \bullet z_3\right) = \left(z_1 \bullet z_2\right) \bullet z_3 \qquad \forall\, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$

(M2) <u>Idéntico Multiplicativo</u>

Existe un elemento $1 = (1,0) \in \mathbb{C}$ tal que $z \bullet 1 = 1 \bullet z = z \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}$

(M3) <u>Inverso Multiplicativo</u>

Dado $z = (a,b) \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, existe un elemento $z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}\ ,\ \frac{b}{a^2+b^2}\right) \in \mathbb{C}$ tal que $z \bullet z^{-1} = z^{-1} \bullet z = 1$

(M4) <u>Conmutatividad de •</u>

$z_1 \bullet z_2 = z_2 \bullet z_1 \qquad \forall\, z_1, z_2, \in \mathbb{C}$

(P) <u>Distributividad</u>

$z_1 \bullet \left(z_2 + z_3\right) = \left(z_1 \bullet z_2\right) + \left(z_1 \bullet z_3\right) \qquad \forall\, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$

<u>OBSERVACION 1.1.3:</u>

Las propiedades (S1), (S2), (S3) y (S4) nos dicen que $\left(\mathbb{R}^2, +\right)$ es un grupo abeliano. Las propiedades (M1), (M2), (M3) y (M4) demuestran que $\left(\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}, \bullet\right)$ es un grupo abeliano, por lo tanto la Proposición 1.1.2 afirma que $\mathbb{C} = \left(\mathbb{R}^2, +, \bullet\right)$ es un campo.

Consideremos la siguiente función:

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, \text{ dada por } \varphi(a) = (a,0).$$

entonces se tiene que

$$\varphi(a+b) = (a+b,0) = (a,0) + (b,0) = \varphi(a) + \varphi(b)$$
$$\varphi(a \bullet b) = (a \bullet b,0) = (a,0) \bullet (b,0) = \varphi(a) \bullet \varphi(b)$$

además claramente φ es 1 - 1, por lo tanto φ es un isomorfismo de anillos entre $\mathbb{R}$ y $\varphi(\mathbb{R}) = \{(a,0) \in \mathbb{C} \mid a \in \mathbb{R}\}$.

Identificando $\mathbb{R}$ con $\varphi(\mathbb{R})$ se puede considerar que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ y que $\mathbb{R}$ es un subcampo de $\mathbb{C}$.

Ahora denotemos (0,1) por i y observemos que $\forall$ $(b,0) \in \varphi(\mathbb{R})$, $(b,0) \bullet i = (b,0) \bullet (0,1) = (b \bullet 0 - 0 \bullet 1, b \bullet 1 + 0 \bullet 0) = (0,b)$, por lo tanto dado $z = (a,b) \in \mathbb{C}$, se tiene que:

$$(a,b) = (a,0) + (0,b) = (a,0) \bullet (1,0) + (0,1) \bullet (b,0) = a \bullet 1 + b \bullet i = a + bi.$$

por lo tanto en adelante, dado $z = (a,b) \in \mathbb{C}$, z se denotará por a + bi.

DEFINICION 1.1.4:

Sea z = a + bi. El <u>conjugado</u> de z se define por $\overline{z} = a - bi \in \mathbb{C}$. La <u>Norma</u> ó <u>Módulo</u> de z se define por $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}$. La <u>Parte Real</u> de z se define por Re z = a y la <u>Parte Imaginaria</u> de z por Im z = b.

A continuación se enuncian las propiedades generales de $|z|$ y de $\overline{z}$.

PROPOSICION 1.1.5:

Sean $z, w \in \mathbb{C}$. Entonces:

(i) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$.

(ii) $\overline{z \bullet w} = \overline{z} \bullet \overline{w}$.

(iii) $\overline{z - w} = \overline{z} - \overline{w}$.

(iv) Si $w \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$.

(v) $|z|^2 = z \bullet \overline{z}$.

(vi) $|z| \geq 0$.

(vii) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

(viii) $|z \bullet w| = |z| \bullet |w|$.

(ix) Si $w \neq 0$, $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$.

(x) Si $z = a + bi$, $a = \operatorname{Re} z = \frac{1}{2}\left(z + \overline{z}\right)$ y $b = \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}\left(z - \overline{z}\right)$.

(xi) $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$ y $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$.

(xii) $|z| = \left|\overline{z}\right|$.

(xiii) $\overline{\overline{z}} = z$.

DEMOSTRACION:

Todas las propiedades son consecuencia inmediata de las definiciones y su verificación se deja al cuidado del lector. ♦

A continuación damos una propiedad que es de vital importancia para todo el desarrollo subsiguiente.

TEOREMA 1.1.6 (DESIGUALDAD DEL TRIANGULO):

Sean $z, w \in \mathbb{C}$, entonces $|z + w| \leq |z| + |w|$.

DEMOSTRACION:

$|z + w|^2 = (z + w) \bullet \left(\overline{z + w}\right) = z \bullet \overline{z} + z \bullet \overline{w} + w \bullet \overline{z} + w \bullet \overline{w} = |z|^2 + z \bullet \overline{w} + \overline{z \bullet \overline{w}} + |w|^2 = |z|^2 + 2 \operatorname{Re}\left(z \bullet \overline{w}\right) + |w|^2 \leq$

$|z|^2 + |2\ \mathrm{Re}\,(z \bullet \overline{w})| + |w|^2 \leq |z|^2 + 2\,|z \bullet \overline{w}| + |w|^2 = |z|^2 + 2\,|z| \bullet |w| + |w|^2 =$ $(|z| + |w|)^2 \Rightarrow |z + w| \leq |z| + |w|.$ ♦

OBSERVACION 1.1.7:

La desigualdad del triángulo y las propiedades (vi), (vii) y (viii) de la Proposición 1.1.5, afirman que el módulo es de hecho una norma sobre $\mathbb{C}$.

DEFINICION 1.1.8:

Se define $\rho : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, por $\rho(z,w) = |\ z - w\ |$ = distancia de z a w.

PROPOSICION 1.1.9:

ρ es una métrica sobre $\mathbb{C}$, es decir cumple con las siguientes propiedades:

(1)	$\rho(z,w) \geq 0$		$\forall\ z, w \in \mathbb{C}$.
(2)	$\rho(z,w) = 0$	$\Leftrightarrow$	$z = w$.
(3)	$\rho(z,w) = \rho(w,z)$		$\forall\ z, w \in \mathbb{C}$.
(4)	$\rho(z,w) \leq \rho(z,u) + \rho(u,w)$		$\forall\ z, w, u \in \mathbb{C}$.

DEMOSTRACION:

(1) $\rho(z,w) = |z - w| \geq 0,\ \forall\ z, w \in \mathbb{C}$.

(2) $\rho(z,w) = 0 \Leftrightarrow |z - w| = 0 \Leftrightarrow z - w = 0 \Leftrightarrow z = w$.

(3) $\rho(z,w) = |z - w| = |(-1) \bullet (w - z)| = |w - z| = \rho(w,z)\ \forall\ z, w \in \mathbb{C}$.

(4) $\rho(z,w) = |z - w| = |z - u + u - w| \leq |z - u| + |u - w| = \rho(z,u) + \rho(u,w)\ \forall\ z, w, u \in \mathbb{C}$. ♦

EJERCICIO 1.1.10:

Probar que si $z, w \in \mathbb{C}$, entonces $\big| |z| - |w| \big| \leq |z - w|$.

§ 2. Sucesiones y Series en $\mathbb{C}$.

En esta sección se dan los resultados generales de sucesiones y series tanto en $\mathbb{R}$ como en $\mathbb{C}$. Se dan la mayoría de las demostraciones para series reales, no así con las sucesiones reales las cuales se suponen conocidas por el lector.

DEFINICION 1.2.1:

Una sucesión en $\mathbb{C}$ es una función $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$. Denotamos $f(n)$ por z_n y $f(\mathbb{N}) = \left\{z_n\right\}_{n=1}^{\infty}$.

Ahora dada una sucesión en $\mathbb{C}$, $\left\{z_n\right\}_{n=1}^{\infty}$, como para cada $n \in \mathbb{N}$, $z_n = x_n + i\, y_n$, se tiene que $\left\{z_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ define 2 sucesiones reales: $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ y $\left\{y_n\right\}_{n=1}^{\infty}$.

A continuación se define la noción de convergencia de una sucesión en $\mathbb{C}$, la cual es exactamente igual a la convergencia de una sucesión real.

DEFINICION 1.2.2:

Sea $\left\{z_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathbb{C}$. Decimos que $\left\{z_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $z_0 \in \mathbb{C}$ y lo denotamos por $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} z_0$ o $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$, si para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\, n \geq n_0$ se tiene $|z_n - z_0| < \varepsilon$. A z_0 se le llama el límite de $\left\{z_n\right\}_{n=1}^{\infty}$.

EJEMPLO 1.2.3:

Sea $z_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + i\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Afirmamos que $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = e$. En efecto, sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\ n \geq n_0$ se tiene $\left|\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ y $\left|\frac{1}{n^2} - 0\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ por lo tanto $\forall\ n \geq n_0$ se tiene $|z_n - e| \leq \left|\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e\right| + \left|\frac{1}{n^2} - 0\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

PROPOSICION 1.2.4:

Sea $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathbb{C}$. Si $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiene límite, éste es único.

DEMOSTRACION:

Si z_0 y w_0 son dos límites de $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, entonces dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\ n \geq n_0$, $|z_n - w_0| < \frac{\varepsilon}{2}$ y $|z_n - z_0| < \frac{\varepsilon}{2}$, por lo que $|z_0 - w_0| = |z_0 - z_n + z_n - w_0| \leq |z_0 - z_n| + |z_n - w_0| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Es decir $|z_0 - w_0| < \varepsilon\ \forall\ \varepsilon > 0$, por lo que $z_0 = w_0$.

♦

El siguiente resultado demuestra que para analizar la convergencia de una sucesión en $\mathbb{C}$, basta analizar la convergencia de 2 sucesiones reales.

PROPOSICION 1.2.5:

Sea $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathbb{C}$, $z_n = x_n + i\ y_n$, $z_0 = x_0 + i\ y_0$. Entonces $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$.

DEMOSTRACION:

$\Rightarrow$) Sea $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\ n \geq n_0$, $|z_n - z_0| < \varepsilon$, por lo tanto: $|x_n - x_0| = |\mathrm{Re}(z_n - z_0)| \leq |z_n - z_0| < \varepsilon$, $|y_n - y_0| = |\mathrm{Im}(z_n - z_0)| \leq |z_n - z_0| < \varepsilon$, por lo tanto $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$.

$\Leftarrow$) Sea $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\ n \geq n_0$, $|x_n - x_0| < \frac{\varepsilon}{2}$ y $|y_n - y_0| < \frac{\varepsilon}{2}$. Entonces $|z_n - z_0| = |(x_n - x_0) + i\,(y_n - y_0)| \leq |x_n - x_0| + |y_n - y_0| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$. ♦

PROPOSICION 1.2.6:

Sea $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{C}$ convergente. Entonces $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ está acotada.

DEMOSTRACION:

Sea $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$. Sea $\varepsilon = 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\ n \geq n_0$, $|z_n - z_0| < 1$ y como $|z_n| - |z_0| \leq |z_n - z_0| < 1$, $|z_n| \leq 1 + |z_0|$ $\forall\ n \geq n_0$. Sea $M = \max\left\{|z_1|, |z_2|, \ldots, |z_{n_0-1}|, 1 + |z_0|\right\}$. Entonces $|z_n| \leq M\ \forall\ n \in \mathbb{N}$, lo cual prueba que $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ está acotada. ♦

OBSERVACION 1.2.7:

El recíproco de esta Proposición es falso. Por ejemplo si $z_n = (-1)^n$, entonces $|z_n| \leq 1\ \forall\ n \in \mathbb{N}$ y $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ no es convergente. Sin embargo se tiene:

TEOREMA 1.2.8 (BOLZANO-WEIERSTRASS):

Capítulo 1

Toda sucesión acotada en $\mathbb{C}$ tiene una subsucesión convergente.

DEMOSTRACION:

Sea $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión acotada, $z_n = x_n + i\, y_n$. Entonces por hipótesis existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|z_n| \leq M$ y como $|x_n| \leq |z_n| \leq M$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ está acotada, por lo tanto tiene una subsucesión convergente $\left\{x_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$. Sea $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$. Por otro lado, $\left|y_{n_k}\right| \leq \left|z_{n_k}\right| \leq M$, por lo que $\left\{y_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ está acotada, por lo tanto tiene una subsucesión $\left\{y_{n_{k_j}}\right\}_{j=1}^{\infty}$ convergente. Si $y_{n_{k_j}} \xrightarrow[j\to\infty]{} y_0$, entonces $z_{n_{k_j}} = x_{n_{k_j}} + i\, y_{n_{k_j}} \xrightarrow[j\to\infty]{} x_0 + i\, y_0 = z_0$.

♦

DEFINICION 1.2.9:

Una sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ se llama de <u>Cauchy</u> si $\forall\ \varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\ n, m \geq n_0$ se tiene que $|z_n - z_m| < \varepsilon$.

TEOREMA 1.2.10:

Una sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\mathbb{C}$ es convergente $\Leftrightarrow$ $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy.

DEMOSTRACION:

$\Rightarrow$) Sea $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$ y $\varepsilon > 0$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\ n \geq n_0$, $|z_n - z_0| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Sean $n, m \geq n_0$, $|z_n - z_m| = |z_n - z_0 + z_0 - z_m| \leq |z_n - z_0| + |z_0 - z_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, es decir $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy.

$\Leftarrow$) Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall$ m, $n \geq n_0$ se tiene $|x_n - x_m| \leq |z_n - z_m| < \varepsilon$ y $|y_n - y_m| \leq |z_n - z_m| < \varepsilon \Rightarrow \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ son de Cauchy y por lo tanto convergentes, lo que implica que $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente. ♦

EJEMPLOS 1.2.11:

1) $z_n = \frac{1}{n} + \frac{i}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 + i \bullet 0 = 0.$
2) $z_n = n + \sqrt{2}\, n\, i$ diverge pues $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{\sqrt{2}\; n\}_{n=1}^{\infty}$ divergen.
3) $z_n = \sqrt[n]{n} + i\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 + i\, e.$
4) $z_n = \sqrt[n]{3} + i\,(-1)^n$ diverge pues aunque $\left\{\sqrt[n]{3}\right\}_{n=1}^{\infty}$ converge, la sucesión $\left\{(-1)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ diverge.

PROPOSICION 1.2.12:

Sean $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones tales que $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = w_0$.

Entonces:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(z_n + w_n\right) = z_0 + w_0.$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(z_n\, w_n\right) = z_0\, w_0.$

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n| = |z_0|.$

(iv) Si $w_n \neq 0\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ y $w_0 \neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{z_n}{w_n} = \frac{z_0}{w_0}.$

DEMOSTRACION:

Sea $\varepsilon > 0$.

(i) Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\ n \geq n_0$, $|z_n - z_0| < \frac{\varepsilon}{2}$ y $|w_n - w_0| < \frac{\varepsilon}{2}$ por lo tanto $\forall\ n \geq n_0$, $|(z_n + w_n) - (z_0 + w_0)| \leq |z_n - z_0| + |w_n - w_0| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, y de aquí se sigue que $\lim\limits_{n\to\infty}(z_n + w_n) = z_0 + w_0$.

(ii) $|z_n w_n - w_0 z_0| = |z_n w_n - z_n w_0 + z_n w_0 - w_0 z_0| \leq$
$|z_n|\,|w_n - w_0| + |w_0|\,|z_n - z_0|$.

Existe $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$ tal que $|z_n| < M$, $|w_n| < M$ $\forall\ n \in \mathbb{N}$ y por lo tanto $|w_0| \leq M$. Por otro lado existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\ n \geq n_0$, $|w_n - w_0| < \frac{\varepsilon}{2M}$ y $|z_n - z_0| < \frac{\varepsilon}{2M}$.

Por lo tanto, $\forall\ n \geq n_0$, $|z_n w_n - w_0 z_0| < M \bullet \frac{\varepsilon}{2M} + M\frac{\varepsilon}{2M} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, y de aquí se sigue que $\lim\limits_{n\to\infty}(z_n w_n) = z_0 w_0$.

(iii) Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\ n \geq n_0$, $|z_n - z_0| < \varepsilon \Rightarrow \big||z_n| - |z_0|\big| \leq |z_n - z_0| < \varepsilon$ $\forall\ n \geq n_0$, por lo tanto $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n| = |z_0|$.

(iv) Sea $\varepsilon_1 = \frac{|w_0|}{2} > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\ n \geq n_0$, $|w_n - w_0| < \frac{|w_0|}{2}$.

Ahora:

$$|w_0| - |w_n| \leq |w_n - w_0| < \frac{|w_0|}{2} \Rightarrow |w_n| > |w_0| - \frac{|w_0|}{2} = \frac{|w_0|}{2}.$$

Entonces:

$$\left|\frac{1}{w_n} - \frac{1}{w_0}\right| = \frac{|w_0 - w_n|}{|w_n|\,|w_0|} \leq \frac{2\,|w_0 - w_n|}{|w_0|^2}.$$

Existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\ n \geq m_0$, $|w_n - w_0| < \frac{\varepsilon\,|w_0|^2}{2}$.

Sea $k_0 = \max\{n_0, m_0\}$, entonces $\forall\ n \geq k_0$, se tiene $\left|\frac{1}{w_n} - \frac{1}{w_0}\right| \leq$

$\dfrac{2\,|w_0 - w_n|}{|w_0|^2} < \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{w_n} = \dfrac{1}{w_0}$. Por último, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{z_n}{w_n} = \lim\limits_{n\to\infty} z_n \dfrac{1}{w_n} = \left(\lim\limits_{n\to\infty} z_n\right)\left(\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{w_n}\right)$
$= z_0 \dfrac{1}{w_0} = \dfrac{z_0}{w_0}$. ♦

Ahora recordemos una Proposición para sucesiones reales, la cual nos será útil para el estudio de los puntos límite de una sucesión.

PROPOSICION 1.2.13:

Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$ una sucesión real monótona y acotada. Entonces $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente. Además, si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es creciente, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\left\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ y si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es decreciente, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf\left\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\right\}$.

DEMOSTRACION:

Ejercicio. ♦

DEFINICION 1.2.14:

Se dice que $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$ si $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = \infty$, es decir, si $\forall\ M > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\ n \geq n_0$, $|z_n| > M$.

DEFINICION 1.2.15:

Sea $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{C}$. Sea $\xi_0 \in \mathbb{C}$. ξ_0 se llama <u>punto límite</u> de $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ si existe una subsucesión $\{z_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} z_{n_k} = \xi_0$.

<u>EJEMPLOS 1.2.16:</u>

1) Sea $\{r_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{C}$ convergente. Entonces toda subsucesión $\{r_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge al mismo límite de $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$, i. e., $\lim\limits_{k\to\infty} r_{n_k} = \lim\limits_{n\to\infty} r_n = r_0$, por lo tanto r_0 es el único punto límite de $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$.

2) Sea $r_0 = (-1)^n$, es decir, $\{r_n\}_{n=1}^{\infty} = \{-1, 1, -1, \dots, -1, 1, \dots\}$. Entonces $\lim\limits_{n\to\infty} r_{2n} = 1$ y $\lim\limits_{n\to\infty} r_{2n-1} = -1$, por lo tanto 1 y -1 son puntos límite de $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$. El lector puede fácilmente verificar que éstos son los únicos.

Nuestro siguiente objetivo es dar la definiciones de límite superior e inferior y establecer los resultados necesarios para la demostración del Teorema de Cauchy para la convergencia de series con términos positivos.

Sea $\{r_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$ una sucesión acotada. Definimos:

$l_1 = \sup\{r_n \mid n \geq 1\} = \sup\{r_1, r_2, \dots, r_n, \dots\}$;

$l_2 = \sup\{r_n \mid n \geq 2\} = \sup\{r_2, r_3, \dots, r_n, \dots\}$;

....

$l_k = \sup\{r_n \mid n \geq k\} = \sup\{r_k, r_{k+1}, \dots, r_n, \dots\}$;

etc.

Ahora se tiene que $\{r_n \mid n \geq k+1\} \subseteq \{r_n \mid n \geq k\}$ $\forall\, k \in \mathbb{N}$, por lo tanto $l_{k+1} = \sup\{r_n \mid n \geq k+1\} \leq \sup\{r_n \mid n \geq k\} = l_k$, es decir $\{l_k\}_{k=1}^{\infty}$ es decreciente. Además si $|r_n| \leq M$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$, esto es $-M \leq r_n \leq M$ $\forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow -M \leq l_k \leq M$, por lo tanto $\{l_k\}_{k=1}^{\infty}$ está acotada y de aquí se sigue que $\{l_k\}_{k=1}^{\infty}$ es convergente.

OBSERVACIONES 1.2.17:

1) Si $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ no está acotada superiormente, se tiene que $l_k = \infty\ \forall\ k \in \mathbb{N}$. En estecaso definimos $\lim\limits_{n\to\infty} l_k = \infty$.

2) Si $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ está acotada superiormente y tiene una subsucesión $\{r_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ acotada inferiormente, digamos por m, entonces $m \le r_{n_k} \Rightarrow$ $l_k = \sup\{r_n \mid n \ge k\} \ge r_{n_k} \ge m \Rightarrow \{l_k\}_{k=1}^{\infty}$ es decreciente y acotada, por lo tanto convergente.

3) Si $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ está acotada superiormente pero no tiene ninguna subsucesión acotada inferiormente, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = -\infty$ y por lo tanto, dado $M < 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $\forall\ n \ge n_0$, $r_n < M \Rightarrow \forall\ k \ge n_0$, $l_k = \sup\{r_n \mid n \ge k\}$ $\le M \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} l_k = -\infty$.

Análogamente, definimos primero para una sucesión $\{r_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$ acotada, la siguiente sucesión:

$$t_k = \inf\{r_n \mid n \ge k\},\ k \in \mathbb{N}.$$

Claramente se tiene $t_k \le t_{k+1}\ \forall\ k \in \mathbb{N}$ y que $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ está acotada y por lo tanto $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ es convergente.

Si $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ no está acotada se tienen los siguientes casos:

(1) Si $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ no está acotada inferiormente, $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = -\infty$.

(2) Si $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ está acotada inferiormente, y tiene una subsucesión acotada superiormente, entonces $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ es convergente.

(3) Si $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ está acotada inferiormente, y no tiene ninguna subsucesión acotada superiormente, $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = \infty$.

OBSERVACION 1.2.18:

Sean $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{l_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ como antes, $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ arbitraria. Entonces

$$\lim_{k\to\infty} l_k = \inf_{n\in\mathbb{N}} \left(\sup \{r_n \mid n \geq k\}\right) \quad \text{y} \quad \lim_{k\to\infty} t_k = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\inf \{r_n \mid n \geq k\}\right).$$

DEFINICION 1.2.19:

$\lim\limits_{k\to\infty} t_k = \underline{\lim}_{n\to\infty} r_n =$ <u>límite inferior de</u> $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$.

$\lim\limits_{k\to\infty} l_k = \overline{\lim}_{n\to\infty} r_n =$ <u>límite superior de</u> $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$.

EJEMPLOS 1.2.20:

1) Sea $r_n = \dfrac{(-1)^n + n}{n}$.

Entonces $l_k = \sup \{r_n \mid n \geq k\} = \sup \left\{\dfrac{(-1)^n + n}{n} \;\middle|\; n \geq k\right\}$. Se tiene que

$$r_n = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{n} < 1 \ , \ \forall\ n \in \mathbb{N} \ , \ n \text{ impar} \\ 1 + \dfrac{1}{n} > 1 \ , \ \forall\ n \in \mathbb{N} \ , \ n \text{ par} \end{cases} \Rightarrow$$

$$l_k = \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{k} \ , \ k \text{ par} \\ 1 + \dfrac{1}{k+1} \ , \ k \text{ impar} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\lim_{k\to\infty} l_k = \overline{\lim}_{n\to\infty} r_n = 1}.$$

Análogamente, si $t_k = \inf \{r_n \mid n \geq k\}$, $t_k = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{k} & , \text{ k impar} \\ 1 - \dfrac{1}{k+1} & , \text{ k par} \end{cases} \Rightarrow$

$\boxed{\lim\limits_{k\to\infty} t_k = \varliminf\limits_{n\to\infty} r_n = 1}$.

Se tiene $\boxed{\varliminf\limits_{n\to\infty} r_n = \varlimsup\limits_{n\to\infty} r_n = \lim\limits_{n\to\infty} r_n = 1}$.

2) Sea $r_n = (-1)^n$, $\{r_n\}_{n=1}^{\infty} = \{-1, 1, -1, 1, \dots, -1, 1, \dots\}$.

$l_k = \sup \{r_n \mid n \geq k\} = 1\ \forall\, k \in \mathbb{N} \Rightarrow \varlimsup\limits_{n\to\infty} r_n = \lim\limits_{n\to\infty} l_n = 1.$

$t_k = \inf \{r_n \mid n \geq k\} = -1\ \forall\, k \in \mathbb{N} \Rightarrow \varliminf\limits_{n\to\infty} r_n = \lim\limits_{n\to\infty} t_n = -1.$

En particular, $1 = \varlimsup\limits_{n\to\infty} r_n \neq \varliminf\limits_{n\to\infty} r_n = -1$.

3) Sea $r_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

Se tiene que $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ es creciente, $r_n \leq e\ \forall\, n \in \mathbb{N}$, $l_k = \sup \{r_n \mid n \geq k\}$

$= \sup \left\{\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \;\middle|\; n \geq k\right\} = e \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} l_k = e.$

$t_k = \inf \{r_n \mid n \geq k\} = \left(1 + \dfrac{1}{k}\right)^k \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} t_k = \lim\limits_{k\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{k}\right)^k = e.$

Por lo tanto $\boxed{\varliminf\limits_{n\to\infty} r_n = \varlimsup\limits_{n\to\infty} r_n = \lim\limits_{n\to\infty} r_n = e}$.

La siguiente Proposición nos da una caracterización de los límites superior e inferior, así como un procedimiento para calcular estos límites.

PROPOSICION 1.2.21:

Sea $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión acotada, $\{r_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$. Sea A = $\left\{ l \in \mathbb{R} \;\middle|\; \text{Existe una subsucesión } \{r_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \text{ de } \{r_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ tal que } \lim_{k\to\infty} = l \right\}$ = $\left\{ \text{Conjunto de puntos límites de } \{r_n\}_{n=1}^{\infty} \right\}$. Entonces

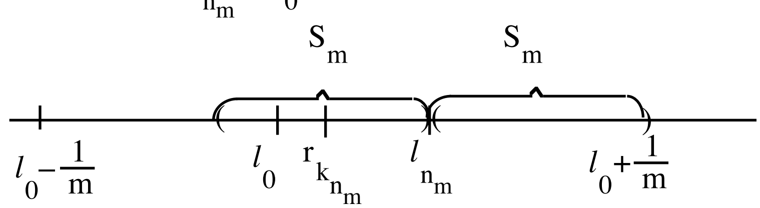
$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, r_n = \sup A \quad \text{y} \quad \underline{\lim_{n\to\infty}}\, r_n = \inf A.$$

DEMOSTRACION:

Sean $x_0 = \sup A \in \mathbb{R}$, $y_0 = \inf A \in \mathbb{R}$, $l_k = \sup\{r_n \mid n \geq k\}$, $t_k = \inf\{r_n \mid n \geq k\}$, $l_0 = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, r_n$, $t_0 = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, r_n$.

Se tiene que $l_k \geq r_k \geq t_k\ \forall\, k \in \mathbb{N}$. Sea $x \in A$, entonces existe una subsucesión $\{r_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\lim_{k\to\infty} r_{n_k} = x$. Se tiene $\lim_{k\to\infty} t_{n_k} \leq \lim_{k\to\infty} r_{n_k} \leq \lim_{k\to\infty} l_{n_k} \Rightarrow t_0 \leq x \leq l_0\ \forall\, x \in A \Rightarrow \boxed{t_0 \leq y_0}$ y $\boxed{x_0 \leq l_0}$.

A continuación se va a probar que $l_0 \in A$. Sea $\varepsilon_m = \frac{1}{m}$, existe $n_m \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\, k \geq n_m$, $l_k \in \left(l_0 - \frac{1}{m},\ l_0 + \frac{1}{m}\right)$. En particular $l_{n_m} \in \left(l_0 - \frac{1}{m},\ l_0 + \frac{1}{m}\right)$ y puesto que $\{l_k\}_{k=1}^{\infty}$ es decreciente, $l_{n_m} \geq l_0$.



Sea $S_m = l_0 + \frac{1}{m} - l_{n_m} > 0$. Ahora $l_{n_m} = \sup\{r_k \mid k \geq n_m\} \Rightarrow$ existe $k_{n_m} \geq n_m$ tal que $l_{n_m} - S_m < r_{k_{n_m}} \leq l_{n_m} < l_0 + \frac{1}{m}$.

Además

$l_{n_m} - S_m = l_{n_m} - l_0 - \frac{1}{m} + l_{n_m} \geq l_0 - l_0 - \frac{1}{m} + l_0 = -\frac{1}{m} + l_0$, es decir

$l_0 - \frac{1}{m} < r_{k_{n_m}} < l_0 + \frac{1}{m} \Rightarrow \left| r_{k_{n_m}} - l_0 \right| < \frac{1}{m}$.

Se construirá $r_{k_{n_{m+1}}}$ tal que $k_{n_{m+1}} > k_{n_m}$ y $\left| r_{k_{n_{m+1}}} - l_0 \right| < \frac{1}{m+1}$.

Sea $\varepsilon_{m+1} = \frac{1}{m+1} \Rightarrow$ existe $n_{m+1} > k_{n_m}$ tal que $l_{n_{m+1}} \in \left(l_0 - \frac{1}{m+1},\ l_0 + \frac{1}{m+1} \right)$.

Sea $S_{m+1} = l_0 + \frac{1}{m} - l_{n_{m+1}} > 0$.

Existe $k_{n_{m+1}} \geq n_{m+1} > k_{n_m}$ tal que $l_{n_{m+1}} - S_{m+1} < r_{k_{n_{m+1}}} \leq l_{n_{m+1}} \Rightarrow$ $r_{k_{n_{m+1}}} \in \left(l_0 - \frac{1}{m+1},\ l_0 + \frac{1}{m+1} \right)$.

Se ha construído $\left\{ r_{k_{n_m}} \right\}_{m=1}^{\infty}$ subsucesión de $\left\{ r_n \right\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\lim\limits_{m \to \infty} r_{k_{n_m}} = l_0$, por lo tanto $l_0 \in A \Rightarrow \boxed{l_0 \leq x_0}$. Análogamente se prueba que $\boxed{t_0 \geq y_0} \Rightarrow \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} r_n = l_0 = x_0 =$ sup A y $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} r_n = t_0 = y_0 =$ inf A. ♦

<u>COROLARIO 1.2.22:</u>

Si $\left\{ r_n \right\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$ es cualquier sucesión (no necesariamente acotada). Entonces la conclusión de la Proposición 1.2.21 es cierta para $\left\{ r_n \right\}_{n=1}^{\infty}$.

<u>DEMOSTRACION:</u>

Es inmediato de analizar los casos faltantes. ♦

<u>COROLARIO 1.2.23:</u>

Sea $\left\{s_n\right\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$. Si $\left\{s_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente, entonces $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, s_n = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, s_n = \lim_{n\to\infty} s_n = s_0$.

DEMOSTRACION:

$A = \left\{\text{Conjunto de puntos límite de } \left\{s_n\right\}_{n=1}^{\infty}\right\} = \left\{s_0\right\} \Rightarrow \text{Sup } A = \text{Inf } A = s_0$. Por lo tanto $\underline{\lim_{n\to\infty}}\, s_n = \text{Inf } A = \text{Sup } A = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, s_n = \lim_{n\to\infty} s_n = s_0$. ♦

COROLARIO 1.2.24:

Sea $\left\{s_n\right\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$. Si $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, s_n = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, s_n = s_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow \left\{s_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente y $\lim_{n\to\infty} s_n = s_0$.

DEMOSTRACION:

Si $\left\{s_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ no estuviese acotada inferior ó superiormente, se tendría que $\underline{\lim_{n\to\infty}}\, s_n = -\infty$ ó $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, s_n = \infty$ lo que contradice las hipótesis. Así pues $\left\{s_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ está acotada.

Supongamos que $\left\{s_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ no converge a $s_0 \Rightarrow$ existe $\varepsilon_0 > 0$ y una subsucesión $\left\{s_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ tal que $\left|s_{n_k} - s_0\right| \geq \varepsilon_0\ \forall\, k \in \mathbb{N}$. Puesto que $\left\{s_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ está acotada tiene una subsucesión $\left\{s_{n_{k_l}}\right\}_{l=1}^{\infty}$ convergente a un punto r_0 y puesto que $\left|s_{n_{k_l}} - s_0\right| \geq \varepsilon_0$ $\forall\, l \in \mathbb{N} \Rightarrow r_0 \neq s_0$, es decir $A = \left\{\text{puntos límite de } \left\{s_n\right\}_{n=1}^{\infty}\right\}$ consta de al menos dos puntos por lo que Sup $A \neq$ Inf A y por lo tanto $\underline{\lim_{n\to\infty}}\, s_n \neq \overline{\lim_{n\to\infty}}\, s_n$ lo cual es una contradicción.

Por los tanto $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s_0$. ♦

PROPOSICION 1.2.25:

Sea $\{s_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$. Entonces:

i) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} s_n = s_0 \Leftrightarrow$ existe $\{s_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ subsucesión de $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} s_{n_k} = s_0$ y $\forall\ \varepsilon > 0$, existe n_0 tal que $\forall\ n \geq n_0$, $s_n \leq s_0 + \varepsilon$.

ii) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} s_n = r_0 \Leftrightarrow$ existe $\{s_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ subsucesión de $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} s_{n_k} = s_0$ y $\forall\ \varepsilon > 0$, existe n_0 tal que $\forall\ n \geq n_0$, $s_n \geq r_0 - \varepsilon$.

DEMOSTRACION

i) $\Rightarrow$) Si $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} s_n = \infty$ se sigue inmediatamente, por lo que suponemos $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} s_n = s_0 < \infty$, $s_0 \in [-\infty, \infty)$. Claramente existe $\{s_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ subsucesión de $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} s_{n_k} = s_0$ Supongamos falso el resultado, entonces existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que dada $n \in \mathbb{N}$, existe $m_n \in \mathbb{N}$, $m_n \geq n$ tal que $s_{m_n} > s_0 + \varepsilon_0$, por lo tanto existe una subsucesión $\{s_{n_l}\}_{l=1}^{\infty}$ de $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\lim\limits_{l\to\infty} s_{n_l} = r_0 \geq s_0 + \varepsilon_0 > s_0$ lo que contradice la definición de s_0.

$\Leftarrow$) Se tiene $s_0 \in A = \left\{\text{conjunto de puntos límite de } \{s_n\}_{n=1}^{\infty}\right\}$. Si $s_0 \neq \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} s_n = \sup A \Rightarrow$ existe $r_0 \in A$ tal que $s_0 < r_0$. Sea $\rho \in \mathbb{R}$ tal que $s_0 < \rho < r_0$. Puesto que $r_0 \in A$ existe $\{s_{n_l}\}_{l=1}^{\infty}$ subsucesión de $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\lim\limits_{l\to\infty} s_{n_l} = r_0$, por lo que existe $l_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\ l \geq l_0$, $s_{n_l} > \rho = s_0 + \varepsilon_0$ con $\varepsilon_0 = \rho - s_0 > 0$ lo cual contradice nuestra hipótesis, así que $s_0 = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} s_n$.

ii) Ejercicio. ♦

El siguiente Teorema nos dirá más adelante que el criterio de Cauchy para convergencia de series con términos positivos, implica el criterio de D'Alambert.

<u>TEOREMA 1.2.26:</u>

Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$ tal que $a_n > 0\ \forall\ n \in \mathbb{N}$. Entonces:

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

<u>DEMOSTRACION:</u>

Sea $r = \overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Sea $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\ n \geq n_0$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r + \varepsilon$ $\forall\ n \geq n_0$, $a_{n+1} \leq (r + \varepsilon)a_n$. Así pues se tiene:

$a_{n_0+1} \leq (r + \varepsilon)\, a_{n_0}$;

$a_{n_0+2} \leq (r + \varepsilon)\, a_{n_0+1} \leq (r + \varepsilon)^2\, a_{n_0}$; etc.

Por inducción se sigue que $\forall\ n \geq n_0$, $a_n = a_{n_0+n-n_0} \leq (r + \varepsilon)^{n-n_0}\, a_{n_0} \Rightarrow$ $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} (r + \varepsilon)^{1-\frac{n_0}{n}} \sqrt[n]{a_{n_0}} = r + \varepsilon$. Es decir $\forall\ \varepsilon > 0$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq r + \varepsilon \Rightarrow$ $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq r = \overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Análogamente se prueba que $\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ y puesto que evidentemente se tiene que

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n},$$

se sigue el Teorema. ♦

COROLARIO 1.2.27:

Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$ tal que $a_n > 0\ \forall\ n \in \mathbb{N}$. Si $\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ converge, entonces $\left\{\sqrt[n]{a_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ converge y $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

DEMOSTRACION:

Si $\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ converge entonces $\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \Rightarrow$ $\underline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \Rightarrow \left\{\sqrt[n]{a_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ converge y $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. ♦

OBSERVACION 1.2.28:

Puede suceder que $\left\{\sqrt[n]{a_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ converge, pero $\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ diverge como lo prueba el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1.2.29:

Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dada por $a_{2n} = a_{2n-1} = \frac{1}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$, es decir:

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \ \dots\ , \frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^n}, \ \dots \right\}.$$

Se tiene que $\sqrt[2n]{a_{2n}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2}}$ y $\sqrt[2n-1]{a_{2n-1}} = \frac{1}{2^{\left(\frac{n}{2n-1}\right)}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Por lo tanto $\left\{\sqrt[n]{a_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ converge.

Por otro lado, $\dfrac{a_{2n}}{a_{2n-1}} = \dfrac{\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^n}} = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ y $\dfrac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = \dfrac{\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2^n}} = \dfrac{1}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{1}{2}$.

Por lo tanto $\left\{\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ no converge.

Ahora pasamos a definir el concepto de serie. Para esto primero definiremos lo que se conoce como series formales.

DEFINICION 1.2.30:

Sea $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq \mathbb{C}$ una sucesión. Se define la serie de las a_n como el símbolo formal

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots .$$

Definimos la suma de series como:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n).$$

Si $\lambda \in \mathbb{C}$, se define la multiplicación de una serie por un escalar por:

$$\lambda \bullet \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda\ a_n .$$

La multiplicación de series se define por:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \bullet \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n ,$$

donde $\forall\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, c_n es el número complejo definido por

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}\ b_k ,$$

es decir obtenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \bullet \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}\, b_k\right).$$

DEFINICION 1.2.31:

Asociada con una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ está una sucesión, la sucesión de sus sumas parciales definida como:

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k .$$

Si la sucesión $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ es convergente, entonces la serie se llama convergente y al límite de la sucesión se le llama la suma de la serie:

$$\lim_{n \to \infty} s_n = s = \text{suma de la serie } \sum_{n=0}^{\infty} a_n .$$

Si la sucesión $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ es divergente, entonces se dice que la serie es divergente.

En caso de que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sea convergente, frecuentemente se utiliza el mismo símbolo para la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y para denotar su suma.

EJEMPLOS 1.2.32:

1) Sea $a_n = n$, $n \in \mathbb{N}$, $s_n = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n\,(n+1)}{2}$, de donde $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$, por consiguiente la serie $\sum_{n=0}^{\infty} n$ diverge.

2) Sea $q \in \mathbb{C}$, $|q| < 1$, $a \in \mathbb{C}$. Sea $a_n = a\,q^n$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Entonces

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} a\,q^k = a\,\frac{1-q^{n+1}}{1-q}, \text{ por lo que}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a\,q^n = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left[a\,\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right] = \frac{a}{1-q}.$$

3) Sea $a_n = \left(\frac{1}{2^n} + i\,\frac{1}{3^n}\right)$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2^k} + i\,\frac{1}{3^k}\right) = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} + i\,\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}, \text{ por lo que}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n} + i\,\frac{1}{3^n}\right) = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} + i\,\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = 2 + \frac{3\,i}{2}.$$

4) Consideremos las series $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{n!}$, donde $x, y \in \mathbb{C}$. Entonces

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{n-k}}{(n-k)!}\cdot\frac{y^k}{k!}\right) =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\, x^{n-k}\, y^{k}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}\, y^{k}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\,(x+y)^{n}.$$

La siguiente Proposición nos muestra que si dos series convergen, entonces su suma y el producto por escalar convergen.

PROPOSICION 1.2.33:

Sean $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = r$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = s$, dos series convergentes, y sea $c \in \mathbb{C}$. Entonces las series $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$ y $\sum_{n=0}^{\infty} c\, a_n$ convergen y además:

i) $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = r + s = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

ii) $\sum_{n=0}^{\infty} c\, a_n = c\, r = c \sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

DEMOSTRACION:

Sea $r_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $s_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$, $t_n = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k)$, $u_n = \sum_{k=0}^{n} c\, a_k$. Entonces tendremos $t_n = r_n + s_n$, $u_n = c\, r_n$, $\lim_{n\to\infty} r_n = r$ y $\lim_{n\to\infty} s_n = s$.

i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n + b_n\right) = \lim_{n\to\infty} t_n = r + s = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n.$

ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c\, a_n = \lim_{n\to\infty} u_n = c\, r = c \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$ ♦

TEOREMA 1.2.34:

La serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge $\Leftrightarrow$ $\forall\ \varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\ m > n \geq n_0$, $\displaystyle\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| < \varepsilon.$

DEMOSTRACION:

Sea $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$. Se tiene que: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge $\Leftrightarrow$ $\left\{s_n\right\}_{n=0}^{\infty}$ converge $\Leftrightarrow$ $\left\{s_n\right\}_{n=0}^{\infty}$ es de Cauchy $\Leftrightarrow$ $\forall\ \varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\ m > n \geq n_0$, $\left|s_m - s_n\right| = \displaystyle\left|\sum_{k=0}^{m} a_k - \sum_{k=0}^{n} a_k\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| < \varepsilon.$ ♦

EJEMPLO 1.2.35:

Vamos a probar que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge. Supongamos que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ converge, entonces dado $\varepsilon = \frac{1}{3}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\ m > n \geq n_0$, $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k} < \varepsilon$. Sea $m = 2\ n$, entonces se tiene $\frac{1}{3} > \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$, es decir $\frac{1}{3} > \frac{1}{2}$, lo cual es absurdo y por lo tanto hemos probado que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (llamada la serie <u>armónica</u>) diverge.

El siguiente resultado nos dice como deber ser los términos de las series convergentes.

<u>PROPOSICION 1.2.36:</u>

Si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

<u>DEMOSTRACION:</u>

Sea $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ y sea $\lim_{n\to\infty} s_n = s$. Se tiene que $a_n = s_n - s_{n-1}$, $n \geq 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0$. ♦

<u>COROLARIO 1.2.37:</u>

Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie tal que la sucesión $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ no converge a 0. Entonces la serie diverge.

<u>DEMOSTRACION:</u>

Se sigue inmediatamente de la Proposición 1.2.36. ♦

OBSERVACION 1.2.38:

El recíproco de la Proposición 1.2.36 es falso, pues por ejemplo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge pero $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

TEOREMA 1.2.39 (CRITERIO DE DIRICHLET):

Sean $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$, tal que $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es decreciente (es decir $a_{n+1} \leq a_n \ \forall\ n \in \mathbb{N}$) con $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{C}$ tal que $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada, donde $r_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$. Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\, b_n$ converge.

DEMOSTRACION:

Por inducción se puede fácilmente probar que si $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k\, b_k$, entonces $\forall\ n > m$:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k\, b_k = s_n - s_{m-1} = \sum_{k=m}^{n-1} r_k\, \left(a_k - a_{k+1}\right) - r_{m-1}\, a_m + r_n\, a_n.$$

Entonces:

$$|s_n - s_{m-1}| \leq \sum_{k=m}^{n-1} |r_k|\, |(a_k - a_{k+1})| + |r_{m-1}|\, |a_m| + |r_n|\, |a_n| \leq$$

$$M \sum_{k=m}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) + M\, a_m + M\, a_n = M\, [a_m - a_n + a_m + a_n] = 2\, M\, a_m,$$

donde $|r_k| \leq M \ \forall \ k \in \mathbb{N}$ (observemos que $a_n \geq 0 \ \forall \ n \in \mathbb{N}$).

Dada $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall \ n \geq n_0$, $|a_n| < \frac{\varepsilon}{2M}$.

Sea $n > m \geq n_0 \Rightarrow |s_n - s_m| \leq 2 M a_m < 2M \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon \Rightarrow \{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy $\Rightarrow$ $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge. ♦

COROLARIO 1.2.40 (SERIES ALTERNANTES):

Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$ tal que $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es decreciente y $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$. Entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ es convergente.

DEMOSTRACION:

Sea $b_n = (-1)^n$, $r_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k = \begin{cases} -1 & \text{si } n \text{ es impar} \\ 0 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases} \Rightarrow |r_n| \leq 1$ $\forall \ n \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge. ♦

DEFINICION 1.2.41:

Sea $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie de números complejos. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ se llama <u>absolutamente convergente</u> si la serie de números reales no negativos $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge.

TEOREMA 1.2.42:

Si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente, entonces es convergente y se tiene $\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right| \le \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$.

<u>DEMOSTRACION:</u>

Sea $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall$ m, n $\ge n_0$, $\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| \le \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| < \varepsilon$, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ es de Cauchy y por lo tanto converge. Además se tiene que $\forall$ n $\in \mathbb{N}$, $\left|\sum_{k=0}^{n} a_k\right| \le \sum_{k=0}^{n} |a_k| \Rightarrow \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right| = \left|\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\sum_{k=0}^{n} a_k\right| \le \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} |a_k| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$. ♦

<u>OBSERVACION 1.2.43:</u>

El recíproco del Teorema 1.2.42 es falso, por ejemplo consideremos la <u>serie anarmónica</u> $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$: si $a_n = \frac{1}{n}$, entonces $a_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = a_n$, entonces por 1.2.40 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge pero no es absolutamente convergente pues la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

<u>DEFINICION 1.2.44:</u>

Una serie convergente pero que no es absolutamente convergente se llama condicionalmente convergente.

PROPOSICION 1.2.45:

Sea $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ una serie de números complejos, $z_n = x_n + i\, y_n$. Entonces $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ converge $\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ convergen.

DEMOSTRACION:

Es una aplicación inmediata de la Proposición 1.2.5 para sucesiones. ♦

Debido a que una serie absolutamente convergente es convergente, es importante saber cuáles series son absolutamente convergentes; éstas tienen términos no negativos, por lo que a continuación estudiaremos este tipo de series y algunos criterios para su convergencia.

PROPOSICION 1.2.46:

Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$ tal que $a_n \geq 0 \ \forall\ n \in \mathbb{N}$. Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge $\Leftrightarrow \{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ está acotada, donde $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

DEMOSTRACION:

Se tiene que $s_{n+1} - s_n = a_{n+1} \geq 0 \Rightarrow \{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ es creciente y por lo tanto $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge $\Leftrightarrow \{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ está acotada. ♦

TEOREMA 1.2.47 (TEOREMA DE COMPARACION):

Sean $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$ tales que $0 \leq a_n \leq b_n \ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Entonces se tiene:

i) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.

ii) Si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

DEMOSTRACION:

Sea $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $r_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$, $s_n \leq r_n \ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

i) Se tiene que $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} r_n = \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.

ii) Existe $M > 0$ tal que $r_n \leq M \ \forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow s_n \leq M \ \forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. ♦

EJEMPLO 1.2.48:

1) Consideremos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n+1)}$.

Sea $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_n = 1$,

por lo tanto $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n+1)} = 1$.

Ahora $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $(n + 1)^2 > n\ (n + 1) \Rightarrow \dfrac{1}{(n + 1)^2} < \dfrac{1}{n\ (n + 1)}$ entonces

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n + 1)^2} < 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\ (n + 1)} = 1 + 1 = 2$, por lo tanto

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ converge.

2) Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha \leq 1$, entonces $n^{\alpha} \leq n\ \forall\ n \in \mathbb{N} \Rightarrow \dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{n^{\alpha}}$ y puesto que

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ diverge, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\alpha}}$ diverge $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \leq 1$.

El siguiente es el criterio más importante (aún cuando es una consecuencia del Teorema de comparación) para las series con términos no negativos.

TEOREMA 1.2.49 (CRITERIO DE CAUCHY O DE LA RAÍZ):

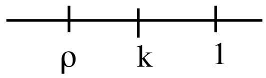
Sea $\left\{a_n\right\}_{n=0}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$, $a_n \geq 0\ \forall\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Sea $\rho = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n}$. Entonces:

i) Si $\rho < 1$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

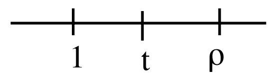
ii) Si $\rho > 1$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge.

iii) Si $\rho = 1$, no se puede afirmar nada.

DEMOSTRACION:

i) 

Sea $\rho < 1$. Sea $k \in \mathbb{R}$ tal que $\rho < k < 1$. Ahora, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\, n \geq n_0$, $\sqrt[n]{a_n} < k \Rightarrow a_n < k^n\ \forall\, n \geq n_0$. La serie $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} k^n$ converge pues $|k| = k < 1$. Entonces se tiene $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{n_0} a_n + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{n_0} a_n + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} k^n < \infty$, por lo tanto $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

ii) Sea $\rho > 1$. Sea $t \in \mathbb{R}$ tal que $1 < t < \rho$. 

Existe una subsucesión $\left\{a_{n_k}\right\}_{k=0}^{\infty}$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[n_k]{a_{n_k}} = \rho$. Existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\, k \geq k_0$, $\sqrt[n_k]{a_{n_k}} > t \Rightarrow a_{n_k} > t^{n_k}\ \forall\ k \geq k_0 \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = \infty$ pues $t > 1 \Rightarrow \left\{a_n\right\}_{n=0}^{\infty}$ no converge a 0, por lo tanto $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge.

iii) Se darán series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ tales que $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{b_n} = 1$, $a_n, b_n \geq 0$ y tales que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.

Sea $a_n = \frac{1}{n^2}$, $b_n = \frac{1}{n}$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{b_n} = 1$. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge. ♦

<u>TEOREMA 1.2.50 (CRITERIO DE D'ALAMBERT O DEL COCIENTE):</u>

Sea $\left\{a_n\right\}_{n=0}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$ tal que $a_n > 0\ \forall\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y sea $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$.

i) Si $\rho < 1$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

ii) Si $\rho > 1$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge.

iii) Si $\rho = 1$, no se puede afirmar nada.

DEMOSTRACION:

Por 1.2.26 se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$. Entonces i), ii) se siguen inmediatamente de 1.2.49. Para iii) se pueden dar los mismos ejemplos de 1.2.49 iii).

♦

EJEMPLOS 1.2.51:

1) Sea $x \in \mathbb{C}$, consideremos la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Sea $a_n = \frac{x^n}{n!}$, $|a_n| = \frac{|x|^n}{n!} \geq 0$. Si $x = 0$, es claro que la serie converge. Sea $x \neq 0$, entonces $|a_n| > 0$. Se tiene $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|x|^n}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1$, por lo que serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ es absolutamente convergente $\forall\, x \in \mathbb{C}$.

2) Sea $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$, $a_n = \frac{n!}{n^n}$, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} =$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1$, por lo tanto $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ converge.

Además se tiene que $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.

3) Consideremos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{c^n}$ con $c \in \mathbb{C}$, $|c| > 1$, $p \in \mathbb{R}$.

Sea $a_n = \frac{n^p}{c^n}$, $|a_n| = \frac{n^p}{|c|^n} > 0$. Entonces $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^p}{|c|^n}} = \frac{1}{|c|} < 1$.

Por lo tanto la serie es absolutamente convergente y por lo tanto convergente.

Además $\lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{c^n} = 0$.

A continuación damos el Teorema de Cauchy sobre la convergencia de un producto de series.

<u>TEOREMA 1.2.52:</u>

Sean $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq \mathbb{C}$ tal que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$ es absolutamente convergente y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = r$ es convergente. Entonces se tiene que la serie $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \bullet \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}\, b_k\right)$ es convergente y se tiene $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \bullet \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = r\,s$.

DEMOSTRACION:

Sean $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $t_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$, $u_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$, donde $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_{k-i}\, b_i$, $r_n = \sum_{k=0}^{n} |a_k|$.

Se tiene que $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, $\lim_{n\to\infty} t_n = r$. Por inducción es fácil ver que $u_n = \sum_{k=0}^{n} c_k = \sum_{k=0}^{n} a_k\, t_{n-k}$. Ahora $s_n\, t_n - u_n = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) t_n - u_n = \sum_{k=0}^{n} a_k\, t_n - \sum_{k=0}^{n} a_k\, t_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a_k \left(t_n - t_{n-k}\right)$. Ahora $\{r_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{t_n\}_{n=0}^{\infty}$ son convergentes, existe $M > 0$ tal que $|r_n| < M$ y $|t_n| < M\ \forall\, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Sea $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\ m, n \geq n_0$, $|t_m - t_n| < \frac{\varepsilon}{3\,M}$ y $|r_m - r_n| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| < \frac{\varepsilon}{3\,M}$. Sea $n \geq 2\,n_0$, entonces $n - n_0 + 1 \geq 2n_0 - n_0 + 1 = n_0 + 1 > n_0$, por lo que $|s_n\, t_n - u_n| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k|\, |t_n - t_{n-k}| = \sum_{k=0}^{n_0} |a_k|\, |t_n - t_{n-k}| + \sum_{k=n_0+1}^{n} |a_k|\, |t_n - t_{n-k}|$.

Ahora en la primera suma, $k \le n_0 \Rightarrow n - k \ge n - n_0 > n_0 \Rightarrow |t_n - t_{n-k}| < \frac{\varepsilon}{3M}$; además $|t_n - t_{n-k}| \le |t_n| + |t_{n-k}| \le 2M \ \forall \ k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \Rightarrow |s_n t_n - u_n|$

$$\le \sum_{k=0}^{n_0} |a_k| \left(\frac{\varepsilon}{3M}\right) + \sum_{k=n_0+1}^{n} |a_k| (2M) = \left(\frac{\varepsilon}{3M}\right) \left(\sum_{k=0}^{n_0} |a_k|\right) + (2M) \left(\sum_{k=n_0+1}^{n} |a_k|\right) <$$

$$\frac{\varepsilon}{3M} \bullet M + 2M \bullet \frac{\varepsilon}{3M} = \varepsilon.$$

Ahora $\left\{s_n t_n\right\}_{n=0}^{\infty}$ es convergente y $\lim_{n\to\infty} s_n t_n = s\, r$, por lo tanto $\left\{u_n\right\}_{n=0}^{\infty}$ es convergente con $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \bullet \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} s_n t_n = s\, r.$ ♦

<u>OBSERVACION 1.2.53:</u>

Si ninguna de las series es absolutamente convergente en el Teorema anterior, el producto no tiene porque ser convergente, por ejemplo si $a_n = b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, entonces por 1.2.40 se tiene que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ es convergente. Ahora consideremos el producto

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) \bullet \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \quad \text{con} \quad c_n = \sum_{k=1}^{n} a_k\, b_{n-k+1} =$$

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \frac{(-1)^{n-k+1}}{\sqrt{n-k+1}}\right) = (-1)^{n+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k\,(n-k+1)}}.$$ Puesto que $1 \le k \le n$,

$n - k + 1 \leq n - 1 + 1 = n \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{k\,(n-k+1)}} \geq \dfrac{1}{\sqrt{n}} \bullet \dfrac{1}{\sqrt{n}} = \dfrac{1}{n}$, por lo tanto

$|c_n| = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k\,(n-k+1)}} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = 1 \;\forall\, n \in \mathbb{N}$, por lo tanto $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ es divergente.

Terminamos este Capítulo demostrando un criterio de convergencia relacionado con la integral de Riemann.

TEOREMA 1.2.54 (CAUCHY-MACLAURIN O CRITERIO DE LA INTEGRAL):

Sea $f : [1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función decreciente tal que $f(x) \geq 0 \;\forall\, x \in [1, \infty)$ y f continua. Sea $f(n) = a_n$, $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge $\Leftrightarrow \displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{M\to\infty} \int_1^{M} f(x)\,dx$ existe.

DEMOSTRACION:

Sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\forall\, x \in [n, n+1]$, $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$, por lo cual

$$\int_n^{n+1} f(n+1)\,dx = f(n+1) = a_{n+1} \leq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq \int_n^{n+1} f(n)\,dx = a_n \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i+1} \leq \sum_{i=1}^{n} \int_i^{i+1} f(x)\,dx = \int_1^{n+1} f(x)\,dx \leq \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Sea $s_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i$, $s_{n+1} - a_1 \leq \displaystyle\int_1^{n+1} f(x)\,dx \leq s_n$.

Por lo tanto, si $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge entonces si $\displaystyle\lim_{n\to\infty} s_n = s$, se tiene que $s - a_1 \leq \displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_1^{n+1} f(x)\,dx \leq s$. Ahora puesto que dada $1 \leq M \in \mathbb{R}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$n \leq M \leq n+1$, $\int_1^n f(x)\,dx \leq \int_1^M f(x)\,dx \leq \int_1^{n+1} f(x)\,dx$, por lo que $\lim\limits_{n\to\infty} \int_1^{n+1} f(x)\,dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int_1^M f(x)\,dx$ la cual existe.

Recíprocamente, si tal integral existe, entonces se tiene $s_{n+1} \leq \int_1^{n+1} f(x)\,dx + a_1 \leq \int_1^{\infty} f(x)\,dx + a_1$, lo que dice que $\left\{s_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ está acotada y por lo tanto $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

♦

EJEMPLO 1.2.55:

Sea $p \in \mathbb{R}$, $p > 0$, $p \neq 1$. consideremos la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$. Sea $f : [1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^p}$.

Puesto que $f'(x) = -\,p\,x^{-p-1} < 0\ \forall\ x \in [1, \infty)$, se tiene que f(x) es decreciente y $f(n) = \frac{1}{n^p} = a_n$. Ahora $\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{M\to\infty} \int_1^M f(x)\,dx = \lim\limits_{M\to\infty} \int_1^M x^{-p}\,dx = \lim\limits_{M\to\infty} \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_1^M = \lim\limits_{M\to\infty} \frac{1}{1-p}\left[\frac{1}{M^{p-1}} - 1\right]$ el cual existe $\Leftrightarrow p - 1 > 0 \Leftrightarrow p > 1$. Es decir $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge $\Leftrightarrow$ $p > 1$ (para $p > 0$). Recordando el Ejemplo 1.2.48 (2), se tiene que en general, si $p \in \mathbb{R}$ es arbitrario, entonces

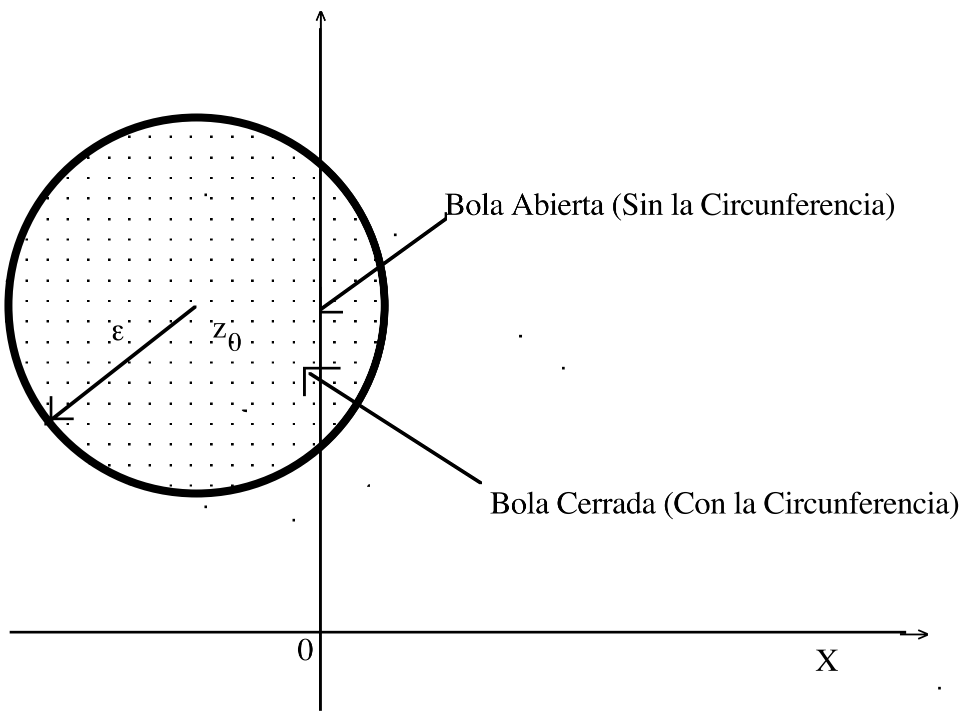
$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ converge} \Leftrightarrow p > 1}.$$

CAPITULO 2.

TOPOLOGIA DE $\mathbb{C}$ Y FUNCIONES CONTINUAS

§ 1. Topología de $\mathbb{C}$.

DEFINICION 2.1.1:



Sea $z_0 \in \mathbb{C}$, y sea $\varepsilon > 0$. Entonces se define $B\left(z_0, \varepsilon\right) = B_\varepsilon(z_0) = V_\varepsilon(z_0) = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \left| z - z_0 \right| < \varepsilon \right\}$ = Bola abierta con centro en z_0 y radio ε. Similarmente, se define Bola cerrada con centro en z_0 y radio ε por $\overline{B}\left(z_0, \varepsilon\right) = \overline{B}_\varepsilon(z_0) = \overline{V}_\varepsilon(z_0) = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \left| z - z_0 \right| \leq \varepsilon \right\}$.

DEFINICION 2.1.2:

Un conjunto $A \subseteq \mathbb{C}$, se llama <u>abierto</u> si $\forall\ z \in A$, existe un $\varepsilon_z > 0$ tal que $B\left(z,\ \varepsilon_z\right) \subseteq A$.

TEOREMA 2.1.3:

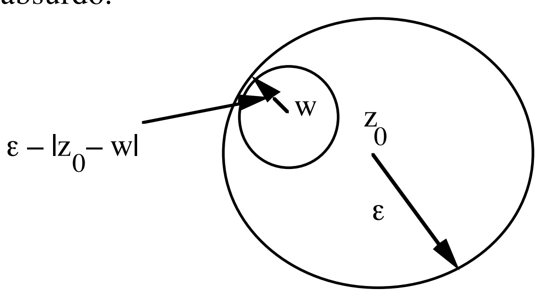
(i) $\mathbb{C}$, $\emptyset$ y $B\left(z_0,\ \varepsilon\right)\ \forall\ z_0 \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$ son conjuntos abiertos.

(ii) Si $G_1, \ldots, G_n$ son conjuntos abiertos, entonces $\bigcap_{k=1}^{n} G_k$ es un conjunto abierto.

(iii) Si $\left\{G_\alpha\right\}_{\alpha \in A}$ es una colección de conjuntos abiertos, entonces $\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ es un conjunto abierto.

DEMOSTRACION:

i) Si $z \in \mathbb{C}$, sea $\varepsilon = 1$, $B(z,\ 1) \subseteq \mathbb{C}$ por lo que $\mathbb{C}$ es abierto.
Si $\emptyset$ no fuese abierto, existiría $z_0 \in \emptyset$ tal que $\forall\ \varepsilon > 0$, $B\left(z_0,\ \varepsilon\right) \nsubseteq \emptyset$, lo cual es absurdo.



Sea $z_0 \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$. Tomemos $w \in B\left(z_0,\ \varepsilon\right)$. Sea $\delta = \varepsilon - \left|z_0 - w\right| > 0$. Afirmamos que $B\left(w,\ \delta\right) \subseteq B\left(z_0,\ \varepsilon\right)$. En efecto, sea $u \in B\left(w,\ \delta\right)$, entonces $|w - u| < \delta$, por lo que $\left|u - z_0\right| =$

$|u - w + w - z_0| \leq |u - w| + |w - z_0| < \delta + |w - z_0| = \varepsilon \Rightarrow u \in B(z_0, \varepsilon)$ y por lo tanto $B(z_0, \varepsilon)$ es abierta.

ii) Sea $z_0 \in \bigcap_{k=1}^{n} G_k$. Para cada $1 \leq k \leq n$, existe $\varepsilon_k > 0$ tal que se tiene $B(z_0, \varepsilon_k) \subseteq G_k$. Sea $\varepsilon = \min \{\varepsilon_k \mid 1 \leq k \leq n\} > 0$. Claramente se tiene que $B(z_0, \varepsilon) \subseteq B(z_0, \varepsilon_k) \subseteq G_k$, para $1 \leq k \leq n \Rightarrow B(z_0, \varepsilon) \subseteq \bigcap_{k=1}^{n} G_k$, es decir $\bigcap_{k=1}^{n} G_k$ es abierto.

iii) Sea $z_0 \in \bigcup_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha$. Existe $\alpha \in \Lambda$ tal que $z_0 \in G_\alpha$. Puesto que G_α es abierto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(z_0, \varepsilon) \subseteq G_\alpha \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha$, es decir $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha$ es abierto. ♦

DEFINICION 2.1.4:

$F \subseteq \mathbb{C}$ se llama cerrado si $F^c = \mathbb{C} - F$ es abierto.

COROLARIO 2.1.5:

(1) $\emptyset$ y $\mathbb{C}$ son cerrados.

(ii) Si $G_1, \ldots, G_n$ son conjuntos cerrados, entonces $\bigcup_{k=1}^{n} G_k$ es un conjunto cerrado.

(iii) Si $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es una colección de conjuntos cerrados, entonces $\bigcap_{\alpha \in A} G_\alpha$ es un conjunto cerrado.

DEMOSTRACION:

En el Teorema 2.1.3 se aplican las leyes de Morgan al tomar complementos.

♦

Capítulo 2

DEFINICION 2.1.6:

Sea $A \subseteq \mathbb{C}$. Entonces se definen los siguientes conjuntos:

$\mathring{A}$ = <u>Interior de A</u> = $\bigcup \{G \mid G \subseteq A$ y G es un conjunto abierto$\}$.

$\bar{A}$ = <u>Cerradura de A</u> = $\bigcap \{F \mid A \subseteq F$ y F es un conjunto cerrado$\}$.

∂A = <u>Frontera de A</u> = $\bar{A} \cap \overline{A^c}$.

$z_0 \in \mathbb{C}$ se llama <u>Punto de Acumulación</u> de A si $\forall\ \varepsilon > 0$, $\left[B\left(z_0, \varepsilon\right) - \{z_0\}\right] \cap A \neq \emptyset$.

A' = <u>Conjunto derivado de A</u> = $\{z \in \mathbb{C} \mid z$ es un punto de acumulación de A$\}$.

EJEMPLO 2.1.7:

Si $A = \{x + i\,y \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$, entonces $\mathring{A} = \emptyset$, $\bar{A} = \partial A = A' = \mathbb{C}$.

PROPOSICION 2.1.8:

(1) $\mathring{A} \subseteq A$, $A \subseteq \bar{A}$, $\partial A \subseteq \bar{A}$, $A' \subseteq \bar{A}$.

(2) A es abierto $\Leftrightarrow A = \mathring{A}$.

(3) A es cerrado $\Leftrightarrow A = \bar{A}$.

(4) $\left(\overline{A^c}\right)^c = \mathring{A}$, $\bar{A} = \left(\left(A^c\right)^\circ\right)^c$, $\partial A = \bar{A} - \mathring{A}$.

(5) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

(6) $\left(A \cap B\right)^\circ = \mathring{A} \cap \mathring{B}$.

(7) $\overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cap \bar{B}$ y en general $\overline{A \cap B} \neq \bar{A} \cap \bar{B}$.

(8) $\left(A \cup B\right)^\circ \supseteq \mathring{A} \cup \mathring{B}$, y en general $\left(A \cup B\right)^\circ \neq \mathring{A} \cup \mathring{B}$.

(9) $z_0 \in \bar{A} \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0$, $B\left(z_0, \varepsilon\right) \cap A \neq \emptyset$.

(10) $z_0 \in \mathring{A} \Leftrightarrow \exists\ \varepsilon > 0$ tal que $B\left(z_0, \varepsilon\right) \subseteq A$.

(11) $z_0 \in \partial A \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0$, $B\left(z_0, \varepsilon\right) \cap A \neq \emptyset$ y $B\left(z_0, \varepsilon\right) \cap A^c \neq \emptyset$.

DEMOSTRACION:

Ejercicio ♦

El concepto de abierto y cerrado tienen una generalización inmediata al concepto de abierto y cerrado relativo a un conjunto y dichos conceptos serán muy útiles tanto para estudiar la conexidad como para las funciones continuas.

DEFINICION 2.1.9:

Sea $A \subseteq \mathbb{C}$. Decimos que $B \subseteq A$ es abierto (cerrado) en A si existe un conjunto abierto (cerrado) U en $\mathbb{C}$ tal que $B = A \cap U$.

PROPOSICION 2.1.10:

Sea $A \subseteq \mathbb{C}$. Entonces:

(1) Si $X \subseteq A$ es abierto en A entonces $A - X$ es cerrado en A.

(2) Si $Y \subseteq A$ es cerrado en A entonces $A - Y$ es abierto en A.

(3) Si $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es una familia de conjuntos abiertos en A, entonces $\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ es un conjunto abierto en A.

(4) Si $\{Y_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es una familia de conjuntos cerrados en A entonces $\bigcap_{\alpha \in A} Y_\alpha$ es un conjunto cerrado en A.

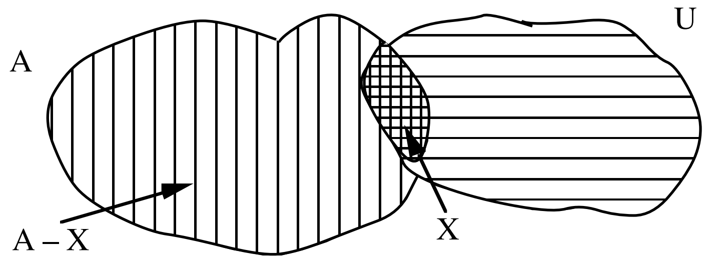
(5) Si $X_1, \ldots, X_n$ son abiertos en A, entonces $\bigcap_{k=1}^{n} X_k$ es un conjunto abierto en A.

(6) Si $Y_1, \ldots, Y_n$ son cerrados en A, entonces $\bigcup_{k=1}^{n} Y_k$ es un conjunto cerrado en A.

(7) Ø y A son conjuntos a la vez abiertos y cerrados en A.

DEMOSTRACION:

(1) Sea U abierto tal que $X = A \cap U$. U^c es cerrado en $\mathbb{C}$ y $A - X = A \cap X^c = A \cap (A \cap U)^c = A \cap (A^c \cup U^c) = (A \cap A^c) \cup (A \cap U^c) = A \cap U^c \Rightarrow A - X$ es cerrado en A.



(2) Ejercicio.

(3) Para cada $\alpha \in \Lambda$, sea U_α abierto tal que $X_\alpha = A \cap U_\alpha$. Se tiene que $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} (A \cap U_\alpha) = A \cap \left(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha\right)$ y puesto que $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha$ es un conjunto abierto de $\mathbb{C}$, se sigue que $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ es abierto en A.

(4)
(5)
(6)
(7)

} Ejercicio.

♦

PROPOSICION 2.1.11:

Sea $A \subseteq \mathbb{C}$. Entonces:

(i) A es cerrado $\Leftrightarrow A' \subseteq A$.

(ii) $z_0 \in \bar{A} \Leftrightarrow$ Existe una sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A$ tal que $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$.

(iii) $z_0 \in A' \Leftrightarrow$ Existe una sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A$, $z_n \neq z_0$ $\forall$ $n \in \mathbb{N}$ tal que $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$.

DEMOSTRACION:

i) $\Rightarrow$) Supongamos A cerrado. Sea $z_0 \notin A \Rightarrow z_0 \in A^c$, A^c es abierto por lo que existe $\varepsilon > 0$ tal que $B\left(z_0, \varepsilon\right) \subseteq A^c \Rightarrow B\left(z_0, \varepsilon\right) \cap A = \emptyset$, por lo que $\left(B\left(z_0, \varepsilon\right) - \left\{z_0\right\}\right) \cap A = \emptyset \Rightarrow z_0 \notin A'$, lo cual demuestra que $A' \subseteq A$.

$\Leftarrow$) Sea $z_0 \in A^c$, entonces $z_0 \notin A$ por lo que $z_0 \notin A'$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $\left(B\left(z_0, \varepsilon\right) - \left\{z_0\right\}\right) \cap A = \emptyset \Rightarrow B\left(z_0, \varepsilon\right) - \left\{z_0\right\} \subseteq A^c$ y $z_0 \in A^c \Rightarrow B\left(z_0, \varepsilon\right) \subseteq A^c$ por lo que A^c es abierto, es decir A es cerrado.

ii) $\Rightarrow$) Sea $z_0 \in \bar{A}$. Sea $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Se tiene que $B\left(z_0, \varepsilon_n\right) \cap A \neq \emptyset$, por lo cual podemos elegir $z_n \in B\left(z_0, \varepsilon_n\right) \cap A$. Entonces $\left\{z_n\right\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A$ y claramente $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = z_0$.

$\Leftarrow$) Sea $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\ n \geq n_0$, $z_n \in B\left(z_0, \varepsilon\right) \cap A \Rightarrow B\left(z_0, \varepsilon\right) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow z_0 \in \bar{A}$.

iii) Ejercicio. ♦

§ 2. Conexidad.

La idea geométrica de un conjunto conexo en $\mathbb{C}$, es la de un conjunto que consta de un solo pedazo.

DEFINICION 2.2.1:

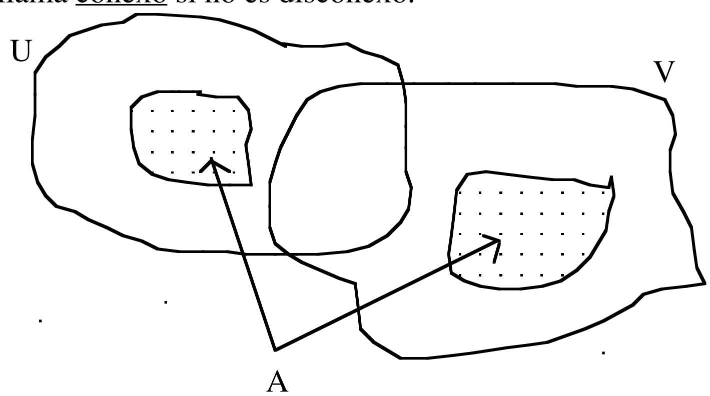
$A \subseteq \mathbb{C}$ se llama disconexo, si existen dos conjuntos abiertos U y V en $\mathbb{C}$ tales que:

(i) $A \cap U \neq \emptyset \neq A \cap V$.

(ii) $A \cap U \cap V = \emptyset$.

(iii) $A \subseteq U \cup V$.

$B \subseteq \mathbb{C}$ se llama <u>conexo</u> si no es disconexo.



<u>TEOREMA 2.2.2:</u>

$X \subseteq \mathbb{R}$ es conexo $\Leftrightarrow$ X es un intervalo.

<u>DEMOSTRACION:</u>

Ejercicio. ♦

El siguiente resultado es la caracterización de la conexidad con respecto a la topología relativa.

<u>TEOREMA 2.2.3:</u>

$A \subseteq \mathbb{C}$ es conexo $\Leftrightarrow$ los únicos abiertos y cerrados a la vez en A son A y Ø.

<u>DEMOSTRACION:</u>

$\Rightarrow$) Sea A conexo y supongamos que existe $B \subseteq A$, $B \neq A$, $B \neq \emptyset$ tal que B es abierto y cerrado a la vez en A. Entonces B y $A - B$ son abiertos en A, por lo que existen conjuntos abiertos U y V tales que $B = A \cap U$, $A - B = A \cap V$. Entonces U y V cumplen:

1) $A \cap U = B \neq \emptyset$, $A - B = A \cap V \neq \emptyset$,

2) $A \cap V \cap U = (A \cap U) \cap (A \cap B) = B \cap (A - B) = \emptyset$,
3) $A = B \cup (A - B) = (A \cap U) \cup (A \cap V) = A \cap (U \cup V) \Rightarrow A \subseteq U \cup V$.

Por lo que A es disconexo, lo cual contradice nuestras hipótesis.

$\Leftarrow$) Supongamos que A es disconexo, entonces existen dos abiertos U y V en $\mathbb{C}$ tales que $U \cap A \neq \emptyset$, $V \cap A \neq \emptyset$, $A \subseteq U \cup V$ y $A \cap U \cap V = \emptyset$. Sean $A_1 = A \cap U \neq \emptyset$, $A_2 = A \cap V \neq \emptyset$. Se tiene que A_1 y A_2 son dos abiertos no vacíos de A.

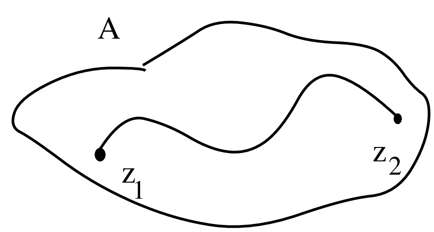
Se tiene que $A_1 \cap A_2 = A \cap U \cap V = \emptyset$ y $A_1 \cup A_2 = A$ lo cual implica que $A_2 = A - A_1$ por lo cual A_2 es un abierto y cerrado en A, $A_2 \neq \emptyset$ y puesto que $A_1 = A - A_2 \neq \emptyset$, $A_2 \neq A$ lo cual contradice nuestras hipótesis y de lo que se concluye que A es conexo. ♦

<u>DEFINICION 2.2.4:</u>

Una curva $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ se llama <u>continua</u> en $t_0 \in [a,b]$ si para cualquier sucesión $\{t_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq [a, b]$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = t_0$ se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma(t_n) = \gamma(t_0)$.

<u>DEFINICION 2.2.5:</u>

Sea $A \subseteq \mathbb{C}$. Entonces una <u>curva en A</u> es una función continua $\gamma : [0, 1] \longrightarrow A$ y A se llama <u>arco-conexo</u> si para cualesquiera dos puntos z_1, z_2 en A, existe una curva γ en A tal que $\gamma(0) = z_1$ y $\gamma(1) = z_2$.



La relación entre conexidad y arco-conexidad nos la da el siguiente resultado.

<u>TEOREMA 2.2.6:</u>

(i) Si A es arco-conexo, entonces A es conexo.
(ii) Si A es abierto y conexo, entonces A es arco-conexo.

<u>DEMOSTRACION:</u>

Ejercicio. ♦

<u>DEFINICION 2.2.7:</u>

$\Omega \subseteq \mathbb{C}$ se llama <u>región</u> si Ω es abierto y conexo.

<u>§ 3. Conjuntos Compactos.</u>

<u>DEFINICION 2.3.1:</u>

Sea $A \subseteq \mathbb{C}$ y sea $\{B_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una colección de subconjuntos de $\mathbb{C}$. Si $A \subseteq \bigcup_{\alpha\in\Lambda} B_\alpha$, entonces a $\{B_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ se le llama <u>cubierta</u> de A. Si además B_α es abierto para todo α, entonces $\{B_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ se llama <u>cubierta abierta</u> de A.

Si $\{B_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es una cubierta de A, entonces una <u>subcubierta</u> es una colección $\{C_\beta\}_{\beta\in\Phi}$ tal que para cada $\beta \in \Phi$, existe $\alpha \in \Lambda$ tal que $C_\beta = B_\alpha$ y además $A \subseteq \bigcup_{\beta\in\Phi} C_\beta$.

<u>DEFINICION 2.3.2:</u>

$A \subseteq \mathbb{C}$ se llama <u>compacto</u> si toda cubierta abierta de A, tiene una subcubierta finita.

La definición anterior es, en principio, difícil de manejar y aún de entender, sin embargo, los dos siguientes resultados nos caracterizan cuales son lo conjuntos compactos en el plano complejo.

TEOREMA 2.3.4 (HEINE-BOREL):

$A \subseteq \mathbb{C}$ es compacto $\Leftrightarrow$ A es cerrado y acotado.

DEMOSTRACION:

Ejercicio. ♦

TEOREMA 2.3.5:

$A \subseteq \mathbb{C}$ es compacto $\Leftrightarrow$ para toda sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A$, existe una subsucesión $\{z_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} z_{n_k} = z_0 \in A$.

DEMOSTRACION:

$\Rightarrow$) Sea $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A$, A acotado por lo que $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada y por el Teorema de Bolzano-Weierstrass se tiene que existe una subsucesión $\{z_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ convergente. Sea $\lim\limits_{k\to\infty} z_{n_k} = z_0 \in \bar{A} = A$ (por ser A cerrado) lo que demuestra la conclusión.

$\Leftarrow$) Primero veamos que A es acotado. Supongamos que A no es acotado, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $z_n \in A$ tal que $|z_n| \geq n$. Se tiene que $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ no tiene ninguna subsucesión acotada, por lo cual no tiene ninguna subsucesión convergente, lo cual es una contradicción. Así pues A es acotado.

Por último veamos que A es cerrado. Sea $z_0 \in \bar{A}$, existe $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$. Por hipótesis, existe una subsucesión $\{z_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} z_{n_k} = w_0 \in A$, pero $w_0 = z_0 \in A$, lo cual prueba que $\bar{A} = A$ y por lo tanto A es cerrado.

♦

<u>§ 4. Funciones Continuas.</u>

<u>DEFINICION 2.4.1:</u>

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto cualquiera y sea $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$.

(1) Sea $z_0 \in \Omega'$. Se dice que $w_0 = \lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ si dada $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que $\forall\, z \in \Omega$ con $0 < |z - z_0| < \delta$, se tiene que $|f(z) - w_0| < \varepsilon$.

(2) Sea $z_0 \in \Omega$. f se llama <u>continua</u> en z_0 si dada $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que $\forall\, z \in \Omega$ con $0 < |z - z_0| < \delta$, se tiene que $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.

<u>OBSERVACION 2.4.2:</u>

(1) Si $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ y $z_0 \in \Omega \cap \Omega'$, entonces f es continua en $z_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$.

(2) Si $z_0 \in \Omega - \Omega'$, entonces f siempre es continua en z_0.

La verificación de estas 2 observaciones se dejan de ejercicio al lector.

<u>EJEMPLOS 2.4.3:</u>

(1) Sea $f : \mathbb{C} - \{1\} \longrightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \dfrac{z^2 - 1}{z - 1}$, entonces $\lim\limits_{z\to 1} f(z) = 2$.

(2) Sea $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \overline{z}$. Entonces $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f\left(z_0\right)$. En efecto, sea $\varepsilon > 0$ y sea $\delta = \varepsilon$, $0 < \left|z - z_0\right| < \delta \Rightarrow \left|f(z) - f\left(z_0\right)\right| = \left|\overline{z} - \overline{z_0}\right| = \left|\overline{z - z_0}\right| = \left|z - z_0\right| < \delta = \varepsilon$.

PROPOSICION 2.4.4:

Sea $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ y sea $a \in \Omega$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1) f es continua en a.
(2) Dada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $f\left(B\left(a, \delta\right) \cap \Omega\right) \subseteq B\left(f(a), \varepsilon\right)$.
(3) Para toda sucesión $\left\{z_n\right\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \Omega$ tal que $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = a$, se tiene que $\lim\limits_{n \to \infty} f\left(z_n\right) = f(a)$.

DEMOSTRACION:

<u>(1) ⇒ (2):</u> Sea $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\forall\ z \in \Omega$ con $|z - a| < \delta$, $|f(z) - f(a)| < \varepsilon \Rightarrow z \in B\left(a, \delta\right) \cap \Omega$, $f(z) \in B\left(f(a), \varepsilon\right) \Rightarrow f\left(B\left(a, \delta\right) \cap \Omega\right) \subseteq B\left(f(a), \varepsilon\right)$.

<u>(2) ⇒ (1):</u> Sea $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $f\left(B\left(a, \delta\right) \cap \Omega\right) \subseteq B\left(f(a), \varepsilon\right)$, es decir $\forall\ z \in B\left(a, \delta\right) \cap \Omega$, $f(z) \in B\left(f(a), \varepsilon\right) \Rightarrow \forall\ z \in \Omega$ con $|z - a| < \delta$, $|f(z) - f(a)| < \varepsilon$.

<u>(1) ⇔ (3):</u> Ejercicio. ♦

TEOREMA 2.4.5:

Sean f, g : $\Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, f y g continuas en a. Entonces $f \pm g$ y $f \bullet g$ son continuas en a. Además si $g(a) \neq 0$, entonces $\frac{f}{g}$ es continua en a.

DEMOSTRACION:

Sea $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \Omega$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$. Puesto que f y g son continuas en a, se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = f(a)$ y $\lim\limits_{n\to\infty} g(z_n) = g(a)$.

Se sigue de las propiedades de sucesiones que:
$\lim\limits_{n\to\infty}\left(f(z_n) \pm g(z_n)\right) = f(a) \pm g(a)$ y $\lim\limits_{n\to\infty}\left(f(z_n) \bullet g(z_n)\right) = f(a) \bullet g(a)$, por lo que $f \pm g$ y $f \bullet g$ son continuas en a.

Si además $g(a) \neq 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\ n \geq n_0$, $g(z_n) \neq 0$. Entonces
$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f}{g}(z_n) = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)}{\lim\limits_{n\to\infty} g(z_n)} = \dfrac{f(a)}{g(a)} = \dfrac{f}{g}(a)$, por lo que $\frac{f}{g}$ es continua en a. ♦

TEOREMA 2.4.6:

Sean $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{C}$, $f : \Omega_1 \longrightarrow \mathbb{C}$, $g : \Omega_2 \longrightarrow \mathbb{C}$, tales que $f(\Omega_1) \subseteq \Omega_2$. Si f es continua en $z_0 \in \Omega_1$, y g es continua en $w_0 = f(z_0) \in \Omega_2$, entonces $g \circ f$ es continua en z_0.

DEMOSTRACION:

Sea $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \Omega_1$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$. Sea $f(z_n) = w_n \in \Omega_2$. Puesto que f es continua en z_0, $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = \lim\limits_{n\to\infty} w_n = w_0 = f(z_0)$ y puesto que g es continua en w_0, $\lim\limits_{n\to\infty} g(w_n) = g(w_0) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(g \circ f)(z_n) = \lim\limits_{n\to\infty} g(f(z_n)) = \lim\limits_{n\to\infty} g(w_n) = g(w_0) = g(f(z_0)) = (g \circ f)(z_0)$ lo cual demuestra que $g \circ f$ es continua en z_0. ♦

Las dos proposiciones anteriores nos demuestran que la continuidad se conserva en las operaciones algebraicas. El siguiente Teorema nos caracteriza la continuidad global por medio de la topología relativa.

TEOREMA 2.4.7:

Sea $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1) f es continua en Ω.
(2) Para todo $A \subseteq \mathbb{C}$ abierto, $f^{-1}(A)$ es abierto en Ω.
(3) Para todo $A \subseteq \mathbb{C}$ cerrado, $f^{-1}(A)$ es cerrado en Ω.

DEMOSTRACION:

(1) $\Rightarrow$ (2): Sea $A \subseteq \mathbb{C}$ abierto. Sea $z_0 \in f^{-1}(A)$, entonces $f(z_0) \in A$, A abierto por lo que existe $\varepsilon > 0$ tal que $B\big(f(z_0), \varepsilon\big) \subseteq A$. Puesto que f es continua en z_0, existe $\delta > 0$ tal que $f\big(B(z_0, \delta) \cap \Omega\big) \subseteq B\big(f(z_0), \varepsilon\big) \Rightarrow B(z_0, \delta) \cap \Omega \subseteq f^{-1}\Big(B\big(f(z_0), \varepsilon\big)\Big) \subseteq f^{-1}(A)$.

Hemos probado que para cada $z \in f^{-1}(A)$, existe $\delta_z > 0$ tal que $B(z, \delta_z) \cap \Omega \subseteq f^{-1}(A)$. De esto es inmediato que $f^{-1}(A) = \bigcup_{z \in f^{-1}(A)} \big(B(z, \delta_z) \cap \Omega\big) = \Omega \cap \Big[\bigcup_{z \in f^{-1}(A)} B(z, \delta_z)\Big]$ y puesto que $\bigcup_{z \in f^{-1}(A)} B(z, \delta_z)$ es abierto, se sigue que $f^{-1}(A)$ es abierto en Ω.

(2) $\Rightarrow$ (3): Sea A cerrado $\Rightarrow A^c$ es abierto, entonces por hipótesis $f^{-1}(A^c)$ es abierto en Ω y $\Omega - f^{-1}(A^c)$ es cerrado en Ω. Se tiene que $f^{-1}(A) = f^{-1}\big((A^c)^c\big) = \Omega - f^{-1}(A^c)$ por lo que $f^{-1}(A)$ es cerrado en Ω.

<u>(3) ⇒ (1):</u> Supongamos que existe $z_0 \in \Omega$ tal que f no es continua en z_0. Entonces existe $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \Omega$ tal que $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$ pero $\lim_{n\to\infty} f(z_n) \neq f(z_0)$ por lo que existe $\varepsilon_0 > 0$ y una subsucesión $\left\{z_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ tal que $\left|f\left(z_{n_k}\right) - f(z_0)\right| \geq \varepsilon_0$ $\forall$ $k \in \mathbb{N}$ lo cual implica que $f\left(z_{n_k}\right) \in \left[B\left(f(z_0), \varepsilon_0\right)\right]^c$ el cual es cerrado $\Rightarrow$ $z_{n_k} \in f^{-1}\left[B\left(f(z_0), \varepsilon_0\right)^c\right]$ que por hipótesis era un conjunto cerrado en Ω y puesto que $\lim_{k\to\infty} z_{n_k} = z_0$ se tiene que $z_0 \in f^{-1}\left[B\left(f(z_0), \varepsilon_0\right)^c\right]$ lo cual es absurdo, probando que f es continua en Ω. ♦

<u>TEOREMA 2.4.8:</u>

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$ y sean $u, v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que $f(z) = u(z) + i\,v(z)$ para toda $z \in \Omega$. Entonces f es continua en z_0 $\Leftrightarrow$ u y v son continuas en z_0.

<u>DEMOSTRACION:</u>

⇒) Supongamos f continua en z_0, entonces dada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|z - z_0| < \delta$ $\Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.

Entonces, si $|z - z_0| < \delta$, se tiene $\begin{cases} |u(z) - u(z_0)| \leq |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon \\ |v(z) - v(z_0)| \leq |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon \end{cases}$ $\Rightarrow$ u y v son continuas en z_0.

⇐) Sea $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|z - z_0| < \delta \Rightarrow |u(z) - u(z_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ y $|v(z) - v(z_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$, lo cual implica que si $|z - z_0| < \delta$, entonces $|f(z) - f(z_0)| \leq |u(z) - u(z_0)| + |v(z) - v(z_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, por lo tanto f es continua en z_0. ♦

A continuación se dan 2 de los resultados más importantes en la teoría de las funciones continuas y que nos dicen que la compacidad y la conexidad son propiedades topológicas, es decir que se preservan bajo funciones continuas.

TEOREMA 2.4.9:

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ compacto y sea $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ continua, entonces $f(\Omega)$ es compacto.

DEMOSTRACION:

Sea $\{w_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq f(\Omega)$. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, $w_n \in f(\Omega)$, por lo cual existe $z_n \in \Omega$ tal que $f(z_n) = w_n$. Se tiene que $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \Omega$ el cual es compacto por lo que existe una subsucesión $\{z_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ y un $z_0 \in \Omega$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} z_{n_k} = z_0$. Por último, puesto que f es continua en z_0, $\lim\limits_{k\to\infty} w_{n_k} = \lim\limits_{k\to\infty} f\left(z_{n_k}\right) = f(z_0) = w_0 \in f(\Omega)$ y por la caracterización de compacidad por medio de sucesiones se sigue el resultado. ♦

TEOREMA 2.4.10:

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ conexo y sea $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ continua, entonces $f(\Omega)$ es conexo.

DEMOSTRACION:

Supongamos por el contrario que $f(A)$ no es conexo, entonces existen dos conjuntos abiertos U y V de $\mathbb{C}$ tales que

$$f(A) \subseteq U \cup V, \quad f(A) \cap U \cap V = \varnothing \quad \text{y} \quad U \cap f(A) \neq \varnothing \neq V \cap f(A).$$

Sean $U_1 = f^{-1}(U)$, $V_1 = f^{-1}(V)$. U_1 y V_1 son abiertos en A puesto que f es continua.

Sean Ω_1, Ω_2 abiertos tales que $U_1 = \Omega_1 \cap A$, $V_1 = \Omega_2 \cap A$. Existe $w \in U \cap f(A)$ por lo que hay un $z \in A$ tal que $f(z) = w$, lo cual implica que $z \in f^{-1}(\{w\}) \subseteq f^{-1}(U) = U_1 = \Omega_1 \cap A$ por lo que $\Omega_1 \cap A \neq \emptyset$. Análogamente se tiene que $\Omega_2 \cap A \neq \emptyset$.

Ahora, $f(A) \subseteq U \cup V \Rightarrow A \subseteq f^{-1}\big(U \cup V\big) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V) \subseteq \Omega_1 \cup \Omega_2$.

Por último, $\Omega_1 \cap \Omega_2 \cap A = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = f^{-1}\big(U \cap V\big) = f^{-1}\big(U \cap V \cap f(A)\big) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

Hemos obtenido Ω_1, Ω_2 abiertos tales que

$$\Omega_1 \cap A \neq \emptyset \neq \Omega_2 \cap A, \quad A \subseteq \Omega_1 \cup \Omega_2, \quad \Omega_1 \cap \Omega_2 \cap A = \emptyset,$$

es decir que A es disconexo, lo que contradice nuestras hipótesis y demuestra lo que se quería probar. ♦

DEFINICION 2.4.11:

Una función $f : A \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ se llama uniformemente continua en A (denotada u.c.), si para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que para cualesquiera $z, w \in A$ tales que $| z - w | < \delta$ se tiene que $| f(z) - f(w) | < \varepsilon$.

OBSERVACION 2.4.12:

(1) La diferencia de la definición entre la continuidad y la continuidad uniforme, es que dado $\varepsilon > 0$, el $\delta > 0$ encontrado no depende de ningún punto $z_0 \in A$ en la continuidad uniforme y en la continuidad si. Además una función puede ser u.c. en determinado conjunto pero no en otro (Ejemplo 2.4.13), es decir la continuidad uniforme deber ser referida al conjunto.

(2) Si f es u.c. en A, entonces evidentemente es continua en A.

EJEMPLOS 2.4.13:

(1) Sea $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \overline{z}$. Sea $\varepsilon > 0$ y tomemos $\delta = \varepsilon > 0$. Entonces para $z, w \in \mathbb{C}$ tales que $|z - w| < \delta$, $|f(z) - f(w)| = |\overline{z} - \overline{w}| = |\overline{z - w}| = |z - w| < \delta = \varepsilon$, lo que prueba que f es u.c. en $\mathbb{C}$.

(2) Sea $f : A \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(z) = z^2$.

(i) Sea $A = \left\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\right\}$.

Afirmamos que f es u.c. en A. En efecto, sea $\varepsilon > 0$ y consideremos $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. Entonces para $z, w \in A$ tales que $|z - w| < \delta$, $|f(z) - f(w)| = |z^2 - w^2| = |(z - w) \bullet (z + w)| = |z - w| \bullet |z + w| \leq |z - w| \bullet (|z| + |w|) \leq |z - w| \bullet (1 + 1) = 2 \bullet |z - w| < 2 \bullet \delta = \varepsilon$, lo cual demuestra nuestra afirmación.

(ii) Sea $A = \mathbb{C}$.

Afirmamos que f no es u.c. en A. En efecto, sea $\varepsilon = 1$. Entonces dado $\delta > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n\,\delta > 1$. Sean $z = n$, $w = n + \frac{\delta}{2}$, se tiene que $|z - w| = \frac{\delta}{2} < \delta$, pero $|f(z) - f(w)| = |z^2 - w^2| = \left|n^2 - \left(n + \frac{\delta}{2}\right)^2\right| = n^2 + n\,\delta + \frac{\delta^2}{4} - n^2 = n\,\delta + \frac{\delta^2}{4} > n\,\delta > 1 = \varepsilon$ lo que prueba que f no es u.c. en A.

TEOREMA 2.4.14:

Sea $A \subseteq \mathbb{C}$ compacto y $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ continua. Entonces f es u.c. en A.

DEMOSTRACION:

Supongamos que f no es u.c. en A, entonces existe un $\varepsilon_0 > 0$ tal que dada $\delta > 0$ existen $z_\delta, w_\delta \in A$ con $|z_\delta - w_\delta| < \delta$ pero $|f(z_\delta) - f(w_\delta)| \geq \varepsilon_0$.

Sea $\delta_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, entonces existen z_n, $w_n \in A$ tales que

$$|z_n - w_n| < \delta_n = \frac{1}{n} \quad \text{y} \quad |f(z_n) - f(w_n)| \geq \varepsilon_0.$$

Puesto que $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A$ y A es compacto, entonces existen una subsucesión $\{z_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ y un punto $z_0 \in A$ tales que $\lim_{k\to\infty} z_{n_k} = z_0$.

Ahora $\left|z_{n_k} - w_{n_k}\right| < \frac{1}{n_k}$ implica que $\{w_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ converge y $\lim_{k\to\infty} w_{n_k} = z_0$.

Aplicando la continuidad de f en z_0 obtenemos que $\lim_{k\to\infty} f(z_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} f(w_{n_k}) = f(z_0)$ por lo que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\ k \geq k_0$, $\left|f(z_{n_k}) - f(z_0)\right| < \frac{\varepsilon_0}{2}$ y $\left|f(w_{n_k}) - f(z_0)\right| < \frac{\varepsilon_0}{2}$.

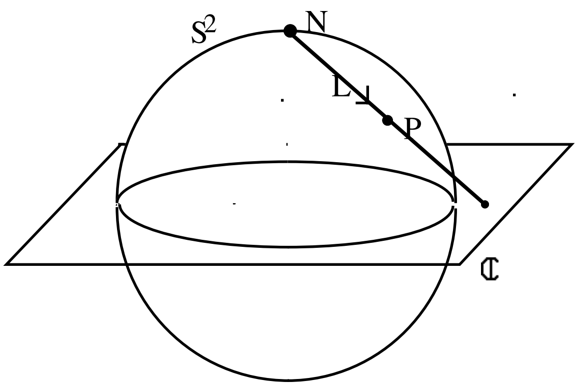
Así pues se tiene:

$$\varepsilon_0 \leq \left|f(z_{n_k}) - f(w_{n_k})\right| \leq \left|f(z_{n_k}) - f(z_0)\right| + \left|f(z_0) - f(w_{n_k})\right| < \frac{\varepsilon_0}{2} + \frac{\varepsilon_0}{2} = \varepsilon_0,$$

es decir $\varepsilon_0 < \varepsilon_0$, lo cual es absurdo. ♦

<u>§ 5. La Esfera de Riemann.</u>

Ahora consideramos que a $\mathbb{C}$ le agregamos un punto extra, ∞, formalmente llamado el punto al infinito. Al conjunto $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ se le llamará la <u>Esfera de Riemann.</u>



Ahora sea $S^2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}$. Sea N = polo norte = (0, 0, 1). Para cualquier punto $P \in S^2$, $P \neq \mathbb{N}$, sea L la única línea recta que pasa por P y $\mathbb{N}$. De hecho L $= \left\{ N + t(P - N) \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ (1 - t)N + tP \mid t \in \mathbb{R} \right\}$.

Se tiene que $P = \left(x_0, y_0, z_0\right)$, $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1$, $z_0 \neq 1$, por lo que $L = \left\{ \left(tx_0, ty_0, (1-t) + tz_0\right) \mid t \in \mathbb{R} \right\}$. Entonces L intersecta a $\mathbb{R}^2 = \left\{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\right\} \subseteq \mathbb{R}^3$ en un punto, y este punto corresponde a la condición $(1 - t) + t z_0 = 0$, es decir cuando $t = \frac{1}{1 - z_0}$. Por lo tanto $L \cap \mathbb{R}^2$ $= \left\{ \left(\frac{x_0}{1 - z_0}, \frac{y_0}{1 - z_0}, 0\right) \right\}$.

Sea $\varphi : S^2 - \{N\} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $\varphi\left(x_0, y_0, z_0\right) = \frac{x_0}{1 - z_0} + i\frac{y_0}{1 - z_0}$. Para hallar φ^{-1} consideremos $z = x_0 + i y_0 \in \mathbb{C}$. La línea que pasa por z y N intersecta a la esfera S^2 en dos puntos N y P. Hallaremos P. La línea que pasa por N y z está dada por (identificamos z con $\left(x_0, y_0, 0\right) \in \mathbb{R}^3$): $L = \left\{ N + t(z - N) \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \left(t x_0, t y_0, 1 - t\right) \mid t \in \mathbb{R} \right\}$. Los puntos de $L \cap S^2$ son los puntos de L tales que $\left(t x_0\right)^2 + \left(t y_0\right)^2 + (1 - t)^2 = 1$, esto es equivalente a $t \bullet \left(x_0^2 + y_0^2 + 1\right) + 1 - 2t = 1$, esto es $t \bullet \left(t \bullet \left(x_0^2 + y_0^2 + 1 \right) - 2 \right) = 0 \Rightarrow t = 0$ y $t = \frac{2}{x_0^2 + y_0^2 + 1} = \frac{2}{|z|^2 + 1}$. $t = 0$ corresponde a N y $t = \frac{2}{|z|^2 + 1}$ corresponde a P =

$\varphi^{-1}(z) = \left(\dfrac{2\,x_0}{|z|^2+1}, \dfrac{2\,y_0}{|z|^2+1}, \dfrac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right) = \left(\dfrac{z+\overline{z}}{|z|^2+1}, \dfrac{i\left(\overline{z}-z\right)}{|z|^2+1}, \dfrac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right)$. Por lo tanto tenemos que tanto φ como φ^{-1} son continuas, es decir podemos identificar $\mathbb{C}$ con $S^2 - \{N\}$. Finalmente se identificamos N con $\{\infty\}$ obtendremos que $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ se puede identificar con S^2.

DEFINICION 2.5.1:

A $\varphi : S^2 \longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ se le conoce como la Proyección Estereográfica.

Notemos que si $\left\{z_n\right\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{C}$ satisface $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$, entonces si $\varphi^{-1}\left(z_n\right) = w_n$, $\left\{w_n\right\}_{n=1}^{\infty} \subseteq S^2$ satisface $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = N$, es decir los puntos "cercanos" a ∞ en $\mathbb{C}$ corresponden a los puntos cercanos a N en S^2. Así mismo en S^2 no hay ningún punto especial, por lo que de ahora en adelante podemos considerar a ∞ como cualquier punto de $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ y no como un punto especial. Finalmente puesto que S^2 es conexo y compacto, $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ es conexo y compacto.

Ahora bien si $z = x_0 + i\,y_0$, $w = x_1 + i\,y_1$, $z, w \in \mathbb{C}$, la distancia entre $\varphi^{-1}(z)$ y $\varphi^{-1}(w)$ está dada por:

$\rho\left(\varphi^{-1}(z), \varphi^{-1}(w)\right) = \rho\left(\left(\dfrac{2\,x_0}{|z|^2+1}, \dfrac{2\,y_0}{|z|^2+1}, \dfrac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right), \left(\dfrac{2\,x_1}{|w|^2+1}, \dfrac{2\,y_1}{|w|^2+1}, \dfrac{|w|^2-1}{|w|^2+1}\right)\right)$ $= \dfrac{2\,|z-w|}{\sqrt{\left(|z|^2+1\right)\bullet\left(|w|^2+1\right)}}$. Similarmente se tiene $\rho\left(\varphi^{-1}(z), N\right) = \dfrac{2}{\sqrt{|z|^2+1}}$. Con esto podemos definir una nueva métrica en $\mathbb{C}$ dada por

$$\rho(z, w) = \frac{2\,|z-w|}{\sqrt{\left(|z|^2+1\right)\bullet\left(|w|^2+1\right)}} \qquad \text{para } z, w \in \mathbb{C},$$

$$\rho(z, \infty) = \frac{2}{\sqrt{|z|^2+1}} \qquad \text{para } z \in \mathbb{C}.$$

CAPITULO 3.

DIFERENCIACION COMPLEJA

§ 1. Derivación.

DEFINICION 3.1.1:

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto, y sea $z_0 \in \Omega$. Sea $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. f se llama Complejo Derivable o Complejo Diferenciable en z_0 si

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \qquad \text{existe.}$$

Cuando tal límite existe, a este se la llama la derivada de f en z_0 y se denota por

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \frac{df}{dz}(z_0).$$

Si f es diferenciable en todo Ω, f se llama holomorfa en Ω y tendremos la siguiente notación: $\mathbf{H}(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ es holomorfa en } \Omega\}$.

OBSERVACION 3.1.2:

Para el concepto de derivada, basta considerar: Ω no necesariamente abierto y $z_0 \in \Omega \cap \Omega'$, sin embargo esta generalización carece de importancia para la teoría y es por ello que siempre que se hable de funciones diferenciables se considerarán conjuntos abiertos.

EJEMPLOS 3.1.3:

(1) Sea $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = c =$ constante. Sea $z_0 \in \mathbb{C}$, entonces

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{c - c}{z - z_0} = 0.$$

(2) Sea $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = z$. Sea $z_0 \in \mathbb{C}$, entonces

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{z - z_0}{z - z_0} = 1.$$

(3) Sea $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = z^2$. Sea $z_0 \in \mathbb{C}$, entonces

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{z^2 - z_0^2}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{(z - z_0) \bullet (z + z_0)}{z - z_0} =$$

$$\lim_{z \to z_0} (z + z_0) = 2\, z_0.$$

(4) Sea $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \overline{z}$. Sea $z_0 \in \mathbb{C}$, entonces

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{\overline{z} - \overline{z_0}}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{\overline{z - z_0}}{z - z_0} = ?$$

Sea $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{C}$, $z_n = x_n + i\, y_n$ tal que $\lim_{n \to \infty} z_n = z_0 = x_0 + i\, y_0$. Si $y_n = y_0$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$, entonces $\lim_{n \to \infty} \frac{\overline{z_n - z_0}}{z_n - z_0} = \lim_{n \to \infty} \frac{x_n - x_0}{x_n - x_0} = 1$. Ahora si $x_n = x_0$, entonces $\forall\, n \in \mathbb{N}$, entonces $\lim_{n \to \infty} \frac{\overline{z_n - z_0}}{z_n - z_0} = \lim_{n \to \infty} \frac{-\, i \bullet (y_n - y_0)}{i \bullet (y_n - y_0)} = -\,1.$

Lo anterior prueba que $\forall\, z_0 \in \mathbb{C}$, $\lim_{z \to z_0} \frac{\overline{z - z_0}}{z - z_0}$ no existe, es decir $f(z) = \overline{z}$ no es complejo diferenciable en ningún punto $z_0 \in \mathbb{C}$.

OBSERVACION 3.1.4:

En los ejemplos anteriores, las funciones vistas como funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ son:

(1) $f(x, y) = \left(c_1, c_2\right) \in \mathbb{R}^2$.

(2) $f(x, y) = (x, y)$.

(3) $f(x, y) = (x + i\,y)^2 = \left(x^2 - y^2\right) + i\,(2\,x\,y) = \left(x^2 - y^2,\ 2\,x\,y\right)$.

(4) $f(x, y) = (x, -y)$

y todas ellas son real diferenciables.

El siguiente resultado nos muestra, igual que en el caso real, que la diferenciabilidad es una propiedad más fuerte que la continuidad.

PROPOSICION 3.1.5:

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto y sea $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. Sea $z_0 \in \Omega$. Entonces si f es complejo diferenciable en z_0, se tiene que f es continua en z_0.

DEMOSTRACION:

Se tiene que $0 \leq \left|f(z) - f\left(z_0\right)\right| = \left|\dfrac{f(z) - f\left(z_0\right)}{z - z_0}\right| \left|z - z_0\right| \xrightarrow[z \to z_0]{} \left|f'\left(z_0\right)\right| \bullet (0) =$ 0, por lo que $\lim\limits_{z \to z_0} \left|f(z) - f\left(z_0\right)\right| = 0 \Rightarrow \lim\limits_{z \to z_0} \left(f(z) - f\left(z_0\right)\right) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f\left(z_0\right)$, por lo tanto f es continua en z_0. ♦

A continuación recordamos algunas definiciones y resultados de cálculo diferencial de varias variables reales.

DEFINICION 3.1.6:

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\vec{x}_0 \in \mathring{A}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$. f se llama <u>(real) diferenciable</u> en $\vec{x}_0$ si existe

$T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ transformación lineal tal que $\displaystyle\lim_{\vec{h} \to 0} \frac{\left\| f\left(\vec{x}_0 + \vec{h}\right) - f\left(\vec{x}_0\right) - T\left(\vec{h}\right) \right\|}{\left\|\vec{h}\right\|}$ $= 0$, y a $T = Df\left(\vec{x}_0\right)$ se le llama la derivada de f en $\vec{x}_0$.

DEFINICION 3.1.7:

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\vec{a} \in A$, $g : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Sea $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\left\|\vec{y}\right\| = 1$. Entonces al límite:

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t \in \Re}} \frac{g\left(\vec{a} + t\,\vec{y}\right) - g\left(\vec{a}\right)}{t} = \left(D_{\vec{y}}\,g\right)\left(\vec{a}\right).$$

se le llama la derivada direccional de g en $\vec{a}$ en la dirección $\vec{y}$ siempre y cuando este límite exista.

En particular si $\vec{y} = \vec{e}_i = (0, \ldots, 0, 1, 0 \ldots, 0)$ se tiene que:

$$\left(D_{\vec{e}_i}\,g\right)\left(\vec{a}\right) = \frac{\partial g}{\partial x_i}\left(\vec{a}\right) = \lim_{t \to 0} \frac{g\left(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \ldots, a_n\right) - g\left(a_1, \ldots, a_n\right)}{t}$$

donde $\vec{a} = \left(a_1, \ldots, a_n\right)$, recibe el nombre de derivada parcial de g con respecto a la i-ésima variable.

OBSERVACION 3.1.8:

Sea $g : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $\vec{a} \in A$. Puede suceder que g tenga todas las derivadas direccionales en $\vec{a}$ y no se diferenciable. Por ejemplo sea $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$g(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2\, y}{x^2 + y^2} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad \text{con } \vec{a} = (0, 0).$$

Por otro lado, si g es diferenciable en $\vec{a}$, entonces g tiene todas sus derivadas direccionales en $\vec{a}$ y $\left(D_{\vec{y}}g\right)\left(\vec{a}\right) = \left(Dg\left(\vec{a}\right)\right)\left(\vec{y}\right)$.

En particular, sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto, $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$ con $g = \left(g_1, g_2\right)$, $g_1, g_2 : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ y g diferenciable en $\vec{a} \in \Omega$, entonces $\dfrac{\partial g_1}{\partial x}\left(\vec{a}\right)$, $\dfrac{\partial g_1}{\partial y}\left(\vec{a}\right)$, $\dfrac{\partial g_2}{\partial x}\left(\vec{a}\right)$, $\dfrac{\partial g_2}{\partial y}\left(\vec{a}\right)$ existen y con respecto a la base $\{(1, 0), (0, 1)\}$ $Dg\left(\vec{a}\right) = g'\left(\vec{a}\right)$ tiene representación matricial

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x}\left(\vec{a}\right) & \dfrac{\partial g_1}{\partial y}\left(\vec{a}\right) \\ \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x}\left(\vec{a}\right) & \dfrac{\partial g_2}{\partial y}\left(\vec{a}\right) \end{pmatrix}.$$

Por último si Ω, $\vec{a}$ y g son como antes y existe $\delta > 0$ tal que $\dfrac{\partial g_1}{\partial x}\left(\vec{a}\right)$, $\dfrac{\partial g_1}{\partial y}\left(\vec{a}\right)$, $\dfrac{\partial g_2}{\partial x}\left(\vec{a}\right)$, $\dfrac{\partial g_2}{\partial y}\left(\vec{a}\right)$ existen en $B\left(\vec{a}, \delta\right)$ y además son continuas en $\vec{a}$, entonces g es diferenciable en $\vec{a}$.

Regresamos al caso complejo y empezamos enunciando los resultados básicos en la teoría de diferenciación.

<u>PROPOSICION 3.1.9:</u>

Sean $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$. Entonces f es complejo diferenciable en $z_0 \Leftrightarrow$ existe una función $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ continua en z_0 tal que $f(z) = f\left(z_0\right) + \left(z - z_0\right) \varphi(z)$ $\forall\ z \in \Omega$.

En este último caso se tiene que $\varphi(z_0) = f'(z_0)$.

DEMOSTRACION:

$\Rightarrow$) Existe $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)$. Sea $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$\varphi(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} & \text{si } z \neq z_0 \\ f'(z_0) & \text{si } z = z_0 \end{cases}.$$

Se tiene que $f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\,\varphi(z)$ $\forall$ $z \in \Omega$ y además $\lim\limits_{z\to z_0} \varphi(z) = \lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) = \varphi(z_0)$, lo cual prueba que φ es continua en z_0.

$\Leftarrow$) Sea $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que φ continua en z_0 y $f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\,\varphi(z)$.
$\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim\limits_{z\to z_0} \varphi(z) = \varphi(z_0)$ por lo tanto $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ existe, lo cual prueba que f es diferenciable en z_0 y además $f'(z_0) = \varphi(z_0)$.

♦

PROPOSICION 3.1.10:

Sean $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto, $f,g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ diferenciables en z_0. Entonces:

(1) $f \pm g$ son diferenciables en z_0 y $(f \pm g)'(z_0) = f'(z_0) \pm g'(z_0)$.

(2) $f \bullet g$ es diferenciable en z_0 y $(f \bullet g)'(z_0) = f'(z_0) \bullet g(z_0) + f(z_0) \bullet g'(z_0)$.

(3) Si además $g(z_0) \neq 0$, entonces $\frac{f}{g}$ es diferenciable en z_0 y

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0) \bullet g(z_0) - f(z_0) \bullet g'(z_0)}{g(z_0)^2}$$

DEMOSTRACION:

Sean $\varphi, \psi : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ continuas en z_0 tales que:
$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\,\varphi(z)$, $\varphi(z_0) = f'(z_0)$;
$g(z) = g(z_0) + (z - z_0)\,\psi(z)$, $\psi(z_0) = g'(z_0)$.

(1) $(f \pm g)(z) = (f \pm g)(z_0) + (z - z_0)\,(\varphi \pm \psi)(z)$ $\forall\, z \in \Omega$ y $\varphi \pm \psi$ es continua en z_0 $\Rightarrow$ $f \pm g$ es diferenciable en z_0 y $(f \pm g)'(z_0) = (\varphi \pm \psi)(z_0) = \varphi(z_0) \pm \psi(z_0) = f'(z_0) \pm g'(z_0)$.

(2) $(f \bullet g)(z) = (f \bullet g)(z_0) + (z - z_0)\left\{f(z_0)\psi(z) + g(z_0)\varphi(z) + (z - z_0)\varphi(z)\psi(z)\right\}$ $\forall\, z \in \Omega$ y $\left\{f(z_0)\,\psi(z) + g(z_0)\,\varphi(z) + (z - z_0)\,\varphi(z)\,\psi(z)\right\}$ es continua en $z_0 \Rightarrow f \bullet g$ es diferenciable en z_0 y se tiene:
$(f \bullet g)'(z_0) = f(z_0)\,\psi(z_0) + g(z_0)\,\varphi(z_0) + (z_0 - z_0)\,\varphi(z_0)\,\psi(z_0) =$
$= f(z_0)\,g'(z_0) + g(z_0)\,f'(z_0)$.

(3) Sea $g(z_0) \neq 0$. Puesto que g es continua en z_0, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\forall\, z \in B(z_0, \varepsilon)$, $g(z) \neq 0$. Ahora bien $g(z) = g(z_0) + (z - z_0)\,\psi(z)$ $\forall\, z \in B(z_0, \varepsilon)$ entonces dividiendo entre $g(z)\,g(z_0)$ obtenemos:

$$\frac{1}{g(z_0)} = \frac{1}{g(z)} + (z - z_0)\,\frac{\psi(z)}{g(z)\,g(z_0)} \quad \forall\, z \in B(z_0, \varepsilon) \Rightarrow$$

$$\left(\frac{1}{g}\right)(z) = \left(\frac{1}{g}\right)(z_0) + (z - z_0)\left[-\frac{\psi(z)}{g(z)\,g(z_0)}\right] \quad \forall\, z \in B(z_0, \varepsilon)$$

y puesto que $-\frac{\psi(z)}{g(z)\, g(z_0)}$ es continua en z_0 se sigue que $\frac{1}{g}$ es diferenciable en z_0 y se tiene $\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{\psi(z_0)}{g(z_0)\, g(z_0)} = -\frac{g'(z_0)}{[g(z_0)]^2}$.

Por último, $\frac{f}{g} = f \bullet \frac{1}{g}$ es diferenciable en z_0 como consecuencia de (2) y además

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = f'(z_0)\left(\frac{1}{g}\right)(z_0) + f(z_0)\left(\frac{1}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)}{g(z_0)} - \frac{f(z_0)\, g'(z_0)}{[g(z_0)]^2} = \frac{f'(z_0)\, g(z_0) - f(z_0)\, g'(z_0)}{[g(z_0)]^2}.$$

♦

<u>EJERCICIO 3.1.11:</u>

Sea $f : \mathbb{C} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{Z}$. Probar que $f'(z) = n\, z^{n-1}$ (si $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, entonces de hecho $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$).

<u>PROPOSICION 3.1.12 (REGLA DE LA CADENA):</u>

Sean $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{C}$ abiertos, $f : \Omega_1 \longrightarrow \mathbb{C}$, $g : \Omega_2 \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $f(\Omega_1) \subseteq \Omega_2$. Si f es diferenciable en $z_0 \in \Omega_1$ y g es diferenciable en $w_0 = f(z_0) \in \Omega_2$, entonces $g \circ f : \Omega_1 \longrightarrow \mathbb{C}$, es diferenciable en z_0 y $(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)) \bullet f'(z_0)$.

<u>DEMOSTRACION:</u>

Sean $\varphi : \Omega_1 \longrightarrow \mathbb{C}$ continua en z_0 tal que $f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\, \varphi(z)\ \forall\, z \in \Omega_1$; $\psi : \Omega_2 \longrightarrow \mathbb{C}$ continua en $w_0 = f(z_0)$ tal que $g(w) = g(w_0) + (w - w_0)\psi(w)\ \forall\, w \in \Omega_2$.

Se tiene que $\varphi(z_0) = f'(z_0)$, $\psi(w_0) = g'(w_0) = g'(f(z_0))$.

Ahora $\forall\, z \in \Omega_1$, $w = f(z) \in \Omega_2 \Rightarrow$

$(g \circ f)(z) = g(f(z)) = g\left(w_0\right) + \left(f(z) - w_0\right) \psi(f(z)) = g\left(f\left(z_0\right)\right) + \left(f(z) - f\left(z_0\right)\right) \psi(f(z)) =$
$(g \circ f)\left(z_0\right) + \left(z - z_0\right) \psi(f(z))\, \varphi(z) \quad \forall\, z \in \Omega_1$.

Por último, $\psi(f(z))\, \varphi(z)$ es continua en z_0, por lo tanto $(g \circ f)$ es diferenciable en z_0 y $(g \circ f)'\left(z_0\right) = \psi\left(f\left(z_0\right)\right) \varphi\left(z_0\right) = g'\left(f\left(z_0\right)\right) f'\left(z_0\right)$. ♦

Llegamos ahora al resultado central de esta sección el cual nos caracteriza la diferenciabilidad compleja por medio de la diferenciabilidad real y la igualdad de ciertas derivadas parciales.

<u>TEOREMA 3.1.13 (CAUCHY-RIEMANN):</u>

Sean $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, $z_0 = \left(x_0, y_0\right) \in \Omega$. Sean $u(z) = \operatorname{Re} f(z)$, $v(z) = \operatorname{Im} f(z)$, $z = (x, y)$, $f(x, y) = u(x, y) + i\, v(x, y)$, $u, v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. Entonces f es complejo diferenciable en $z_0 \Leftrightarrow$ u y v son real diferenciables en z_0 y se tiene que:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}\left(x_0, y_0\right) &= \frac{\partial v}{\partial y}\left(x_0, y_0\right) \\ \frac{\partial u}{\partial y}\left(x_0, y_0\right) &= -\frac{\partial v}{\partial x}\left(x_0, y_0\right) \end{aligned}\right\} \quad \underline{\text{Ecuaciones de Cauchy-Riemann}}.$$

<u>DEMOSTRACION:</u>

$\Rightarrow)$ Sea $f'\left(z_0\right) = \lambda_1 + i\, \lambda_2 \in \mathbb{C}$. Definimos $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ lineal dada por la matriz $\begin{bmatrix} \lambda_1 & -\lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_1 \end{bmatrix}$ con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

Se tiene $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=f'(z_0)\Leftrightarrow \lim\limits_{z\to z_0}\left|\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}-f'(z_0)\right|=$

$\lim\limits_{z\to z_0}\left|\dfrac{f(z)-f(z_0)-f'(z_0)(z-z_0)}{z-z_0}\right|=0.$

Con $z=x+i\,y=(x,y)$ y $z_0=x_0+i\,y_0$, tenemos que:

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)-f'(z_0)(z-z_0)}{z-z_0}\right|=$$

$$\frac{\left\|f(x,y)-f(x_0,y_0)-\left(\lambda_1(x-x_0)-\lambda_2(y-y_0),\lambda_2(x-x_0)+\lambda_1(y-y_0)\right)\right\|}{\left\|(x,y)-(x_0,y_0)\right\|}$$

$$=\frac{\left\|f(x,y)-f(x_0,y_0)-\begin{bmatrix}\lambda_1 & -\lambda_2\\ \lambda_2 & \lambda_1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x-x_0\\ y-y_0\end{pmatrix}\right\|}{\left\|(x,y)-(x_0,y_0)\right\|}=$$

$$\frac{\left\|f(x,y)-f(x_0,y_0)-T((x,y)-(x_0,y_0))\right\|}{\left\|(x,y)-(x_0,y_0)\right\|}\xrightarrow[(x,y)\to(x_0,y_0)]{}0\Rightarrow$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{\left\|f(x,y)-f(x_0,y_0)-T((x,y)-(x_0,y_0))\right\|}{\left\|(x,y)-(x_0,y_0)\right\|}=0\Rightarrow f \text{ es real}$$

diferenciable y por lo tanto u y v son real diferenciables.

Además $\lambda_1=u_x(z_0)=v_y(z_0)$, $\lambda_2=v_x(z_0)=-u_y(z_0)$.

$\Leftarrow$) Con las igualdades de la implicación anterior, tenemos que si $\lambda=\lambda_1+i\,\lambda_2=$ $(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{C}$, $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{\left|f(z)-f(z_0)-\lambda\bullet(z-z_0)\right|}{|z-z_0|}=$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\|f(x,\ y) - f(x_0,\ y_0) - T((x,\ y) - (x_0,\ y_0))\|}{\|(x,\ y) - (x_0,\ y_0)\|} = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \Rightarrow \text{f es complejo diferenciable.} \qquad \blacklozenge$$

OBSERVACION 3.1.14:

(1) Cuando f es complejo diferenciable, tenemos que

$$\boxed{\begin{aligned} f'(z_0) &= \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i\,\frac{\partial v}{\partial x}(z_0) = \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) - i\,\frac{\partial u}{\partial y}(z_0) = \\ &= \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) - i\,\frac{\partial u}{\partial y}(z_0) = \\ &= \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) + i\,\frac{\partial v}{\partial x}(z_0) \end{aligned}}$$

(2) Puede existir un función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (u(x,\ y),\ v(x,\ y))$ y un punto $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ tales que

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)$$

y

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$$

sin que f sea real diferenciable en (x_0,y_0) y por lo tanto $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ no será complejo diferenciable en $z_0 = (x_0,y_0)$.

Como ejemplo de lo anterior, consideremos $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y) = (\sqrt{|xy|},\ 0)$, esto es $u(x, y) = \sqrt{|xy|}$, $v(x, y) = 0$ y sea (x_0,y_0) = (0, 0). Se tiene

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,\ 0) = \lim_{x\to 0} \frac{u(x,\ 0) - u(0,\ 0)}{x} = 0 = \frac{\partial v}{\partial y}(0,\ 0)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(0,\ 0) = \lim_{y\to 0} \frac{u(0,\ y) - u(0,\ 0)}{x} = 0 = -\frac{\partial v}{\partial x}(0,\ 0),$$

sin embargo, f no es real diferenciable, ya que de lo contrario tendríamos que $Df(0,\ 0) = 0$ y por lo tanto $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\|f(x,\ y) - f(0,\ 0) - Df(0,\ 0)\ (x,\ y)\|}{\|(x,\ y)\|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ $= 0$. Por otro lado sea $\left(x_n,\ y_n\right) = \left(\frac{1}{n},\ \frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,\ 0)$, es decir

$$0 = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{|x_n\ y_n|}}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{\sqrt{2}}{n}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$ lo cual es absurdo.

En adelante, si no se especifica lo contrario, decir diferenciable significará complejo diferenciable.

EJEMPLOS 3.1.15:

(1) Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x,\ y) = \left(x^2 - y^3,\ x - y\right)$, es decir $u(x,\ y) = x^2 - y^3$, $v(x,\ y) = x - y$. Se tiene que u y v son real diferenciables en todo $\mathbb{R}^2$ y tendremos que $u_x = 2x$; $u_y = -3y^2$; $v_x = 1$; $v_y = -1$, por lo tanto $u_x = v_y \Leftrightarrow 2x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$; $u_y = -v_x \Leftrightarrow -3y^2 = -1 \Leftrightarrow y \in \left\{\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{-1}{\sqrt{3}}\right\}$. Por lo tanto f es complejo diferenciable en los puntos $-\frac{1}{2} + \frac{i}{\sqrt{3}}$ y $-\frac{1}{2} - \frac{i}{\sqrt{3}}$.

Por último, puesto que no existe $\delta > 0$ tal que f se diferenciable en $B\left(-\frac{1}{2} \pm \frac{i}{\sqrt{3}},\ \delta\right)$, f no es holomorfa en ningún abierto de $\mathbb{C}$.

(2) Sea $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(z) = \overline{z}$, $f(x, y) = (x, -y)$, por lo tanto $u(x, y) = x$; $v(x, y) = -y$. Entonces $\forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\left.\begin{array}{l} u_x = 1 \neq -1 = v_y \\ u_y = 0 = -v_x \end{array}\right\} \Rightarrow$ f no es complejo diferenciable en ningún punto.

DEFINICION 3.1.16:

Sean $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto y $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, $f = u + i\,v$. Sea $z_0 \in \mathbb{C}$, $z_0 = (x_0, y_0)$. Se definen:

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial z} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} - i\,\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y}\right) + \dfrac{i}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}\right) \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} + i\,\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial v}{\partial y}\right) + \dfrac{i}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\right) \end{array}}\ .$$

PROPOSICION 3.1.17:

Sea $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto, y sea $z_0 \in \Omega$. Si f es real diferenciable, se tiene que f es complejo diferenciable $\Leftrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = 0$.

DEMOSTRACION:

Se sigue inmediatamente de las ecuaciones de Cauchy-Riemann. ♦

OBSERVACION 3.1.18:

En el caso anterior se tiene: $\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial z} + \dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \dfrac{\partial f}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial z} - \dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = -\,i\,\dfrac{\partial f}{\partial y} \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\dfrac{\partial f}{\partial z}(z_0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(z_0) = i\,\dfrac{\partial f}{\partial y}(z_0) = f'(z_0)$.

EJEMPLO 3.1.19:

Sea $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = |z|^2 = z\,\overline{z}$, es decir $f(x, y) = x^2 + y^2$, por lo que $u(x, y) = f(x, y)$ y $v(x, y) = 0$.

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\,\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}(2x + 0) + \frac{i}{2}(0 - 2y) = x - i\,y = \overline{z},$$

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\,\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}(2x + 0) + \frac{i}{2}(0 + 2y) = x + i\,y = z.$$

Terminamos esta sección con los siguientes dos resultados.

PROPOSICION 3.1.20:

Sean $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ región, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, f holomorfa tal que $f'(z) = 0\ \forall\ z \in \Omega$. Entonces f es constante.

DEMOSTRACION:

Se sigue inmediatamente del caso real. ♦

PROPOSICION 3.1.21:

Sean $G, \Omega \subseteq \mathbb{C}$ abiertos. Sean $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$, $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, funciones continuas tales que $f(G) \subseteq \Omega$, $g(f(z)) = z\ \forall\ z \in G$. Si además g es diferenciable en $w_0 = f(z_0)$ y $g'(w_0) \neq 0 \Rightarrow$ f es diferenciable en z_0 y $f'(z_0) = \dfrac{1}{g'(w_0)} = \dfrac{1}{g'(f(z_0))}$.

DEMOSTRACION:

Sea $\psi : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ continua en w_0 tal que $g(w) = g(w_0) + (w - w_0)\,\psi(w)$ $\forall\, w \in \Omega$. Se tiene $\psi(w_0) = g'(w_0) \neq 0$.

Existe un $\varepsilon > 0$ tal que $\forall\, w \in B(w_0, \varepsilon)$, $\psi(w) \neq 0$. Sea $w = f(z)$. Obtenemos:

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{f(z) - f(z_0)}{g(f(z)) - g(f(z_0))} = \frac{w - w_0}{g(w) - g(w_0)} = \frac{w - w_0}{(w - w_0)\,\psi(w)} = \frac{1}{\psi(w)}$$

$\forall\, z \neq z_0$, $z \in \Omega$, lo cual se sigue del hecho de que g es 1-1 sobre f(G). Esto implica $\dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \dfrac{1}{\psi(f(z))} = \varphi(z)$.

Es decir, $\varphi : G \longrightarrow \mathbb{C}$ esta dada por: $\varphi(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{\psi(f(z))} & , \ z \neq z_0 \\ \dfrac{1}{\psi(f(z_0))} & , \ z = z_0 \end{cases}$. Se tiene que $f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\,\varphi(z)$ con φ continua en $z_0 \Rightarrow$ f es diferenciable en z_0 y $f'(z_0) = \varphi(z_0) = \dfrac{1}{\psi(f(z_0))} = \dfrac{1}{g'(f(z_0))}$. ♦

§ 2. Series de Potencias.

DEFINICION 3.2.1:

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ y sea $f_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ con $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ una sucesión de funciones definidas sobre Ω. Se define la <u>serie de las $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$</u> por:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$$

para las $z \in \Omega$ en que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ converge.

En particular, si $f_n(z) = a_n(z - z_0)^n$ con $a_n \in \mathbb{C}$, $f_n : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ (es decir $\Omega = \mathbb{C}$ en este caso), entonces a

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

se le llama <u>serie de potencias alrededor de z_0</u>.

El primer problema que se nos presenta es determinar en donde una serie de potencias converge, pero la respuesta es fácil de dar basándonos en el Teorema de Cauchy para series con términos positivos y nos lo da el siguiente:

TEOREMA 3.2.2 (CAUCHY-HADAMARD):

Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ una serie de potencias y sea $\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$. Entonces:

(i) Si $\rho = 0$, la serie converge absolutamente $\forall\, z \in \mathbb{C}$.

(ii) Si $\rho = \infty$, la serie converge solo para $z = z_0$.

(iii) Si $0 < \rho < \infty$, la serie es absolutamente convergente para $|z - z_0| < \frac{1}{\rho}$, diverge para $|z - z_0| > \frac{1}{\rho}$ y no se puede afirmar nada para $|z - z_0| = \frac{1}{\rho}$.

DEMOSTRACION:

(i) Si $\rho = 0 \Rightarrow \forall\, z \in \mathbb{C}$, $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|a_n (z - z_0)^n\right|} = |z - z_0| \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = |z - z_0|\, \rho$

$= 0 < 1 \Rightarrow$ la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left|a_n(z - z_0)^n\right|$ converge $\forall\, z \in \mathbb{C}$.

(ii) Sea $\rho = \infty$. Si $z = z_0$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z_0 - z_0)^n = a_0$, es decir la serie converge para $z = z_0$.

Ahora si $z \neq z_0$, $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|a_n (z - z_0)^n\right|} = |z - z_0|\, \rho = \infty > 1$, por lo que la serie diverge.

(iii) Sea $0 < \rho < \infty$, $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|a_n (z - z_0)^n\right|} = |z - z_0|\, \rho \in \mathbb{R}$.

Si $|z - z_0| < \frac{1}{\rho}$, $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|a_n (z - z_0)^n\right|} < 1$, por lo que la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left|a_n(z - z_0)^n\right|$ converge.

Si $|z - z_0| > \frac{1}{\rho}$, $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|a_n (z - z_0)^n\right|} > 1$, por lo que la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ diverge.

Por último consideremos la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$, aquí $z_0 = 0$, $a_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$ y se tiene

$\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$.

Sea $z = 1$, $|z - z_0| = 1 = \frac{1}{\rho}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

Ahora sea $z = -1$, $|z - z_0| = 1 = \frac{1}{\rho}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge. ♦

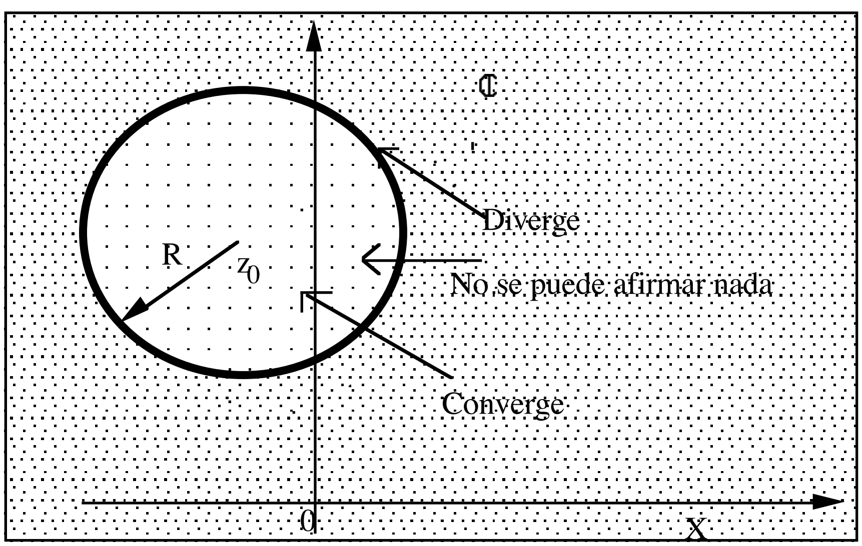
DEFINICION 3.2.3:

Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ una serie de potencias y sea $\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$. Entonces definimos R = radio de convergencia de la serie por:

(i) $R = \infty$ si $\rho = 0$,

(ii) $R = 0$ si $\rho = \infty$,

(iii) $R = \frac{1}{\rho}$ si $0 < \rho < \infty$.



EJEMPLOS 3.2.4:

(1) Sea $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$. Se tiene $z_0 = 0$ y $a_n = 1$ $\forall\, n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, por lo que $R = \frac{1}{\rho} = 1$.

Si $|z - z_0| = |z| = 1 \Rightarrow |z|^n = 1$ por lo que la serie diverge pues el n-ésimo término no converge a 0 $\Rightarrow$ la serie converge para $|z| < 1$ y diverge para $|z| \geq 1$.

(2) Consideremos ahora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$. Aquí $z_0 = 0$ y $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$ $= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 \Rightarrow R = \frac{1}{\rho} = 1$.

Para $z = 1$ la serie diverge. Consideremos $z \neq 1$ tal que $|z| = 1$. Como se verá en la siguiente sección se tiene que existe $\varphi \in (0, 2\pi)$ tal que $z = \cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi$ $\Rightarrow z^n = \cos n\varphi + i \operatorname{sen} n\varphi$ (esto se probará en la siguiente sección) $\Rightarrow$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{n} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n\varphi}{n}.$$

Se tiene que $$\sum_{k=1}^{n} \cos k\varphi = \cos\varphi + \cos 2\varphi + \ldots + \cos n\varphi = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n+1}{2}\right)\varphi \cos\frac{n\varphi}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}} - 1$$

y $$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen} k\varphi = \operatorname{sen}\varphi + \operatorname{sen} 2\varphi + \ldots + \operatorname{sen} n\varphi = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n+1}{2}\right)\varphi \operatorname{sen}\frac{n\varphi}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}}.$$

(La demostración de las igualdades anteriores se deja como ejercicio).

De esto se sigue que $\left\{\sum_{k=1}^{n} \cos k\varphi\right\}_{n=1}^{\infty}$ y $\left\{\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen} k\varphi\right\}_{n=1}^{\infty}$ están acotadas y $a_n = \frac{1}{n}$ es una sucesión decreciente tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ y por lo tanto se tiene que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{n}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n\varphi}{n}$ convergen $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ converge $\forall\, z \neq 1$, $|z| = 1$.

(3) Consideremos $\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$. Aquí tenemos que $z_0 = 0$ y

$$a_n = \begin{cases} 2 & \text{si } n = 1 \\ 1 & \text{si } n = k! \text{ para algún } k \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ k > 1 \\ 0 & \text{si } n \neq k!\ \forall\, k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \end{cases}.$$

Se tiene que $\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \Rightarrow R = \frac{1}{\rho} = 1$.

(4) Consideremos la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$. Se tiene que $z_0 = 0$, $a_n = \frac{1}{n!}$, $\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \Rightarrow R = \infty$, por lo tanto la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ converge absolutamente $\forall\, z \in \mathbb{C}$.

(5) Por último consideremos la serie $\sum_{n=0}^{\infty}\left(n + w_0^n\right) z^n$, aquí $w_0 \in \mathbb{C}$. Se tiene $z_0 = 0$ y $a_n = n + w_0^n$.

Primero consideremos el caso $|w_0| \leq 1$. En este caso se tiene

$\frac{n}{2} \leq n - 1 \leq n - |w_0|^n \leq \left|n + w_0^n\right| \leq n + |w_0|^n \leq n + 1 \leq 2n \ \forall\ n \geq 2 \Rightarrow$

$\sqrt[n]{\frac{n}{2}} \leq \sqrt[n]{|a_n|} \leq \sqrt[n]{2n}$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n} = 1 \Rightarrow \rho = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \Rightarrow R = 1$.

Ahora consideremos el caso $|w_0| > 1$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|w_0|^n}{n} = \infty \Rightarrow$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\ n \geq n_0$, $\frac{|w_0|^n}{n} \geq 2$, entonces $\forall\ n \geq n_0$ se tiene que

$\frac{|w_0|^n}{2} = |w_0|^n - \frac{|w_0|^n}{2} \leq |w_0|^n - n \leq \left|w_0^n + n\right| \leq |w_0|^n + n \leq \frac{3}{2}|w_0|^n \Rightarrow$

$\frac{|w_0|}{\sqrt[n]{2}} \leq \sqrt[n]{|a_n|} \leq \sqrt[n]{\frac{3}{2}}\,|w_0|$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|w_0|}{\sqrt[n]{2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3}{2}}\,|w_0| = |w_0| \Rightarrow \rho = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = |w_0| \Rightarrow R = \frac{1}{|w_0|}$.

Dada una serie de potencias, ésta define una función en el interior de su círculo de convergencia, y lo primero que nos preguntamos es la naturaleza de esta función, es decir si es continua, derivable, etc. La respuesta nos lo da el siguiente:

TEOREMA 3.2.5:

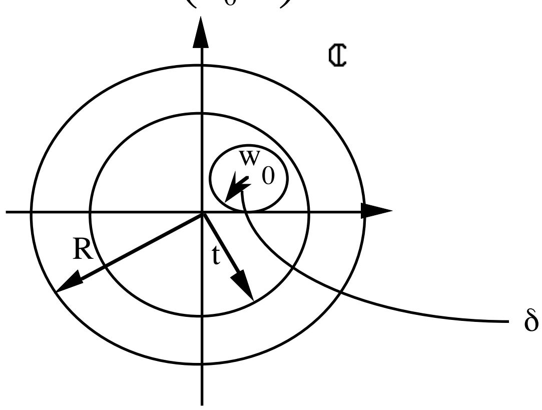
Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(z - z_0\right)^n$ una serie de potencias con radio de convergencia $R > 0$. Sea

$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, dada por $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, donde $\Omega = B(z_0, R)$. Entonces $f \in \mathbf{H}(\Omega)$ y $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n (z - z_0)^{n-1}$, y el radio de convergencia de esta última serie es R.

DEMOSTRACION:

Sea $w = z - z_0$, entonces $f(z) = f(w + z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$. Primero demostraremos que $\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right]' = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n z^{n-1}$. Sea $s_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$, $R_n(z) = f(z) - s_n(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k$.

Se tiene que $\forall$ z tal que $|z| < R$, $\lim_{n \to \infty} R_n(z) = 0$. Definimos $f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n z^{n-1}$ y consideremos $w_0 \in B(0, R)$, es decir $|w_0| < R$. Sea $t \in \mathbb{R}$ tal que $|w_0| < t < R$. Existe $\delta > 0$ tal que $\forall\, z \in B(w_0, \delta)$ se tiene que $|z| < t$, es decir $B(w_0, \delta) \subseteq B(0, t)$.



Sea $\varepsilon > 0$ y estimemos la diferencia

$$\frac{f(z) - f(w_0)}{z - w_0} - f_1(w_0) = \frac{s_n(z) + R_n(z) - s_n(w_0) - R_n(w_0)}{z - w_0} - f_1(w_0) =$$

$$\left[\frac{s_n(z) - s_n(w_0)}{z - w_0} - s'_n(w_0)\right] + \left[s'_n(w_0) - f_1(w_0)\right] + \frac{R_n(z) - R_n(w_0)}{z - w_0}.$$

Ahora

$$\frac{R_n(z) - R_n(w_0)}{z - w_0} = \frac{1}{z - w_0} \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k\left(z^k - w_0^k\right) =$$

$$\frac{1}{z - w_0} \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(z - w_0)\left(z^{k-1} + z^{k-2} w_0 + \dots + z\, w_0^{k-2} + w_0^{k-1}\right) =$$

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \bullet \left[\sum_{j=0}^{k-1} z^j\, w_0^{k-1-j}\right] \Rightarrow \left|\frac{R_n(z) - R_n(w_0)}{z - w_0}\right|$$

$$\le \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| \bullet \left[\sum_{j=0}^{k-1} |z|^j\, |w_0|^{k-1-j}\right] \le \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| \bullet \left[\sum_{j=0}^{k-1} t^j\, t^{k-1-j}\right] =$$

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} k\, |a_k|\, t^{k-1}.$$

Ahora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n\, |a_n|\, t^{n-1}$ converge pues se tiene que $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{n\, |a_n|\, t^{n-1}} =$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \bullet \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} \bullet \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{t^{n-1}} = 1 \bullet \frac{1}{R} \bullet t = \frac{t}{R} < 1 \Rightarrow$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\ n \ge n_0$, $\sum_{k=n+1}^{\infty} k\, |a_k|\, t^{k-1} < \frac{\varepsilon}{3}$.

Por otro lado tenemos que $f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n z^{n-1} = \lim_{n\to\infty} s'_n(z) \Rightarrow$ existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\ n \ge n_1$, se tiene que $\left|s'_n(w_0) - f_1(w_0)\right| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Por último, $s_n'(w_0) = \lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{s_n(z) - s_n(w_0)}{z - w_0} \Rightarrow$ existe $0 < \delta_1 \leq \delta$ tal que $0 < |z - w_0| < \delta_1 \Rightarrow \left| \dfrac{s_n(z) - s_n(w_0)}{z - w_0} - s_n'(w_0) \right| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Sea $N = \max \{n_0, n_1\}$ y $\delta_1 > 0$, entonces para z tal que $0 < |z - w_0| < \delta_1$ y $n \geq N$, se tiene:

$$\left| \frac{f(z) - f(w_0)}{z - w_0} - f_1(w_0) \right| \leq$$

$$\left| \frac{s_n(z) - s_n(w_0)}{z - w_0} - s_n'(w_0) \right| + | s_n'(w_0) - f_1(w_0)| + \left| \frac{R_n(z) - R_n(w_0)}{z - w_0} \right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Por lo tanto $f_1(w_0) = \lim\limits_{z\to w_0} \dfrac{f(z) - f(w_0)}{z - w_0} = f'(w_0) \Rightarrow \left[\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right]' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n\, a_n z^{n-1}$ $\forall\, z \in B(0, R)$.

Ahora $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{n\, |a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \bullet \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \bullet \frac{1}{R} = \frac{1}{R}$, por lo que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\, a_n z^{n-1}$ tienen el mismo radio de convergencia R.

Para concluir, consideremos la serie $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$. Si $g(w) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\, w^n$ y $s(z) = z - z_0$, entonces $g(s(z)) = f(z)$ y por lo tanto $f'(z) = g'(s(z))\, s'(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n\, a_n [s(z)]^{n-1} \bullet 1 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n\, a_n (z - z_0)^{n-1}$. ♦

COROLARIO 3.2.6:

Consideremos la serie $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ con radio de convergencia $R > 0$. Entonces f es infinitamente diferenciable en $B(z_0, R)$ y se tiene:
$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n\ (n-1)\ldots\ (n-k+1)\ a_n\ (z - z_0)^{n-k}$. Además: $\dfrac{f^{(k)}(z_0)}{k!} = a_k$.

DEMOSTRACION:

Se sigue inmediatamente por inducción del Teorema anterior. ♦

DEFINICION 3.2.7:

Sean $\Omega \in \mathbb{C}$ abierto, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. f se llama analítica en Ω si dado $z_0 \in \Omega$, existe $R > 0$ tal que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad \forall\ z \in B(z_0,R) \subseteq \Omega$ y la serie tiene radio de convergencia $\geq R$.

OBSERVACION 3.2.8:

Una función analítica es infinitamente diferenciable debido a 3.2.6. Como notación escribiremos $\mathbf{A}(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ es analítica en } \Omega\}$. Con esta notación se tiene que $\mathbf{A}(\Omega) \subseteq \mathbf{H}(\Omega)$. Se probará más adelante que $\mathbf{H}(\Omega) \subseteq \mathbf{A}(\Omega)$, es decir que si una función f es diferenciable en Ω, entonces f es infinitamente diferenciable en Ω y dada $z_0 \in \Omega$, existe $R > 0$ tal que para $z \in B(z_0,R)$ se tiene $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$.

DEFINICION 3.2.9:

Sea $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto, f infinitamente diferenciable. Definimos la <u>serie de Taylor de f en $z_0 \in \Omega$ por</u>

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n.$$

<u>OBSERVACION 3.2.10:</u>

En general no tiene por que ser que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$ pues en los reales no es cierto. Sin embargo, gracias a 3.2.8, en el caso complejo sí va a resultar cierta la igualdad anterior. Un ejemplo en los reales para ver que no necesariamente $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$ es: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & , \ x \neq 0 \\ 0 & , \ x = 0 \end{cases}$.

Se puede probar que f es infinitamente diferenciable y que $f^{(n)}(0) = 0 \ \forall \ n \in \mathbb{N}$, por lo que la serie de Taylor de f en 0 es $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0 \neq f(x)$.

<u>EJEMPLOS 3.2.11:</u>

(1) Sea $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(z) = z^2$. Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ cualquiera. Se tiene $f'(z_0) = 2 z_0$; $f''(z_0) = 2$; $f^{(n)}(z_0) = 0 \ \forall \ n > 2$, por lo que $f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 = z_0^2 + 2 z_0 (z - z_0) + (z - z_0)^2$.

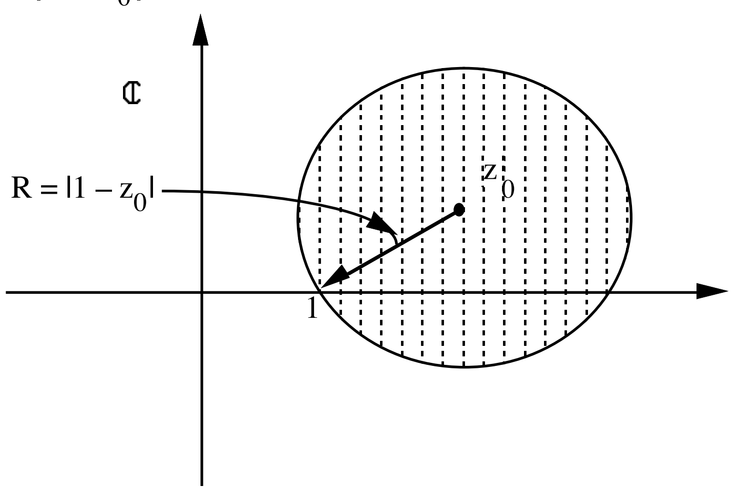
(2) Sea $f : \mathbb{C} - \{1\} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(z) = \frac{1}{1-z}$. Sea $z_0 \in \mathbb{C}$, $z_0 \neq 1$. Se tiene $f'(z) = \frac{1}{(1-z)^2}$ y en general $f^{(n)}(z) = \frac{n!}{(1-z)^{n+1}}$, por lo que la serie de Taylor de f en z_0 es:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1-z_0)^{n+1}}(z - z_0)^n =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1-z_0}\left(\frac{z - z_0}{1-z_0}\right)^n .$$

El radio de convergencia de esta serie es:

$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{1}{|1-z_0|^{n+1}}} = \left[\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{|(1-z_0)|}}\right] \frac{1}{|1-z_0|} = \frac{1}{|1-z_0|}$, es decir $R = |1 - z_0|$, por lo tanto la serie converge para las z tales que $|z - z_0| < |1 - z_0|$.



Además $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1-z_0}\left(\frac{z - z_0}{1-z_0}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-z_0} \bullet \frac{1 - \left(\frac{z - z_0}{1-z_0}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{z - z_0}{1-z_0}\right)} =$

$$\frac{1}{1-z_0} \bullet \frac{1}{1-\left(\frac{z-z_0}{1-z_0}\right)} = \frac{1}{1-z_0-\left(z-z_0\right)} = \frac{1}{1-z}$$ para las z tales que

$\left|z-z_0\right| < \left|1-z_0\right|$, por lo que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\left(1-z_0\right)^{n+1}}\left(z-z_0\right)^n = \frac{1}{1-z}$, es decir f es analítica en $\mathbb{C} - \{1\}$.

En particular, si $z_0 = 0$, $f(z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ para toda z tal que $|z| < 1$ y s tiene R = 1.

PROPOSICION 3.2.12:

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto y sean f, g $\in$ **A**(Ω), entonces f $\pm$ g, f $\bullet$ g $\in$ **A**(Ω).

DEMOSTRACION:

Sean $z_0 \in \Omega$ y $R_1 > 0$, $R_2 > 0$ tales que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(z-z_0\right)^n$, $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n\left(z-z_0\right)^n$ con radios de convergencia R_1 y R_2 respectivamente. Sea $R_3 = \min\left\{R_1, R_2\right\} > 0$. Consideremos $z \in B\left(z_0, R_3\right)$, las series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(z-z_0\right)^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n\left(z-z_0\right)^n$ son absolutamente convergentes $\Rightarrow f(z) \pm g(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n \pm b_n\right)\left(z-z_0\right)^n$ y la última serie será absolutamente convergente en $B\left(z_0, R_3\right) \Rightarrow f \pm g \in$ **A**(Ω).

Por otro lado el producto de las series es absolutamente convergentes debido al Teorema de Cauchy para el producto de series (1.2.52) y se tiene que $\forall\, z \in B\left(z_0, R_3\right)$:

$$f(z) \bullet g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}(z - z_0)^{n-k}\, b_k (z - z_0)^k \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}\, b_k \right) (z - z_0)^n$$

$\Rightarrow f \bullet g \in \mathbf{A}(\Omega)$. ♦

Finalizamos esta sección con la noción de convergencia uniforme de una sucesión de funciones.

DEFINICION 3.2.13:

Sea $A \subseteq \mathbb{C}$ un abierto, y sea $f_n : A \longrightarrow \mathbb{C}$ una sucesión de funciones. Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$.

Decimos que la sucesión de funciones $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente a f en A si dada $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se tiene $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ $\forall z \in A$ y $\forall n \geq N$.

OBSERVACION 3.2.14:

Si $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente a f en A, entonces claramente $\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$ $\forall z \in A$.

TEOREMA 3.2.15 (CRITERIO M DE WEIERSTRASS):

Sea $A \subseteq \mathbb{C}$ un abierto, y sea $f_n : A \longrightarrow \mathbb{C}$ una sucesión de funciones tales que $|f_n(z)| \leq M_n$ $\forall z \in A$. Si $\sum_{n=0}^{\infty} M_n < \infty$, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ converge uniformemente en A.

DEMOSTRACION:

$\left|\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |f_n(z)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} M_n < \infty$, por lo que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ está definida $\forall\ z \in A$. Ahora si $u_n(z) = \sum_{k=0}^{n} f_k(z)$, dada $\varepsilon > 0$, sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=N+1}^{\infty} M_n < \varepsilon$. Entonces $\forall\ z \in A$, $n \geq N$ se tiene que $|f(z) - u_n(z)| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} M_n < \varepsilon$, por lo que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente a f en A. ♦

TEOREMA 3.2.16:

Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ una serie de potencias con radio de convergencia $R > 0$. Sea $0 < r < R$. Entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ converge uniformemente en $\overline{B(z_0, r)}$.

DEMOSTRACION:

Ejercicio. ♦

§ 3. Funciones Elementales.

El objeto de esta sección es estudiar las funciones trigonométricas (seno, coseno), la función exponencial y por último la función logaritmo. La primera parte de esta sección la dedicaremos a formalizar ciertos resultados ampliamente conocidos en un primer curso de trigonometría.

En $\mathbb{R}$ tenemos la siguientes igualdades:

$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$; sen x $= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$; cos x $= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, por esto extendemos la definición a $\mathbb{C}$ de la misma manera.

DEFINICION 3.3.1:

Sea $z \in \mathbb{C}$, definimos:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \ ; \quad \text{sen } z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \ ; \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \ .$$

OBSERVACION 3.3.2:

El radio de convergencia de las 3 series anteriores es ∞ y por lo tanto e^z, sen z, cos $z \in \mathbf{H}(\mathbb{C})$.

PROPOSICION 3.3.3:

$\forall\, z, w \in \mathbb{C}$, se tiene $e^z \bullet e^w = e^{z+w}$.

DEMOSTRACION:

Se sigue inmediatamente de la definición de e^z y de 1.2.32 (4). ♦

COROLARIO 3.3.4:

$e^z \neq 0$ para toda $z \in \mathbb{C}$.

DEMOSTRACION:

Sea $z \in \mathbb{C}$. Se tiene $e^z \bullet e^{-z} = e^{z-z} = e^0 = 1 \neq 0 \Rightarrow e^z \neq 0$. ♦

PROPOSICION 3.3.5:

Sea $z \in \mathbb{C}$. Entonces se tienen las siguientes igualdades:

(1) $e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z$.

(2) $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$.

(3) $\operatorname{sen} z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2\, i}$.

DEMOSTRACION:

Se verifica directamente usando las series que definen cada función. ♦

OBSERVACION 3.3.6:

Sea $z \in \mathbb{C}$, $z = x + i\, y$, $e^{z} = e^{x+iy} = e^{x}\, e^{iy} = e^{x}\, (\cos y + i \operatorname{sen} y)$.

PROPOSICION 3.3.7:

Sea $z \in \mathbb{C}$. Entonces se tienen las siguientes igualdades:

(1) $\left(e^{z}\right)' = e^{z}$.

(2) $(\cos z)' = - \operatorname{sen} z$.

(3) $(\operatorname{sen} z)' = \cos z$.

DEMOSTRACION:

Se demuestra directamente usando las series que definen cada una de las funciones y 3.2.5. ♦

PROPOSICION 3.3.8:

Sean z, w $\in \mathbb{C}$. Entonces:

(1) $\cos(z + w) = \cos z \bullet \cos w - \operatorname{sen} z \bullet \operatorname{sen} w$.

(2) $\operatorname{sen}(z + w) = \operatorname{sen} z \bullet \cos w + \cos z \bullet \operatorname{sen} w$.

(3) $\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z = 1$.

DEMOSTRACION:

Ejercicio. ♦

OBSERVACION 3.3.9:

Se tiene que la función cos x es decreciente en [0, 2] y puesto que cos 0 = 1 y cos 2 < 0, existe un único número $x_0 \in [0, 2]$ tal que $\cos x_0 = 0$. Entonces definimos al número π por $2\, x_0 = \pi$. Con esta definición y los resultados anteriores se tiene que $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ y $\operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1$.

PROPOSICION 3.3.10:

Sea z $\in \mathbb{C}$. Entonces:

(1) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \operatorname{sen} z$.

(2) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \cos z$.

DEMOSTRACION:

Ejercicio. ♦

A continuación pasamos a enunciar algunas propiedades relacionadas con las funciones trigonométricas y el número π.

TEOREMA 3.3.11:

Sea $z \in \mathbb{C}$. Entonces:

(1) $\operatorname{sen} z = 0,\ z \in \mathbb{C} \Leftrightarrow z = n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$.

(2) $\operatorname{sen} z = 1,\ z \in \mathbb{C} \Leftrightarrow z = \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi,\ n \in \mathbb{Z}$.

(3) $\operatorname{sen} z = -1,\ z \in \mathbb{C} \Leftrightarrow z = \left(2n - \frac{1}{2}\right)\pi,\ n \in \mathbb{Z}$.

(4) $\cos z = 0,\ z \in \mathbb{C} \Leftrightarrow z = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi,\ n \in \mathbb{Z}$.

(5) $\cos z = 1,\ z \in \mathbb{C} \Leftrightarrow z = 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$.

(6) $\cos z = -1,\ z \in \mathbb{C} \Leftrightarrow z = (2n+1)\pi,\ n \in \mathbb{Z}$.

(7) $\operatorname{sen}(z + w_0) = \operatorname{sen} z \quad \forall z \in \mathbb{C} \Leftrightarrow w_0 = 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$.

(8) $\cos(z + w_0) = \cos z \quad \forall z \in \mathbb{C} \Leftrightarrow w_0 = 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$.

(9) $e^z = 1,\ z \in \mathbb{C} \Leftrightarrow z = 2n\pi i,\ n \in \mathbb{Z}$.

DEMOSTRACION:

Ejercicio. ♦

OBSERVACION 3.3.12:

También se tiene que si $z = x + iy$, entonces $e^z = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$, por lo que $|e^z| = e^x$. Por otro lado aunque se tiene que $\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z = 1$, las funciones cos z y sen z no están acotadas. Esto se puede ver considerando la sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, $z_n = n\,i$, entonces $\lim_{n\to\infty} |\cos n\,i| = \infty$.

Dado $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$, z forma un "ángulo" con el eje real positivo. Este ángulo se llama argumento y es lo que a continuación pasamos a definir.

PROPOSICION 3.3.13:

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $b - a = 2\pi$ y sea $f : [a, b) \longrightarrow S^1$, donde $S^1 = \left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z| = 1\right\}$ dada por $f(t) = e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t = (\cos t, \operatorname{sen} t)$. Entonces f es biyectiva.

DEMOSTRACION:

Sean $s, t \in (a, b]$ tales que $f(s) = f(t) \Rightarrow e^{is} = e^{it} \Rightarrow e^{i(s-t)} = 1 \Rightarrow$ existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $i (s - t) = 2 \pi n i \Rightarrow s - t = 2 \pi n$. Por otro lado $| s - t | < b - a = 2 \pi$ por lo que $n = 0$, lo que implica $s = t$, por lo tanto f es 1-1.

Para probar que f es sobre consideremos $z = x + i y \in S^1 \Rightarrow | z |^2 = x^2 + y^2 = 1$, en particular $x, y \in [-1, 1]$. Se tiene que $\cos x$, $x \in \mathbb{R}$, es continua y además $\cos 0 = 1$, $\cos \pi = - 1$, entonces por el Teorema del valor intermedio y puesto que $| \cos x | \leq 1 \ \forall \ x \in \mathbb{R}$ se tiene que $\cos : (- \pi, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$ es suprayectiva por lo tanto existe $\xi \in (- \pi, \pi]$ tal que $\cos \xi = x$. Ahora $\operatorname{sen}^2 \xi = 1 - \cos^2 = 1 - x^2 = y^2 \Rightarrow \operatorname{sen} \xi = y$ ó $\operatorname{sen} \xi = - y$. Si $y = 0$, $\operatorname{sen} \xi = y = - y$. Supongamos $\operatorname{sen} \xi = - y$ con $y \neq 0 \Rightarrow - \pi < \xi < \pi$ y $\operatorname{sen} \left(-\xi\right) = - \operatorname{sen} \xi = y$. Además $\cos \left(-\xi\right) = \cos \xi = x$, es decir existe $\eta \in (- \pi, \pi]$ tal que $\cos \eta = x$ y $\sin \eta = y$.

Afirmamos que existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $a < t = \eta + 2 \pi m \leq b$. Se deja como ejercicio su demostración. Entonces se tiene que $t \in (a, b]$ y $\cos t = \cos \left(\eta + 2 \pi m\right) = x$, $\operatorname{sen} t = \operatorname{sen} \left(\eta + 2 \pi m\right) = y \Rightarrow t \in (a, b]$ y $f(t) = \cos t + i \operatorname{sen} t = x + i y = z$, lo cual demuestra que f es sobre. ♦

Sea $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. Entonces $\frac{z}{|z|} = w \in S^1$. Por lo tanto dado $a \in \mathbb{R}$ arbitrario, existe un único $t \in [a, a + 2 \pi)$ tal que $e^{it} = w$. Por otro lado si $t, t' \in \mathbb{R}$ son tales que $e^{it} = e^{it'} \Rightarrow e^{i(t-t')} = 1 \Rightarrow$ existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $i (t - t') = 2 m \pi i \Rightarrow t = t'+ 2 m \pi$, $m \in \mathbb{Z}$. Así pues se tiene que $\left\{ t \in \mathbb{R} \mid e^{it} = w \right\} = \left\{ t_0 + 2\, m\, \pi\, i \mid t \in \mathbb{Z} \right\}$, donde $t_0 \in (-\pi, \pi]$ con $e^{it_0} = w$.

DEFINICION 3.3.14:

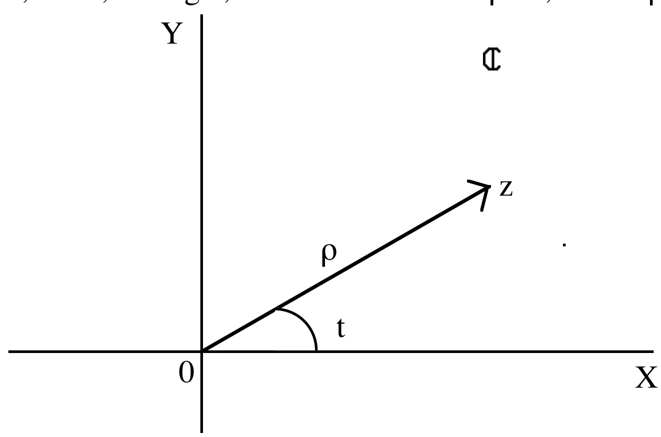
Sea $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ y $w = \frac{z}{|z|} \in S^1$. Entonces al único $t_0 \in (-\pi, \pi]$ con $e^{it_0} = w$ se le llama el <u>argumento principal de z</u> y a cualquier $t \in \mathbb{R}$ tal que $e^{it} = w$ se le llama <u>argumento</u> de z.

NOTACION 3.3.15:

En 3.3.14, ponemos t_0 = argumento principal de z = Arg z, t = argumento de z = arg z.

Se tiene que argumentos de z = $\left\{ t_0 + 2\, m\, \pi\, i \mid t \in \mathbb{Z} \right\}$.

Ahora bien, dado $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, t = arg z, se tiene $z = |z|\, e^{it} = \rho\, e^{it}$, donde $\rho = |z|$, es



decir $z = \rho\,(\cos t + i \operatorname{sen} t)$.

Por último, sea $z = x + i\, y \in \mathbb{C}$, entonces $|e^z| = e^x$, $\arg e^z = y$.

TEOREMA 3.3.16 (FORMULA DE MOIVRE):

Sea $z_0 = \rho\, e^{i\theta}$, $\rho \neq 0$, $\theta \in [0, 2\pi)$. Sea $n \in \mathbb{N}$, entonces las soluciones de la ecuación $z^n = z_0$ están dadas por

$$w_k = \rho^{\frac{1}{n}}\, e^{i\left(\frac{2\pi k+\theta}{n}\right)}\ ,\ k = 0, 1, \dots , n - 1.$$

<u>DEMOSTRACION:</u>

Sea $w = r\, e^{it}$.tal que $w^n = z_0$, entonces $w^n = r^n\, e^{int}.= \rho\, e^{i\theta} \Leftrightarrow r^n = \rho$ y $n\, t = \theta + 2\pi s$, $s \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow r = \sqrt[n]{\rho} = \rho^{\frac{1}{n}}$ y $t = \dfrac{\theta + 2\pi s}{n}$, $s \in \mathbb{Z}$.

Sea $w_s = \rho^{\frac{1}{n}}\, e^{i\left(\frac{\theta+2\pi s}{n}\right)}$, $s \in \mathbb{Z}$.

Sea $s \in \mathbb{Z}$ cualquiera, entonces por el algoritmo de la división, existen q y $p \in \mathbb{Z}$ únicos tales que $s = q\, n + p$ con $0 \le p < n$, entonces si $t = \dfrac{\theta + 2\pi s}{n}$, $t = \dfrac{\theta + 2\, q\, n\, \pi + 2\pi p}{n} = \dfrac{\theta + 2\pi p}{n} + 2\, q\, \pi \Rightarrow e^{it}.= e^{i\left(\frac{\theta+2\pi s}{n}\right)} = e^{i\left(\frac{\theta+2\pi p}{n} + 2q\pi\right)}$ $= e^{i\left(\frac{\theta+2\pi p}{n}\right)} \Rightarrow w_s = w_p$, es decir, $w_0, w_1, \dots , w_{n-1}$ nos dan todas las raíces de la ecuación. ♦

<u>EJEMPLO 3.3.17:</u>

Sea $z_0 = 1 = 1 \bullet e^{i\bullet 0}$ y sea $n \in \mathbb{N}$. Las raíces de la ecuación $w^n = 1$ están dadas por:

$$w_k = 1^{\frac{1}{n}}\, e^{i\left(\frac{2\pi k+0}{n}\right)} = e^{i\left(\frac{2\pi k}{n}\right)}\ ,\ k = 0, 1, \dots , n - 1.$$

$\{w_0, w_1, \dots , w_{n-1}\}$ se llaman las raíces n-ésimas de la unidad.

Ahora pasamos a definir la función logaritmo. Primero enunciamos la siguiente:

<u>PROPOSICION 3.3.18:</u>

La función $\exp = e : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} - \{0\}$ es sobre.

DEMOSTRACION:

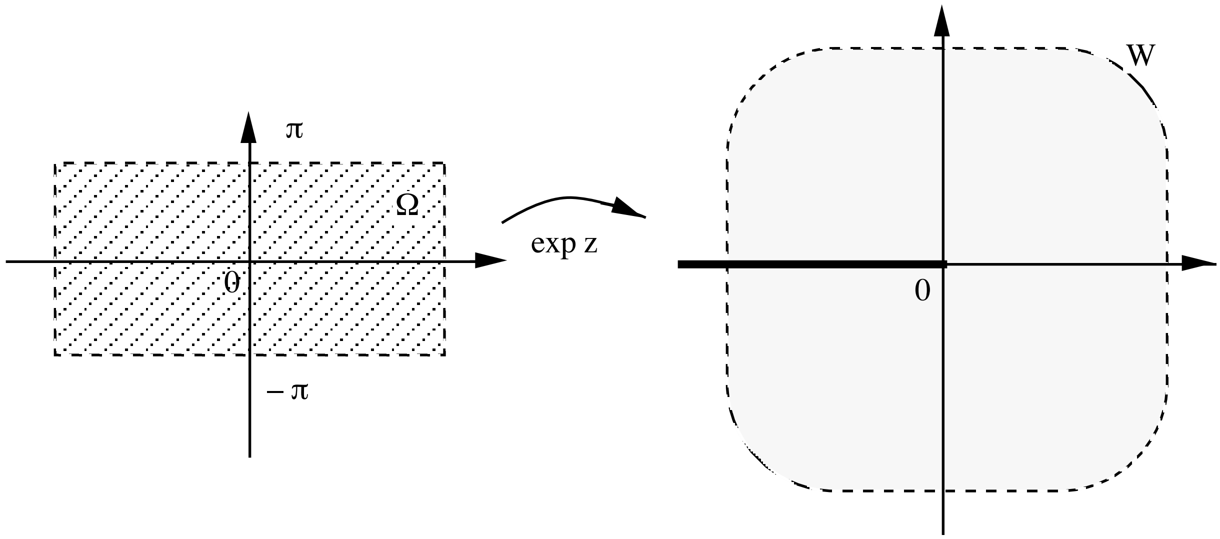
Sea $z_0 \in \mathbb{C} - \{0\}$, $z_0 = x_0 + i\, y_0 = \rho\, e^{it}$. Se quiere hallar $z = x + i\, y \in \mathbb{C}$ tal que $e^z = z_0$. Se tiene que $e^z = e^{x+iy} = e^x\, e^{iy}$, es decir, si queremos $e^z = z_0$, se debe tener $e^x = |e^z| = |z_0| = \rho$, es decir $x = \ln \rho$ y además $e^{iy} = e^{it}$, es decir y es un argumento de z_0. De lo anterior proponemos $z = x + i\, y = \ln \rho + i \arg z_0$, es decir $x = \ln \rho$, $y = \arg z_0$, entonces $e^z = e^{\ln \rho}\, e^{i \arg z} = \rho\, e^{it} = z_0$. ♦

Ahora establecemos algunos resultados que en cierto sentido motivarán la definición de la función logaritmo.

PROPOSICION 3.3.19:

Sean $\Omega = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Im}\ z| < \pi \right\}$, entonces $\exp : \Omega \longrightarrow W = \mathbb{C} - \left(\mathbb{R}^- \cup \{0\}\right)$ es una función biyectiva y donde $\mathbb{R}^- = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \right\}$.

DEMOSTRACION:



Sea $w \in W$, $w = \rho\, e^{it}$, $\rho = |w|$, $t = \operatorname{Arg} w \in (-\pi, \pi)$. De lo anteriormente demostrado, existen únicos $x \in \mathbb{R}$, $y \in (-\pi, \pi)$, tales que $e^x = \rho$, $y = t$ ($x = \ln \rho$), $z = x + i\, y \in \Omega$ y $w = e^x e^{iy} = e^{x+iy} = e^z$. Además, $z = \ln |w| + i \operatorname{Arg} w$. Por último, puesto que $z \in \Omega \Rightarrow e^z \in W$, probando lo que se quería.

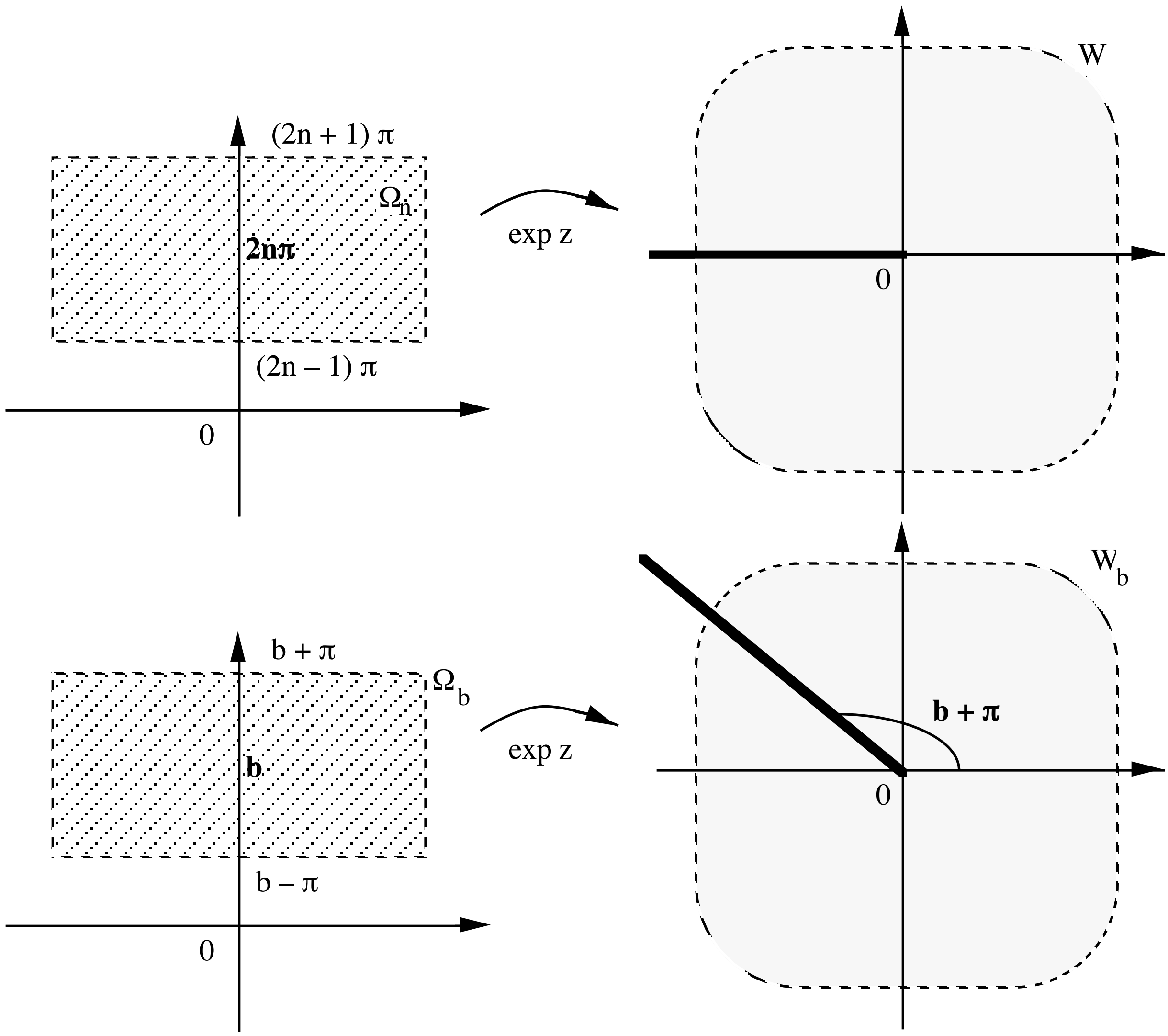
♦

<u>OBSERVACION 3.3.20:</u>

Similarmente a 3.3.19, se tiene que si

$$\Omega_n = \{z \in \mathbb{C} \mid (2n - 1)\pi < \operatorname{Im} z < (2n + 1)\pi\}$$

y W como en 3.3.19, entonces $\exp : \Omega_n \longrightarrow W$ es biyectiva y si $w \in W$, $z \in \Omega_n$ es tal que $e^z = w$, entonces $z = \ln |w| + i (\operatorname{Arg} z) + 2\, n\, \pi\, i$.



Más generalmente, si $b \in \mathbb{R}$ y sean $\Omega_b = \{z \in \mathbb{C} \mid b - \pi < \operatorname{Im} z < b + \pi\}$, $W_b = \{z \in \mathbb{C} - \{0\} \mid \operatorname{Arg} z + 2n\pi \neq b + \pi \ \forall\ n \in \mathbb{Z}\}$. Entonces $\exp : \Omega_b \longrightarrow W_b$ es biyectiva. Además, si $w \in W_b$ y $z \in \Omega_b$ son tales que $e^z = w$, entonces $z = \ln |w| + i (\arg z)$ con $\arg z \in (b - \pi, b + \pi)$.

PROPOSICION 3.3.21:

Sea $W_b = \{z \in \mathbb{C} - \{0\} \mid \operatorname{Arg} z + 2n\pi \neq b + \pi$ para toda $n \in \mathbb{Z}\}$, entonces la función: arg : $W_b \longrightarrow (b - \pi, b + \pi)$ es continua.

DEMOSTRACION:

Supongamos lo contrario, entonces existe $\varepsilon > 0$ y una sucesión $\{w_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq W_b$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = w_0$ y $|\arg w_n - \arg w_0| \geq \varepsilon$. Puesto que $b - \pi < \arg w_n < b + \pi$, entonces por el Teorema de Bolzano-Weierstrass, $\arg w_n$ tiene una subsucesión convergente, $t_{n_k} = \arg w_{n_k}$ y sea $t_0 = \lim\limits_{k\to\infty} \arg w_{n_k}$. Entonces $b - \pi \leq t_0 \leq b + \pi$.

Demostraremos que $t_0 = \arg w_0$. Esto nos llevará a una contradicción con el hecho de que $|\arg w_n - \arg w_0| \geq \varepsilon$. Tenemos:

$$\lim_{k\to\infty} e^{i t_{n_k}} = \lim_{k\to\infty} e^{i \arg w_{n_k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{w_{n_k}}{|w_{n_k}|} = \frac{w_0}{|w_0|}.$$

Por la continuidad de la función exponencial, se tiene que $\lim\limits_{k\to\infty} e^{i t_{n_k}} = e^{i t_0}$, de donde $e^{i t_0} = \dfrac{w_0}{|w_0|}$. Por consiguiente, $\arg w_0 = t_0 + 2 k \pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Ahora

$$b - \pi < \arg w_0 < b + \pi,$$
$$b - \pi \leq t_0 \leq b + \pi,$$

de donde obtenemos, restando estas dos igualdades, que $-2\pi < 2k\pi < 2\pi \Rightarrow k = 0$ lo que demuestra que $t_0 = \arg w_0$. ♦

La Proposición 3.3.21, demuestra que la función $g : W_b \longrightarrow \Omega_b$ dada por $g(w) = \ln|w| + i \arg w$, con $\arg w \in (b-\pi, b+\pi)$ es continua. Esta función es, por otro lado, la inversa de la función $\exp : \Omega_b \longrightarrow W_b$.

DEFINICION 3.3.22:

Sea Ω una región del plano complejo y $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ continua. Se dice que <u>f es una función logaritmo</u> si $\forall\, z \in \Omega$ se tiene que $e^{f(z)} = z$.

Obviamente $0 \notin \Omega$, y se sigue de la Proposición 3.1.21 que f es diferenciable. Además tendremos que $\left(e^{f(z)}\right)' = f'(z) \bullet e^{f(z)} = 1$, de donde obtenemos que $f'(z) = \frac{1}{z}$. En particular obtenemos que una función logaritmo es infinitamente diferenciable. Como un ejemplo de una función logaritmo tendremos a la función $g : W_b \longrightarrow \Omega_b$ dada por $g(w) = \ln| w | + i \arg w$, con $\arg w \in (b-\pi, b+\pi)$.

Ahora bien, si $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, son dos funciones logaritmo, tendremos que $e^{f(z)} = z = e^{g(z)}$, de donde obtenemos $e^{f(z)-g(z)} = 1$, por lo que gracias al Teorema 3.3.11 (9), obtenemos $f(z) = g(z) + 2 k_z \pi i$ con $k_z \in \mathbb{Z}$. Si definimos que $h(z) = f(z) - g(z)$, entonces $h(\Omega) \subseteq \{2 k \pi i \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Ahora bien este último conjunto es discreto, Ω es conexo y $h(z)$ es continua, por lo que existe un único $k \in \mathbb{Z}$ tal que $f(z) = g(z) + 2 k \pi i \ \ \forall\, k \in \mathbb{Z}$, es decir dos funciones logaritmo en Ω difieren a lo más de un múltiplo entero de $2 \pi i$.

Ahora analicemos como está dada una función logaritmo f. Sea $f(z) = u(z) + i v(z)$, entonces $e^{f(z)} = e^{u(z)} e^{iv(z)} = z$, de donde tomando módulos obtenemos que

$$u(z) = \ln|z| \quad \text{y} \quad e^{iv(z)} = \frac{z}{|z|}$$

es decir $v(z)$ es uno de los argumentos del número z.

Ahora $u(z) = \ln| z |$ siempre es una función continua, por lo tanto para que exista una función logaritmo en una región Ω es necesario que exista una "rama" continua de arg z en Ω, puesto que $\operatorname{Im} f(z) = \arg z$.

Sea $\Omega = \mathbb{C} - \left(\mathbb{R}^- \cup \{0\}\right)$ y $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ definida como

$$f(z) = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z \quad , \quad \operatorname{Arg} z \in (-\pi, \pi).$$

A f se le llama <u>logaritmo principal</u> o simplemente <u>logaritmo</u>. Cuando el argumento se toma en $(-\pi, \pi)$ se denotará con mayúscula Arg z.

La función anterior se puede extender a $\mathbb{C} - \{0\}$ tomando $f(z) = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z$ con $-\pi < \operatorname{Arg} z \leq \pi$. Esta función sigue teniendo la propiedad de que $e^{f(z)} = z$ para toda $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ pero ya no es continua. Se deja al cuidado del lector verificar que esta función no es continua en $\mathbb{R}^-$.

Finalmente notemos que dada una función logaritmo $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ no necesariamente se va a tener que $f\left(e^z\right) = z$, pues si alguna función f cumpliera con esta relación entonces la función $g(z) = f(z) + 2\pi i$ ya no cumple con la relación anterior y sigue siendo una función logaritmo.

DEFINICION 3.3.23:

Dado cualquier número complejo $z \neq 0$, definimos

$$\mathrm{Ln}\, z = \left\{ \ln |z| + i \operatorname{Arg} z + 2 k \pi i \mid \operatorname{Arg} z \in (-\pi, \pi],\ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

este es el conjunto de valores del logaritmo de un número complejo.

PROPOSICION 3.3.24:

Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C} - \{0\}$. Entonces $\mathrm{Ln}\left(z_1 z_2\right) = \mathrm{Ln}\left(z_1\right) + \mathrm{Ln}\left(z_2\right)$. Aquí la igualdad se entiende en el sentido de igualdad entre conjuntos y la suma como suma de conjuntos.

DEMOSTRACION:

$$\mathrm{Ln}\left(z_1 z_2\right) = \left\{ \ln |z_1 z_2| + i \operatorname{Arg}\left(z_1 z_2\right) + 2 n \pi i \mid n \in \mathbb{Z} \right\} =$$

$$= \left\{ \ln |z_1| + \ln |z_2| + i \operatorname{Arg}\left(z_1\right) + i \operatorname{Arg}\left(z_2\right) + 2 k \pi i \mid k \in \mathbb{Z} \right\} =$$

$$= \left\{ \left(\ln |z_1| + i \operatorname{Arg}\left(z_1\right) + 2 s\pi i\right) + \left(\ln |z_2| + i \operatorname{Arg}\left(z_2\right) + 2 r\pi i\right) \mid s, r \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$= \left\{ \ln|z_1| + i\operatorname{Arg}\left(z_1\right) + 2 s\pi i \mid s \in \mathbb{Z} \right\} + \left\{ \ln|z_2| + i\operatorname{Arg}\left(z_2\right) + 2 r\pi i \mid r \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$= \mathrm{Ln}\left(z_1\right) + \mathrm{Ln}\left(z_2\right).$$

La demostración de que $\operatorname{Arg}\left(z_1 + z_2\right) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 + 2 k \pi i$ con algún $k \in \mathbb{Z}$, se deja al lector. ♦

DEFINICION 3.3.25:

Sea $a \in \mathbb{C} - \{0\}$ y sea $\log a$ cualquier valor de $\mathrm{Ln}\, a$, en otras palabras $\log a = \ln |a| + i \operatorname{Arg} a + 2 k \pi i$ para algún $k \in \mathbb{Z}$. Entonces se define $a^z = e^{z \log a} = e^{z(\ln|a| + i \operatorname{Arg} a + 2k\pi i)}$. Observemos que a^z depende del valor asignado a $\log a$.

CAPITULO 4.

INTEGRACION

§ 1. Integración Compleja.

Todas las integrales que aparecen en esta sección se refieren a integrales de Riemann propias (es decir, suponemos las funciones acotadas).

DEFINICION 4.1.1:

Sean $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$, $g(t) = g_1(t) + i\, g_2(t)$. Entonces se define

$$\int_a^b g(t)\, dt = \int_a^b g_1(t)\, dt + i \int_a^b g_2(t)\, dt.$$

Es decir, por definición $\int_a^b g(t)\, dt$ existe $\Leftrightarrow \int_a^b g_1(t)\, dt$ y $\int_a^b g_2(t)\, dt$ existen y en este caso se dice que <u>g es integrable</u>.

PROPOSICION 4.1.2:

Sean $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$, integrables, $\lambda = \lambda_1 + i\, \lambda_2 \in \mathbb{C}$. Entonces $f \pm g$, λf, $|f|$ son integrables y se tiene:

(1) $\int_a^b (f + g)(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt.$

(2) $\int_a^b \big(\lambda\ f\big)(t)\,dt = \lambda \int_a^b f(t)\,dt$

(3) $\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt.$

DEMOSTRACION:

(1)
(2) } Ejercicio.

(3) Se deja como ejercicio el verificar que $|f(t)|$ es integrable. Ahora si $\int_a^b f(t)\,dt = 0$, entonces $\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| = 0 \leq \int_a^b |f(t)|\,dt$. Supongamos que $\int_a^b f(t)\,dt \neq 0$, entonces escribimos $\int_a^b f(t)\,dt = \rho\ e^{i\alpha}$, con $\rho = \left|\int_a^b f(t)\,dt\right| = e^{-i\alpha} \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b e^{-i\alpha}\ f(t)\,dt$, por lo tanto $\rho = \mathrm{Re}\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| = \mathrm{Re} \int_a^b e^{-i\alpha}\ f(t)\,dt = \int_a^b \mathrm{Re}\,\big(e^{-i\alpha}\ f(t)\big)\,dt \leq \int_a^b \big|\mathrm{Re}\,\big(e^{-i\alpha}\ f(t)\big)\big|\,dt \leq \int_a^b \big|e^{-i\alpha}\ f(t)\big|\,dt = \int_a^b |f(t)|\,dt.$

♦

OBSERVACION 4.1.3:

Sea $M = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)| < \infty$, entonces se tiene

$$\left|\int_a^b f(t)\ dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\ dt \leq \int_a^b M\ dt = M(b-a).$$

DEFINICION 4.1.4:

Sea $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$. Sea $t_0 \in [a, b]$. Se define

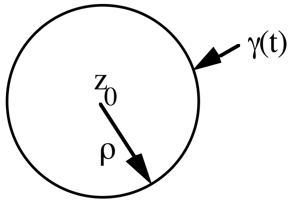
$$\gamma'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}$$

siempre y cuando este límite exista.

Si $\gamma = \gamma_1 + i\,\gamma_2$, entonces $\gamma'(t_0)$ existe $\Leftrightarrow$ $\gamma_1'(t_0)$ y $\gamma_2'(t_0)$ existen y en este caso $\gamma'(t_0) = \gamma_1'(t_0) + i\,\gamma_2'(t_0)$.

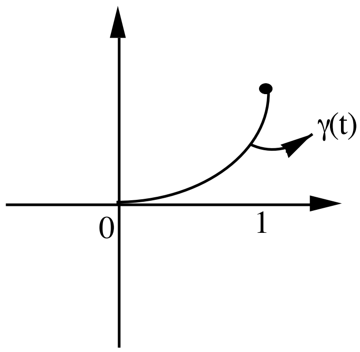
EJEMPLOS 4.1.5:

(1) Sea $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$, dada por $\gamma(t) = z_0 + \rho\ e^{it} = \left(x_0 + \rho \cos t\right) + i\left(y_0 + \rho \operatorname{sen} t\right)$, donde $z_0 = x_0 + i\ y_0$.



Entonces $\gamma'(t) = \rho\ (\cos t)' + i\ \rho\ (\operatorname{sen} t)' = -\rho \operatorname{sen} t + i\,\rho \cos t = i\left[\rho \cos t + i\ \rho \operatorname{sen} t\right] = i\,\rho\, e^{it}$.

(2) Sea $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $\gamma(t) = t + i\,t^2$. Entonces $\gamma'(t) = 1 + 2\,i\,t$.



DEFINICION 4.1.6:

Sea $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$. Se define la <u>traza</u> de γ por $\gamma^* = \gamma([a, b])$.

DEFINICION 4.1.7:

Una curva $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ se llama <u>C^1</u> ó <u>continuamente diferenciable</u> en $[a, b]$ si $\gamma(t)$ existe $\forall\ t \in [a, b]$ y además $\gamma'(t)$ es continua en $[a, b]$.

DEFINICION 4.1.8:

Una curva $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ se llama <u>C^1 por tramos</u> ó <u>continuamente diferenciable por tramos</u> en $[a, b]$ si existe una partición $\{t_0 = a < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = b\}$ de $[a, b]$ tal que γ es C^1 en $[t_{i-1}, t_i]$ para $i = 1, 2, \dots, n$.

DEFINICION 4.1.9:

Sea $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ una curva C^1 por tramos. Entonces se define:

L = <u>longitud de la curva</u> $\gamma = \displaystyle\int_a^b |\gamma'(t)|\, dt.$

Geométricamente se tiene que L = longitud de γ^*. Para ver esto consideremos $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ la sucesión de particiones canónicas de $[a, b]$, es decir: $P_n = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$, donde $t_k = a + \frac{k(b-a)}{n}$, $0 \le k \le n$. Entonces

$$\int_a^b |\gamma'(t)|\,dt = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} |\gamma'(\xi_i)|\,dt, \text{ donde } t_{i-1} \le \xi_i \le t_i \text{ es arbitrario.}$$

Por otro lado, por el Teorema del valor medio, existen $\eta_i, \xi_i \in (t_{i-1}, t_i)$ tales que

$$\frac{\gamma_1(t_i) - \gamma_1(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}) = \gamma_1'(\eta_i) \quad , \quad \frac{\gamma_2(t_i) - \gamma_2(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}) = \gamma_2'(\xi_i), \text{ por lo que}$$

$$\gamma_1(t_i) - \gamma_1(t_{i-1}) = (t_i - t_{i-1})\,\gamma_1'(\eta_i) = \frac{b-a}{n}\gamma_1'(\eta_i) \quad \text{y}$$

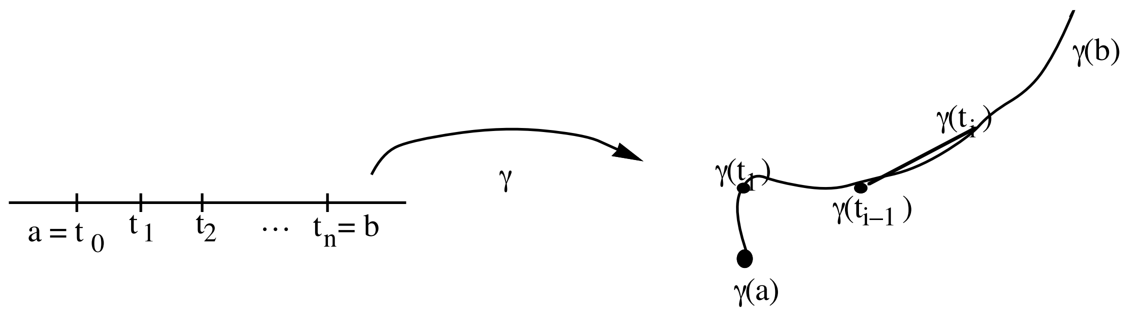
$$\gamma_2(t_i) - \gamma_2(t_{i-1}) = (t_i - t_{i-1})\,\gamma_2'(\xi_i) = \frac{b-a}{n}\gamma_2'(\xi_i) \quad \text{por lo tanto}$$

$$\int_a^b |\gamma'(t)|\,dt = \int_a^b \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2}\,dt =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b-a}{n}\right) \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\gamma_1'(\eta_i))^2 + (\gamma_2'(\xi_i))^2} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b-a}{n}\right) \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{b-a} \sqrt{(\gamma_1(t_i) - \gamma_1(t_{i-1}))^2 + (\gamma_2(t_i) - \gamma_2(t_{i-1}))^2} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\gamma_1(t_i) - \gamma_1(t_{i-1}))^2 + (\gamma_2(t_i) - \gamma_2(t_{i-1}))^2}.$$

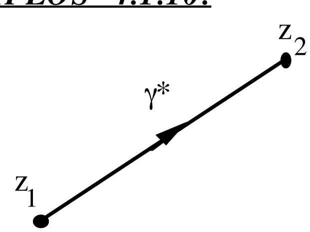


Ahora bien, $\left|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\right| = \sqrt{\left(\gamma_1(t_i) - \gamma_1(t_{i-1})\right)^2 + \left(\gamma_2(t_i) - \gamma_2(t_{i-1})\right)^2}$ = distancia entre $\gamma(t_i)$ y $\gamma(t_{i-1})$, por lo que

$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\left(\gamma_1(t_i) - \gamma_1(t_{i-1})\right)^2 + \left(\gamma_2(t_i) - \gamma_2(t_{i-1})\right)^2}$ es la longitud de la poligonal determinada por $\left\{\gamma(t_0), \gamma(t_1), \ldots, \gamma(t_n)\right\}$ y por lo tanto:

$$\boxed{\int_a^b \left|\gamma'(t)\right| dt = \text{Longitud de } \gamma^*}.$$

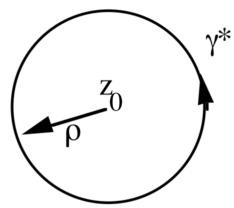
EJEMPLOS 4.1.10:

(1) 

Sea $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = z_1 + t\left(z_2 - z_1\right)$, por lo tanto $\gamma^* = \gamma([0, 1]) = \left[z_1, z_2\right] = \left\{z \in \mathbb{C} \mid z = (1 - t)\, z_1 + t\, z_2,\ 0 \le t \le 1\right\}$.

Por lo tanto $L = \int_0^1 \left|\gamma'(t)\right| dt = \int_0^1 \left|z_2 - z_1\right| dt = \left|z_2 - z_1\right|$.

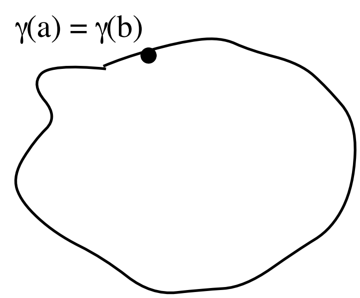
(2) Sea $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$, dada por $\gamma(t) = z_0 + \rho\, e^{it}$, $\gamma'(t) = i\, \rho\, e^{it}$.



γ^* es la circunferencia con centro en z_0 y radio ρ. Entonces $L = \int_0^{2\pi} |\gamma'(t)|\, dt = \int_0^{2\pi} \rho\, dt = 2\, \pi\, \rho$.

DEFINICION 4.1.11:

Una curva $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ se llama <u>cerrada</u> si $\gamma(a) = \gamma(b)$.



DEFINICION 4.1.12:

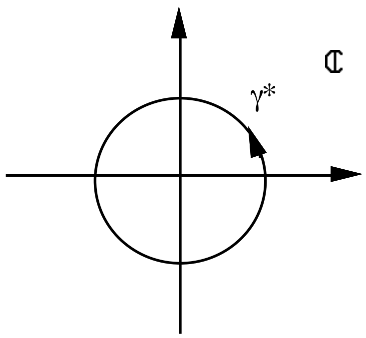
Sea $f : A \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ integrable y sea $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ de clase C^1 por tramos, γ de clase C^1 en $[t_{i-1}, t_i]$ para $i = 1, 2, \ldots, n$, donde $\{t_0 = a < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b\}$. Entonces se define:

$$\int_\gamma f(\xi)\, d\xi = \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f\big(\gamma(t)\big)\, \gamma'(t)\, dt = \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\, \gamma'(t)\, dt$$

la cual se llama la <u>integral de línea de f sobre la curva γ</u>.

EJEMPLOS 4.1.13:

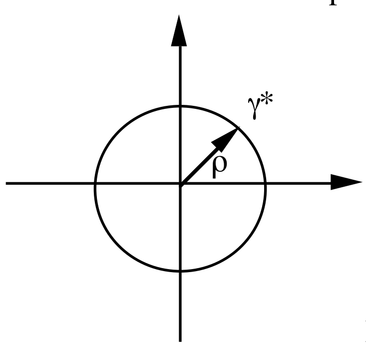
(1) Sea $f : \mathbb{C} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(z) = \frac{1}{z}$. Sea $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $\gamma(t) = e^{it}$.



Entonces $\int_\gamma f(\xi)\, d\xi = \int_0^{2\pi} f\big(\gamma(t)\big)\, \gamma'(t)\, dt =$

$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}}\, i\, e^{it}\, dt = \int_0^{2\pi} i\, dt = 2\pi i.$

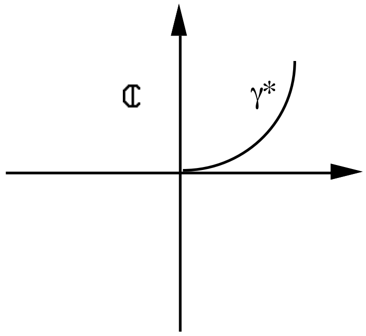
(2) Sea $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(z) = |z|$ y sea $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ $\gamma(t) = \rho\, e^{it}$.



Entonces $\int_\gamma f(\xi)\, d\xi = \int_0^{2\pi} f\big(\gamma(t)\big)\, \gamma'(t)\, dt =$

$\int_0^{2\pi} \rho\, i\, \rho\, e^{it}\, dt = \rho^2 \int_0^{2\pi} i\, e^{it}\, dt = \rho^2 \left[e^{it}\right]_0^{2\pi} = \rho^2 \left(e^{2\pi i} - e^0\right) = \rho^2 (1 - 1) = 0.$

(3) Sea $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = z^2$ y sea $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = t + i\, t^2$.



Entonces $\displaystyle\int_\gamma f(\xi)\, d\xi = \int_0^1 f\big(\gamma(t)\big)\, \gamma'(t)\, dt =$

$$\int_0^1 \big(t + i\, t^2\big)^2 (1 + 2\, i\, t)\, dt = \left[\frac{\big(t + i\, t^2\big)^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}(1 + i)^3.$$

PROPOSICION 4.1.14:

Sean $f, g : A \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, integrables y $\gamma : [a, b] \longrightarrow A$ una curva de clase C^1 por tramos, entonces:

(1) $\displaystyle\int_\gamma \big(\alpha\, f(\xi) + \beta\, g(\xi)\big)\, d\xi = \alpha \int_\gamma f(\xi)\, d\xi + \beta \int_\gamma g(\xi)\, d\xi \quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$

(2) Sea $\gamma^* = \gamma([a, b])$, $M = \sup\limits_{\xi \in \gamma^*} |f(\xi)|$, $L = \displaystyle\int_a^b |\gamma'(t)|\, dt$. Entonces $\left| \displaystyle\int_\gamma f(\xi)\, d\xi \right| \leq M \bullet L.$

DEMOSTRACION:

(1) Ejercicio.

(2) $\left| \displaystyle\int_\gamma f(\xi)\, d\xi \right| = \left| \displaystyle\int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\, \gamma'(t)\, dt \right| \leq \displaystyle\int_a^b \big|f\big(\gamma(t)\big)\big|\, |\gamma'(t)|\, dt \leq \displaystyle\int_a^b M\, |\gamma'(t)|\, dt = M \bullet L.$ ♦

DEFINICION 4.1.15:

Sea $h : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$, entonces $H : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ se llama primitiva de h si $H'(t) = h(t)\ \forall\ t \in [a, b]$.

OBSERVACION 4.1.16:

Sea $h : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$, $H : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$, $h = h_1 + i\, h_2$, $H = H_1 + i\, H_2$, entonces H es primitiva de h $\Leftrightarrow$ H_1 es primitiva de h_1 y H_2 es primitiva de h_2.

PROPOSICION 4.1.17 (TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CALCULO):

Sea $h : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ integrable y $H : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ una primitiva de h, entonces

$$\int_a^b h(t)\, dt = H(b) - H(a).$$

DEMOSTRACION:

$$\int_a^b h(t)\, dt = \int_a^b h_1(t)\, dt + i \int_a^b h_2(t)\, dt = H_1(b) - H_1(a) + i\, \left[H_2(b) - H_2(a)\right] =$$

$H(b) - H(a)$. ♦

DEFINICION 4.1.18:

Sean $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ y $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. F se llama una primitiva de f en Ω si $F'(z) = f(z)\ \forall\ z \in \Omega$.

EJEMPLO 4.1.19:

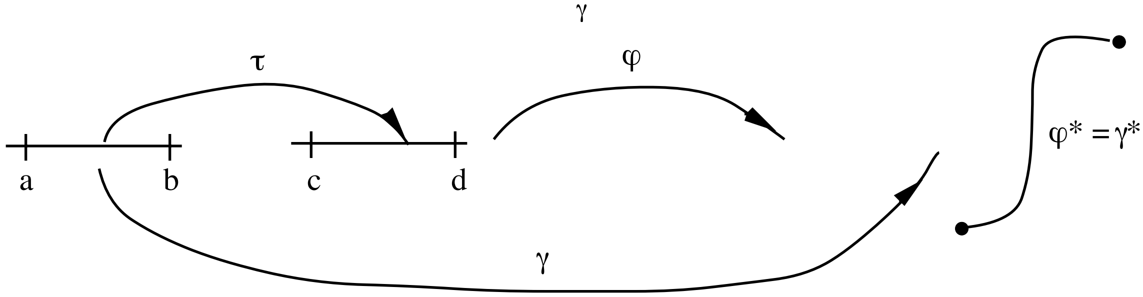
Sea $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq -1$, $F : \mathbb{C} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$, $F(z) = \dfrac{z^{n+1}}{n+1}$ es una primitiva de $f(z) = z^n$ en $\mathbb{C} - \{0\}$ (de hecho en $\mathbb{C}$ si $n \geq 0$).

Ahora si $n = -1$, sea $W = \mathbb{C} - \left(\mathbb{R}^- \cup \{0\}\right) = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid z \notin \mathbb{R}^-,\ z \neq 0 \right\}$, consideremos $F : W \longrightarrow \mathbb{C}$, $F(z) = \ln z$ y $F'(z) = \dfrac{1}{z}$ $\forall\, z \in W$, por lo tanto $\ln z$ es una primitiva de $\dfrac{1}{z}$ en W.

DEFINICION 4.1.20:

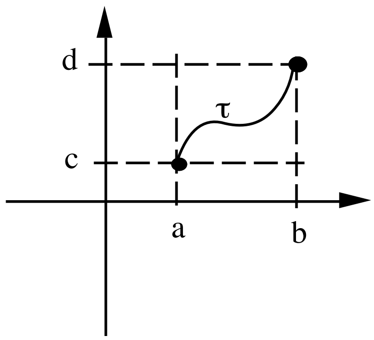
Sean $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$, $\varphi : [c, d] \longrightarrow \mathbb{C}$ dos curvas C^1. Se define la relación $\gamma \sim \varphi$ si existe $\tau : [a, b] \longrightarrow [c, d]$ suprayectiva tal que τ es derivable, $\tau'(t) > 0$ $\varphi\big(\tau(t)\big) = \gamma(t)$ $\forall\, t \in [a, b]$.

$$\begin{tikzcd}
{[a, b]} \arrow[r, "\tau"] \arrow[rr, bend right, "\gamma"'] & {[c, d]} \arrow[r, "\varphi"] & \mathbb{C}
\end{tikzcd}$$



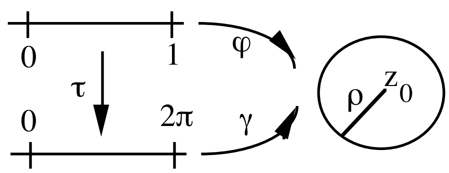
OBSERVACION 4.1.21:

Puesto que $\tau'(t) > 0$, se tiene que τ es creciente y en particular es 1-1 y se ahí se sigue que $\tau(a) = c$, $\tau(b) = d$. Además la curva es recorrida en el mismo sentido tanto por φ como por γ.



EJEMPLO 4.1.22:

Sean $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = z_0 + \rho\ e^{2\pi it}$, $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$, $\varphi(t) = z_0 + \rho\ e^{it}$. Sea $\tau : [0, 1] \longrightarrow [0, 2\pi]$, $\tau(t) = 2\ \pi\ t$. Entonces se tiene que $\tau'(t) = 2\ \pi > 0\ t \in [0, 1]$, τ es sobre y $\varphi\big(\tau(t)\big) = \varphi(2\pi t) = z_0 + \rho\ e^{2\pi it} = \gamma(t)\ \forall\ t \in [0, 1]$, por lo tanto $\gamma \sim \varphi$.



PROPOSICION 4.1.23:

La relación $\sim$ definida en 4.1.20, es un ralación de equivalencia.

DEMOSTRACION:

Ejercicio. ♦

OBSERVACION 4.1.24:

Recordemos el Teorema de cambio de Variable en el caso real:

"Sean $h : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $\tau : [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que $\tau([c, d]) \subseteq [a, b]$, h y τ' continuas, entonces

$$\int_c^d h\big(\tau(t)\big)\, \tau'(t)\, dt = \int_{\tau(c)}^{\tau(d)} h(t)\, dt."$$

PROPOSICION 4.1.25 (CAMBIO DE VARIABLE):

Sean $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, $\varphi : [a, b] \longrightarrow \Omega$, $\gamma : [c, d] \longrightarrow \Omega$, $\tau : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ con $\tau([a, b]) \subseteq [c, d]$, τ, φ, γ derivables y $\gamma \circ \tau = \varphi$, entonces:

$$\int_a^b f\big(\varphi(t)\big)\, \varphi'(t)\, dt = \int_a^b f\Big(\gamma\big(\tau(t)\big)\Big)\, \gamma'\big(\tau(t)\big)\, \tau'(t)\, dt = \int_{\tau(a)}^{\tau(b)} f\big(\gamma(t)\big)\, \gamma'(t)\, dt.$$

DEMOSTRACION:

Sea $f = u + i\, v$, $\varphi = \varphi_1 + i\, \varphi_2$, $\gamma = \gamma_1 + i\, \gamma_2$, $\tau = \tau_1 + i\, \tau_2$. Se tiene, aplicando el Teorema de cambio de variable en el caso real que:

$$\int_a^b f\big(\varphi(t)\big)\, \varphi'(t)\, dt = \int_a^b \Big(u\big(\varphi(t)\big) + i\, v\big(\varphi(t)\big)\Big) \Big(\varphi_1'(t) + i\, \big(\varphi_2'(t)\big)\Big)\, dt =$$

$$\int_a^b u\big(\varphi(t)\big)\, \varphi_1'(t)\, dt - \int_a^b v\big(\varphi(t)\big)\, \varphi_2'(t)\, dt + i\int_a^b v\big(\varphi(t)\big)\, \varphi_1'(t)\, dt + i\int_a^b u\big(\varphi(t)\big)\, \varphi_2'(t)\, dt$$

$$= \int_a^b u\Big(\gamma\big(\tau(t)\big)\Big)\, \gamma_1'\big(\tau(t)\big)\, \tau'(t)\, dt - \int_a^b v\Big(\gamma\big(\tau(t)\big)\Big)\, \gamma_2'\big(\tau(t)\big)\, \tau'(t)\, dt +$$

$$+ i\int_a^b v\Big(\gamma\big(\tau(t)\big)\Big)\, \gamma_1'\big(\tau(t)\big)\, \tau'(t)\, dt + i\int_a^b u\Big(\gamma\big(\tau(t)\big)\Big)\, \gamma_2'\big(\tau(t)\big)\, \tau'(t)\, dt =$$

$$\int_{\tau(a)}^{\tau(b)} u\big(\gamma(t)\big)\,\gamma_1'(t)\,dt - \int_{\tau(a)}^{\tau(b)} v\big(\gamma(t)\big)\,\gamma_2'(t)\,dt +$$

$$+\, i \int_{\tau(a)}^{\tau(b)} v\big(\gamma(t)\big)\,\gamma_1'(t)\,dt + i \int_{\tau(a)}^{\tau(b)} u\big(\gamma(t)\big)\,\gamma_2'(t)\,dt =$$

$$\int_{\tau(a)}^{\tau(b)} \Big[\, u\big(\gamma(t)\big) + i\ v\big(\gamma(t)\big)\Big] \bullet \Big[\gamma_1'(t) + i\ \gamma_2'(t)\Big]\,dt = \int_{\tau(a)}^{\tau(b)} f\big(\gamma(t)\big)\,\gamma'(t)\ dt.$$

♦

El resultado anterior nos sirve para demostrar 2 hechos fundamentales para la integral de línea.

PROPOSICION 4.1.26:

Sean $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, φ, γ dos curvas en Ω de clase C^1 tales que $\varphi \sim \gamma$, entonces:

$$\int_{\gamma} f(\xi)\ d\xi = \int_{\varphi} f(\xi)\ d\xi.$$

DEMOSTRACION:

Sean $\varphi : [a, b] \longrightarrow \Omega$, $\gamma : [c, d] \longrightarrow \Omega$, $\tau : [a, b] \longrightarrow [c, d]$ tales que $\tau'(t) > 0$, $\tau(a) = c$, $\tau(b) = d$ y $\gamma \circ \tau = \varphi$. Se tiene que:

$$\int_{\varphi} f(\xi)\ d\xi = \int_a^b f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)\ dt = \int_a^b f\Big(\gamma\big(\tau(t)\big)\Big)\,\gamma'\big(\tau(t)\big)\,\tau'(t)\ dt = \int_{\tau(a)}^{\tau(b)} f\big(\gamma(t)\big)\,\gamma'(t)\ dt =$$

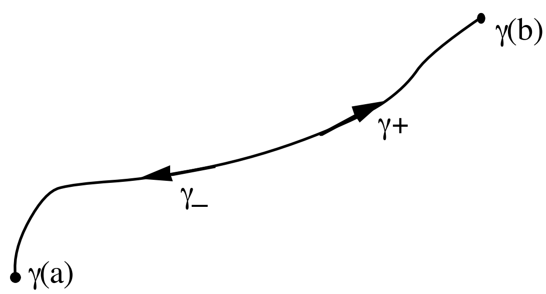
$$\int_c^d f\big(\gamma(t)\big)\,\gamma'(t)\,dt = \int_\gamma f(\xi)\,d\xi. \qquad \blacklozenge$$

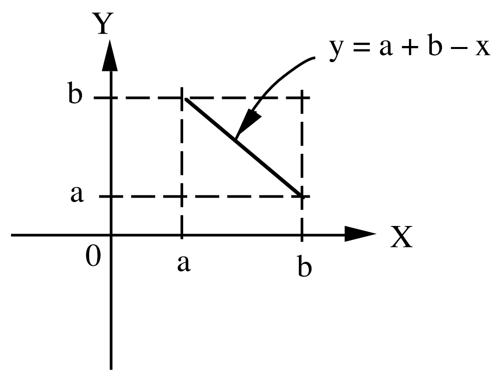
DEFINICION 4.1.27;

Sea $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$, una curva de clase C^1. Definimos: $\gamma\_ : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ por $\gamma\_(t) = \gamma(a + b - t)$.

OBSERVACION 4.1.28:

Geométricamente $\gamma\_$ es la misma curva que γ pero recorrida en sentido contrario.





Para ver esto, notemos que si $a \leq t \leq b$, entonces $-b \leq -t \leq -a$, $\Rightarrow a + b - b = a \leq a + b - t \leq a + b - a = b$, es decir $a \leq a + b - t \leq b$. Además $\gamma\_(a) = \gamma(b)$ y $\gamma\_(b) = \gamma(a)$. Finalmente $\gamma\_^* = \gamma^*$.

PROPOSICION 4.1.29.

Sea $\gamma : [a, b] \longrightarrow \Omega$ una curva C^1 por tramos, $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$. Entonces

$$\int_{\gamma\_} f(\xi)\,d\xi = -\int_\gamma f(\xi)\,d\xi.$$

DEMOSTRACION:

Sea $\tau : [a, b] \longrightarrow [a, b]$, $\tau(t) = a + b - t$, entonces $\gamma_- = \gamma \circ \tau$ y se tiene:

$$\int_{\gamma_-} f(\xi)\, d\xi = \int_a^b f\big(\gamma_-(t)\big)\, \gamma'_-(t)\, dt = \int_a^b f\big(\gamma(\tau(t))\big)\, \gamma'\big(\tau(t)\big)\, \tau'(t)\, dt =$$

$$\int_{\tau(a)}^{\tau(b)} f\big(\gamma(t)\big)\, \gamma'(t)\, dt = \int_b^a f\big(\gamma(t)\big)\, \gamma'(t)\, dt = -\int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\, \gamma'(t)\, dt = -\int_\gamma f(\xi)\, d\xi.$$

♦

PROPOSICION 4.1.30.

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto, $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, F una primitiva de f. Sea $\gamma : [a, b] \longrightarrow \Omega$ una curva C^1 por tramos, entonces:

$$\int_\gamma f(\xi)\, d\xi = F\big(\gamma(b)\big) - F\big(\gamma(a)\big).$$

DEMOSTRACION:

Se tiene que $\big(F \circ \gamma\big)'(t) = F'\big(\gamma(t)\big)\, \gamma'(t) = f\big(\gamma(t)\big)\, \gamma'(t) \Rightarrow (F \circ \gamma)$ es una primitiva de $f\big(\gamma(t)\big)\, \gamma'(t) \Rightarrow \int_\gamma f(\xi)\, d\xi = \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\, \gamma'(t)\, dt = (F \circ \gamma)(b) - (F \circ \gamma)(a) = F\big(\gamma(b)\big) - f\big(\gamma(t)\big).$ ♦

COROLARIO 4.1.31:

Si $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ tiene una primitiva en Ω, entonces $\int_\gamma f(\xi)\, d\xi = 0$ para toda curva C^1 por tramos cerrada en Ω.

DEMOSTRACION:

Sea $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $F'(z) = f(z)\ \forall\ z \in \Omega$ y sea $\gamma : [a, b] \longrightarrow \Omega$ una curva cerrada C^1 por tramos $\Rightarrow \gamma(a) = \gamma(b) \Rightarrow \int_\gamma f(\xi)\ d\xi = F\big(\gamma(a)\big) - F\big(\gamma(b)\big) = 0.$ ♦

El recíproco es un resultado muy importante y lo enunciaremos en el siguiente:

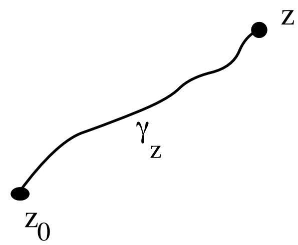
TEOREMA 4.1.32:

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ una región, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ continua. Entonces f tiene primitiva en $\Omega \Leftrightarrow \int_\gamma f(\xi)\ d\xi = 0$ para toda curva cerrada C^1 por tramos en Ω.

DEMOSTRACION:

$\Rightarrow$) Es el Corolario 4.1.31.

$\Leftarrow$) Sea $z_0 \in \Omega$ fijo y sea $z \in \Omega$ arbitrario. Puesto que Ω es una región, entonces Ω es arco conexo. Sea $\gamma_z : [a, b] \longrightarrow \Omega$ una curva C^1 por tramos que conecta z_0 con z, es decir
$\gamma_z(a) = z_0$, $\gamma_z(b) = z$. Definimos $F(z) = \int_{\gamma_z} f(\xi)\ d\xi$.



Primero veamos que F(z) no depende de la curva γ_z. Si γ_z y φ_z dos curvas C^1 por tramos que conectan z_0 con z, tomando caminos equivalentes, podemos suponer que $\gamma_z : [a, b] \longrightarrow \Omega$ y $\varphi_z : [b, c] \longrightarrow \Omega$. Definimos $\tau_z = \gamma_z \cup \big(\varphi_z\big)_- : [a, c] \longrightarrow \Omega$

dada por

$$\tau_z(t) = \begin{cases} \gamma_z(t) & \text{si} \quad a \le t \le b \\ \left(\varphi_z\right)_-(t) = \varphi_z(b+c-t) & \text{si} \quad b \le t \le c \end{cases}.$$

Se tiene $\tau_z(b) = \gamma_z(b) = \left(\varphi_z\right)_-(b) = \varphi_z(c) = z$ y $\gamma_z(a) = z_0 = \varphi_z(b) = \left(\varphi_z\right)_-(c) \Rightarrow$ $\tau_z(a) = z_0 = \tau_z(c)$, es decir τ_z es una curva cerrada C^1 por tramos.

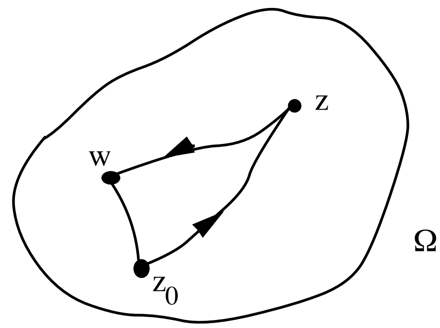
Entonces $0 = \int_{\tau_z} f(\xi)\, d\xi = \int_{\gamma_z} f(\xi)\, d\xi + \int_{\left(\varphi_z\right)_-} f(\xi)\, d\xi = \int_{\gamma_z} f(\xi)\, d\xi - \int_{\varphi_z} f(\xi)\, d\xi \Rightarrow$

$\int_{\gamma_z} f(\xi)\, d\xi = \int_{\varphi_z} f(\xi)\, d\xi$, lo cual prueba nuestra afirmación.

Ahora probaremos que $F'(z) = f(z)\ \forall\ z \in \Omega$. Se tiene que $F'(z) = \lim_{w \to z} \frac{F(w) - F(z)}{w - z}$.

Sea $\varepsilon > 0$. Estimemos $I = \left| \frac{F(w) - F(z)}{w - z} - f(z) \right| =$
$\left| \frac{\int_{z_0}^{w} f(\xi)\, d\xi - \int_{z_0}^{z} f(\xi)\, d\xi}{w - z} - f(z) \right|$.

Puesto que $F(z)$ no depende de la curva, se tiene que $\int_{z_0}^{z} f(\xi)\, d\xi + \int_{z}^{w} f(\xi)\, d\xi$ $= \int_{z_0}^{w} f(\xi)\, d\xi \Rightarrow I = \left| \frac{\int_{z}^{w} f(\xi)\, d\xi}{w - z} - f(z) \right|$. Ahora si $\gamma : [a, b] \longrightarrow \Omega$ es una curva



C^1 por tramos que conecta z y w, se tiene:

$$\int_z^w f(z)\ d\xi = \int_\gamma f(z)\ d\xi = f(z) \int_\gamma d\xi = f(z) \int_a^b \gamma'(t)\ dt = f(z)\ \left[\gamma(b) - \gamma(a)\right] =$$

$$f(z)\ [w - z] \Rightarrow I = \left| \frac{\int_z^w f(\xi)\ d\xi - f(z)\bullet(w - z)}{w - z} \right| = \left| \frac{\int_z^w f(\xi)\ d\xi - \int_z^w f(z)\ d\xi}{w - z} \right| =$$

$$\left| \frac{\int_z^w \left(f(\xi) - f(z)\right) d\xi}{w - z} \right|.$$

Ahora, puesto que f es continua en z, existe $\delta > 0$ tal que $|w - z| < \delta \Rightarrow |f(w) - f(z)| < \varepsilon$ y además $B\left(z, \delta\right) \subseteq \Omega$. El camino entre z y w puede ser [z, w] puesto que $[z, w] \subseteq B\left(z, \delta\right) \subseteq \Omega$, entonces se tiene:

$$I = \left| \frac{\int_z^w \left(f(\xi) - f(z)\right) d\xi}{w - z} \right| \leq \frac{1}{|w - z|} \sup_{\eta\in[z,w]} \left|f(\eta) - f(z)\right| \bullet |w - z| =$$

$$\leq \sup_{\eta\in[z,w]} \left|f(\eta) - f(z)\right| \leq \varepsilon \Rightarrow \lim_{w\to z} \frac{F(w) - F(z)}{w - z} = f(z) = F'(z)\ \forall\ z \in \Omega. \quad ♦$$

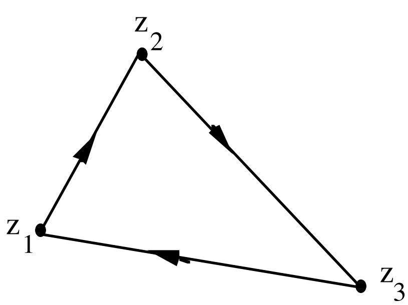
EJEMPLO 4.1.33:

Sean $\Omega = \mathbb{C} - \{0\}$, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1}{z}$. Sea $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \Omega$, $\gamma(t) = \rho\ e^{it}$,

$\gamma(0) = \rho = \gamma(2\pi) \Rightarrow \gamma$ es un curva cerrada C^1 en Ω y $\int_\gamma f(\xi)\, d\xi = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho e^{it}} i\rho e^{it}\, dt = 2\pi i \neq 0 \Rightarrow$ $\boxed{\text{f no tiene primitiva en } \mathbb{C} - \{0\}}$.

DEFINICION 4.1.34:

Un triángulo Δ en una región Ω, es el interior de la curva $\gamma : [0, 3] \longrightarrow \Omega$ dada por



$$\gamma(t) = \begin{cases} z_1 + t\,(z_2 - z_1) & \text{si } 0 \le t \le 1 \\ z_2 + (t-1)\,(z_3 - z_2) & \text{si } 1 \le t \le 2 \\ z_3 + (t-2)(z_1 - z_3) & \text{si } 2 \le t \le 3 \end{cases},$$

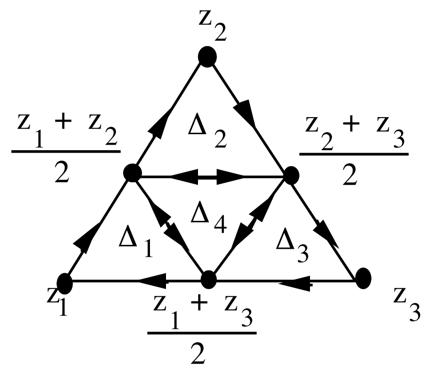
donde z_1, z_2, z_3 están en Ω. Se tiene que $\gamma^* = \partial\Delta$.

TEOREMA 4.1.35 (TEOREMA DE CAUCHY-GOURSAT):

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto y sea $f \in \mathbf{H}(\Omega)$. Entonces $\forall\ \Delta \subseteq \Omega$ se tiene que $\int_{\partial\Delta} f(\xi)\, d\xi = 0$.

DEMOSTRACION:

Sea $\Delta \subseteq \Omega$, determinado por z_1, z_2, z_3. Sea $\varepsilon > 0$ y consideremos los puntos medios $\frac{z_1 + z_2}{2}, \frac{z_1 + z_3}{2}, \frac{z_2 + z_3}{2}$ de los lados del triángulo. Sea Δ_1 el triángulo determinado por $z_1, \frac{z_1 + z_2}{2}, \frac{z_1 + z_3}{2}$; Δ_2 el triángulo determinado por $\frac{z_1 + z_2}{2}$, z_2, $\frac{z_2 + z_3}{2}$; Δ_3 el triángulo determinado por $\frac{z_2 + z_3}{2}$, z_3, $\frac{z_1 + z_2}{2}$; Δ_4 el triángulo determinado por



$\frac{z_2 + z_3}{2}, \frac{z_1 + z_3}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}$. Entonces:

$$\int_{\partial\Delta} f(\xi)\, d\xi = \int_{\partial\Delta_1} f(\xi)\, d\xi + \int_{\partial\Delta_2} f(\xi)\, d\xi + \int_{\partial\Delta_3} f(\xi)\, d\xi + \int_{\partial\Delta_4} f(\xi)\, d\xi \qquad (*)$$

Se tiene que existe $\Delta^1 \in \{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4\}$ tal que $\left|\int_{\partial\Delta^1} f(\xi)\, d\xi\right| \geq \frac{1}{4}\left|\int_{\partial\Delta} f(\xi)\, d\xi\right|$ pues de lo contrario se obtendría de (*) que $\left|\int_{\partial\Delta} f(\xi)\, d\xi\right| < \left|\int_{\partial\Delta} f(\xi)\, d\xi\right|$ lo que es absurdo.

Repetimos el proceso anterior ahora aplicado a $\Delta^2 \subseteq \Delta^1$ tal que

$$\left|\int_{\partial\Delta^2} f(\xi)\, d\xi\right| \geq \frac{1}{4}\left|\int_{\partial\Delta^1} f(\xi)\, d\xi\right| \geq \frac{1}{4^2}\left|\int_{\partial\Delta} f(\xi)\, d\xi\right|.$$

Por inducción se sigue que existe una sucesión $\{\Delta^n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\Delta^{n+1} \subseteq \Delta^n$ tal que

$$\left|\int_{\partial\Delta^{n+1}} f(\xi)\, d\xi\right| \geq \frac{1}{4}\left|\int_{\partial\Delta^n} f(\xi)\, d\xi\right| \geq \frac{1}{4^{n+1}}\left|\int_{\partial\Delta} f(\xi)\, d\xi\right|.$$

Ahora si ponemos $d(\Delta^i) = \sup\{|z - w| \mid z, w \in \Delta^i\}$ se puede probar por inducción que $d(\Delta^{n+1}) = \frac{1}{2} d(\Delta^n) = \frac{1}{2^{n+1}} d(\Delta) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Además, puesto que Δ^n es compacto no vacío, se tiene que existe un único punto z_0 tal que $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \Delta^n = \{z_0\}$, $z_0 \in \Omega$. Ahora puesto que f es holomorfa en Ω, f es diferenciable en $z_0 \Rightarrow$ existe $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ continua en z_0 tal que $\forall\, z \in \Omega$

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\,\varphi(z) = f(z_0) + (z - z_0)\,\varphi(z_0) + (z - z_0)\,\big(\varphi(z) - \varphi(z_0)\big).$$

Ahora, existe $\delta > 0$ tal que $B\left(z_0, \frac{\delta}{2}\right) \subseteq \Omega$ y existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\; n \geq n_0$, $\Delta^n \subseteq B\left(z_0, \frac{\delta}{2}\right) \subseteq \Omega$, entonces $z, z' \in \Delta^n \Rightarrow |z - z'| \leq d(\Delta^n) < 2 \bullet \left(\frac{\delta}{2}\right) = \delta$.

Por otro lado: $\displaystyle\int_{\partial\Delta^n} f(\xi)\, d\xi =$

$$\int_{\partial\Delta^n} f(z_0)\, d\xi + \int_{\partial\Delta^n} (\xi - z_0)\,\varphi(z_0)\, d\xi + \int_{\partial\Delta^n} (\xi - z_0)\,\big(\varphi(\xi) - \varphi(z_0)\big)\, d\xi.$$

Ahora $f(z_0)\,\xi$ es una primitiva de $f(z_0)$ y $\varphi(z_0)\,\dfrac{(\xi - z_0)^2}{2}$ es una primitiva de $(\xi - z_0)\,\varphi(z_0) \Rightarrow \displaystyle\int_{\partial\Delta^n} f(z_0)\, d\xi = \int_{\partial\Delta^n} (\xi - z_0)\,\varphi(z_0)\, d\xi = 0 \Rightarrow$

$$\int_{\partial\Delta^n} f(\xi)\, d\xi = \int_{\partial\Delta^n} (\xi - z_0)\,\big(\varphi(\xi) - \varphi(z_0)\big)\, d\xi.$$

Puesto que φ es continua, $\lim\limits_{\xi \to z_0} \left[\varphi(\xi) - \varphi(z_0)\right] = 0$, por lo tanto dado $\varepsilon > 0$, existe $0 < \delta_1 \leq \delta$ tal que $\left|\xi - z_0\right| < \delta_1 \Rightarrow \left|\varphi(\xi) - \varphi(z_0)\right| < \dfrac{\varepsilon}{3\;[d(\Delta)]^2}$. De lo anterior se tiene:

$$\left|\int_{\partial\Delta} f(\xi)\, d\xi\right| \leq 4^n \left|\int_{\partial\Delta^n} f(\xi)\, d\xi\right| = 4^n \left|\int_{\partial\Delta^n} (\xi - z_0)\,\big(\varphi(\xi) - \varphi(z_0)\big)\, d\xi\right| \leq$$

$$\leq 4^n \sup_{\xi \in \partial\Delta^n} \left\{\left|\xi - z_0\right| \bullet \left|\varphi(\xi) - \varphi(z_0)\right|\right\} \bullet 3\, d(\Delta^n) \leq$$

$$\leq 4^n \bullet d\left(\Delta^n\right) \bullet \frac{\varepsilon}{3\ [d(\Delta)]^2} \bullet 3 \bullet d\left(\Delta^n\right) = \frac{4^n \bullet \left[d\left(\Delta^n\right)\right]^2}{[d(\Delta)]^2}\ \varepsilon = 4^n \bullet \frac{1}{4^n} \bullet \frac{[d(\Delta)]^2}{[d(\Delta)]^2}\ \varepsilon = \varepsilon.$$

Es decir tenemos $\forall\ \varepsilon > 0$, $\left| \int_{\partial\Delta} f(\xi)\ d\xi \right| \leq \varepsilon$, lo que implica que $\int_{\partial\Delta} f(\xi)\ d\xi = 0.$

♦

El Teorema anterior tiene una generalización (la cual será utilizada más adelante).

TEOREMA 4.1.36 (TEOREMA DE CAUCHY-GOURSAT):

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ continua. Supongamos que $f \in \mathbf{H}\left(\Omega - \{z_0\}\right)$, $z_0 \in \Omega$. Entonces $\forall\ \Delta \subseteq \Omega$ se tiene que $\int_{\partial\Delta} f(\xi)\ d\xi = 0.$

DEMOSTRACION:

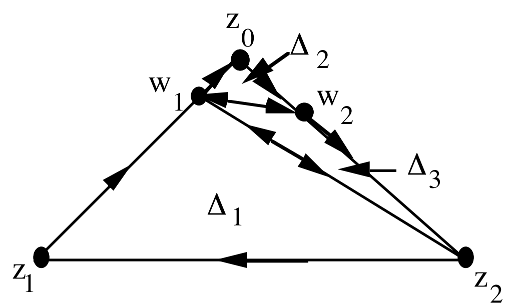
Lo haremos en cuatro casos.

Primer Caso : $z_0 \notin \Delta$:

En este caso el Teorema se sigue inmediatamente de 4.1.35 pues $\Delta \subseteq \Omega - \{z_0\}$.

Segundo Caso : z_0 es un vértice de Δ :

En este caso Δ está determinado por z_1, z_0 y z_2. Sea $\varepsilon > 0$ y escojamos



$w_1 \in [z_1, z_0]$, $w_2 \in [z_0, z_2]$. De la figura se tiene:

$$\int_{\partial\Delta_1} f(\xi)\, d\xi = \int_{\partial\Delta_3} f(\xi)\, d\xi = 0 \text{ por el primer caso y entonces}$$

$$\int_{\partial\Delta} f(\xi)\, d\xi = \int_{\partial\Delta_1} f(\xi)\, d\xi + \int_{\partial\Delta_2} f(\xi)\, d\xi + \int_{\partial\Delta_3} f(\xi)\, d\xi = \int_{\partial\Delta_2} f(\xi)\, d\xi.$$

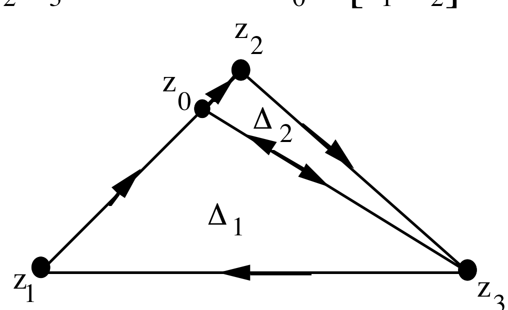
Sea $M = \sup_{\xi\in\partial\Delta} |f(\xi)| < \infty$. Escojamos w_1, w_2 de tal suerte que $d(\Delta_2) < \frac{\varepsilon}{3\ M}$ y entonces:

$$\left|\int_{\partial\Delta} f(\xi)\, d\xi\right| = \left|\int_{\partial\Delta_2} f(\xi)\, d\xi\right| \leq \sup_{\xi\in\partial\Delta_2} |f(\xi)| \bullet 3 \bullet d(\Delta_2) < M \bullet \frac{3\ \varepsilon}{3\ M} = \varepsilon, \text{ lo que}$$

implica que $\int_{\partial\Delta} f(\xi)\, d\xi = 0$.

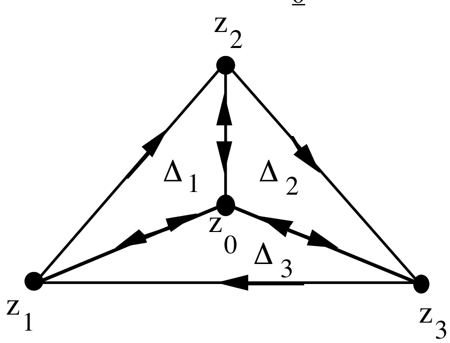
<u>Tercer Caso : $z_0 \in \partial\Delta$:</u>

Sea Δ determinado por z_1, z_2, z_3 y digamos que $z_0 \in [z_1, z_2]$. Entonces de la figura y el caso 2 obtenemos:



$$\int_{\partial\Delta} f(\xi)\, d\xi = \int_{\partial\Delta_1} f(\xi)\, d\xi + \int_{\partial\Delta_2} f(\xi)\, d\xi = 0 + 0 = 0.$$

<u>Cuarto Caso : $z_0 \in \overset{\circ}{\Delta}$:</u>



Sea Δ determinado por z_1, z_2, z_3. De la figura y del caso 2 obtenemos:

$$\int_{\partial\Delta} f(\xi)\, d\xi = \int_{\partial\Delta_1} f(\xi)\, d\xi + \int_{\partial\Delta_2} f(\xi)\, d\xi + \int_{\partial\Delta_3} f(\xi)\, d\xi = 0 + 0 + 0 = 0.$$

♦

<u>TEOREMA 4.1.37 (TEOREMA DE CAUCHY PARA CONJUNTOS CONVEXOS):</u>

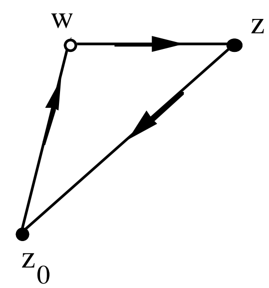
Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto convexo. Sea f continua en Ω y $f \in \mathbf{H}(\Omega - \{z_0\})$, $z_0 \in \Omega$. Entonces f tiene una primitiva en Ω y por lo tanto $\int_\gamma f(\xi)\, d\xi = 0$, para toda curva cerrada γ de clase C^1 por tramos en Ω.

<u>DEMOSTRACION:</u>

Sea $z_0 \in \Omega$ y sea $z \in \Omega$. Definimos $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$F(z) = \int_{[z_0,z]} f(\xi)\, d\xi = \int_{z_0}^{z} f(\xi)\, d\xi.$$

Si z y w $\in \Omega$ consideremos el triángulo determinado por z_0, w, z. Puesto que Ω es



convexo se tiene que $\Delta \subseteq \Omega$.

Por el Teorema de Cauchy-Goursat, se tiene que:

$$0 = \int_{\partial\Delta} f(\xi)\, d\xi = \int_{z_0}^{w} f(\xi)\, d\xi + \int_{w}^{z} f(\xi)\, d\xi + \int_{z}^{z_0} f(\xi)\, d\xi \Rightarrow$$

$$\int_{z_0}^{w} f(\xi)\, d\xi - \int_{z_0}^{z} f(\xi)\, d\xi = \int_{z}^{w} f(\xi)\, d\xi.$$

Ahora $\left|\dfrac{F(w) - F(z)}{w - z} - f(z)\right| = \left|\dfrac{\displaystyle\int_{z_0}^{w} f(\xi)\, d\xi - \int_{z_0}^{z} f(\xi)\, d\xi - (w - z)\, f(z)}{w - z}\right| =$

$$\frac{1}{|w - z|}\left|\int_{z}^{w} f(\xi)\, d\xi - \int_{z}^{w} f(z)\, d\xi\right| \leq \frac{1}{|w - z|} \sup_{\eta\in[w,z]} |f(\eta) - f(z)| \bullet |w - z| =$$

$$\sup_{\eta\in[w,z]} |f(\eta) - f(z)| \xrightarrow[w\to z]{} 0 \Rightarrow F'(z) = f(z).$$ ♦

§ 2. Fórmula Integral de Cauchy.

Esta sección es quizá la más importante de toda la Variable Compleja, pues de ella se deducen la mayoría de los resultados fundamentales.

DEFINICION 4.2.1:

Sea $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ una curva C^1 por tramos no necesariamente cerrada, y sea

$g : \gamma^* \longrightarrow \mathbb{C}$ una función continua. Sea $f : \gamma^* \times (\mathbb{C} - \gamma^*) \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(\xi, z) = \dfrac{g(\xi)}{\xi - z}$. Se define $h : \mathbb{C} - \gamma^* \longrightarrow \mathbb{C}$ por $h(z) = \displaystyle\int_\gamma \frac{g(\xi)}{\xi - z} d\xi$, la cual recibe el nombre de Integral del tipo de Cauchy ó Integral de Cauchy.

TEOREMA 4.2.2:

Sea $h(z) = \displaystyle\int_\gamma \frac{g(\xi)}{\xi - z} d\xi$ una integral del tipo de Cauchy. Entonces $h \in \mathbf{H}(\mathbb{C} - \gamma^*)$ y se tiene $h'(z) = \displaystyle\int_\gamma \frac{g(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi = \int_\gamma \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{g(\xi)}{\xi - z}\right) d\xi$.

DEMOSTRACION:

$h'(z) = \lim\limits_{w \to z} \dfrac{h(w) - h(z)}{w - z}$. Sea $\varepsilon > 0$ y consideremos

$$I = \left| \frac{h(w) - h(z)}{w - z} - \int_\gamma \frac{g(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi \right| =$$

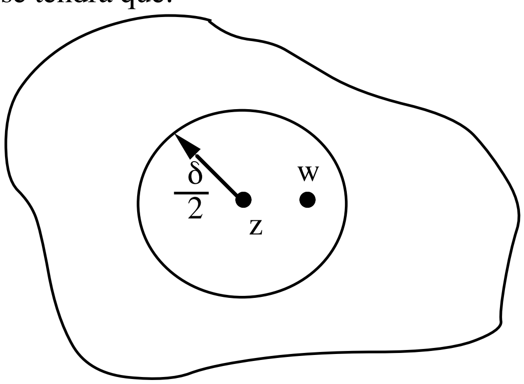
$$= \left| \frac{1}{w - z} \left[\int_\gamma \frac{g(\xi)}{\xi - w} d\xi - \int_\gamma \frac{g(\xi)}{\xi - z} d\xi \right] - \int_\gamma \frac{g(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{w - z} \int_\gamma \frac{(\xi - z) - (\xi - w)}{(\xi - w)(\xi - z)} g(\xi)\, d\xi - \int_\gamma \frac{g(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi \right| =$$

$$= \left| \int_\gamma \frac{g(\xi)\, d\xi}{(\xi - w)(\xi - z)} - \int_\gamma \frac{g(\xi)}{(\xi - z)^2}\, d\xi \right| = \left| \int_\gamma \frac{(\xi - z) - (\xi - w)}{(\xi - w)(\xi - z)^2}\, g(\xi)\, d\xi \right|$$

$$= |w - z| \left| \int_\gamma \frac{g(\xi)\, d\xi}{(\xi - w)(\xi - z)^2} \right|.$$

Ahora existe $\delta > 0$ tal que $B(z, \delta) \subseteq \mathbb{C} - \gamma^*$. Elegimos $w \in B\left(z, \frac{\delta}{2}\right)$, es decir $|w - z| < \frac{\delta}{2}$. Se tiene que para $\xi \in \gamma^*$, $|\xi - z| \geq \delta > \frac{\delta}{2}$ y $|\xi - w| = |\xi - z + z - w| \geq |\xi - z| - |w - z| > \delta - \frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{2} \Rightarrow \frac{1}{|\xi - z|} \leq \frac{1}{\delta}$ y $\frac{1}{|\xi - w|} \leq \frac{2}{\delta}$. Entonces se tendrá que:



$I \leq |w - z| \bullet \frac{1}{\delta^2} \bullet \frac{2}{\delta} \bullet \sup_{\xi\in\gamma_\rho^*} |g(\xi)| \bullet L = |w - z| \bullet \frac{2\ M\ L}{\delta^3}$, donde L = longitud de la curva y $M = \sup_{\xi\in\gamma^*} |g(\xi)|$.

Sea $\delta_2 = \dfrac{\varepsilon}{\left(\frac{2\ M\ L}{\delta^3}\right)} = \dfrac{\varepsilon\ \delta^3}{2\ M\ L}$, entonces si $|w - z| < \delta_2$ y $|w - z| < \delta$, entonces $I < \varepsilon$ y $h'(z) = \displaystyle\int_\gamma \frac{g(\xi)}{(\xi - z)^2}\, d\xi$. ♦

<u>COROLARIO 4.2.3:</u>

Sea $h(z) = \int_\gamma \frac{g(\xi)}{\xi - z} d\xi$ una integral del tipo de Cauchy. Entonces es h es infinitamente diferenciable en $\mathbb{C} - \gamma^*$ y se tiene $h^{(n)}(z) = n! \int_\gamma \frac{g(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi$, $n \in \mathbb{N}$.

<u>DEMOSTRACION:</u>

Ejercicio. ♦

<u>OBSERVACION 4.2.4:</u>

Si tomamos $g(\xi) = 1 \ \forall \ \xi \in \gamma^*$ en 4.2.2, y sea γ una curva cerrada C^1 por tramos se tendrá: $h(z) = \int_\gamma \frac{1}{\xi - z} d\xi$ y $h^{(n)}(z) = n! \int_\gamma \frac{1}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi = 0$ para $n \geq 1$ pues $\frac{1}{(\xi - z)^{n+1}}$ tiene primitiva, a saber, $-\frac{1}{n\,(\xi - z)^n}$.

<u>TEOREMA 4.2.5:</u>

Sea γ una curva cerrada C^1 por tramos, $h : \mathbb{C} - \gamma^* \longrightarrow \mathbb{C}$ por $h(z) = \int_\gamma \frac{1}{\xi - z} d\xi$.

Entonces h(z) es constante por componentes conexas de $\mathbb{C} - \gamma^*$. Además $h(z) = 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$ (k depende de la componente conexa) y $h(z) = 0$ en la componente no acotada de $\mathbb{C} - \gamma^*$.

DEMOSTRACION:

El hecho de que h es constante por componentes conexas es inmediato de 4.2.4, pues h'(z) = 0.

Sea $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$, γ de clase C^1 por tramos tal que $\gamma(a) = \gamma(b)$, $h(z) = \int_\gamma \frac{d\xi}{\xi - z} = \int_a^b \frac{\gamma'(t)\, dt}{\gamma(t) - z}$. Fijemos $z \in \mathbb{C} - \gamma^*$ y definimos $\varphi(s) = \int_a^s \frac{\gamma'(t)\, dt}{\gamma(t) - z}$, con $\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$.

Se tiene que $\varphi(a) = 0$, $\varphi(b) = h(z)$.

Ahora, por el Teorema Fundamental del Cálculo, se tiene que $\varphi'(s) = \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z}$ para las s donde γ' existe. Sea $\psi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $\psi(s) = e^{-\varphi(s)}\big(\gamma(s) - z\big)$. Entonces $\forall\ s \in [a, b]$ se tiene: $\psi'(s) = e^{-\varphi(s)}\left[-\varphi'(s)\big(\gamma(s) - z\big) + \gamma'(s)\right] = e^{-\varphi(s)}\left[-\frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z}\big(\gamma(s) - z\big) + \gamma'(s)\right] = e^{-\varphi(s)}\left[-\gamma'(s) + \gamma'(s)\right] = 0$. Esto implica que ψ es constante en cada subintervalo donde ψ' existe y esto implica a su vez que, puesto que ψ es continua, ψ es constante en [a, b]. Por lo tanto:

$\psi(a) = \psi(b)$, con $\psi(a) = e^{-\varphi(a)}\big(\gamma(a) - z\big) = e^{-\varphi(b)}\big(\gamma(b) - z\big) = \psi(b)$ y $\gamma(a) = \gamma(b)$ $\Rightarrow e^{-\varphi(a)} = e^{-\varphi(b)} \Rightarrow e^{-\varphi(a)} = e^{-0} = e^{-h(z)} = e^{-\varphi(b)} \Rightarrow e^{h(z)} = 1 \Rightarrow h(z) = 2 k_z \pi i$, $k_z \in \mathbb{Z}$.

Sea U una componente conexa, entonces h\b(U) es conexo y $h(U) \subseteq \{2 k \pi i \mid k \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow h(z) = 2 k \pi i$ para algún $k \in \mathbb{Z}$, $\forall z \in U$.

Finalmente, si $z \in V$ = componente conexa no acotada de $\mathbb{C} - \gamma^*$. Entonces

$$|h(z)| = |2 k \pi i| = \left|\int_\gamma \frac{d\xi}{\xi - z}\right| \leq \sup_{\xi \in \gamma^*} \frac{1}{|\xi - z|} \bullet L,$$ donde L = longitud de γ.

Puesto que γ^* es compacto, existe $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $|\xi| \leq M\ \forall\ \xi \in \gamma^* \Rightarrow |\xi - z| \geq |z| - |\xi| \geq |z| - M\ \forall\ \xi \in \gamma^*$.

Elijamos $z \in V$ tal que $|z| > 2L + M$. Entonces se tiene:

$|h(z)| \leq \sup\limits_{\xi \in \gamma^*} \dfrac{1}{|\xi - z|} \bullet L \leq \dfrac{L}{|z| - M} < \dfrac{L}{2L} = \dfrac{1}{2}$, es decir $|2 k \pi| < \dfrac{1}{2}$ y $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ $k = 0$, lo que demuestra que $h(z) = 0 \ \forall z \in V$. ♦

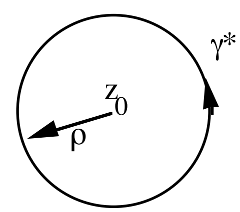
DEFINICION 4.2.6:

Sea $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ una curva cerrada de clase C^1 por tramos. Entonces $\forall z \in \mathbb{C} - \gamma^*$ definimos:

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{\xi - z} \, d\xi = k \in \mathbb{Z}.$$

$\mathrm{Ind}_\gamma(z)$ = <u>Indice de la curva γ alrededor del punto z</u>.

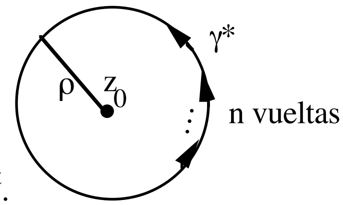
EJEMPLOS 4.2.7:



(1) Sea $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$, dada por $\gamma(t) = z_0 + \rho\, e^{it}$. Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z - z_0| < \rho$, entonces $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \mathrm{Ind}_\gamma(z_0) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_\gamma \frac{1}{\xi - z_0} d\xi$

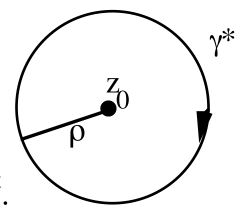
$$= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{i\, \rho\, e^{it}}{z_0 + \rho e^{it} - z_0} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} i\, dt = 1.$$

Ahora, si $z \in \mathbb{C}$ es tal que $|z - z_0| > \rho$, $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = 0$.



(2) Sea $\gamma : [0, 2n\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, $\gamma(t) = z_0 + \rho\, e^{it}$. Si $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z - z_0| < \rho$, entonces $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \mathrm{Ind}_\gamma(z_0) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{\xi - z_0}\, d\xi$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2n\pi} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0}\, dt = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2n\pi} \frac{i\,\rho\, e^{it}}{z_0 + \rho e^{it} - z_0}\, dt = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2n\pi} i\, dt = n.$$ Ahora, si $z \in \mathbb{C}$ es tal que $|z - z_0| > \rho$, $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = 0$.



(3) Sea $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$, dada por $\gamma(t) = z_0 + \rho\, e^{-it}$. Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z - z_0| < \rho$, entonces $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \mathrm{Ind}_\gamma(z_0) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{\xi - z_0}\, d\xi$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0}\, dt = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{-\,i\,\rho\, e^{-it}}{z_0 + \rho e^{-it} - z_0}\, dt = -\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} i\, dt = -1.$$ Ahora, si $z \in \mathbb{C}$ es tal que $|z - z_0| > \rho$, $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = 0$.

La curva en (2) es la misma que en un (1) pero da n - vueltas, y la curva de (3) es la misma que la de (1) pero recorrida en sentido contrario.

OBSERVACION 4.2.8:

La interpretación geométrica de $\mathrm{Ind}_\gamma(z)$ es el número de vueltas que la curva γ le da al punto z y cuyo sentido positivo es el contrario al movimiento de las manecillas del reloj.

Para ver esto consideremos $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ una curva cerrado de clase C^1. Se tiene que si $z \in \mathbb{C} - \gamma^*$, $\displaystyle\int_\gamma \frac{d\xi}{\xi - z} = 2\,k\,\pi\,i,\ k \in \mathbb{Z}$, por lo que se tiene que la parte real de la integral vale 0.

Sean $\gamma(t) = \gamma_1(t) + i\,\gamma_2(t)$, $z = x + i\,y$, entonces:

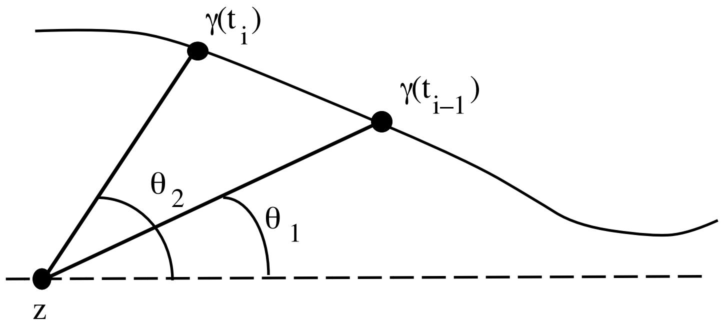
$$I = \int_\gamma \frac{d\xi}{\xi - z} = \int_a^b \frac{\gamma_1'(t) + i\,\gamma_2'(t)}{\big(\gamma_1(t) - x\big) + i\,\big(\gamma_2(t) - y\big)}\,dt =$$

$$= i \int_a^b \frac{-\,\gamma_1'(t)\big(\gamma_2(t) - y\big) + \gamma_2'(t)\big(\gamma_1(t) - x\big)}{\big(\gamma_1(t) - x\big)^2 + \big(\gamma_2(t) - y\big)^2}\,dt$$

Se tiene que $\xi - z \neq 0\ \forall\ z \in \gamma^*$, entonces para cada $t \in [a, b]$ se tiene que $|\xi - z|^2 = \big(\gamma_1(t) - x\big)^2 + \big(\gamma_2(t) - y\big)^2 > 0$, por lo cual $(\gamma_1(t) - x) \neq 0$ y/o $(\gamma_2(t) - y) \neq 0$. Sea $[t_{i-1}, t_i]$ un subintervalo de [a, b] tal que $\gamma_1(t) - x \neq 0\ \forall\ t \in [t_{i-1}, t_i]$. En este subintervalo se tiene:

$$I = i \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{\dfrac{\gamma_2'(t)}{\gamma_1(t) - x} - \dfrac{\gamma_1'(t)\big(\gamma_2(t) - y\big)}{\big(\gamma_1(t) - x\big)^2}}{1 + \left(\dfrac{\gamma_2(t) - y}{\gamma_1(t) - x}\right)^2}\,dt = i \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left[\text{Arc Tan}\,\frac{\gamma_2(t) - y}{\gamma_1(t) - x}\right]'\,dt =$$

$$= i \left[\text{Arg Tan}\,\frac{\gamma_2(t_i) - y}{\gamma_1(t_i) - x} - \text{Arg Tan}\,\frac{\gamma_2(t_{i-1}) - y}{\gamma_1(t_{i-1}) - x}\right] = i\,\big(\theta_2 - \theta_1\big), \text{ donde}$$



$$\operatorname{Tan}\left(\theta_2\right) = \frac{\gamma_2\left(t_i\right) - y}{\gamma_1\left(t_i\right) - x}, \operatorname{Tan}\left(\theta_1\right) = \frac{\gamma_2\left(t_{i-1}\right) - y}{\gamma_1\left(t_{i-1}\right) - x}.$$

Al dividir entre $2\pi i$, se toma como unidad una vuelta que la curva γ da alrededor del punto z.

Es decir, $\operatorname{Ind}_\gamma(z)$ nos da el número de vueltas que la curva le da al punto z y cuyo sentido positivo es el contrario al movimiento de las manecillas del reloj

Ahora daremos uno de los resultados más importantes en el análisis complejo.

<u>TEOREMA 4.2.9 (TEOREMA DE CAUCHY PARA CONJUNTOS CONVEXOS):</u>

Sea Ω un abierto convexo, $f \in \mathbf{H}(\Omega)$ y γ una curva cerrada C^1 en Ω. Entonces $\forall\ z \in \Omega - \gamma^*$ se tiene la igualdad:

$$\boxed{\operatorname{Ind}_\gamma(z)\ f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi}\ .$$

<u>DEMOSTRACION:</u>

Sea $z \in \Omega - \gamma^*$ fijo. Sea $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por:

$$g(\xi) = \begin{cases} \dfrac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} & \text{si} \quad \xi \neq z \\ f'(z) & \text{si} \quad \xi = z \end{cases} .$$

Se tiene que $g \in \mathbf{H}(\Omega - \{z\})$ y que $\lim\limits_{\xi \to z} g(\xi) = \lim\limits_{\xi \to z} \dfrac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} = f'(z) = g(z)$, es decir g es continua en z, entonces por el Teorema de Cauchy para conjuntos convexos se tiene que g tiene primitiva. Por lo tanto:

$$0 = \int_\gamma g(\xi)\, d\xi = \int_\gamma \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z}\, d\xi = \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi - f(z) \int_\gamma \frac{d\xi}{\xi - z} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi = f(z) \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\xi}{\xi - z} = f(z)\, \mathrm{Ind}_\gamma(z).$$ ♦

Para apreciar la fortaleza del resultado anterior, basta decir que todos los resultados que a continuación damos, son consecuencia (más o menos directa) de este Teorema, y todos ellos son importantes en sí mismos (por ejemplo, el Teorema Fundamental del Algebra).

COROLARIO 4.2.10 (FORMULA INTEGRAL DE CAUCHY PARA CONJUNTOS CONVEXOS):

Sea Ω un abierto convexo, $f \in \mathbf{H}(\Omega)$ y γ una curva cerrada C^1 en Ω. Entonces $\forall\, z \in \Omega - \gamma^*$ f es infinitamente diferenciable en z y se tiene:

$$\boxed{\mathrm{Ind}_\gamma(z)\, f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}\, d\xi} .$$

DEMOSTRACION:

Se tiene $\mathrm{Ind}_\gamma(z)\, f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi$ con $z \in \Omega - \gamma^*$.

El lado derecho de la igualdad es una integral del tipo Cauchy y por lo tanto infinitamente diferenciable en U = componente conexa de z, entonces f(z) es infinitamente diferenciable en U puesto que $\mathrm{Ind}_\gamma(z)$ es constante en U y además:

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z)\, f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}\, d\xi. \qquad \blacklozenge$$

COROLARIO 4.2.11:

Sean $f_n : A \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ una sucesión de funciones holomorfas en A que convergen uniformemente por compactos a f (es decir si $K \subseteq A$ es compacto, entonces f_n converge uniformemente a f en K). Entonces $f \in \mathbf{H}(A)$ y f'_n converge uniformemente por compactos a f'.

DEMOSTRACION:

Sea $\overline{B(z_0, r)} \subseteq A$. Sea $z \in \overline{B\left(z_0, \frac{r}{2}\right)}$ arbitrario y sea γ_r la curva $\gamma_r(t) = z_0 + re^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$. Se tiene $f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f_n(\xi)\, d\xi}{\xi - z}$ y sea $h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)\, d\xi}{\xi - z}$, $h \in \mathbf{H}(A)$. Sea $\varepsilon > 0$ y sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\, n \ge n_0$, $|f_n(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{4}$ $\forall\, z \in A$. Entonces $\forall\, n \ge n_0$,

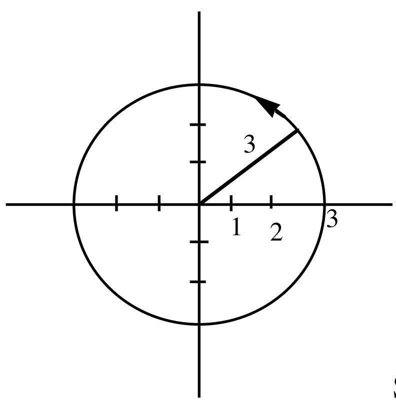
$$|f_n(z) - h(z)| \le \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_r} \frac{|f_n(\xi) - f(\xi)|\, |d\xi|}{|\xi - z|} \le \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_r} \frac{\frac{\varepsilon}{4}(2)}{r} |d\xi| = \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{2\pi r}(2\pi r) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

por lo tanto $h(z) = f(z) \in \mathbf{H}(A)$ y además $f'_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f_n(\xi)\, d\xi}{(\xi - z)^2}$, $f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)\, d\xi}{(\xi - z)^2}$,

por lo que: $\left|f'_n - f'(z)\right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_r} \frac{\left|f_n(\xi) - f(\xi)\right| \left|d\xi\right|}{\left|\xi - z\right|^2} \leq \frac{1}{2\pi} \frac{\varepsilon\,(2\pi r)}{\left(\frac{r}{2}\right)^2} = \frac{4\,\varepsilon}{r}$. Finalmente, puesto que cada compacto $K \subseteq A$ se puede cubrir por un número finito de estas bolas, el resultado se sigue. ♦

EJEMPLOS 4.2.12:

(1) Sea $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = 3\, e^{it}$. Calculemos $I = \int_\gamma \frac{\cos \pi z^2 + \operatorname{sen} \pi z^2}{(z - 1)(z - 2)}\, dz$.



Se tiene que $\operatorname{Ind}_\gamma(1) = \operatorname{Ind}_\gamma(2) = \operatorname{Ind}_\gamma(0) = 1$.

Además:
$\frac{1}{(z-1)\,(z-2)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2} = \frac{(A+B)\,z - (2\,A + B)}{(z-1)\,(z-2)}$, por lo tanto

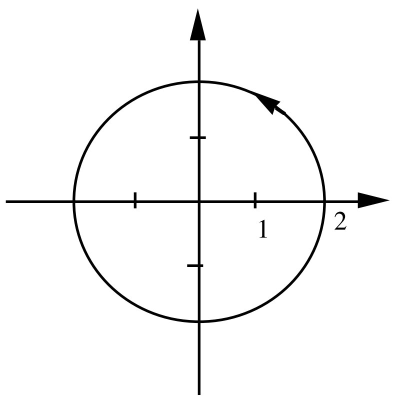
$\left.\begin{array}{l} A + B = 0 \\ -2A - B = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow A = -B \Rightarrow 2B - B = 1 \Rightarrow \boxed{B = 1,\ A = -1}$.

Sea $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \cos \pi z^2 + \operatorname{sen} \pi z^2$, $f \in \mathbf{H}(\mathbb{C})$. Entonces

$$I = \int_{\gamma} \frac{-f(\xi)}{\xi - 1}\, d\xi + \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - 2}\, d\xi = 2\pi i \ \mathrm{Ind}_{\gamma}(1)\ (-f(1)) + 2\pi i \ \mathrm{Ind}_{\gamma}(2)\ (f(2)) =$$

$$= 2\pi i\,[-\cos\pi - \operatorname{sen}\pi + \cos 4\pi + \operatorname{sen} 4\pi] = 2\pi i\,(1 - 0 + 1 + 0) = \boxed{4\pi i}.$$

(2) Sea $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = 2\, e^{it}$. Sea $I = \displaystyle\int_{\gamma} \frac{e^{2z}}{(z+1)^4}\, dz$. Si $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$,

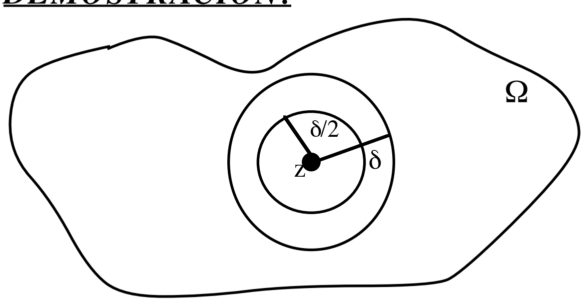


$f(z) = e^{2z}$, se tiene que $f \in \mathbf{H}(\mathbb{C})$, $\mathrm{Ind}_{\gamma}(-1) = \mathrm{Ind}_{\gamma}(0) = 1$, $I = \dfrac{2\pi i}{3!}\ \mathrm{Ind}_{\gamma}(-1)\ \{f'''(-1)\} = \dfrac{\pi i}{3} \bullet 1 \bullet \left\{8\, e^{2(-1)}\right\} = \boxed{\dfrac{8\pi i}{3e^2}}$

<u>COROLARIO 4.2.13:</u>

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto y $f \in \mathbf{H}(\Omega)$. Entonces f es infinitamente diferenciable.

<u>DEMOSTRACION:</u>



Sea $z \in \Omega$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $z \in \overline{B\left(z, \frac{\delta}{2}\right)} \subseteq B(z, \delta) \subseteq \Omega$. Ahora $B(z, \delta)$ es convexa y $f \in \mathbf{H}(B(z, \delta))$. Además $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow B(z, \delta)$, dada por $\gamma(t) = z + \frac{\delta}{2} e^{it}$ es una curva cerrada C^1 en $B(z, \delta)$ y $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = 1$, por lo tanto $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \Rightarrow f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi$ y en particular f es infinitamente diferenciable en Ω. ♦

COROLARIO 4.2.14:

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto y sea $z_0 \in \Omega$. Sean $\rho, \rho' > 0$ tales que $\overline{B(z_0, \rho)}$ y $\overline{B(z_0, \rho')} \subseteq \Omega$. Sean $\gamma_\rho(t) = z_0 + \rho\, e^{it}$.y $\gamma_{\rho'}(t) = z_0 + \rho'\, e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$. Entonces, se tiene

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi)\, d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}} = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma_{\rho'}} \frac{f(\xi)\, d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}}.$$

DEMOSTRACION:

Se sigue inmediatamente de 4.2.13. ♦

COROLARIO 4.2.15 (DESIGUALDADES DE CAUCHY):

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto y $f \in \mathbf{H}(\Omega)$, $\rho > 0$ tal que $\overline{B}(z_0,\rho) \subseteq \Omega$. Sea $M(\rho) = \sup_{\xi \in \gamma_\rho^*} |f(\xi)|$, donde $\gamma_\rho : [0, 2\pi] \longrightarrow \Omega$ está dada por $\gamma_\rho(t) = z_0 + \rho\, e^{it}$. Entonces:

$$\boxed{\left|\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\right| \le \frac{M(\rho)}{\rho^n} \quad \forall\ n \in \mathbb{N}}.$$

DEMOSTRACION:

Se tiene que $\left|\xi - z_0\right| = \rho \ \forall \ \xi \in \gamma_\rho^*$, entonces:

$$\left|\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho}\frac{f(\xi)\, d\xi}{\left(\xi - z_0\right)^{n+1}}\right| \le \frac{1}{\left|\xi - z_0\right|^{n+1}} \bullet \frac{1}{2\pi} M(\rho) \bullet 2\pi\rho = \frac{2\pi\rho M(\rho)}{\rho^{n+1}\, 2\pi}$$

$$= \frac{M(\rho)}{\rho^n}.$$ ♦

Anteriormente habíamos visto que $\mathbf{A}(\Omega) \subseteq \mathbf{H}(\Omega)$, ahora puesto que ya se ha demostrado que si $f \in \mathbf{H}(\Omega)$, entonces f es infinitamente diferenciable, basta ver que la serie de Taylor de f en cada punto $z_0 \in \Omega$ converge a f en una vecindad de z_0 para probar que $\mathbf{H}(\Omega) \subseteq \mathbf{A}(\Omega)$, y esto es precisamente el contenido del siguiente Teorema.

TEOREMA 4.2.16:

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto y sea $f \in \mathbf{H}(\Omega)$, entonces $f \in \mathbf{A}(\Omega)$.

DEMOSTRACION:

Sea $z_0 \in \Omega$ y elijamos $\rho > 0$ tal que $\overline{B(z, \rho)} \subseteq \Omega$. Se tiene que f es infinitamente diferenciable en z_0 y $\dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = a_n = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\gamma_\rho}\frac{f(\xi)\, d\xi}{\left(\xi - z_0\right)^{n+1}}$, donde $\gamma_\rho(t) = z_0 + \rho\, e^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$. Además $f(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\gamma_\rho}\frac{f(\xi)\, d\xi}{\xi - z_0}\ \forall \ z \in B\left(z_0, \rho\right)$.

La serie de Taylor de f alrededor de z_0 es $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(z - z_0\right)^n$.

Sea $s_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k\left(z - z_0\right)^k$, con $z \in B\left(z_0,\, \rho\right)$. Se tiene:

$$I = \left|f(z) - s_n(z)\right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi)\, d\xi}{\xi - z_0} - \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{n} \left(\int_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi)\, d\xi}{\left(\xi - z_0\right)^{k+1}} \right) \left(z - z_0\right)^k \right|$$

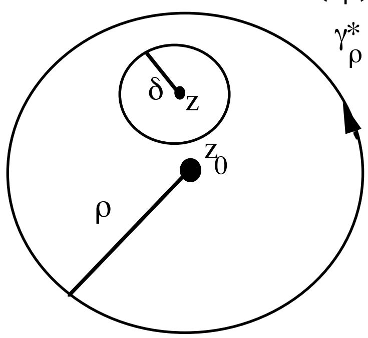
$$= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\gamma_\rho} \left\{ f(\xi) \left[\frac{1}{\xi - z} - \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(z - z_0\right)^k}{\left(\xi - z_0\right)^{k+1}} \right] \right\} d\xi \right| =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\gamma_\rho} \left\{ f(\xi) \left[\frac{1}{\xi - z} - \frac{1}{\xi - z_0} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^k \right] \right\} d\xi \right| =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\gamma_\rho} f(\xi) \left[\frac{1}{\xi - z} - \frac{1}{\xi - z_0} \, \frac{1 - \left(\dfrac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^{n+1}}{1 - \dfrac{z - z_0}{\xi - z_0}} \right] d\xi \right| =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\gamma_\rho} f(\xi)\left[\frac{1}{\xi - z} - \frac{1 - \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)^{n+1}}{\xi - z}\right]d\xi\right| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\gamma_\rho}\frac{f(\xi)}{\xi - z}\left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)^{n+1}d\xi\right|.$$

Ahora, $z \in B\big(z_0, \rho\big)$, $|z - z_0| < \rho$ y $|\xi - z_0| = \rho\ \forall\ \xi \in \gamma^*_\rho \Rightarrow \left|\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right| =$ $\alpha < 1$, $\xi \in \gamma^*_\rho$. Puesto que $z \notin \gamma^*_\rho$ y γ^*_ρ es cerrado por ser compacto se tiene que existe $\delta > 0$ tal que $B(z, \delta) \subseteq \left(\gamma^*_\rho\right)^c$, es decir $|\xi - z| \geq \delta\ \forall\ \xi \in \gamma^*_\rho$.



Sea $M = \sup_{\xi\in\gamma^*_\rho} |f(\xi)|$, entonces se tiene:

$I \leq \frac{1}{2\pi}\ \sup_{\xi\in\gamma^*_\rho}\frac{|f(\xi)|}{|\xi - z|}\bullet\left|\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right|^{n+1}\bullet 2\pi\rho \leq \frac{\rho M\alpha^{n+1}}{\delta}\ \xrightarrow[n\to\infty]{}\ 0\ \forall\ z \in B\big(z_0, \rho\big)$ (pues $0 \leq \alpha < 1$) $\Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\big(z - z_0\big)^n \Rightarrow f \in \mathbf{A}(\Omega)$. ♦

COROLARIO 4.2.17:

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto. Entonces $\mathbf{H}(\Omega) = \mathbf{A}(\Omega)$.

DEMOSTRACION:

Inmediata de 4.2.16. ♦

<u>COROLARIO 4.2.18:</u>

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto y sea $f \in \mathbf{H}(\Omega)$. Sea $\rho > 0$ tal que $B\left(z_0, \rho\right) \subseteq \Omega$. Entonces si el radio de convergencia de la serie de Taylor de f alrededor de z_0 es R, se tiene $R \geq \rho$.

<u>DEMOSTRACION:</u>

Sea $\rho > 0$ tal que $B\backslash b(z_0, \rho) \subseteq \Omega$. Elijamos $0 < \rho' < \rho$ cualquiera, entonces $\overline{B\left(z_0, \rho'\right)} \subseteq \Omega$. Aplicando las desigualdades de Cauchy, se tiene: $\left|\dfrac{f^{(n)}\left(z_0\right)}{n!}\right| = |a_n| \leq \dfrac{M\left(\rho'\right)}{\left(\rho'\right)^n}$, donde $M\left(\rho'\right) = \sup\limits_{\xi \in \gamma^*_{\rho'}} |f(\xi)|$ y $\gamma_{\rho'}(t) = z_0 + \rho' e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Por lo tanto:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R} \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\sqrt[n]{M\left(\rho'\right)}}{\rho'} = \frac{1}{\rho'}, \text{ es decir } R \geq \rho' \ \forall\ 0 < \rho' < \rho \Rightarrow R \geq \rho.$$

♦

El siguiente resultado es el inverso al Teorema de Cauchy-Goursat (4.1.35).

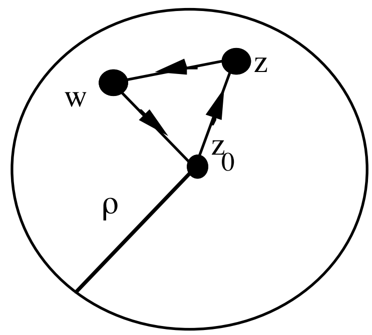
<u>TEOREMA 4.2.19 (MORERA):</u>

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto y sea $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ continua tal que para todo $\Delta \subseteq \Omega$, $\int_{\partial\Delta} f(\xi)\, d\xi = 0$. Entonces $f \in \mathbf{H}(\Omega)$.

<u>DEMOSTRACION:</u>

Sea $\rho > 0$ tal que $\overline{B\left(z_0, \rho\right)} \subseteq \Omega$. Sea $z \in B\left(z_0, \rho\right)$. Puesto que $B\left(z_0, \rho\right)$ es convexa, $\left[z_0, z\right] \subseteq B\left(z_0, \rho\right)$. Sea $F : B\left(z_0, \rho\right) \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $F(z) = \int_{[z_0,z]} f(\xi)\, d\xi$.

Queremos ver que $F'(z) = f(z)\ \forall\ z \in B\left(z_0, \rho\right)$. Para ésto, sea $w \in B\left(z_0, \rho\right)$, entonces el triángulo Δ determinado por z_0, z y w está contenido en $B\left(z_0, \rho\right)$ por convexidad, y



$$0 = \int_{\partial\Delta} f(\xi)\, d\xi = \int_{z_0}^{z} f(\xi)\, d\xi + \int_{z}^{w} f(\xi)\, d\xi + \int_{w}^{z_0} f(\xi)\, d\xi$$

donde por notación $\int_{z_1}^{z_2} f(\xi)\, d\xi = \int_{[z_1,z_2]} f(\xi)\, d\xi$. Entonces $\int_{z_0}^{w} f(\xi)\, d\xi - \int_{z_0}^{z} f(\xi)\, d\xi = \int_{z}^{w} f(\xi)\, d\xi$.

Ahora estimemos:

$$\left|\frac{F(w) - F(z)}{w - z} - f(z)\right| = \frac{1}{|w - z|}\left|\int_{z_0}^{w} f(\xi)\, d\xi - \int_{z_0}^{z} f(\xi)\, d\xi - (w - z)\, f(z)\right| =$$

$$= \frac{1}{|w - z|}\left|\int_{z}^{w} f(\xi)\, d\xi - \int_{z}^{w} f(z)\, d\xi\right| \leq \frac{1}{|w - z|} \sup_{\xi\in[z,w]} \left|f(\xi) - f(z)\right| |w - z| =$$

$$= \sup_{\xi\in\gamma[z,w]} \left|f(\xi) - f(z)\right| \xrightarrow[w\to z]{} 0.$$

Lo anterior prueba que $\lim\limits_{w \to z} \dfrac{F(w) - F(z)}{w - z} = f(z) = F'(z)$, ésto es, $F'(z) = f(z)$ $\forall\ z \in B\big(z_0,\ \rho\big)$ y $F \in \mathbf{H}\Big(B\big(z_0,\ \rho\big)\Big)$, por lo tanto F es infinitamente diferenciable $\Rightarrow$ $F''(z) = f'(z) \Rightarrow f \in \mathbf{H}\Big(B\big(z_0,\ \rho\big)\Big)$ y puesto que $z_0 \in \Omega$ es arbitrario $\Rightarrow f \in \mathbf{H}(\Omega)$.

♦

El siguiente Teorema nos dice que las funciones holomorfas en una región están completamente determinadas por un conjunto numerable de puntos con un punto de acumulación en la región, con más precisión:

TEOREMA 4.2.20 (TEOREMA DE UNICIDAD O DE IDENTIDAD):

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ región, $f \in \mathbf{H}(\Omega)$. Sea $A \subseteq \Omega$ tal que $A' \cap \Omega \neq \emptyset$ y $f(z) = 0\ \forall\ z \in A$. Entonces $f(z) = 0\ \forall\ z \in \Omega$.

DEMOSTRACION:

Sea $z_0 \in A' \cap \Omega$ y sea $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A \cap \Omega$ tal que $z_n \neq z_0\ \forall\ n \in \mathbb{N}$ y $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$. Sea $\delta > 0$ tal que $B\big(z_0,\ \delta\big) \subseteq \Omega$ y sea $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\big(z - z_0\big)^n\ \forall\ z \in B\big(z_0,\ \delta\big)$.

Afirmamos que $a_n = 0\ \forall\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Esto lo demostraremos por inducción.

Para $n = 0$, $a_0 = f\big(z_0\big) = \lim\limits_{m\to\infty} f\big(z_m\big) = \lim\limits_{m\to\infty} 0 = 0$.

Supongamos que $a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0$. Demostraremos que $a_{n+1} = 0$.

Se tiene que:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\big(z - z_0\big)^k = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k\big(z - z_0\big)^k = \big(z - z_0\big)^{n+1} \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k\big(z - z_0\big)^{k-n-1} =$$

$$= (z - z_0)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+n+1}(z - z_0)^k.$$

Entonces $\forall\, z \neq z_0$, $z \in B(z_0, \delta)$, se tiene:

$$\frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+n+1}(z - z_0)^k = g(z) \text{ y } g(z_0) = a_{n+1}. \text{ Entonces}$$

$$a_{n+1} = g(z_0) = \lim_{m\to\infty} g(z_m) = \lim_{m\to\infty} \frac{f(z_m)}{(z_m - z_0)^{n+1}} = 0, \text{ por lo tanto } a_{n+1} = 0.$$

Hemos probado que $a_n = 0\ \forall\, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, es decir $f^{(n)}(z_0) = 0\ \forall\, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Sean $A_n = \left\{z \in \Omega \mid f^{(n)}(z) = 0\right\} = \left(f^{(n)}\right)^{-1}(\{0\})\ \forall\, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Puesto que f es continua, se tiene que A_n es cerrado en Ω. Ahora sea

$$B = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \left\{z \in \Omega \mid f^{(n)}(z) = 0\ \forall\, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\}.$$

Por lo anterior B es cerrado en Ω y $B \neq \emptyset$ pues $z_0 \in B$.

Ahora sea $w \in B$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(w)}{n!}(z - w)^n$ $\forall\, z \in B(w, \delta)$. Por hipótesis $f^{(n)}(w) = 0\ \forall\, n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \Rightarrow f^{(n)}(z) = 0\ \forall\, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $\forall\, z \in B(w, \delta) \Rightarrow B(w, \delta) \subseteq B$, es decir B es abierto y por tanto B es abierto en Ω.

Resumiendo, $B \neq \emptyset$, B es abierto y cerrado en Ω y Ω es conexo $\Rightarrow B = \Omega$, es decir, $f(z) = 0\ \forall\, z \in \Omega$. ♦

COROLARIO 4.2.21:

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ región y sea $A \subseteq \Omega$ tal que $A' \cap \Omega \neq \emptyset$. Sean $f, g \in \mathbf{H}(\Omega)$ tales que $f(z) = g(z)\ \forall\, z \in A$. Entonces $f(z) = g(z)\ \forall\, z \in \Omega$.

DEMOSTRACION:

Se sigue inmediatamente al aplicar el Teorema anterior a la función $h : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $h(z) = f(z) - g(z)$. ♦

DEFINICION 4.2.22:

Si $f \in \mathbf{H}(\mathbb{C})$, es decir si f es holomorfa en todo el plano complejo, entonces f se llama entera.

PROPOSICION 4.2.23:

Sea f entera y sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(z - z_0\right)^n$ el desarrollo de f en serie de potencias de f alrededor de z_0. Entonces el radio de convergencia de esta serie es ∞ y además $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(z - z_0\right)^n \ \forall\, z \in \mathbb{C}$.

DEMOSTRACION:

Sea $\rho > 0$ arbitrario. Se tiene $B\left(z_0, \rho\right) \subseteq \mathbb{C}$. Sea $M\left(\rho\right) = \sup_{\xi \in \gamma_\rho^*} |f(\xi)|$, donde $\gamma_\rho(t) = z_0 + \rho\, e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.

Se tiene que $a_n = \dfrac{f^{(n)}\left(z_0\right)}{n!}$ y por las desigualdades de Cauchy: $|a_n| \le \dfrac{M\left(\rho\right)}{\rho^n}$.

Entonces, si R es el radio de convergencia de la serie, se tiene $\dfrac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} \le \lim_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{M(\rho)}}{\rho} = \dfrac{1}{\rho}$.

Es decir, $\frac{1}{R} \leq \frac{1}{\rho}\ \forall\ \rho > 0 \Rightarrow R \geq \rho\ \forall\ \rho > 0 \Rightarrow R = \infty$. ♦

El siguiente Teorema nos caracteriza las funciones enteras y acotadas.

TEOREMA 4.2.24 (LIOUVILLE):

Sea f entera y acotada, es decir existe $M > 0$ tal que $|f(z)| \leq M\ \forall\ z \in \mathbb{C}$. Entonces f es constante.

DEMOSTRACION:

Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, con $z_0 \in \mathbb{C}$ y $R = \infty$ es el radio de convergencia de la serie.

Se tiene $\forall\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $|a_n| \leq \frac{M(\rho)}{\rho^n} \leq \frac{M}{\rho^n}$, donde $M(\rho) = \sup_{\xi \in \gamma_\rho^*} |f(\xi)|$ y $\gamma_\rho(t) = z_0 + \rho\, e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Entonces $\forall\ n \geq 1$, se tiene $|a_n| \leq \lim_{\rho \to \infty} \frac{M}{\rho^n} = 0$, por lo que $f(z) = a_0\ \forall\ z \in \mathbb{C}$, es decir, f es constante. ♦

TEOREMA 4.2.25 (TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ALGEBRA):

Sea $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ un polinomio con coeficientes complejos de grado ≥ 1, es decir, p(z) no es constante. Entonces p(z) tiene por lo menos una raíz en $\mathbb{C}$.

DEMOSTRACION:

Supongamos que existe un polinomio $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0 \in \mathbb{C}[z]$ tal que $a_n \neq 0$, $n \geq 1$ y $p(z) \neq 0\ \forall\ z \in \mathbb{C}$.

Definamos $g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ por $g(z) = \frac{1}{p(z)}$. Se tiene que $g \in \mathbf{H}(\mathbb{C})$, es decir, g es entera. Se tiene que $\lim\limits_{|z|\to\infty} \left| \frac{a_n z^n}{2} \right| = \infty$ y que $\lim\limits_{|z|\to\infty} \left| 1 + \frac{a_{n-1}z^{n-1}}{a_n z^n} + \ldots + \frac{a_1 z}{a_n z^n} + \frac{a_0}{a_n z^n} \right| = 1$. Sea $R > 0$ tal que $\lim\limits_{|z|\to\infty} \left| \frac{a_n z^n}{2} \right| \geq 1 \ \forall \ |z| \geq R$ y $\left| 1 + \frac{a_{n-1}z^{n-1}}{a_n z^n} + \ldots + \frac{a_1 z}{a_n z^n} + \frac{a_0}{a_n z^n} \right| \geq \frac{1}{2} \ \forall \ |z| \geq R$, por lo tanto $\forall \ |z| \geq R$ se tiene que $|p(z)| = \left| a_n z^n \right| \bullet \left| 1 + \frac{a_{n-1}z^{n-1}}{a_n z^n} + \ldots + \frac{a_1 z}{a_n z^n} + \frac{a_0}{a_n z^n} \right| \geq 2 \bullet \frac{1}{2} = 1$, lo que implica que $|g(z)| = \frac{1}{|p(z)|} \leq 1 \ \forall \ |z| \geq R$. Ahora $\overline{B(0,\ R)} = \left\{ z \in \mathbb{C} \ \middle| \ |z| \leq R \right\}$ es compacto y puesto que g es continua, $g\left(\overline{B(0,\ R)} \right)$ es compacto y por lo tanto acotado. Sea $M > 0$ tal que $|g(z)| \leq M \ \forall \ z \in \overline{B(0,\ R)}$. Entonces $|g(z)| \leq M + 1 \ \forall \ z \in \mathbb{C}$, por lo tanto g es entera y acotada, y como consecuencia, constante, lo que implica que p(z) es constante, pero esto contradice nuestras hipótesis. Entonces, existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $p(z_0) = 0$. ♦

COROLARIO 4.2.26:

Sea $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ un polinomio con coeficientes complejos. Entonces todas las raíces de p(z) están en $\mathbb{C}$, es decir, $\mathbb{C}$ es algebraicamente cerrado.

DEMOSTRACION:

Lo haremos por inducción en n = grado de p(z).

Si $n = 0$, p(z) es constante y no hay nada que probar.

Si $n = 1$, entonces éste es el Teorema Fundamental del álgebra.

Supongamos válido el resultado para $n = k \geq 1$. Ahora sea $n = k + 1$, entonces existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $p(z_0) = (z - z_0)\, g(z)$ con g(z) un polinomio de grado k y las raíces de p(z) son z_0 y las raíces de g(z) y todas ellas están en $\mathbb{C}$. ♦

CAPITULO 5.

INTEGRAL DE CAUCHY

§ 1. Teoremas del Mapeo Abierto, del Módulo Máximo y de Cauchy.

En esta sección, establecemos el Teorema Integral de Cauchy y algunas de sus aplicaciones.

TEOREMA 5.1.1 (FUNCION INVERSA):

Sea Ω una región en $\mathbb{C}$ y sean $\varphi \in \mathbf{H}(\Omega)$, $z_0 \in \Omega$ tal que $\varphi'(z_0) \neq 0$. Entonces Ω contiene una vecindad V de z_0 tal que:

(1) φ es 1-1 en V.

(2) $\varphi(V) = W$ es abierto.

(3) Si $\psi : W \longrightarrow V$ está definido por $\psi(\varphi(z)) = z$, entonces $\psi \in \mathbf{H}(W)$.

Es decir, φ tiene una inversa holomorfa.

DEMOSTRACION:

Por cálculo de varias variables, sabemos que φ tiene una inversa real diferenciable, satisfaciendo (1), (2) y (3). Solo basta verificar que ψ satisface las condiciones de Cauchy-Riemann. Ahora si llamamos $\alpha = \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial y}$, $\beta = \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} = -\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}$ y $\gamma = \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} \bullet \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} \bullet \frac{\partial\varphi_1}{\partial y}$ $\neq 0$, puesto que $\psi = \varphi^{-1}$, se tiene que $\frac{\partial\psi_1}{\partial x} = \frac{\partial\psi_2}{\partial y} = \frac{\alpha}{\gamma}$ y $\frac{\partial\psi_1}{\partial y} = -\frac{\partial\psi_2}{\partial x} = \frac{\beta}{\gamma}$, lo que demuestra que ψ es complejo diferenciable. ♦

TEOREMA 5.1.2:

Capítulo 5

Sea Ω un región, $f \in \mathbf{H}(\Omega)$, f no constante. Sea $z_0 \in \Omega$, y $w_0 = f(z_0)$. Sea m el orden del cero de z_0 de la función $f - w_0$. Entonces existe una vecindad V de z_0, $V \subseteq \Omega$ tal que existe $\varphi \in \mathbf{H}(V)$ tal que:

(a) $f(z) = w_0 + [\varphi(z)]^m$ para toda $z \in V$.

(b) φ' no tiene ceros en V y φ es una función invertible de V sobre un disco $B(0, r)$.

DEMOSTRACION:

Sea $B(z_0, \delta) \subseteq \Omega$ tal que $f(z) \neq w_0$ $\forall\, z \in B(z_0, \delta) - \{z_0\}$. Entonces podemos escribir $f(z) - w_0 = (z - z_0)^m\, g(z)$ tal que $g \in \mathbf{H}\big(B(z_0, \delta)\big)$ que no tiene ceros en $B(z_0, \delta)$. Entonces $\frac{g'}{g} \in \mathbf{H}\big(B(z_0, \delta)\big)$. Por la demostración del Teorema de Morera, existe $h_1 \in \mathbf{H}\big(B(z_0, \delta)\big)$ tal que $h_1' = \frac{g'}{g}$. Ahora $\left(g\, e^{-h_1}\right)' = e^{-h_1}\left(g' - g\, h_1'\right) = 0$, por lo tanto existe una constante A tal que $A \neq 0$ y $g(z) = A\, e^{h_1} = e^h$, con $h = (\log A)\, h_1$. Si definimos $\varphi(z) = (z - z_0)\, e^{\frac{h(z)}{m}}$ entonces obtenemos (a).

La parte (b) se sigue inmediatamente de 5.1.1. ♦

COROLARIO 5.1.3 (MAPEO ABIERTO):

Si $f \in \mathbf{H}(\Omega)$, con Ω abierto, entonces ó f es constante ó $f(\Omega)$ es abierto.

DEMOSTRACION:

Si f no es constante, con la notaciones de 5.1.2, tendremos que $f(V) = w_0 + B(0, r^n)$, el cual es abierto. ♦

COROLARIO 5.1.4 (PRINCIPIO DEL MODULO MAXIMO):

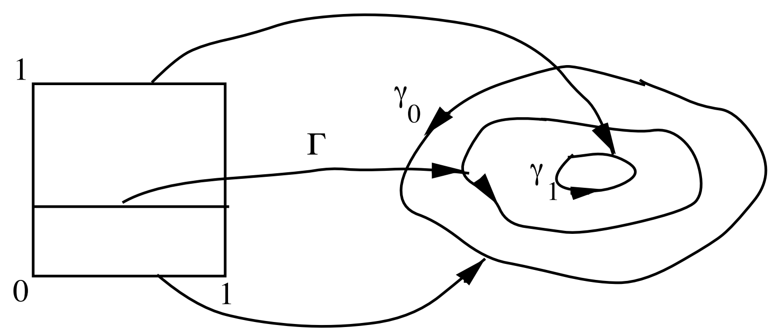
Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto y conexo. Sea $f \in \mathbf{H}(\Omega)$. Si existe $z_0 \in \Omega$ con $|f(z_0)| \geq |f(z)|$ $\forall\, z \in \Omega \Rightarrow$ f es constante.

DEMOSTRACION:

Si f no fuese constante, entonces $f(\Omega)$ sería abierto, por lo que $f(z_0) \in f(\Omega)$ no puede tener módulo máximo, lo cual contradice las hipótesis. ♦

DEFINICION 5.1.5:

Sean $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \longrightarrow \Omega \subseteq \mathbb{C}$ dos curvas cerradas. Se dice que <u>γ_0 es homotópica a γ_1 en Ω</u> si existe una función continua $\Gamma : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow \Omega$ tal que



$$(*) \qquad \begin{cases} \Gamma(s, 0) = \gamma_0(s) \quad \text{y} \quad \Gamma(s, 1) = \gamma_1(s) & 0 \leq s \leq 1 \\ \Gamma(0, t) = \Gamma(1, t) & 0 \leq t \leq 1 \end{cases} .$$

Geométricamente γ_0 y γ_1 son homotópicas cuando podemos deformar γ_0 en γ_1 de manera continua.

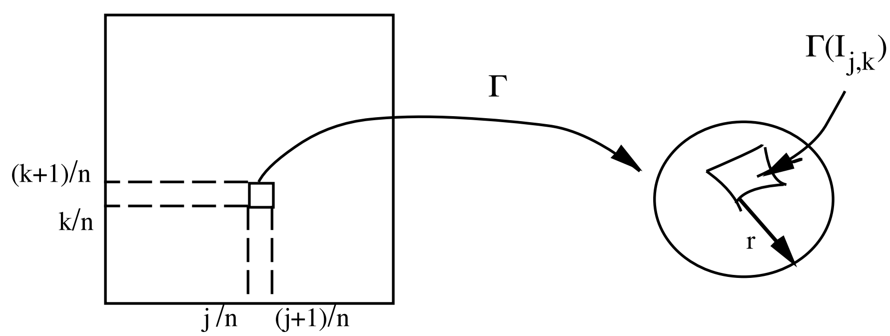
TEOREMA 5.1.6 (TEOREMA DE CAUCHY):

Capítulo 5

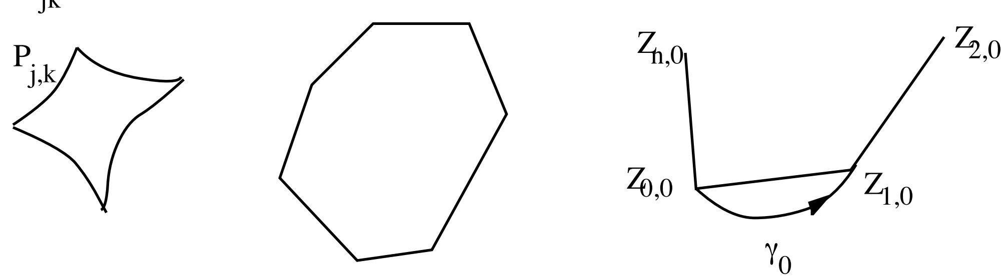
Sea Ω una región y sean γ_0, γ_1 homotópicas cerradas. Entonces si $f \in \mathbf{H}(\Omega)$, se tiene $\int_{\gamma_0} f(\xi)\, d\xi = \int_{\gamma_1} f(\xi)\, d\xi$.

DEMOSTRACION:

Sea $\Gamma : I^2 \longrightarrow \Omega$ como en (*), $I = [0, 1]$. I^2 es compacto, por lo tanto $\Gamma\left(I^2\right)$ es compacto. Sea $r = \operatorname{dist}\left(\Gamma\left(I^2\right), \mathbb{C} - \Omega\right) > 0$. Además puesto que Γ es uniformemente continua, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(s - s')^2 + (t - t')^2 < \frac{2}{n^2} \Rightarrow \left|\Gamma(s, t) - \Gamma(s', t')\right| < r$.



Sean $z_{jk} = \Gamma\left(\frac{j}{n}, \frac{k}{n}\right)$ y $I_{jk} = \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right] \times \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$. Puesto que el diámetro de I_{jk} es $\frac{\sqrt{2}}{n}$ $\Rightarrow \Gamma\left(I_{jk}\right) \subseteq B(z_{jk}, r)$. Sea P_{jk} el polígono cerrado $\left[z_{j,k}, z_{j+1,k}, z_{j+1,k+1}, z_{j,k+1}, z_{j,k}\right]$. Se tiene que $\int_{P_{jk}} f(\xi)\, d\xi = 0$ puesto P_{jk} es convexo.



Sea Q_k el polígono cerrado $\left[z_{0,k}, z_{1,k}, \dots, z_{n,k}\right]$, k = 0, … , n. Si σ_j significa el segmento de γ_0 comprendido entre $\gamma_0\left(\frac{j}{n}\right)$ y $\gamma_0\left(\frac{j+1}{n}\right)$. Entonces $\sigma_j + \left[z_{j+1,0}, z_{j,0}\right]$ es una curva cerrada contenida en $B\left(z_{j,0}, r\right) \Rightarrow \int_{\sigma_j} f(\xi)\, d\xi = -\int_{\left[z_{j+1,0}, z_{j,0}\right]} f(\xi)\, d\xi = \int_{\left[z_{j,0}, z_{j+1,0}\right]} f(\xi)\, d\xi$.

Sumando estas n integrales se tiene $\sum_{j=0}^{n-1} \int_{\sigma_j} f(\xi)\, d\xi = \int_{\gamma_0} f(\xi)\, d\xi = \int_{Q_0} f(\xi)\, d\xi$.

Similarmente $\int_{\gamma_1} f(\xi)\, d\xi = \int_{Q_n} f(\xi)\, d\xi$. Puesto que $\int_{P_{jk}} f(\xi)\, d\xi = 0$, se sigue que $\sum_{j=0}^{n-1} \int_{P_{jk}} f(\xi)\, d\xi = \int_{Q_k} f(\xi)\, d\xi - \int_{Q_{k+1}} f(\xi)\, d\xi = 0$, por lo tanto $\int_{Q_k} f(\xi)\, d\xi = \int_{Q_{k+1}} f(\xi)\, d\xi$

$\Rightarrow \int_{\gamma_0} f(\xi)\, d\xi = \int_{Q_0} f(\xi)\, d\xi = \dots = \int_{Q_n} f(\xi)\, d\xi = \int_{\gamma_1} f(\xi)\, d\xi$. ♦

DEFINICION 5.1.7:

Una región $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ se llama simplemente conexo si toda curva cerrada en Ω, es homotópica a un punto.

TEOREMA 5.1.8:

Si Ω es simplemente conexo, $f \in \mathbf{H}(\Omega)$, entonces f tiene primitiva.

DEMOSTRACION:

Sea $z_0 \in \Omega$ y sea γ_z cualquier camino entre z_0 y z, con $z \in \Omega$ arbitrario. Definimos $F(z) = \int_{\gamma_z} f(\xi)\, d\xi$. Si ω_z es otro camino que une z_0 con z, $\gamma_z - \omega_z$ es un camino cerrado, por lo tanto $\gamma_z - \omega_z \sim \{z_0\}$, esto implica que $\int_{\gamma_z} f(\xi)\, d\xi = \int_{\omega_z} f(\xi)\, d\xi$, es decir F(z) está bien definida.

Ahora probemos que $F'(z) = f(z)$ para $z \in \Omega$. Se tiene:

$$\frac{F(w) - F(z)}{w - z} - f(z) = \frac{1}{w - z}\left\{\int_{\gamma_w} f(\xi)\, d\xi - \int_{\gamma_z} f(\xi)\, d\xi\right\} - f(z)$$

Ahora si w está suficientemente cerca de z, se tiene que $[w, z] \subseteq \Omega$ y $\int_{[z,w]} f(z)\, d\xi = (w - z)\, f(z)$, por lo tanto

$$\frac{F(w) - F(z)}{w - z} - f(z) = \frac{1}{w - z}\left\{\int_{[z,w]} f(\xi)\, d\xi - \int_{[z,w]} f(z)\, d\xi\right\} = \frac{1}{w - z}\left\{\int_{[z,w]} \big(f(\xi) - f(z)\big)\, d\xi\right\}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{F(w) - F(z)}{w - z} - f(z)\right| \leq \frac{1}{|w - z|} \sup_{\xi\in[z,w]} \big|f(\xi) - f(z)\big|\, |w - z| \xrightarrow[w \to z]{} 0.$$

Por lo tanto $\boxed{F'(z) = f(z)}$.

♦

COROLARIO 5.1.9:

Si Ω es simplemente conexo y $f \in \mathbf{H}(\Omega)$ no tiene ceros en Ω, entonces existe $h \in \mathbf{H}(\Omega)$ tal que $f = e^h$.

DEMOSTRACION:

$\frac{f'}{f} \in \mathbf{H}(\Omega)$, por lo tanto $\frac{f'}{f} = h_1'$ para algún $h_1 \in \mathbf{H}(\Omega)$. Por lo tanto $\left(e^{-h_1} f\right)' = e^{-h_1}\left(f' - h_1'f\right) = 0$, por lo cual existe una constante $A \neq 0$, tal que $f(z) = Ae^{h_1(z)} = e^{(\ln A)h_1(z)} = e^{h(z)}$. ♦

<u>TEOREMA 5.1.10 (TEOREMA INTEGRAL DE CAUCHY):</u>

Sea $f \in \mathbf{H}(\Omega)$ y sea γ cualquier curva cerrada homotópica a cero en Ω. Entonces

$$\boxed{\mathrm{Ind}_\gamma(z)\, f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)\, d\xi}{\left(\xi - z\right)^{n+1}}}$$

para toda $z \notin \gamma^*$.

<u>DEMOSTRACION:</u>

Por 5.1.6 se tiene que $\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z}\, d\xi = 0 = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)\, d\xi}{\xi - z} - \mathrm{Ind}_\gamma(z)\, f(z)$.

Ahora $\frac{f(w) - f(z)}{w - z}\, \mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{w - z} \left[\frac{1}{\xi - w} - \frac{1}{\xi - z}\right] d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)\, d\xi}{\left(\xi - z\right)\left(\xi - z\right)} \xrightarrow[w \to z]{} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)\, d\xi}{\left(\xi - z\right)^2} = \mathrm{Ind}_\gamma(z)\, f'(z)$. Esto es lo que se quiere probar para el caso $n = 1$.

Supongamos que para $m \in \mathbb{N}$, se tiene $\text{Ind}_\gamma(z)\, f^{(m)}(z) = \frac{m!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)\, d\xi}{(\xi - z)^{m+1}}$.

Entonces

$$\frac{f^{(m)}(w) - f^{(m)}(z)}{w - z}\, \text{Ind}_\gamma(z) = \frac{m!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{w - z} \left[\frac{1}{(\xi - w)^{m+1}} - \frac{1}{(\xi - z)^{m+1}}\right] d\xi =$$

$$= \frac{m!}{2\pi i\ (w - z)} \int_\gamma \frac{f(\xi)\ (w - z) \left(\sum_{k=o}^{m} (\xi - z)^{m-k} (\xi - w)^k\right)}{((\xi - w)(\xi - z))^{m+1}}\, d\xi \xrightarrow[w \to z]{}$$

$$\frac{m!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)\ (m + 1)\ (\xi - z)^m}{(\xi - z)^{2m+2}}\, d\xi = \frac{(m+1)!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{m+2}}\, d\xi. \qquad \blacklozenge$$

Terminamos este sección probando lo que se conoce como el Principio de Simetría ó Principio de Reflexión de Schwarz.

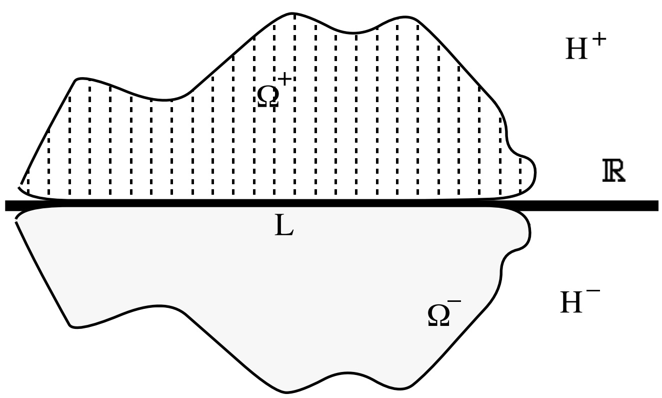
Primero notemos que se Ω es una región, y definimos $\Omega^* = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \overline{z} \in \Omega\right\}$, entonces si f(z) es holomorfa en Ω, $f^*(z) = \overline{f(\overline{z})}$ es holomorfa en Ω^*. Para verificar esto se pueden aplicar las ecuaciones de Cauchy-Riemann notando que si $f(z) = u(z) + i\, v(z)$, entonces $f^*(x, y) = u(x, -y) - i\, v(x, -y)$.

<u>TEOREMA 5.1.11 (PRINCIPIO DE SIMETRIA O PRINCIPIO DE REFLEXION DE SCHWARZ):</u>

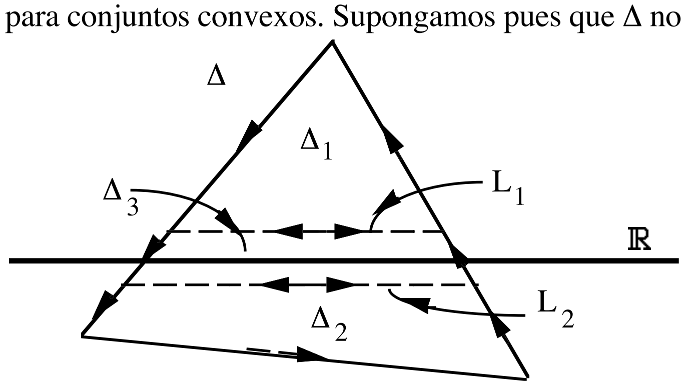
Sea Ω^+ una región en H^+ y L tal que $\emptyset \neq L \subseteq \partial\Omega^+ \cap \mathbb{R}$. Sea $\Omega^- = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \overline{z} \in \Omega^+\right\}$ = reflexión de Ω^+ a través de $\mathbb{R}$. Sea $f \in \mathbf{H}(\Omega^+)$, f continua en

$\Omega^+ \cup L$ tal que $f(x) \in \mathbb{R}\ \forall\ x \in L$. Entonces $F(z) = \begin{cases} f(z) & , \ z \in \Omega^+ \cup L \\ \overline{f(\overline{z})} & , \ z \in \Omega^- \end{cases}$ es holomorfa en $W = \Omega^+ \cup L \cup \Omega^-$ y $F_{|\Omega^+} = f$.

DEMOSTRACION:



$\overline{f(\overline{z})}$ es holomorfa en Ω^- y si $z = x \in L$, $\overline{f(\overline{x})} = f(x)$, por lo que F es continua en W. Para probar que $F \in \mathbf{H}(W)$ basta probar que $\int_{\partial\Delta} F(\xi)\, d\xi = 0$ para todo triángulo $\Delta \subseteq W$. Si $\Delta \subseteq \Omega^+$ ó $\Delta \subseteq \Omega^-$ el resultado es inmediato por el Teorema de Cauchy para conjuntos convexos. Supongamos pues que Δ no está contenido ni en Ω^- ni en Ω^+.

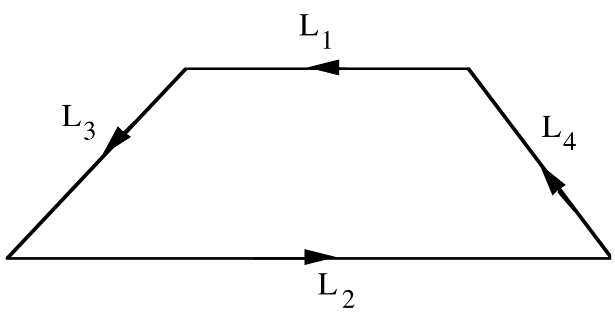


Entonces sean Δ_1, Δ_2, Δ_3 como se muestra en la figura, $\Delta_1 \subseteq \Omega^+$, $\Delta_2 \subseteq \Omega^-$, Δ_3 un cuadrilátero con los lados L_1 y L_2 paralelos.

Entonces:

$$\int_{\partial\Delta} F(\xi)\, d\xi = \int_{\partial\Delta_1} F(\xi)\, d\xi + \int_{\partial\Delta_2} F(\xi)\, d\xi + \int_{\partial\Delta_3} F(\xi)\, d\xi = 0 + 0 + \int_{\partial\Delta_3} F(\xi)\, d\xi$$

$$= \int_{L_1} F(\xi)\, d\xi + \int_{L_2} F(\xi)\, d\xi + \int_{L_3} F(\xi)\, d\xi + \int_{L_4} F(\xi)\, d\xi.$$



Ahora si la longitud de L_3 y L_4 se va a 0, entonces puesto que F es uniformemente continua en Δ, se tiene $\int_{L_3} F(\xi)\, d\xi + \int_{L_4} F(\xi)\, d\xi \xrightarrow[L_3, L_4 \to 0]{} 0$.

Finalmente por continuidad uniforme de F, es claro que $\int_{L_1} F(\xi)\, d\xi \xrightarrow[L_1 \to L_2]{} -\int_{L_2} F(\xi)\, d\xi$, lo que muestra que $\int_{\partial\Delta} F(\xi)\, d\xi = 0$ probando el Teorema. ♦

<u>§ 2.Singularidades y Residuos:</u>

<u>DEFINICION 5.2.1:</u>

Una función f se dice que tiene una <u>singularidad aislada</u> en un punto z = a si existe R > 0 tal que $f \in \mathbf{H}(B(a, R) - \{a\})$. a recibe el nombre de <u>singularidad aislada de f</u>.

<u>DEFINICION 5.2.2:</u>

Si a es una singularidad removible de f, a se llama <u>removible</u> si existe $g \in \mathbf{H}(B(a, R))$ tal que $g(z) = f(z)$ para $z \neq a$.

TEOREMA 5.2.3:

f tiene una singularidad aislada en $z = a \Leftrightarrow \lim\limits_{z \to a} (z - a) f(z) = 0$.

DEMOSTRACION:

$\Rightarrow$) Sea g(z) como en 5.2.2, entonces $\lim\limits_{z \to a} (z - a) g(z) = 0 \bullet g(a) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{z \to a} (z - a) f(z) = 0$.

$\Leftarrow$) Sea $g(z) = \begin{cases} (z - a) f(z) & , z \neq a \\ 0 & , z = a \end{cases}$.

Entonces $g \in \mathbf{H}(B(a, R) - \{a\})$ y continua en B(a, R). Además se tiene $\int_{\partial\Delta} g(\xi)\, d\xi = 0$ $\forall$ triángulo $\Delta \subseteq \Omega \Rightarrow g \in \mathbf{H}(B(a, R))$. Ahora, puesto que $g(a) = 0$, se tiene $g(z) = (z - a) h(z)$, $h \in \mathbf{H}(B(a, R)) \Rightarrow h(z) = f(z)$ $\forall$ $0 < |z - a| < R$. ♦

DEFINICION 5.2.4:

Sea a una singularidad aislada de f. Entonces a se llama de <u>polo de f</u> si $\lim\limits_{z \to a} |f(z)| = \infty$.

Si a es una singularidad aislada de f que no es ni polo ni singularidad removible, entonces a se llama <u>singularidad esencial</u> de f.

PROPOSICION 5.2.5:

Un punto a es un polo de f $\Leftrightarrow$ existe una función analítica g en B(a, R) tal que $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z - a)^m}$ y $g(a) \neq 0$. En este caso m recibe el nombre de <u>orden del polo de f en a</u>.

DEMOSTRACION:

$\Leftarrow$) Es claro.

$\Rightarrow$) Por 5.2.3, $\frac{1}{f(z)}$ tiene una singularidad removible en $z = a$, por lo tanto $\frac{1}{f(z)} = (z-a)^m\, h(z)$ con $h(z) \neq 0$ para todo $z \in B(a,R) \Rightarrow f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m}$, $g(z) = \frac{1}{h(z)}$. ♦

OBSERVACION 5.2.6:

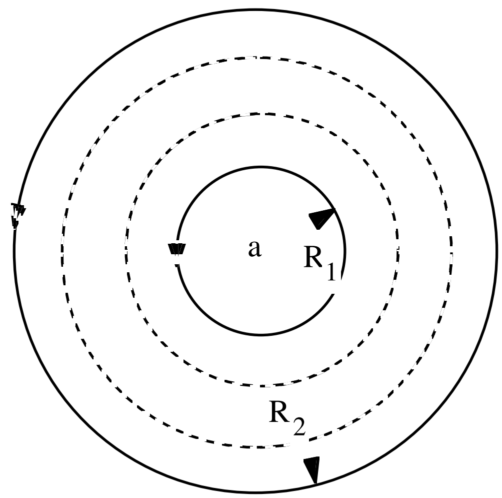
Si a es polo de f, se tiene que $f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m} = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z-a)^n$. Entonces:

$$\frac{a_{-m}}{(z-a)^m} + \ldots + \frac{a_{-1}}{(z-a)}$$

se llama la <u>parte singular ó principal de f en a</u>.

TEOREMA 5.2.7 (DESARROLLO EN SERIES DE LAURENT):

Sea Ω un anillo, es decir, $\Omega = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid R_1 < |z-a| < R_2 \right\}$. Si $f \in \mathbf{H}(\Omega)$, entonces $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$, donde $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)\, d\xi}{(\xi - a)^{n+1}}$, $n \in \mathbb{Z}$, y γ es cualquier círculo con centro a y radio r tal que $R_1 < r < R_2$. Además la serie converge uniformemente en el anillo cerrado $\left\{ z \in \mathbb{C} \mid r_1 \leq |z-a| \leq r_2 \right\}$ con $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$.



DEMOSTRACION:

Sean γ_i los círculos $|z - a| = r_i$, $i = 1, 2$ con $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$. Entonces $\gamma_1 \sim \gamma_2$, por lo que $\int_{\gamma_1} g(\xi)\, d\xi = \int_{\gamma_2} g(\xi)\, d\xi$ para cualquier función holomorfa en Ω. Esto demuestra que las a_n no dependen de r. Sea $r_1 < |z - a| < r_2$ y sea $f_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\xi)\, d\xi}{\xi - z}$, $f_1(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\xi)\, d\xi}{\xi - z}$. Entonces $f_2 \in \mathbf{H}\big(B(a, R_2)\big)$ y $f_1 \in \mathbf{H}\Big(\big\{z \in \mathbb{C} \mid R_1 < |z - a|\big\}\Big)$. Ahora bien, se tiene que $f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n$ con $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\xi)\, d\xi}{(\xi - a)^{n+1}}$ para $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Ahora consideremos $w = \frac{1}{z - a}$, $0 < |w| < \frac{1}{R_1}$, entonces definimos $g(w)$ por $g(w) = f_1(z) = f_1\left(a + \frac{1}{w}\right) \in \mathbf{H}\left(B\left(0, \frac{1}{R_1}\right) - \{0\}\right)$. Se tiene

$$\left|f_1(z)\right| = \left| -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(\xi)\,d\xi}{\xi - z}\right| \leq \left(\sup_{|\xi - a| = r_1}\left|f(\xi)\right|\right)\bullet\frac{1}{2\pi}\left|\int_{\gamma_1}\frac{d\xi}{\xi - z}\right| \xrightarrow[z\to\infty]{} 0,$$

por lo que $w = 0$ es una singularidad removible de g y se tiene $g(0) = 0$ (o de dicho de otra forma $z = \infty$ es una singularidad removible de $f_1(z)$).

Por lo anterior $g(w) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n w^n$. Entonces se tendrá que

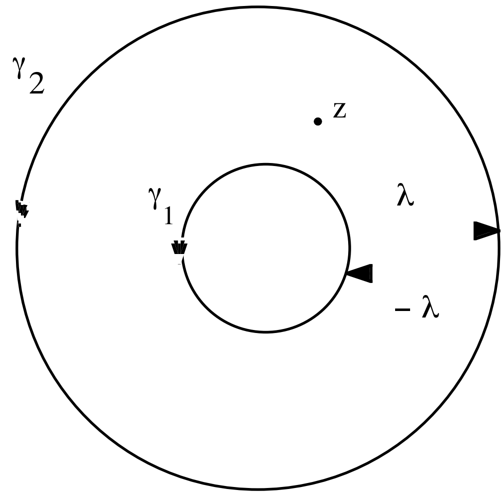
$$f_1(z) = g\left(\frac{1}{z - a}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n (z - a)^{-n}. \text{ Además}$$

$$g(w) = f_1\left(a + \frac{1}{w}\right) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(\xi)\,d\xi}{\xi - a - \frac{1}{w}} = \frac{w}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(\xi)\,d\xi}{1 - w\,(\xi - a)} =$$

$$= \frac{w}{2\pi i}\int_{\gamma_1} f(\xi)\left(\sum_{n=0}^{\infty} w^n (\xi - a)^n\right) d\xi = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} f(\xi)\,(\xi - a)^{n-1}\,d\xi\right\} w^n.$$

Esto demuestra que $B_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(\xi)\,d\xi}{(\xi - a)^{-n+1}}$.

Finalmente, sea λ cualquier segmento de línea que una γ_1 con γ_2. Entonces $\lambda + \gamma_2 - \gamma_1 - \lambda$ es una curva cerrada en Ω homotópica a 0, por lo que



$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda+\gamma_2-\gamma_1-\lambda} \frac{f(\xi)\, d\xi}{\xi - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\xi)\, d\xi}{\xi - a} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\xi)\, d\xi}{\xi - a} = f_2(z) + f_1(z) =$$

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ por lo tanto $\boxed{a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)\, d\xi}{(\xi - a)^{n+1}},\ n \in \mathbb{Z}}$.

La convergencia uniforme en $\{z \in \mathbb{C} \mid r_1 \leq |z - a| \leq r_2\}$ se sigue de la convergencia uniforme de las series de $f_1(z)$ en $\{z \in \mathbb{C} \mid r_1 \leq |z - a|\}$ y de $f_2(z)$ en $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| \leq r_2\}$. ♦

DEFINICION 5.2.8:

En la serie de Laurent $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, a $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z - z_0)^n$ se llama la <u>parte singular ó principal</u> de la serie, y a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ se le llama la parte <u>regular</u> de la serie.

TEOREMA 5.2.9:

Sea a una singularidad aislada de f y sea $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ su desarrollo en serie de Laurent para $0 < |z - a| < R$. Entonces

(1) a es removible $\Leftrightarrow a_n = 0 \ \forall\, n \leq -1$.

(2) a es un polo de orden m $\Leftrightarrow a_{-m} \neq 0$ y $a_n = 0 \ \forall\, n \leq -(m + 1)$.

(3) a es una singularidad esencial $\Leftrightarrow a_n \neq 0$ para una infinidad de índices $n < 0$.

DEMOSTRACION:

Ejercicio. ♦

TEOREMA 5.2.10 (CASORATI-WEIERSTRASS):

Si una función f tiene una singularidad esencial en z = a, entonces $\overline{f(B(a, \delta) - \{a\})} = \mathbb{C}$.

DEMOSTRACION:

Sea $f \in \mathbf{H}(B(a, \delta) - \{a\})$. Supongamos que $\overline{f(B(a, \delta) - \{a\})} \neq \mathbb{C}$, entonces existen $c \in \mathbb{C}$ y $\varepsilon > 0$ tales que $B(c, \varepsilon) \cap f(B(a, \delta) - \{a\}) = \emptyset$, lo cual implica que tenemos $|f(z) - c| \geq \varepsilon \ \forall\, z \in B(a, \delta) - \{a\}$.

Sea $g(z) = \dfrac{1}{f(z) - c} \in \mathbf{H}(B(a, \delta)) \Rightarrow f(z) = \dfrac{1}{g(z)} + c$. Si $g(a) = 0 \Rightarrow \lim_{z \to a} |f(z)| = \infty$, por lo que a sería un polo. Si $g(a) \neq 0$, entonces existe $\delta' < \delta$ tal que $g(z) \neq 0 \ \forall\, z \in B(a, \delta') \Rightarrow$ a sería singularidad removible, lo cual contradice las hipótesis.

♦

DEFINICION 5.2.11:

Si a es un singularidad aislada de f y si $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - a)^n$ en $B(a, \delta)$.

Entonces se define el <u>residuo de f en a</u> por: Res (f, a) = a_{-1}.

TEOREMA 5.2.12 (TEOREMA DE LOS RESIDUOS):

Sea f analítica en Ω con excepción de un número finito de singularidades aisladas $a_1, \dots, a_n$. Si γ es cualquier camino cerrado en Ω que no pasa por ningún $a_1, \dots, a_n$ y si $\gamma \sim 0$ en Ω, entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(\xi)\, d\xi = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Ind}_\gamma(a_k)\ \mathrm{Res}\,(f, a_k).$$

DEMOSTRACION:

Sean $Q_1, \dots, Q_n$ las partes principales de f en los puntos $a_1, \dots, a_n$, entonces $g = f - (Q_1 + \dots + Q_n) \in \mathbf{H}(\Omega)$, por lo que $\int_\gamma g(\xi)\, d\xi = 0 =$

$\int_\gamma f(\xi)\, d\xi - \sum_{i=1}^{n} \int_\gamma Q_i(\xi)\, d\xi.$

Finalmente se tiene que $\int_\gamma Q_i(\xi)\, d\xi = \sum_{n=-\infty}^{-1} \int_\gamma a_n^{(i)} (z - a_i)^n\, dz$, todas las integrales son cero excepto para n = – 1, por lo tanto $\int_\gamma Q_i(\xi)\, d\xi = 2\pi i\ \mathrm{Ind}_\gamma(a_i)\ a_{-1}^{(i)} =$ $2\pi i\ \mathrm{Ind}_\gamma(a_i)\ \mathrm{Res}\,(Q_i, a_i) = 2\pi i\ \mathrm{Ind}_\gamma(a_i)\ \mathrm{Res}\,(f, a_i)$. ♦

PROPOSICION 5.2.13:

Si f tiene un polo de orden m en a, entonces

$$\operatorname{Res}(f, a) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \big((z-a)^m f(z)\big).$$

DEMOSTRACION:

Se tiene que $f(z) = \dfrac{a_{-m}}{(z-a)^m} + \dots + \dfrac{a_{-1}}{z-a} + h(z)$, con h(z) holomorfa. Entonces $g(z) = (z-a)^m f(z) = a_{-m} + a_{-m+1}(z-a) + \dots + a_{-1}(z-a)^{m-1} + (z-a)^m h(z)$, con h(z) holomorfa. Por lo tanto $a_{-1} = \dfrac{g^{(m-1)}(a)}{(m-1)!} = \dfrac{1}{(m-1)!} \lim\limits_{z \to a} \dfrac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \big((z-a)^m f(z)\big)$.

♦

DEFINICION 5.2.14:

Si G es una región y f es una función definida sobre G la cual es holomorfa, excepto por polos, entonces G se llama meromorfa en G.

OBSERVACION 5.2.15:

Cuando decimos que un conjunto de polos (ó ceros) $z_1, \dots, z_n$, de una función f están contados de acuerdo con su multiplicidad, significa que si el polo p (ó cero p) es de orden m, entonces p aparece exactamente m veces en el conjunto $z_1, \dots, z_n$.

TEOREMA 5.2.16 (PRINCIPIO DEL ARGUMENTO):

Integral de Cauchy

Sea f una función meromorfa en una región G con polos $p_1, \ldots p_s$ y ceros en $a_1, \ldots, a_r$, contados con su multiplicidad. Sea γ una curva cerrada en G con $\gamma \sim 0$ que no pasa a través de ningún polo ni ningún cero. Entonces

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(\xi)}{f(\xi)}\,d\xi = \sum_{k=1}^{r} \mathrm{Ind}_\gamma\left(a_k\right) - \sum_{j=1}^{s} \mathrm{Ind}_\gamma\left(p_j\right).$$

DEMOSTRACION:

Sea z_0 un cero ó un polo de f. Podemos escribir $f(z) = \left(z - z_0\right)^m h(z)$, con $h\left(z_0\right) \neq 0$. Si $m > 0$, entonces z_0 es un cero de orden m, y si $m < 0$, entonces z_0 es un polo de orden $-m$. Ahora se tiene que $\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z - z_0} + \frac{h'(z)}{h(z)}$. Aplicando esto a todos los polos y a todos los ceros de f tendremos

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{z - a_k} - \sum_{j=1}^{s} \frac{1}{z - p_j} + \frac{g'(z)}{g(z)},$$

donde g(z) es diferente de cero para toda z. Aplicando el Teorema de Cauchy 5.1.6, se sigue el resultado.

♦

TEOREMA 5.2.17 (HURWITZ):

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ una región y supongamos que la sucesión $\left\{f_n\right\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbf{H}(\Omega)$ converge uniformemente por compactos a f. Supongamos que $f \not\equiv 0$, $\overline{B(a, R)} \subseteq \Omega$ y que $f(z) \neq 0$

para $|z - a| = R$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\ n \geq N$, f y f_n tienen el mismo número de ceros en B(a, R).

DEMOSTRACION:

Se tiene que $f'_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f'$ por compactos de Ω. Además, puesto que $f(z) \neq 0$ para $|z - a| = R$, existe n_0 tal que $\forall\ n \geq n_0$, $f_n(z) \neq 0$ para $|z - a| = R$. Esto implica que $\frac{f'_n}{f_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{f'}{f}$ uniformemente para $|z - a| = R$. Entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=R} \frac{f'_n(\xi)}{f_n(\xi)} d\xi =$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=R} \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} d\xi.$$

Ahora, estas integrales representan el número de ceros que f y f_n tienen en B(a, R), en particular son enteros, de lo que se sigue el resultado. ♦

COROLARIO 5.2.18:

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ una región y supongamos que la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbf{H}(\Omega)$ converge uniformemente por compactos a f. Si $f_n(z) \neq 0\ \forall\ z \in \Omega$ y $\forall\ n \in \mathbb{N}$, entonces ó $f \equiv 0$, ó $f(z) \neq 0\ \forall\ z \in \Omega$.

DEMOSTRACION:

Si $a \in \Omega$ es tal que $f(a) = 0$ pero $f \not\equiv 0$, entonces por el Teorema de Unicidad, existe $R > 0$ tal que $f(z) \neq 0$ para $|z - a| = R$. Entonces si para cualquier función g, N_g denota el número de ceros de g en B(a, R), se tiene que $0 = N_{f_n} = N_f \geq 1$ lo que es absurdo.

♦

TEOREMA 5.2.19 (TEOREMA DE ROUCHÉ):

Sean f y g dos funciones meromorfas en una región G. Sea $\overline{B(a, R)} \subseteq G$. Supongamos que ni f, ni g tienen zeros o polos sobre el círculo $\gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| = R\}$ y que $|f(z) - g(z)| < |g(z)|$ para toda z sobre γ. Entonces

$$C_f - P_f = C_g - P_g,$$

donde C_f, P_f (C_g, P_g) denotan el número de ceros y polos de f y g respectivamente, dentro de la curva γ.

DEMOSTRACION:

Se tiene que $\left|\frac{f(z)}{g(z)} - 1\right| < 1$ para z sobre γ. Esto es, la función meromorfa $\frac{f}{g}$ mapea $\{\gamma\}$ dentro de $B(1, 1)$. Ahora si Log es la rama principal de la función logaritmo, entonces $\log\left(\frac{f}{g}\right)$ es una primitiva de la función $\frac{\left(\frac{f}{g}\right)'}{\frac{f}{g}}$. Entonces:

$$0 = \int_\gamma \frac{\left(\frac{f}{g}\right)'}{\frac{f}{g}} = \int_\gamma \left[\frac{f'}{f} - \frac{g'}{g}\right] = (C_f - P_f) - (C_g - P_g).$$

♦

El Teorema de Rouché puede ser usado para otra demostración del Teorema Fundamental del Algebra. Sea $p(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$ un polinomio en $\mathbb{C}[z]$ no constante, entonces

$$\frac{p(z)}{z^n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{z} + \ldots + \frac{a_0}{z^n} \xrightarrow[z \to \infty]{} 1.$$

Por lo tanto para z suficientemente grande se tiene que $\left|\frac{p(z)}{z^n} - 1\right| < 1$ para $|z| = R$. Como z^n tiene n ceros dentro de la curva $|z| = R$, el Teorema de Rouché dice que p(z) debe tener n ceros dentro de $|z| = R$.

CAPITULO 6.

TRANSFORMACION CONFORME

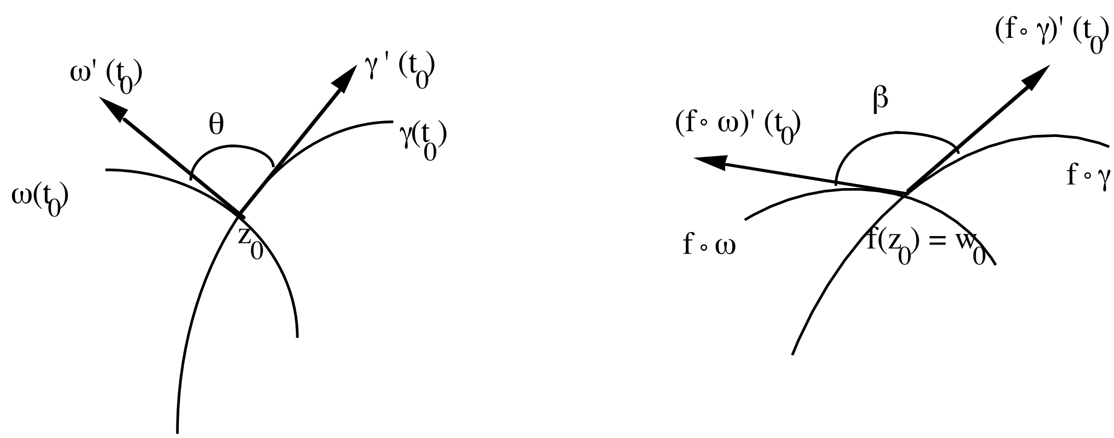
§ 1. Definición y Propiedades.

Consideremos $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ y sea $f \in \mathbf{H}(\Omega)$. Sea $z_0 \in \Omega$ y supongamos que f no es constante. Entonces, $f(z) = f\left(z_0\right) + \left(z - z_0\right)^m g(z)$ con $g \in \mathbf{H}(\Omega)$, $g\left(z_0\right) \neq 0$.

Sea $\gamma(t)$, $\omega(t)$ dos curvas diferenciables que se intersectan en z_0, es decir, $\gamma\left(t_0\right) = \omega\left(t_0\right) = z_0$.

Sea θ el ángulo en que se intersectan $\gamma(t)$ y $\omega(t)$ en z_0, es decir $\theta = \operatorname{Arg} \omega'\left(t_0\right) - \operatorname{Arg} \gamma'\left(t_0\right) \in (-\pi, \pi]$. Por lo tanto $\theta = \operatorname{Arg} \dfrac{\omega'\left(t_0\right)}{\gamma'\left(t_0\right)} = \lim\limits_{t \to t_0} \operatorname{Arg}\left(\dfrac{\omega(t) - \omega\left(t_0\right)}{\gamma(t) - \gamma\left(t_0\right)}\right) = \lim\limits_{t \to t_0} \operatorname{Arg}\left(\dfrac{\omega(t) - z_0}{\gamma(t) - z_0}\right)$.

Sea β el ángulo que forman $f \circ \gamma$ con $f \circ \omega$ en $w_0 = f\left(z_0\right)$. Entonces se tiene



$$\beta = \lim_{t\to t_0} \operatorname{Arg}\left(\frac{f\big(\omega(t)\big) - f\Big(\omega\big(t_0\big)\Big)}{f\big(\gamma(t)\big) - f\Big(\gamma\big(t_0\big)\Big)}\right) = \lim_{t\to t_0} \operatorname{Arg}\left(\frac{f \circ \omega(t) - f\big(z_0\big)}{f \circ \gamma(t) - f\big(z_0\big)}\right) =$$

$$= \lim_{t\to t_0} \operatorname{Arg}\left\{\left(\frac{\omega(t) - z_0}{\gamma(t) - z_0}\right)^m \bullet \frac{g\big(\omega(t)\big)}{g\big(\gamma(t)\big)}\right\},$$

por lo tanto $\boxed{\beta = m\ \theta}$

Lo anterior significa que se $f'\big(z_0\big) = \ldots = f^{(m-1)}\big(z_0\big) = 0$, $f^{(m)}\big(z_0\big) \neq 0$, entonces f transforma curvas que se cortan en un ángulo θ, en curvas que se cortan en un ángulo m θ. En particular, si $f'\big(z_0\big) \neq 0$, entonces este ángulo se preserva.

DEFINICION 6.1.1:

Una función $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ se llama conforme ó transformación conforme en $a \in \Omega$, si f preserva ángulos entre curvas diferenciables que se intersectan en a y si f es real diferenciable en a.

El desarrollo anterior prueba el siguiente

TEOREMA 6.1.2::

Si $f \in \mathbf{H}(\Omega)$ y si $f'(a) \neq 0$, entonces f es conforme en a. ♦

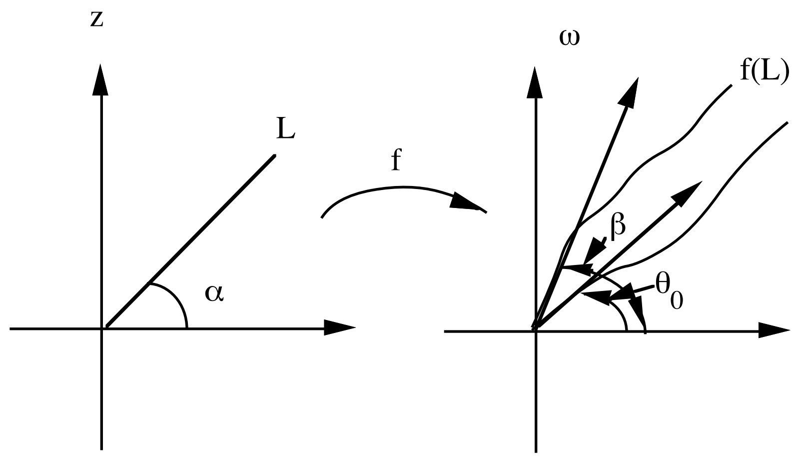
El recíproco del Teorema 6.1.2 es también cierto.

TEOREMA 6.1.3:

Si f es conforme en una región y su diferencial (real) es $\neq 0$ en Ω, entonces f es analítica en Ω (y $f'(a) \neq 0$ para a en Ω).

DEMOSTRACION:

Sea w = f(z). Se puede suponer a = 0, y f(0) = 0 (pues si f(a) = b, cambiamos f por g definida por g(z) = f(z + a) – b y g(0) = 0).



$\beta - \theta_0 = \alpha$

Sea θ_0 el ángulo que forma la imagen del eje real con el eje real del plano w. Ahora si L es la recta y = mx, m = tan α y β es ángulo de la tangente de f(L), se tiene que $\beta - \theta_0 = \alpha$, es decir $\beta - \alpha = \theta_0$ = constante, por lo tanto $\tan(\beta - \alpha) = \tan(\theta_0) = c$ = constante.

Sea f = u + i v, f(x, mx) = u(x, mx) + i v(x, mx), entonces se tiene

$$\tan(\beta) = \lim_{x\to 0} \frac{v(x,\ mx)}{u(x,\ mx)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{v(x,\ mx)}{x}}{\frac{u(x,\ mx)}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\partial v}{\partial x}(x,\ mx)}{\frac{\partial u}{\partial x}(x,\ mx)} = \frac{v_x + m\ v_y}{u_x + m\ u_y}(0,\ 0),$$

(si $u_x(0, 0) = 0$ ó $u_y(0, 0) = 0$, puesto que la diferencial es diferente de 0, $v_x(0, 0) \neq 0$ ó $v_y(0, 0) \neq 0$ por lo que podemos tomar cot β en lugar de tan β).

Ahora bien,

$$\tan\left(\beta-\alpha\right)=\frac{\tan\left(\beta\right)-\tan\left(\alpha\right)}{1+\tan\left(\alpha\right)\tan\left(\beta\right)}=\frac{\dfrac{v_x+m\,v_y}{u_x+m\,u_y}-m}{1+m\bullet\dfrac{v_x+m\,v_y}{u_x+m\,u_y}}=c\Rightarrow$$

$$v_x+m\,v_y-m\left(u_x+m\,u_y\right)=c\left(u_x+m\,u_y+m\,v_x+m^2\,v_y\right),\text{ o sea}$$

$$-m^2\,u_y+m\left(v_y-u_x\right)+v_x=c\,u_x+c\,m\left(u_y+v_x\right)+c\,m^2\,v_y.$$

Los coeficientes de las diversas potencias de m deben ser iguales por lo que obtenemos

$$-u_y=c\,v_y \qquad (1)$$

$$v_y-u_x=c\left(u_y+v_x\right) \qquad (2)$$

$$v_x=c\,u_x \qquad (3)$$

Sustituyendo (1) y (3) en (2) obtenemos

$$v_y-u_x=c\left(-c\,v_y+c\,u_x\right)=-c^2\left(v_y-u_x\right)\Rightarrow$$

$$\left(1+c^2\right)\left(v_y-u_x\right)=0\Rightarrow\boxed{v_y=u_x}\ \text{y}\ \boxed{u_y=-c\,v_y=-c\,u_x=-v_x}.$$

Estas son la ecuaciones de Cauchy-Riemann, lo cual prueba que f es analítica.

♦

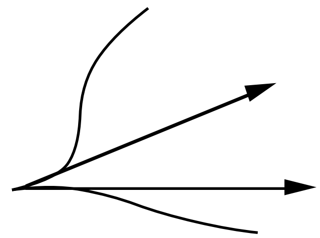
<u>OBSERVACION 6.1.4:</u>

Existen funciones que preservan ángulos y cuya diferencial real es 0, por lo que se sigue de 6.1.3 que estas funciones son complejo diferenciables en el punto pero no en una vecindad del punto.

<u>EJEMPLO 6.1.5:</u>

Sean $f(z)=|z|\,z$, $a=0$. Entonces $f(x,y)=\left(x\sqrt{x^2+y^2},\ y\sqrt{x^2+y^2}\right)=(u(x,y),\ v(x,y))$. Es fácil ver que $u_x(0,0)=u_y(0,0)=v_x(0,0)=v_y(0,0)=0$, por lo que $Df(0,0)=0$.

Sean γ, ω dos curvas diferenciables que se intersectan en a = 0. Entonces



$$\gamma(0) = \omega(0) = 0$$

$$\beta = \lim_{t\to 0} \operatorname{Arg}\left(\frac{f(\omega(t)) - f(\omega(0))}{f(\gamma(t)) - f(\gamma(0))}\right) = \lim_{t\to 0} \operatorname{Arg}\left(\frac{|\omega(t)|\,\omega(t) - 0}{|\gamma(t)|\,\gamma(t) - 0}\right) = \lim_{t\to 0} \operatorname{Arg}\left(\frac{\omega(t)}{\gamma(t)}\right),$$

por lo tanto f preserva ángulos en a = 0. Además f es complejo diferenciable en 0 con f'(0) = 0, pero f no puede ser holomorfa en 0. Analizando las ecuaciones de Cauchy-Riemann, es fácil verificar que f solo es complejo diferenciable en a = 0.

OBSERVACION 6.1.6:

Puesto que conforme implica $f'(a) \neq 0$, f es 1 - 1 en una vecindad de a. Por otro lado $|f(z) - f(a)| \approx |f'(a)|\,|z - a|$ para z cercano al punto a, es decir que f'(a) sirve como un factor de "amplicación" al tomar la transformación w = f(z).

§ 2. Transformadas de Möbius.

DEFINICION 6.2.1:

Una transformación de la forma $T(z) = \dfrac{a z + b}{c z + d}$ con $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ y $a d - b c \neq 0$, se llama transformación lineal ó transformación bilineal ó transformada de Möbius.

OBSERVACION 6.2.2:

Si $T(z) = \dfrac{a z + b}{c z + d}$ con $a d - b c = 0$, entonces si c = 0, se tiene $d \neq 0$ y por lo tanto

$a = 0$, es decir $T(z) = \frac{b}{d}$ = constante. Si $a = 0$, $c \neq 0$, entonces $b \neq 0$ y $d = 0$, por lo que $\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$, es decir $T(z) = \frac{a\,z + b}{c\,z + d} = \frac{a}{c}\frac{\left(z + \frac{b}{a}\right)}{\left(z + \frac{d}{c}\right)} = \frac{a}{c}$ = constante.

Es decir la condición $a\,d - b\,c = 0$ implica $T(z)$ = constante. Por otro lado veremos más adelante que la condición $a\,d - b\,c \neq 0$ implica que $T(z)$ es 1 - 1 en S^2, la esfera de Riemann.

PROPOSICION 6.2.3:

Una transformada de Möbius es conforme.

DEMOSTRACION:

Se tiene $T'(z) = \frac{a\,(c\,z + d) - (a\,z + b)\,c}{(c\,z + d)^2} = \frac{a\,d - b\,c}{(c\,z + d)^2} \neq 0$, por lo que T es conforme. ♦

Si $w = \frac{a\,z + b}{c\,z + d} \Rightarrow z = \frac{d\,w - b}{-\,c\,w + a}$, es decir T es 1 - 1 en todo $\mathbb{C} - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ y además $T^{-1}(z) = \frac{d\,w - b}{-\,c\,w + a}$.

OBSERVACION 6.2.4:

Si $T(z) = \frac{a\,z + b}{c\,z + d} = \frac{a\,\lambda\,z + \lambda\,b}{c\,\lambda\,z + \lambda\,d}$ para $\lambda \neq 0$, es decir, la cantidad $a\,d - b\,c$ no es importante, lo importante es que $a\,d - b\,c \neq 0$.

Ahora bien si $T(z) = \frac{a\,z + b}{c\,z + d}$, podemos pensar que $T(z)$ tiene representación matricial: $T \sim \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A$, entonces $T^{-1} \sim \begin{pmatrix} d & -\,b \\ -\,c & a \end{pmatrix} \sim \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -\,b \\ -\,c & a \end{pmatrix} = A^{-1}$.

En $z = -\frac{d}{c}$, $T\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$ y $T(\infty) = \frac{a}{c}$, por lo tanto consideraremos $T : S^2 \longrightarrow S^2$, T es biyectiva con inversa del mismo tipo y dada como en 6.2.3.

DEFINICION 6.2.5:

Una transformada de Möbius se llama

(1) Translación si T es del tipo $T(z) = z + b$;
(2) Dilatación si T es del tipo $T(z) = a\,z$;
(3) Inversión si $T(z) = \frac{1}{z}$;
(4) Rotación si T es del tipo $T(z) = a\,z$ con $|a| = 1$, es decir, $T(z) = e^{i\alpha} z$;
(5) Homotecia si T es del tipo $T(z) = r\,z$, $r > 0$.

Notemos que si $T(z) = a\,z$ es una dilatación, $T(z) = |a| \frac{a}{|a|} z$, es decir T es la composición de una rotación y una homotecia.

PROPOSICION 6.2.6:

Cualquier transformada de Möbius es composición de translaciones, dilataciones e inversiones ó equivalentemente de translaciones, inversiones, homotecias y rotaciones.

DEMOSTRACION:

Si $c = 0$, $T(z) = \left(\frac{a}{d}\right) z + \left(\frac{b}{d}\right)$, por lo tanto $T(z) = \left(T_1 \circ T_2\right)(z)$ con $T_2(z) = \left(\frac{a}{d}\right) z$, $T_1(z) = z + \frac{b}{d}$.

Ahora si $c \neq 0$, $T(z) = \dfrac{a\,z + b}{c\,z + d} = \dfrac{1}{c}\left(\dfrac{a\,z + b}{z + \frac{d}{c}}\right) = \dfrac{a}{c}\left(\dfrac{z + \frac{d}{c} - \frac{d}{c} + \frac{b}{a}}{z + \frac{d}{c}}\right) =$

$= \dfrac{a}{c}\left(1 + \dfrac{\frac{bc - da}{ca}}{z + \frac{d}{c}}\right) = \dfrac{a}{c} + \dfrac{\frac{bc - ad}{c^2}}{z + \frac{d}{c}}$, entonces $T = T_4 \circ T_3 \circ T_2 \circ T_1$ donde $T_1(z) = z + \frac{d}{c}$;

$T_2(z) = \frac{1}{z}$; $T_3(z) = \dfrac{bc - ad}{c^2}\, z$; $T_4(z) = z + \frac{a}{c}$. ♦

PROPOSICION 6.2.7:

Sea T una transformación de Möbius. Entonces T está completamente determinada por 3 puntos en S^2, es decir dados cualesquiera 2 conjuntos de puntos ordenados $\{z_1, z_2, z_3\}$ y $\{w_1, w_2, w_3\}$, entonces existe a lo más una transformada de Möbius tal que $T(z_i) = w_i$, $i = 1, 2, 3$.

DEMOSTRACION:

Sea $T(z) = \dfrac{a\,z + b}{c\,z + d}$ de Möbius. Se tiene que $T(z) = z \Leftrightarrow a\,z + b = c\,z^2 + d\,z$, ecuación que tiene a lo más dos soluciones a menos que $c = b = 0$, $a = d$, es decir, si una transformada de Möbius fija 3 ó más puntos entonces $T(z) = z$.

Sean S, T dos transformadas de Möbius tales que $S(z_i) = T(z_i) = w_i$ para $i = 1, 2, 3$. Entonces $S^{-1} \circ T$ fija 3 puntos, es decir $S^{-1} \circ T = Id$, por lo tanto $S = T$. ♦

La proposición anterior prueba la unicidad de una transformada de Möbius que manda tres puntos dados en otros tres puntos dados. Ahora nos proponemos demostrar su existencia.

Primero consideremos cualesquiera tres puntos distintos z_2, z_3, z_4. Veremos que existe una transformada de Möbius tal que $T(z_2) = 1$, $T(z_3) = 0$, $T(z_4) = \infty$.

Si $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, T está dada por $T(z) = \dfrac{\left(\dfrac{z - z_3}{z - z_4}\right)}{\left(\dfrac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}\right)}$;

si $z_2 = \infty$, entonces $T(z) = \dfrac{z - z_3}{z - z_4}$;

si $z_3 = \infty$, entonces $T(z) = \dfrac{z_2 - z_4}{z - z_4}$;

si $z_4 = \infty$, entonces $T(z) = \dfrac{z - z_3}{z_2 - z_3}$.

<u>DEFINICION 6.2.8:</u>

La transformada de Möbius tal que $T(z_2) = 1$, $T(z_3) = 0$, $T(z_4) = \infty$ se denota por <u>(z, z_2, z_3, z_4)</u> y si $z_1 \in S^2$, $T(z_1) = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ se llama el <u>radio cruzado</u> de z_1, z_2, z_3, z_4.

<u>EJEMPLOS 6.2.9:</u>

(1) $(z_2, z_2, z_3, z_4) = 1$; $(z_3, z_2, z_3, z_4) = 0$; $(z_4, z_2, z_3, z_4) = \infty$.

(2) $(z, 1, 0, \infty) = z = \mathrm{Id}(z)$.

<u>PROPOSICION 6.2.10:</u>

Si T es una transformada de Möbius, entonces

$$(z, z_2, z_3, z_4) = (T(z), T(z_2), T(z_3), T(z_4)).$$

<u>DEMOSTRACION:</u>

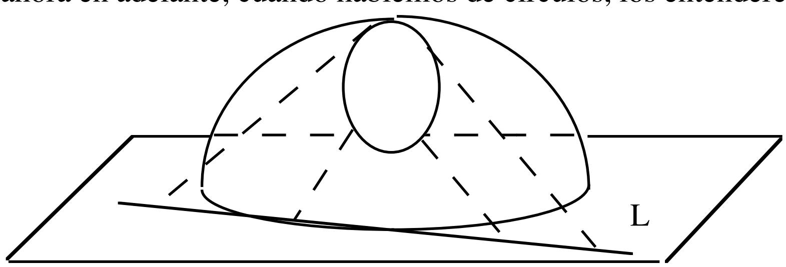
Sean $S(z) = (z, z_2, z_3, z_4)$ y $M = S\,T^{-1}$, entonces $M(T(z_2)) = S(z_2) = 1$, $M(T(z_3)) = S(z_3) = 0$ y $M(T(z_4)) = S(z_4) = \infty$, por lo que $M = (z, T(z_2), T(z_3), T(z_4)) \Rightarrow S(z) = M(T(z)) = (T(z), T(z_2), T(z_3), T(z_4))$.

♦

Ahora nuestro próximo objetivo es probar que una transformada de Möbius manda rectas y círculos en rectas y círculos. Para esto hacemos la siguiente

OBSERVACION 6.2.11:

Si L es una recta en $\mathbb{C}$, $L \cup \{\infty\}$ es un círculo en S^2 que pasa por el polo norte N, por lo tanto hablar de rectas y círculos en $\mathbb{C}$ es lo mismo que hablar de círculos en S^2. De ahora en adelante, cuando hablemos de círculos, los entenderemos en S^2.



Para probar que una transformada de Möbius manda círculos en círculos, basta probar que rotaciones, homotecias, translaciones y la inversión lo hacen. Verificar que las 3 primeras lo hacen es inmediato, y la última se puede verificar directamente. Sin embargo aquí presentamos otra demostración de este hecho.

PROPOSICION 6.2.12:

Sean $z_1, z_2, z_3, z_4 \in S^2$ cuatro puntos distintos. Entonces $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ los 4 puntos están en un círculo.

DEMOSTRACION:

Sea $T(z) = \left(z, z_2, z_3, z_4\right)$, $T^{-1}\left(\mathbb{R} \cup \{\infty\}\right) = \left\{z \in \mathbb{C} \mid T(z) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}\right\}$.
Por probar que $T\left(\mathbb{R} \cup \{\infty\}\right)$ es un círculo en S^2.

Sea $T(z) = \dfrac{a\,z + b}{c\,z + d}$, si $z = x \in \mathbb{R}$, $w = T^{-1}(x)$, $x = T(w)$. Entonces $T(w) = \overline{T(w)}$, es decir $\dfrac{a\,w + b}{c\,w + d} = \dfrac{\bar{a}\,\bar{w} + \bar{b}}{\bar{c}\,\bar{w} + \bar{d}}$ por lo tanto tenemos

$$(*)\left(a\bar{c} - \bar{a}c\right)|w|^2 + \left(a\bar{d} - \bar{b}c\right)w + \left(b\bar{c} - d\bar{a}\right)\bar{w} + \left(b\bar{d} - \bar{b}d\right) = 0$$

Si $a\bar{c} \in \mathbb{R}$, $a\bar{c} - \bar{a}c = 0$, por lo que de (*) obtenemos

$$(**) \qquad \left(a\bar{d} - \bar{b}c\right)w - \overline{\left(a\bar{d} - \bar{b}c\right)w} + \left(b\bar{d} - \overline{b\bar{d}}\right) = 0,$$

o sea $2\,i\left(\operatorname{Im}\left(\beta\,w + \alpha\right)\right) = 0$, donde $\beta = \left(a\bar{d} - \bar{b}c\right)$ y $\alpha = b\bar{d}$.

Por lo tanto $T\left(\mathbb{R} \cup \{\infty\}\right) = \left\{w \in \mathbb{C} \mid \beta\,w + \alpha = \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}\right\} = \left\{w \in \mathbb{C} \mid w = \dfrac{\lambda - \alpha}{\beta},\ \lambda \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}\right\}$ la cual es una recta $\cup\ \{\infty\}$, es decir un círculo en S^2.

Ahora si Si $a\bar{c} \notin \mathbb{R}$, (*) se puede reescribir como

$$(***) \qquad |w|^2 + 2\operatorname{Re}\left(\gamma\,w\right) - \delta = 0$$

donde $\gamma \in \mathbb{C}$, $\delta \in \mathbb{R}$, $\gamma = \dfrac{a\bar{d} - \bar{b}c}{a\bar{c} - \bar{a}c}$, $\quad \delta = -\dfrac{b\bar{d} - \bar{b}d}{a\bar{c} - \bar{a}c}$.

De (***), obtenemos $|w + \gamma|^2 = |w|^2 + |\gamma|^2 + 2\operatorname{Re}\left(\gamma\,w\right) = |\gamma|^2 + \delta = \left|\dfrac{ad - bc}{a\bar{c} - \bar{a}c}\right|^2 > 0$, por lo tanto $T\left(\mathbb{R} \cup \{\infty\}\right) = \left\{w \in \mathbb{C} \mid |w + \gamma| = r = \left|\dfrac{ad - bc}{a\bar{c} - \bar{a}c}\right| > 0\right\}$ el cual es un círculo. ♦

TEOREMA 6.2.13:

Una transformada de Möbius transforma círculos de S^2, en círculos de S^2.

DEMOSTRACION:

Sea Γ un círculo en S^2 y sea T una transformada de Möbius. Sean z_2, z_3, $z_4 \in \Gamma$ y sean $T(z_i) = w_i$, i = 2, 3, 4. Entonces w_2, w_3, w_4 determinan un único círculo Γ' en S^2. Para $z \in S^2$, $(z, z_2, z_3, z_4) = (T(z), w_2, w_3, w_4)$ por la Proposición 6.2.10. Entonces por la Proposición 6.2.12, $z \in \Gamma \Leftrightarrow (z, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (T(z), w_2, w_3, w_4) \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow T(z) \in \Gamma'$.

Por lo tanto $T(\Gamma) = \Gamma'$. ♦

COROLARIO 6.2.14:

Dados cualesquiera dos círculos $\Gamma, \Gamma' \in S^2$, existe transformadas de Möbius que mandan Γ en Γ'. Además si escogemos puntos distintos z_2, z_3, $z_4 \in \Gamma$ y w_2, w_3, $w_4 \in \Gamma'$, existe una única transformada de Möbius tal que $T(z_i) = w_i$, i = 2, 3, 4 la cual tiene además la propiedad de que $T(\Gamma) = \Gamma'$.

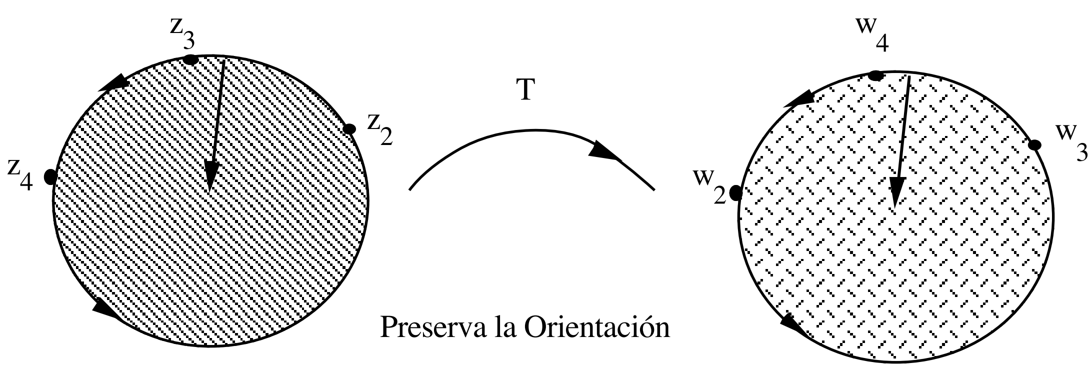
DEMOSTRACION:

Ejercicio. ♦

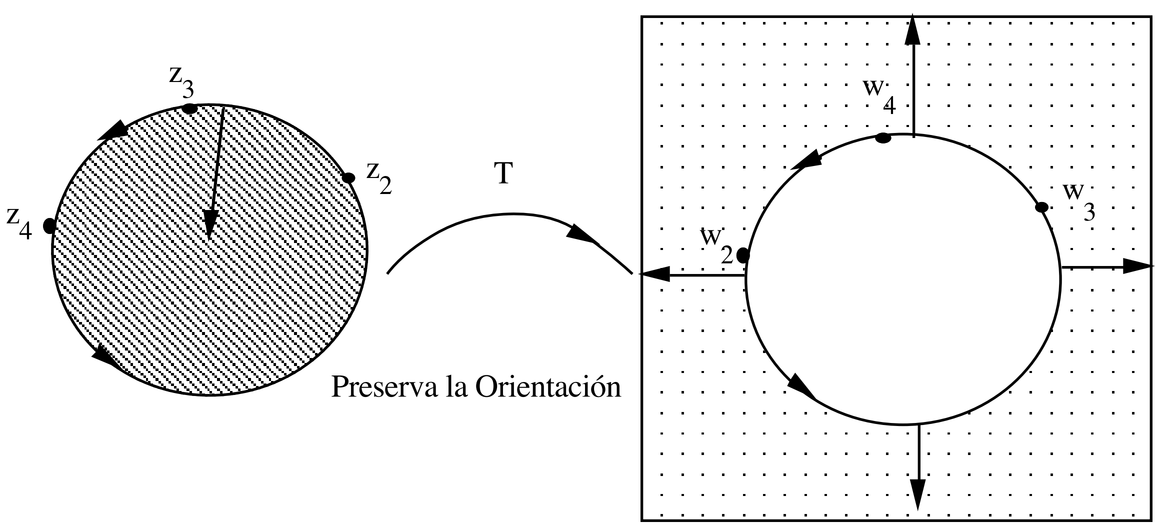
Ahora bien, hemos probado que las transformadas de Möbius mandan círculos en círculos, pero ahora la pregunta es: Si T manda Γ en Γ', ¿el interior de Γ va en en interior ó en el exterior de Γ'?

La respuesta a esta pregunta es la siguiente:

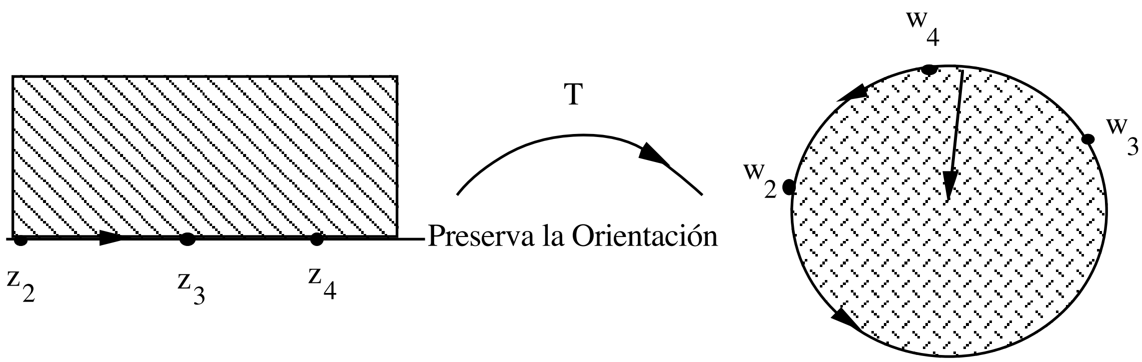
Sean z_2, z_3, $z_4 \in \Gamma$ y w_2, w_3, $w_4 \in \Gamma'$ orientados. Entonces T preserva la orientación, es decir si cuando recorremos de z_2 a z_3 y de z_3 a z_4, entonces lo que queda a la "izquierda" de este recorrido será mandado a la "izquierda" del recorrido de w_2 a w_3 y de w_3 a w_4. Lo mismo es cierto para la "derecha" del recorrido.



Preserva la Orientación



Preserva la Orientación



Lo que haremos a continuación es probar las afirmaciones anteriores.

DEFINICION 6.2.15:

Si Γ es un círculo en S^2, entonces una orientación de Γ es una tripleta ordenada de puntos (z_1, z_2, z_3) en Γ.

Ahora bien, si $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ es una transformada de Möbius tal que $T(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, entonces puesto que $T(0)$, $T(1)$ y $T(\infty) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, se tiene que se pueden escoger $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Entonces

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{az+b}{|cz+d|^2}\left(c\bar{z}+d\right) =$$

$$\frac{1}{|cz+d|^2}\left\{ac|z|^2 + bd + \left(adz + cd\bar{z}\right)\right\}$$

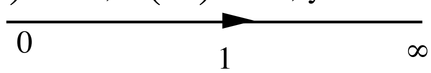
Por lo tanto $\operatorname{Im}(T(z)) = \dfrac{ad-bc}{|cz+d|^2}\operatorname{Im} z$.

DEFINICION 6.2.16:

Se definen

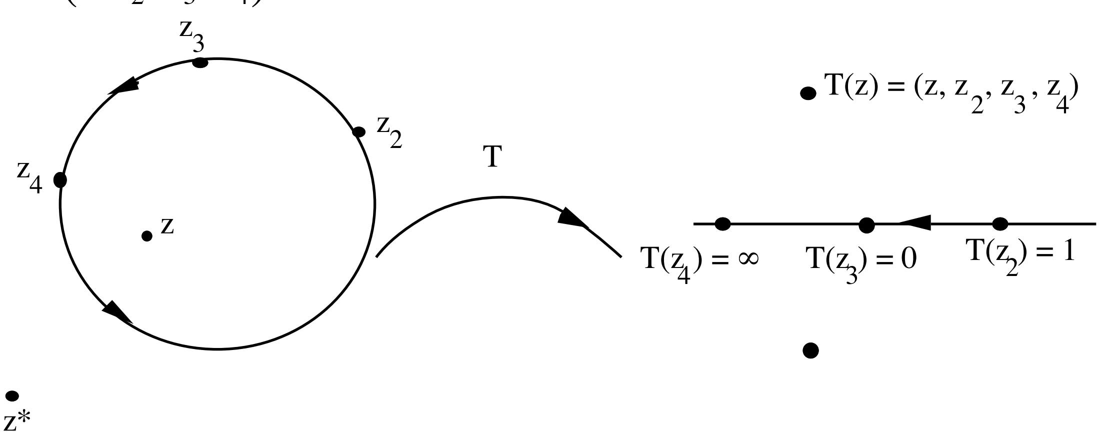
$H^+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\ z > 0\}$ = <u>Semiplano superior</u> y
$H^- = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\ z < 0\}$ = <u>Semiplano inferior</u>.

Si T es como antes, es decir $T(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, entonces si ad – bc > 0 se tiene que $T(H^+) = H^+$; $T(H^-) = H^-$, y si ad – bc < 0 entonces $T(H^+) = H^-$; $T(H^-) = H^+$.



Lo anterior significa que si ad – bc > 0, entonces tres puntos en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ recorridos de "izquierda" a "derecha" nos dan imágenes en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ que también se recorren de "izquierda" a "derecha", y si ad – bc < 0 entonces tres puntos en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ recorridos de "izquierda" a "derecha" nos dan imágenes en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ que se recorren de "derecha" a "izquierda", es decir T preserva la orientación. Esto se puede probar directamente considerando todos los casos posibles para a, b, c y d.

Ahora, con respecto a $\mathbb{R}$, los puntos z y $\overline{z}$ son simétricos, por lo que para definir el concepto de simetría con respecto a una transformada lineal arbitraria T, consideremos $T(z) = (z, z_2, z_3, z_4)$.



<u>DEFINICION 6.2.17:</u>

Sea Γ el círculo en S^2 a través de los puntos z_2, z_3, z_4. Los puntos $z, z^* \in S^2$ se llaman <u>simétricos</u> con respecto a Γ si $(z^*, z_2, z_3, z_4) = \overline{(z, z_2, z_3, z_4)}$.

OBSERVACION 6.2.18:

En la definición 6.2.18, aparentemente la noción de simetría con respecto a Γ no depende únicamente de Γ sino también de los puntos z_2, z_3, z_4, sin embargo la siguiente Proposición muestra que esto no es así.

PROPOSICION 6.2.19:

La noción de simetría depende únicamente de Γ.

DEMOSTRACION:

Sea Γ determinado por $\{z_2, z_3, z_4\}$ y también por $\{w_2, w_3, w_4\}$. Se quiere probar que $(z^*, z_2, z_3, z_4) = \overline{(z, z_2, z_3, z_4)} \Leftrightarrow (z^*, w_2, w_3, w_4) = \overline{(z, w_2, w_3, w_4)}$.

Sean $T(z) = (z, z_2, z_3, z_4)$, $S(z) = (z, w_2, w_3, w_4)$. Entonces $T \circ S^{-1}(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, por lo que podemos escoger $M(z) = T \circ S^{-1}(z) = \dfrac{a\,z + b}{c\,z + d}$, con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Por probar: $T(z^*) = \overline{T(z)} \Leftrightarrow S(z^*) = \overline{S(z)}$. Ahora bien tendremos

$$T(z^*) = \left(T \circ S^{-1} \circ S\right)(z^*) = M(S(z^*)) = \overline{T(z)} = \overline{M(S(z))} = M(\overline{S(z)}) \Leftrightarrow S(z^*) = \overline{S(z)}.$$

♦

Veamos cual es el significado geométrico de que z y z^* sean simétricos con respecto a un círculo. Si Γ es una línea, escojamos $z_4 = \infty$. Entonces $T(z) = (z, z_2, z_3, z_4) = \dfrac{z - z_3}{z_2 - z_3}$, por lo tanto $T(z^*) = \dfrac{z^* - z_3}{z_2 - z_3} = \overline{\left(\dfrac{z - z_3}{z_2 - z_3}\right)} = \dfrac{\overline{z} - \overline{z_3}}{\overline{z_2} - \overline{z_3}} = \overline{T(z)} \Rightarrow |z^* - z_3| = |\overline{z} - \overline{z_3}| = |z - z_3|$. También se tiene que $\mathrm{Im}\left(\dfrac{z^* - z_3}{z_2 - z_3}\right) = \mathrm{Im}\left(\overline{\left(\dfrac{z - z_3}{z_2 - z_3}\right)}\right)$

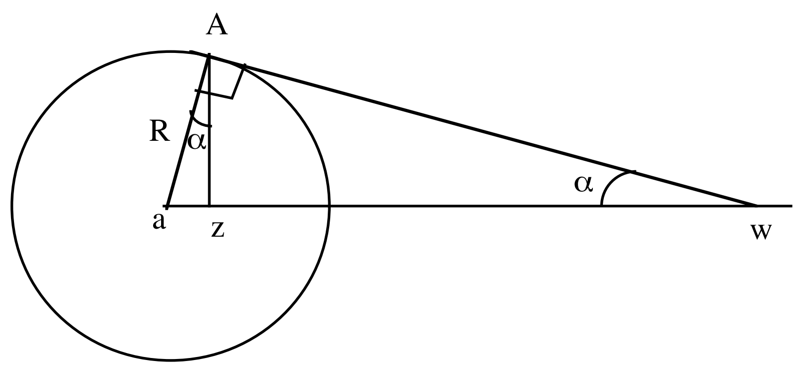
$= -\operatorname{Im}\left(\dfrac{z - z_3}{z_2 - z_3}\right)$, es decir que z y z* pertenecen a diferentes hiperplanos de Γ. Finalmente se tiene que $[z, z^*]$ es perpendicular a Γ pues T es conforme.

Ahora si $\Gamma = \left\{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| = R\right\}$, aplicando repetidamente la Proposición 6.2.10 se tiene para $z_2, z_3, z_4 \in \Gamma$:

$$\begin{aligned}
&(z^*, z_2, z_3, z_4) = \overline{(z, z_2, z_3, z_4)} = && (T(z) = z - a)\\
&\overline{(z - a, z_2 - a, z_3 - a, z_4 - a)} = && \\
&\left(\overline{z} - \overline{a}, \frac{R^2}{z_2 - a}, \frac{R^2}{z_3 - a}, \frac{R^2}{z_4 - a}\right) = && \left(T(z) = \frac{R^2}{z}\right)\\
&\left(\frac{R^2}{\overline{z} - \overline{a}}, z_2 - a, z_3 - a, z_4 - a\right) = && (T(z) = z + a)\\
&\left(\frac{R^2}{\overline{z} - \overline{a}} + a, z_2, z_3, z_4\right), &&
\end{aligned}$$

es decir $z^* = \dfrac{R^2}{\overline{z} - \overline{a}} + a$, ó $(z^* - a)\left(\overline{z - a}\right) = R^2$ (si z = a, entonces z* = ∞).

Entonces $\dfrac{z^* - a}{z - a} = \dfrac{R^2}{|z - a|^2} > 0$, es decir $z^* = t(z - a) + a$, $t = \dfrac{R^2}{|z - a|^2} > 0$.



De la figura, los triángulos (A, a, z), (w, a, A) son semejantes por lo que $\dfrac{|z - a|}{R} = \dfrac{R}{|w - a|} \Rightarrow |w - a||z - a| = R^2$, lo que implica que w = z*.

TEOREMA 6.2.20 (PRINCIPIO DE SIMETRIA):

Si T es una transformada de Möbius tal que $T\left(\Gamma_1\right) = \Gamma_2$, Γ_1 y Γ_2 círculos de S^2, entonces si z y z* son simétricos con respecto a Γ_1, T(z) y T(z*) son simétricos con respecto a Γ_2.

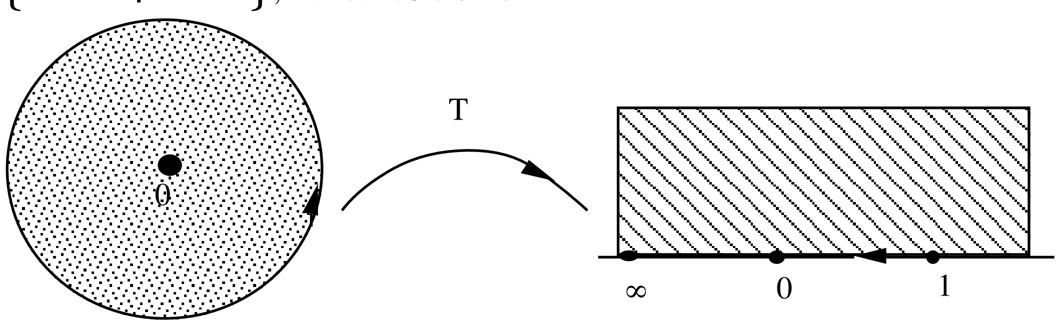
DEMOSTRACION:

Si z_2, z_3, z_4 determinan Γ_1, $T(z_2)$, $T(z_3)$, $T(z_4)$ determinan Γ_2. Aplicando 6.2.10 tenemos

$$\left(T(z^*),\ T(z_2),\ T(z_3),\ T(z_4)\right) = \left(z^*,\ z_2,\ z_3,\ z_4\right) = \overline{\left(z,\ z_2,\ z_3,\ z_4\right)} = \overline{\left(T(z),\ T(z_2),\ T(z_3),\ T(z_4)\right)}.$$ ♦

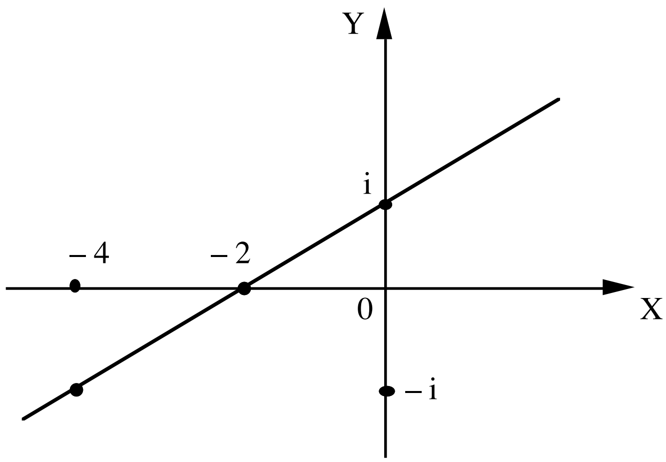
EJEMPLOS 6.2.21:

(1) Hallemos una transformación de Möbius tal que T\(U) = H^+, donde U = $\left\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\right\}$, mandando 0 en i.

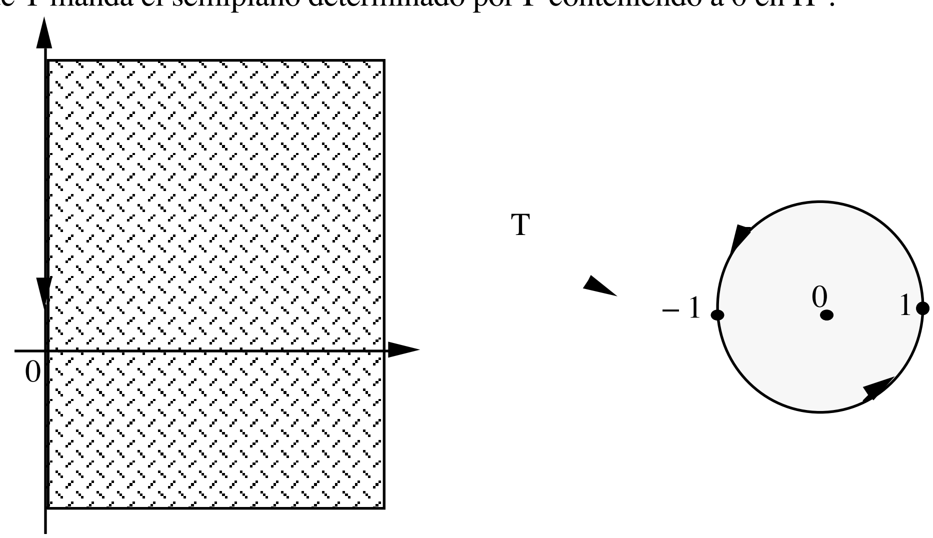


El conjugado de 0 con respecto a U es ∞, por lo que T(∞) = – i. Hagamos T(1) = 1. Entonces T(0) = i; T(∞) = – i; T(1) = 1. Pongamos $T(z) = \dfrac{a\,z + b}{c\,z + d}$, por lo que $T(\infty) = \dfrac{a}{c} = -i$, $T(0) = \dfrac{b}{d} = i$, es decir a = – i c, b = i d, así que $T(z) = \dfrac{-i\,c\,z + i\,d}{c\,z + d} = -i\dfrac{c\,z - d}{c\,z + d}$. Además $T(1) = -i\dfrac{c - d}{c + d} = 1 \Rightarrow c - d = i\,(c + d)$. Si ponemos c = 1, entonces $d = \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{2} = \frac{1+i^2-2i}{2} = -i$, por lo tanto $\boxed{T(z) = -i\,\frac{z+i}{z-i} = \frac{-iz+1}{z-i}}$.

(2) Analicemos que hace la transformación $T(z) = \frac{z-i}{2z+4}$. Se tiene que $T(i) = 0$; $T(-2) = \infty$ y $T(z) = 1 \Leftrightarrow z - i = 2z + 4 \Leftrightarrow z = -4 - i$. Entonces $T(z) = (z, -4-i, i, -2)$. T manda el círculo Γ determinado por $-4-i, i, -2$ (que de hecho es una recta en $\mathbb{C}$) en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.



Ahora bien $T(0) = -\frac{i}{4}$, por lo que T manda el semiplano determinado por Γ conteniendo a 0 en H^-.



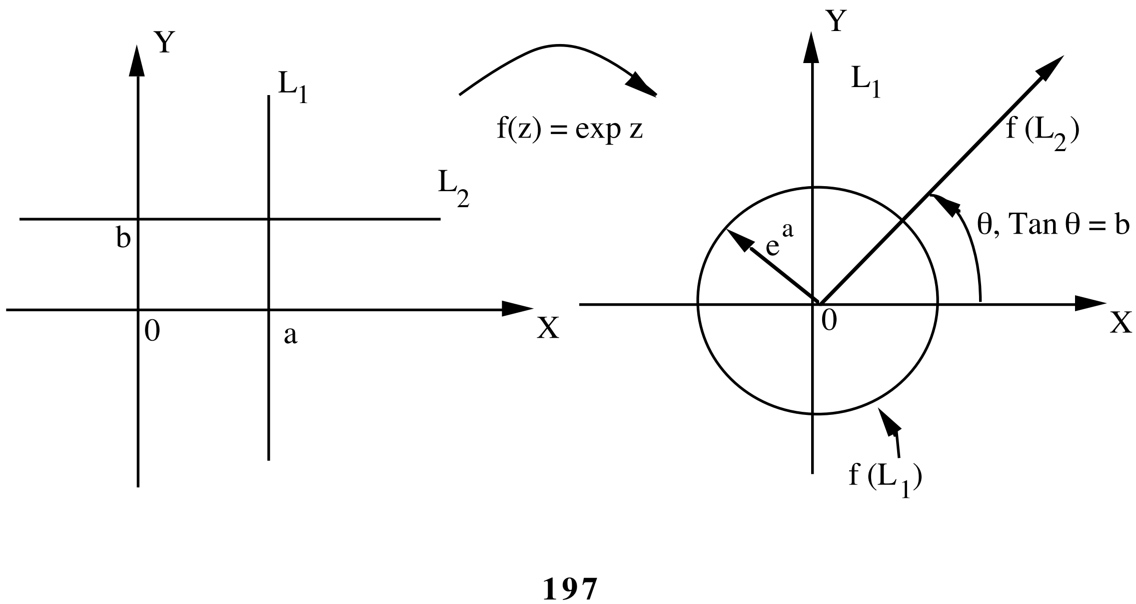
(3) Hallemos una transformación lineal T tal que $T\left(\left\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\right\}\right) = U$, con $T(1) = 0$. 1 y – 1 son simétricos con respecto al eje imaginario así como 0 y ∞ lo son con respecto a U, por lo tanto $T(-1) = \infty$. Entonces tendremos $T(z) = \alpha\frac{z-1}{z+1}$. Si ponemos $T(0) = -1$, obtendremos $\alpha = 1$, por lo que $\boxed{T(z) = \frac{z-1}{z+1}}$.

§ 3. Funciones Elementales como Transformaciones Conformes.

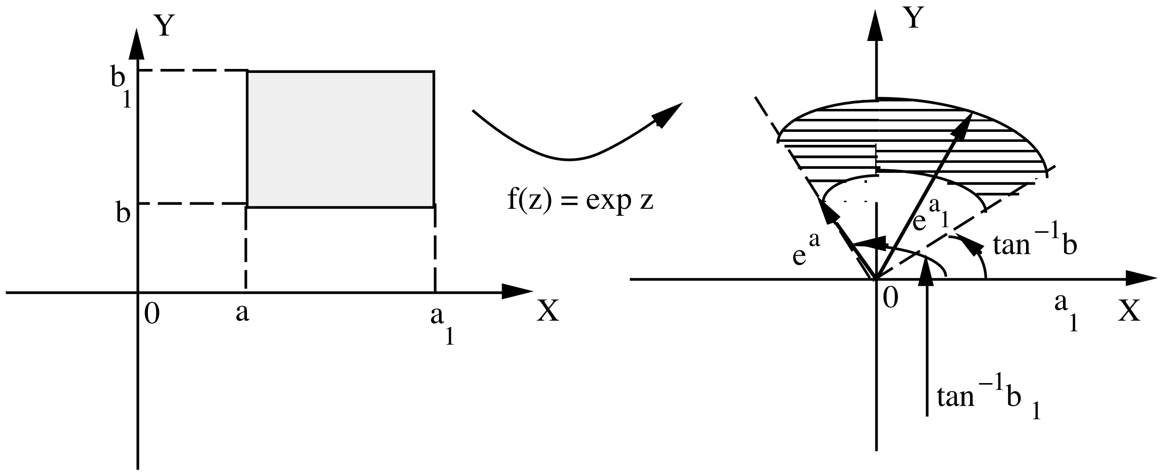
El propósito de esta sección es estudiar las transformaciones elementales (polinómicas, racionales, trigonométricas, trigonométricas inversas, logarítmicas y exponenciales) como transformaciones conformes.

§3.1. Función Exponencial.

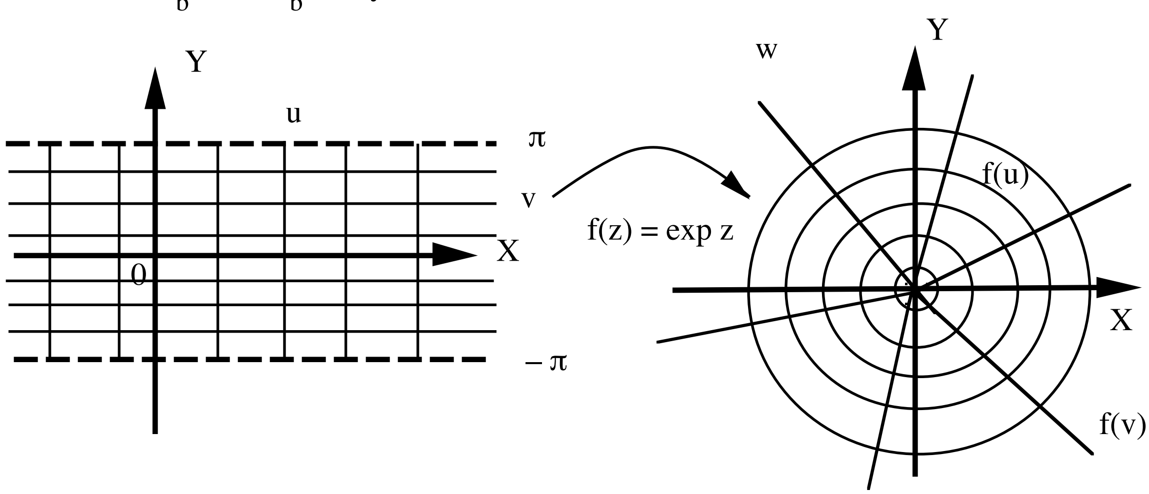
Empecemos con $w = f(z) = e^z = \exp z$. Si $z = x + iy$, entonces $e^z = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$, $|e^z| = e^x$, $\arg\left(e^z\right) = y = \operatorname{Im} z$. Por lo tanto e^z manda la línea $\left\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = a\right\}$ en el círculo $\left\{w \in \mathbb{C} \mid |w| = e^a\right\}$ y la línea $\left\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z = b\right\}$ en el rayo $\left\{w \in \mathbb{C} \mid \arg w = b\right\}$.



De aquí se sigue que exp z manda el cuadrado $[a, a_1] \times [b, b_1]$ en la región $\left\{w \in \mathbb{C} \mid e^a < |w| < e^{a_1};\ \tan^{-1} b < \arg w < \tan^{-1} b_1\right\}$.

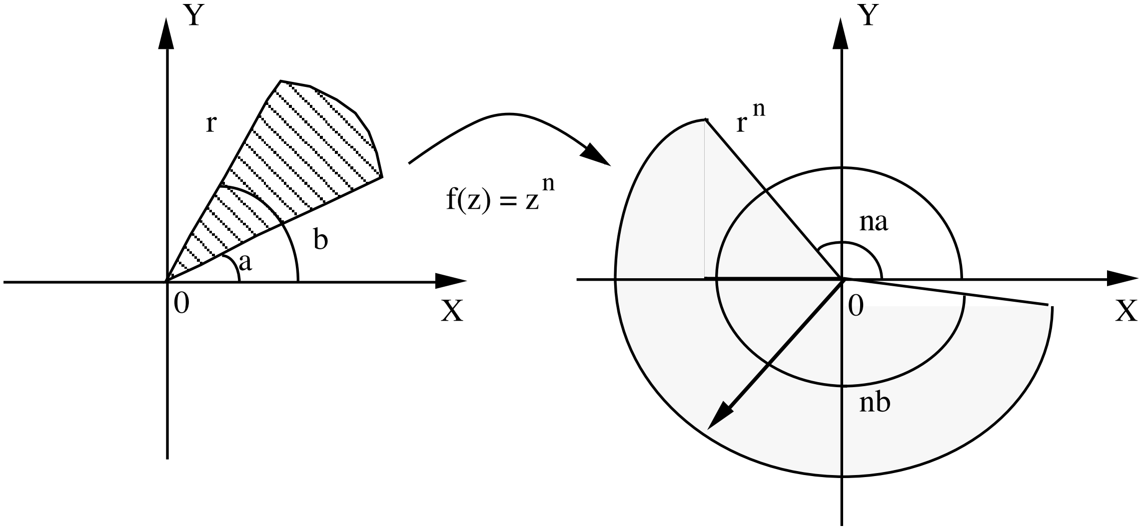


Por otro lado, con lo visto en el Capítulo 3, se tiene que $f(W_b) = U_b$, donde $W_b = \{z \in \mathbb{C} \mid b < \operatorname{Im} z < 2\pi + b\}$ y $U_b = \mathbb{C} - (\{w \in \mathbb{C} \mid \arg z = b\} \cup \{0\})$. Además $f : W_b \longrightarrow U_b$ es biyectiva.

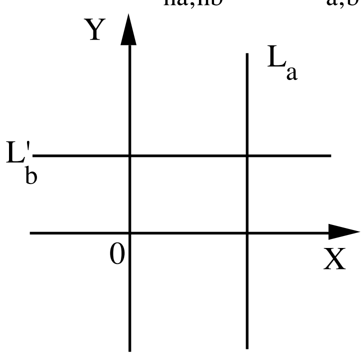


§3.2. Función Potencia:

Ahora consideremos $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}$. Se tiene que $f'(z) = 0 \Leftrightarrow z = 0$, por lo que f es conforme en $\mathbb{C} - \{0\}$. Por otro lado tenemos $f(re^{i\theta}) = r^n e^{in\theta}$ por lo que f transforma el sector $U^{r}_{a,b} = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; 0 < |z| < r,\ a < \arg z < b \right\}$ en $\left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; 0 < |z| < r^{n},\ n\,a < \arg z < n\,b \right\} = U^{r^{n}}_{na,nb} = \text{"}n\ U^{r}_{a,b}\text{"}$ y el rayo $\left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \arg z = \theta \right\}$ en el rayo $\left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \arg z = n\,\theta \right\}$. Así mismo transforma U $= \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z| < 1 \right\}$ en el mismo U solo que la función es n a 1 ahí (excepto en 0).



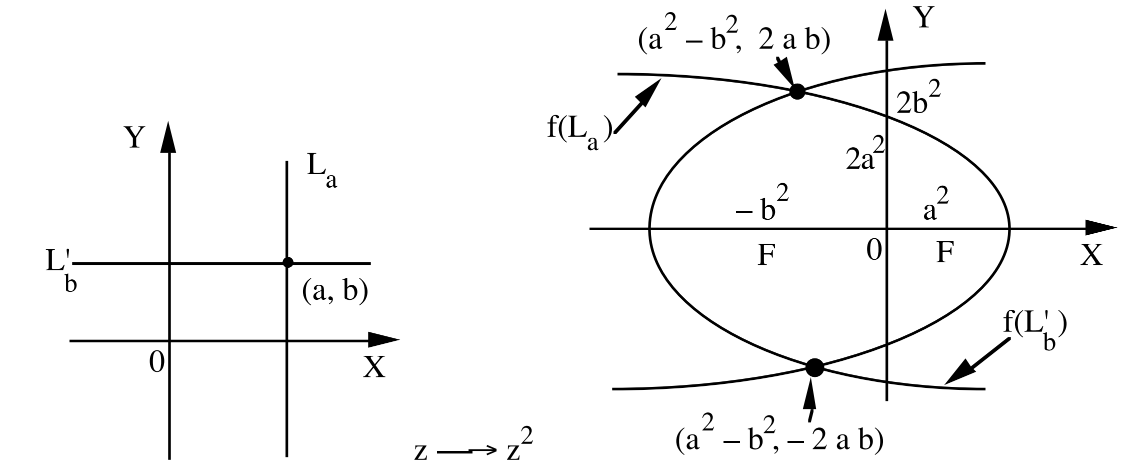
Si a y b son tales que $n\,(b - a) \le 2\,\pi$, entonces $f : U^{r}_{a,b} \longrightarrow U^{r^{n}}_{na,nb}$ es 1 - 1 con inversa $g : U^{r^{n}}_{na,nb} \longrightarrow U^{r}_{a,b}$. g se llama la raíz n-ésima y se denota $g(z) = \sqrt[n]{z}$.



Sean L_a la recta x = a = constante y L'_b la recta y = b = constante, se tiene que si $f(z) = z^2$, $f\left(L_a\right) = f\left(\left\{ a + i\,y \mid y \in \mathbb{R} \right\} \right) = \left\{ a^2 - y^2 + 2\,a\,i\,y \;\middle|\; y \in \mathbb{R} \right\} = P_a$, donde P_a es la parábola:

$$\begin{cases} \mathbb{R} & \text{si} \quad a = 0 \\ y^2 = -4\,a^2\left(x - a^2\right) & \text{si} \quad a \neq 0 \end{cases}$$. Similarmente obtenemos que $f\left(L'_b\right) = \left\{x^2 - b^2 + 2\,x\,i\,b \mid x \in \mathbb{R}\right\} = P'_b$, con

$$P'_b = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si} \quad b = 0 \\ y^2 = 4\,b^2\left(x - b^2\right) & \text{si} \quad b \neq 0 \end{cases}.$$



§ 3.3. Mapeo de Joukowski.

Consideremos ahora el mapeo de Joukowski. Este se define por $f(z) = J(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$. Se tiene que $f(0) = f(\infty) = \infty$. Ahora bien f será conforme en un punto $z \Leftrightarrow f'(z) \neq 0$. Se tiene que $f'(z) = \frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z^2}\right) = 0 \Leftrightarrow z^2 = 1 \Leftrightarrow z = \pm 1$, por lo que f es conforme en $\mathbb{C} - \{0, -1, 1\}$.

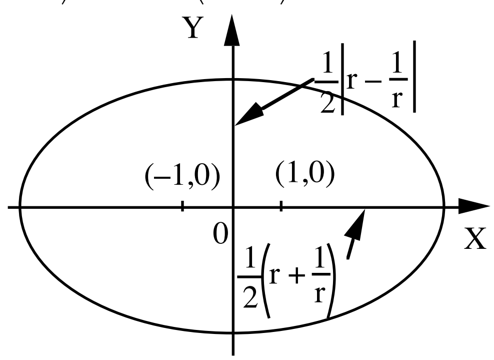
Ahora, $f(z) = f(w) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2}\left(w + \frac{1}{w}\right) \Leftrightarrow z + \frac{1}{z} = w + \frac{1}{w} \Leftrightarrow z^2\,w + w = z\,w^2 + z \Leftrightarrow z\,w\,(z - w) - (z - w) = 0 \Leftrightarrow (z - w)\,(z\,w - 1) = 0 \Leftrightarrow \boxed{z = w}$ ó $\boxed{z\,w = 1}$.

Consideremos el círculo $z = r\,e^{i\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$, entonces $f(z) = \frac{1}{2}\left(r\ e^{i\theta} + \frac{1}{r\,e^{i\theta}}\right) =$

$= \left(\frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta\right) + i\left(\frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\operatorname{sen}\theta\right)$.

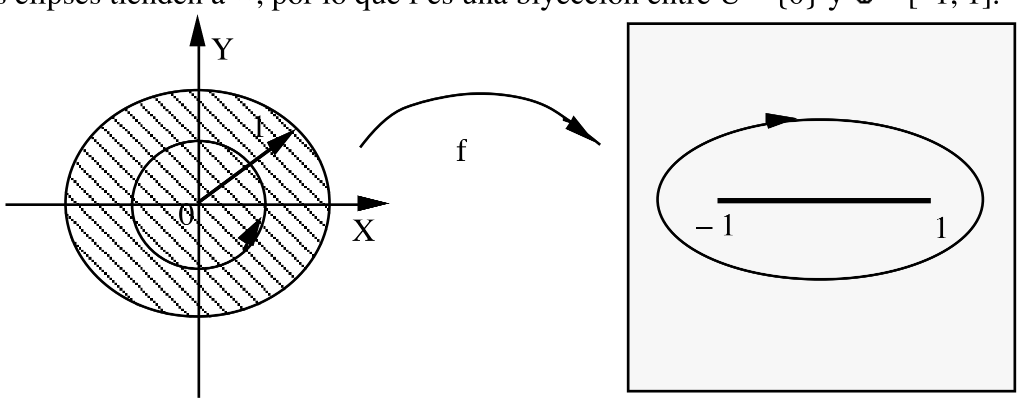
Por lo que si $x = \left(\frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta\right)$, $y = \left(\frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\operatorname{sen}\theta\right)$, se tiene

$$\frac{x^2}{\frac{1}{4}\left(r + \frac{1}{r}\right)^2} + \frac{y^2}{\frac{1}{4}\left(r - \frac{1}{r}\right)^2} = 1,$$



la cual es una elipse con semiejes $\frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)$ y $\frac{1}{2}\left|r - \frac{1}{r}\right|$, centro en (0, 0) y focos en (± 1, 0).

Si $r \to 1$, entonces estas elipses tienden al intervalo $[-1, 1]$. Si $r \to 0$, los semiejes de las elipses tienden a ∞, por lo que f es una biyección entre $U - \{0\}$ y $\mathbb{C} - [-1, 1]$.



De manera análoga, $f : \mathbb{C} - U \longrightarrow \mathbb{C} - [-1, 1]$ es una biyección y la imagen de una circunferencia recorrida en el sentido positivo es una elipse recorrida en el sentido negativo.

Ahora sea $L_\theta = \left\{ r\, e^{i\theta} \mid 0 < r < 1,\ \theta \neq 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi \right\}$, entonces si $z = r\, e^{i\theta} \in L_\theta$, $f(z) = f\left(r\, e^{i\theta}\right) = \left\{ \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right) \cos\theta \right\} + i \left\{ \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right) \operatorname{sen}\theta \right\}$ que pertenece a la hipérbola $\dfrac{u^2}{\cos^2\theta} - \dfrac{v^2}{\operatorname{sen}^2\theta} = 1.$

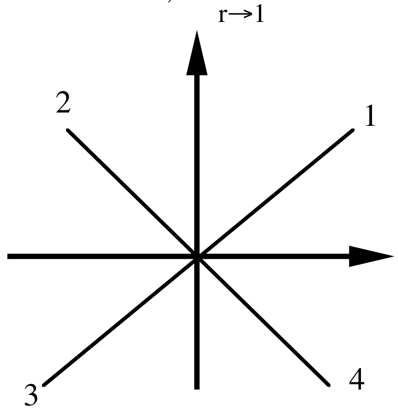
Si $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, $u \xrightarrow[r\to 0^+]{} \infty$, $v \xrightarrow[r\to 0^+]{} -\infty$;

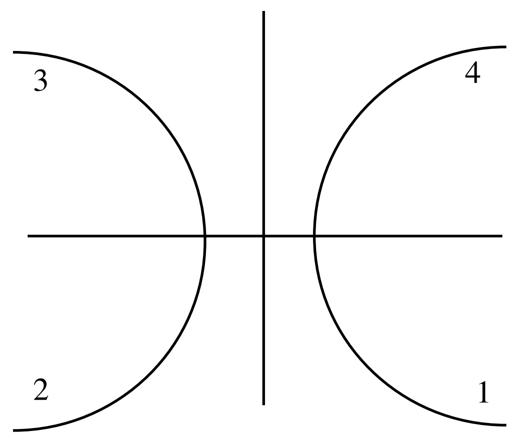
Si $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, $u \xrightarrow[r\to 0^+]{} -\infty$, $v \xrightarrow[r\to 0^+]{} -\infty$;

Si $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$, $u \xrightarrow[r\to 0^+]{} -\infty$, $v \xrightarrow[r\to 0^+]{} \infty$;

Si $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$, $u \xrightarrow[r\to 0^+]{} \infty$, $v \xrightarrow[r\to 0^+]{} \infty$.

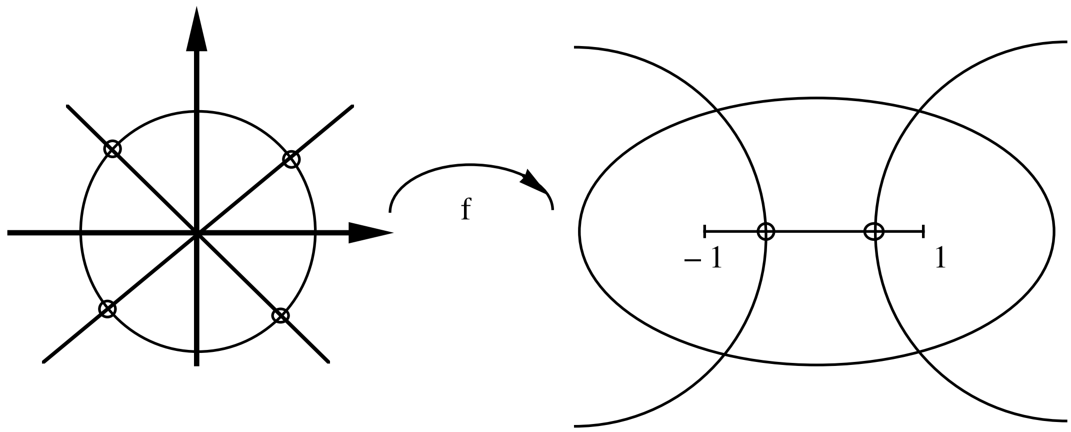
Además, $v \xrightarrow[r\to 1]{} 0$.





$\left(w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \Rightarrow z^2 - 2wz + 1 = 0 \Rightarrow z = \frac{2w \pm \sqrt{4w^2 - 4}}{2} = w \pm \sqrt{w^2 - 1}\right).$

Para estudiar la función inversa, consideremos $\mathbb{C} - [-1, 1]$. La función $f(z) = \sqrt{z^2 - 1} = e^{\frac{1}{2}\ln\left(z^2 - 1\right)}$, $f : \mathbb{C} - [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{C}$ tiene una rama analítica tal que $f(i) = \sqrt{2}\, i$ (la otra rama es tal que $f(i) = -\sqrt{2}\, i$ y esta otra será denotada por $-\sqrt{z^2 - 1}$).



Si $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \Rightarrow z = w \pm \sqrt{w^2 - 1})$, es decir

$f_1(w) = w + \sqrt{w^2 - 1}$; $f_2(w) = w - \sqrt{w^2 - 1}$;

$f_1 : \mathbb{C} - [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{C} - U$; $f_2 : \mathbb{C} - [-1, 1] \longrightarrow U - \{0\}$.

Nuevamente escribimos $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = \frac{z^2 + 1}{2z}$, por lo tanto

$$\left.\begin{aligned} w + 1 &= \frac{(z+1)^2}{2z} \\ w - 1 &= \frac{(z-1)^2}{2z} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{w-1}{w+1} = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2.$$

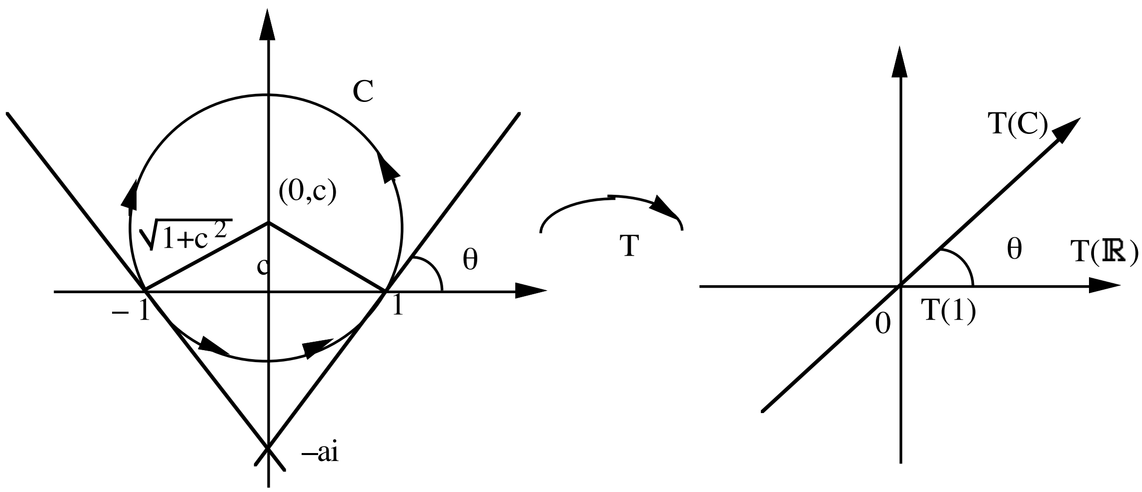
Sea $\xi = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2$, entonces $\frac{w-1}{w+1} = \xi$ ó $w = \frac{\xi - 1}{\xi + 1}$:

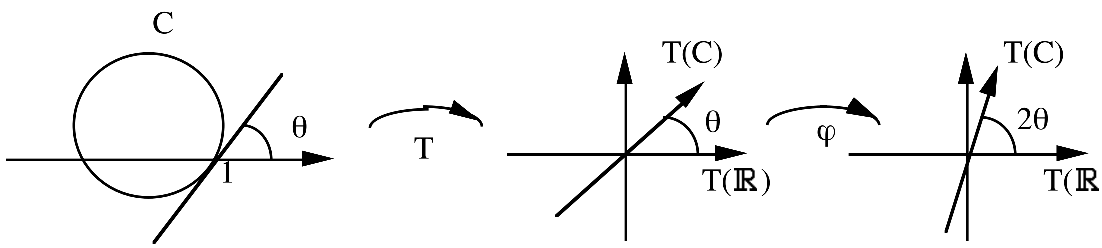
$$z \xrightarrow{T} \frac{z-1}{z+1} = u \xrightarrow{\varphi} u^2 = \xi \xrightarrow{T} \frac{\xi - 1}{\xi + 1} = w,$$

es decir $f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = \big(T \circ \varphi \circ T\big)(z)$.

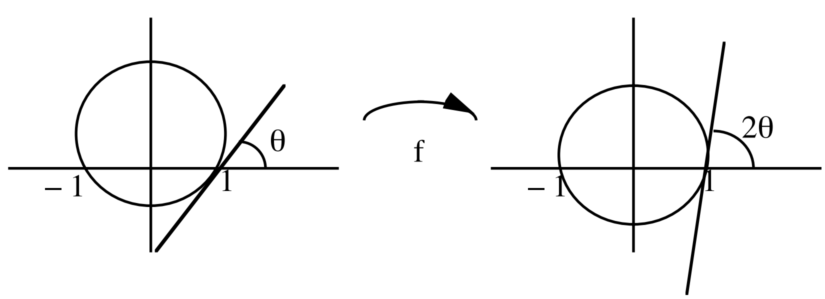
Si C es una circunferencia que para por los puntos $z = \pm 1$, T(C) es una recta que para por el origen con un ángulo θ igual al ángulo formado por la circunferencia C con el eje real en el punto $z = 1$.

Ahora φ manda ésta última recta en la recta que pasa por el origen formando un ángulo 2θ con el eje real positivo.



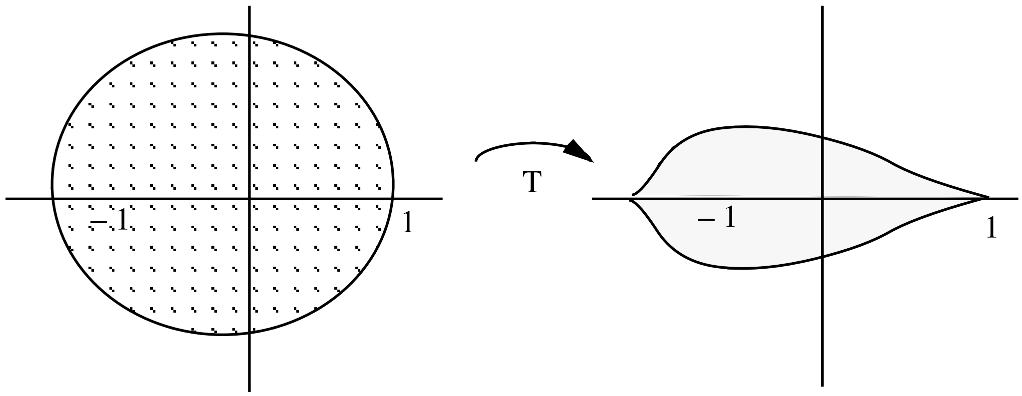


Por último, si M es ésta última recta, T(M) es un círculo que pasa por ± 1 y que forma un ángulo 2θ con el eje real en el punto z = 1.

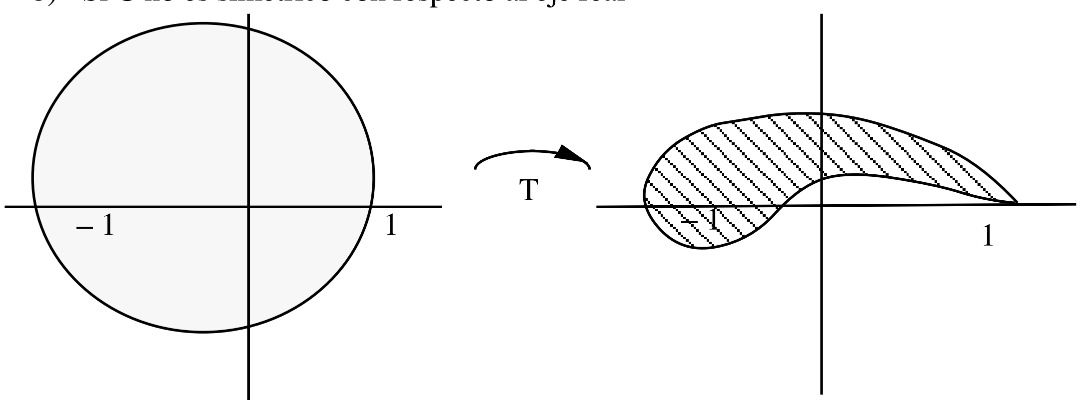


Finalmente si C es un círculo que pasa por z = 1 y contiene en su interior a z = – 1, tendremos la siguientes situaciones:

a) Si C es simétrico con respecto al eje real, entonces



b) Si C no es simétrico con respecto al eje real



Esta imágenes reciben el nombre de <u>perfiles de Joukowski</u> y como se ve en las figuras anteriores, estos perfiles tienen la forma de un ala de avión.

<u>§ 3.4. Funciones Trigonométricas.</u>

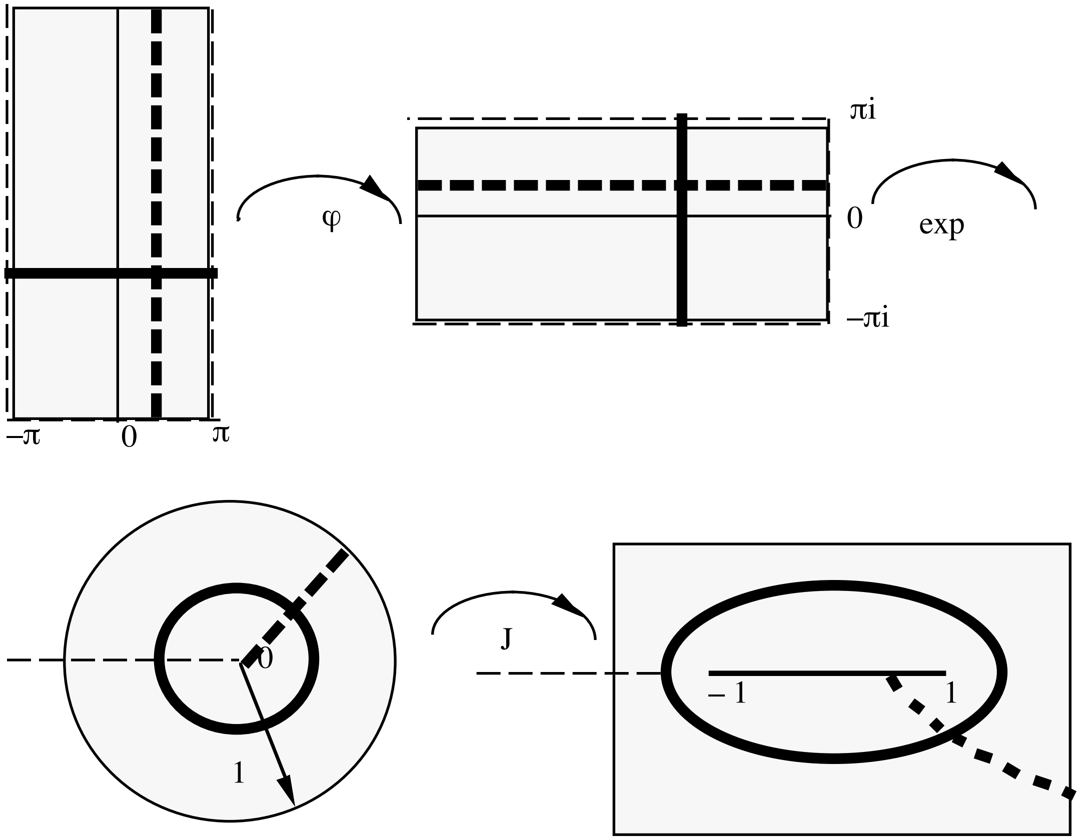
Ahora sea $w = \cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$. Entonces coseno es la composición de:

$$z \xrightarrow{\varphi} i\, z = t \xrightarrow{\exp} e^{t} = u \xrightarrow{J} \frac{1}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right).$$

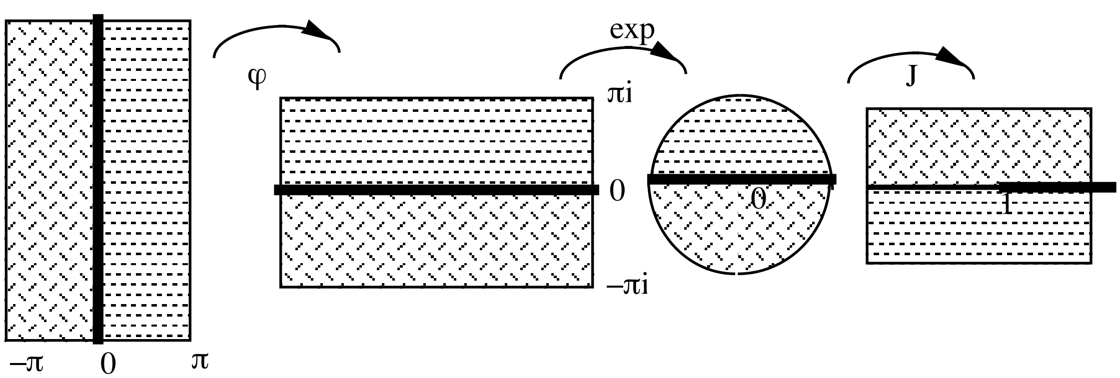
La primera función es una rotación de 90˚, la segunda es la función exponencial y la tercera la transformación de Joukowski.

Ahora bien, φ es 1 – 1 en todo $\mathbb{C}$, exp es 1 – 1 en cualquier región del tipo $W_{a,b} = \left\{z \in \mathbb{C} \mid a < \operatorname{Im} z < b\right\}$ con $b - a \leq 2\pi$. Finalmente, J es 1 – 1 en $\mathbb{C} - U$ ó en $U - \{0\}$. Así pues consideremos $A = \left\{z \in \mathbb{C} \mid -\pi < \operatorname{Re} z < \pi,\ \operatorname{Im} z > 0\right\}$.

Notemos que $\varphi(A) = i\,A = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid -\pi < \operatorname{Im} z < \pi,\ \operatorname{Re} z < 0 \right\}$, por lo que tenemos la siguiente situación:

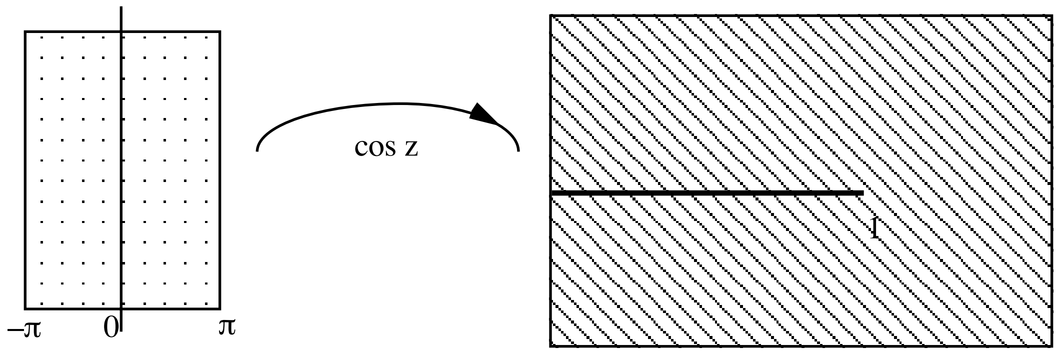


Similarmente

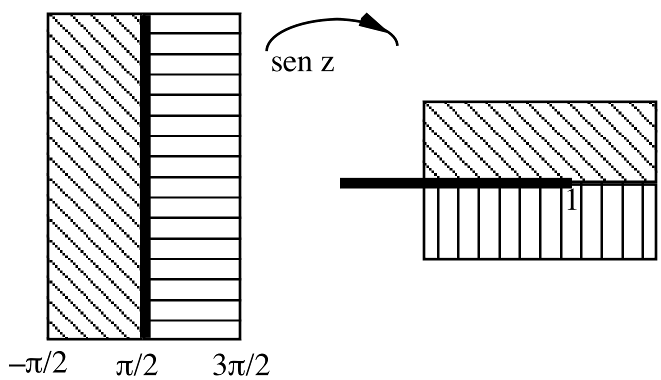


Capítulo 6

Resumiento:



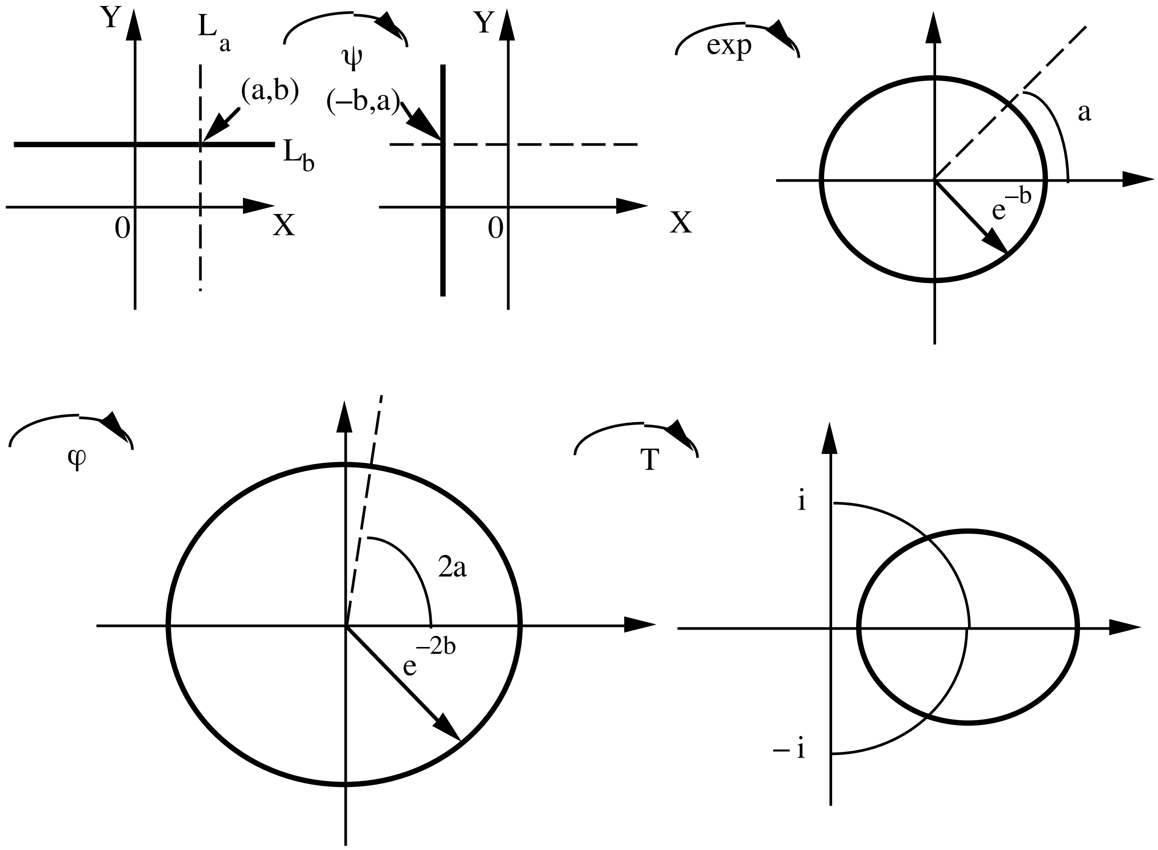
Si $f(z) = \text{sen } z$, puesto que tenemos $\text{sen}\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \cos z$ y $\cos\left(z - \frac{\pi}{2}\right) = \text{sen } z$, se sigue:



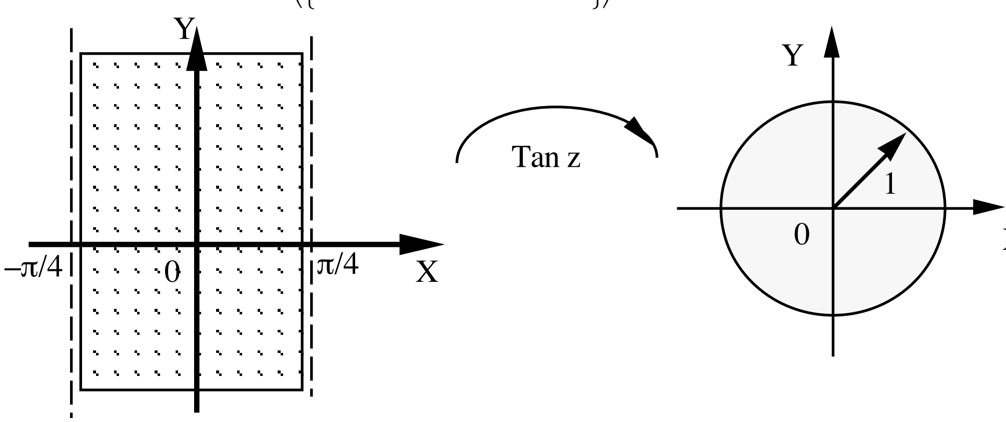
Sea ahora $f(z) = \text{Tan } z = \frac{\text{sen } z}{\cos z} = \frac{1}{i}\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} = -i\frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1} = i\frac{1 - e^{2iz}}{1 + e^{2iz}}$, esto es:

$$z \xrightarrow{\psi} iz = u \xrightarrow{\exp} e^u = v \xrightarrow{\varphi} v^2 = t \xrightarrow{T} i\frac{1 - t}{1 + t}.$$

Si $L_a = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re } z = a = \text{constante}\}$,



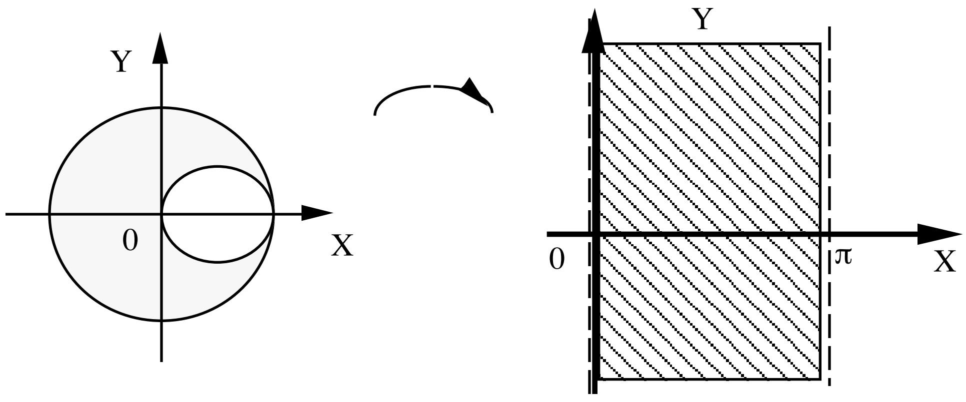
En particular las líneas $\operatorname{Re} z = -\frac{\pi}{4}$ y $\operatorname{Re} z = \frac{\pi}{4}$ se transforman en las 2 mitades del círculo unitario por lo que $T\left(\left\{z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Re} z| < \frac{\pi}{4}\right\}\right) = U$.



§ 4. Ejemplos.

EJEMPLO 6.4.1:

Encontremos un mapeo conforme biyectivo que transforme la región interior al círculo $|z| = 1$ y exterior al círculo $\left|z - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$ en la banda $0 < \text{Re } z < \pi$.



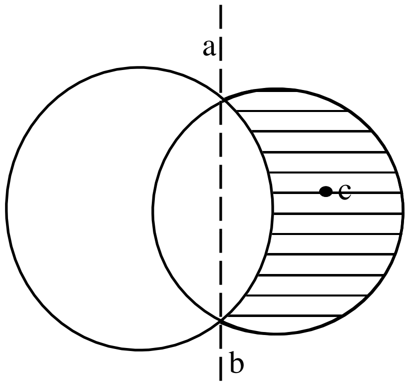
Una forma de hacerlo es encontrar una transformada de Möbius que mande $|z| = 1$ a $\text{Re } z = 0$ y $\left|z - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$ a $\text{Re } z = \pi$. Ahora bien, puesto que los dos círculos se intersectan en $z = 1$, se debe tener $T(1) = \infty$, es decir $T(z) = \frac{a\,z + b}{z - 1}$. Por otro lado $T(0) = \pi + i\,c$, $T(-1) = 0 + i\,d$, digamos $T(-1) = 0$, por lo que $T(z) = \alpha\frac{z + 1}{z - 1}$.

Si $\alpha \in \mathbb{R}$, $T(z) = \alpha\frac{z + 1}{z - 1}$ manda $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, por lo tanto $T(\{|z| = 1\})$ en una línea perperdicular a $\mathbb{R}$ y $T(-1) = 0$ implica que $T(\{|z| = 1\})$ es el eje imaginario, de hecho se tiene $T\left(e^{i\theta}\right) = \alpha\,\frac{e^{i\theta} + 1}{e^{i\theta} - 1} = \frac{\alpha}{|e^{i\theta} - 1|^2}\left(\left(e^{i\theta} + 1\right)\left(e^{-i\theta} - 1\right)\right) = \frac{\alpha}{|e^{i\theta} - 1|^2}\left(1 + e^{-i\theta} - e^{i\theta} - 1\right) = = \alpha\frac{-2\,i \text{ sen } \theta}{|e^{i\theta} - 1|^2}$.

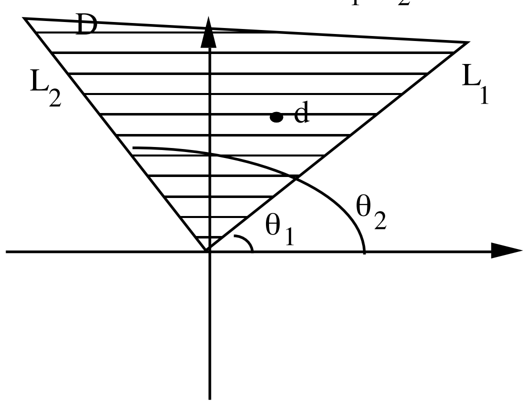
Por último se pedimos $T(0) = \pi = \alpha\,(-1) \Rightarrow T(z) = -\pi\frac{z + 1}{z - 1}$ es el mapeo conforme deseado.

EJEMPLO 6.4.2:

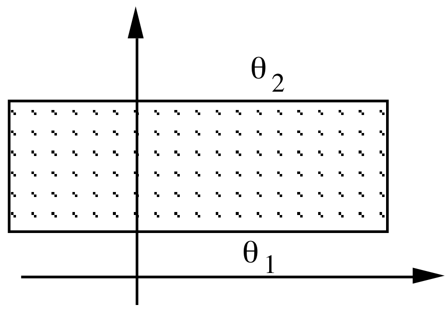
Más generalmente consideremos dos círculos que se intersectan en dos puntos,



digamos $a, b \in \mathbb{C}$. La transformación lineal $T(z) = \alpha \frac{z-a}{z-b}$ satisface $T(a) = 0$, $T(b) = \infty$, por lo que los dos arcos que acotan la región se transforman en dos rayos L_1, L_2 que pasan por el origen.

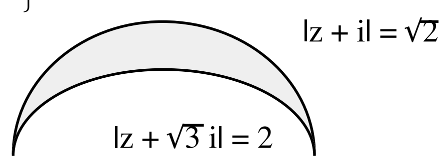


Ahora, cualquier punto c de la región se puede mandar a un punto predescrito d entre los rayos L_1, L_2. Con esto determinamos α. Ahora si D es la región acotada por los rayos, $\mathrm{Log} : D \longrightarrow \mathbb{C}$ es tal que Log (D) = $= \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \theta_1 < \arg z < \theta_2 \right\}$. Es decir $f(z) = \mathrm{Log}\left(\alpha \frac{z-a}{z-b}\right)$ es un mapeo conforme biyectivo que transforma una lente acotada entre dos arcos de circunferencia en una banda infinita. Cabe hacer notar que en éste ejemplo hemos considerado Log como el logaritmo principal. Esto no se podría hacer si el eje real negativo se hallase en la región acotada por los rayos L_1, L_2. Si éste es el caso, basta tomar una rama de log z tal que $\theta_1 < \arg z < \theta_2$.

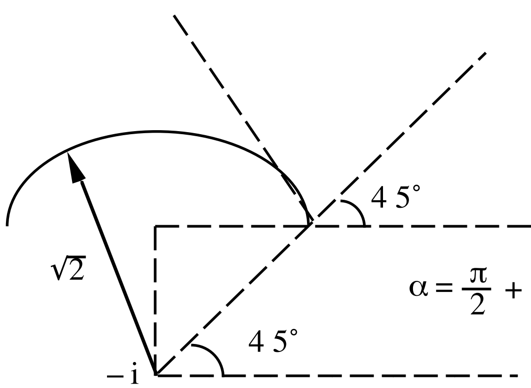


EJEMPLO 6.4.3:

Hagamos un caso concreto con respecto al Ejemplo 6.4.2, hallemos un mapeo conforme biyectivo que transforme la lente acotada por los círculos $|z + i| = \sqrt{2}$ y $|z + \sqrt{3}\, i|$ = 2 en la banda infinita $\left\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{2}\right\}$. Los puntos de intersección de los círculos son $z = \pm 1$. Se tiene la siguiente situación:

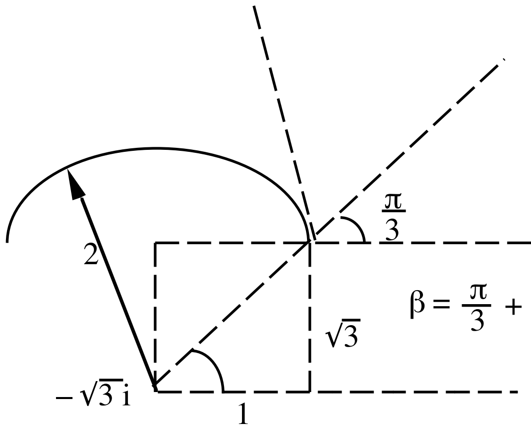


Los ángulos de intersección son:



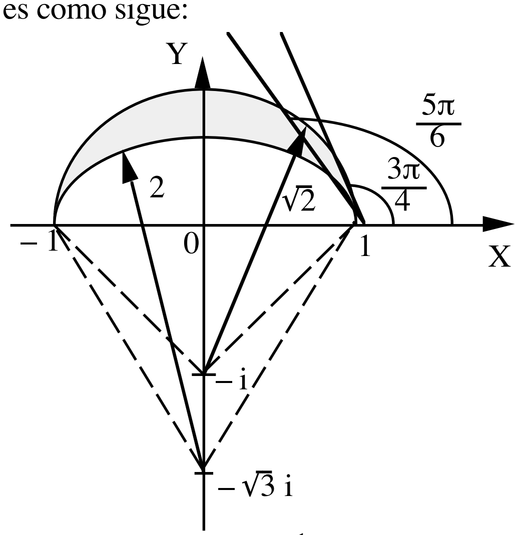
$$\alpha = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

y



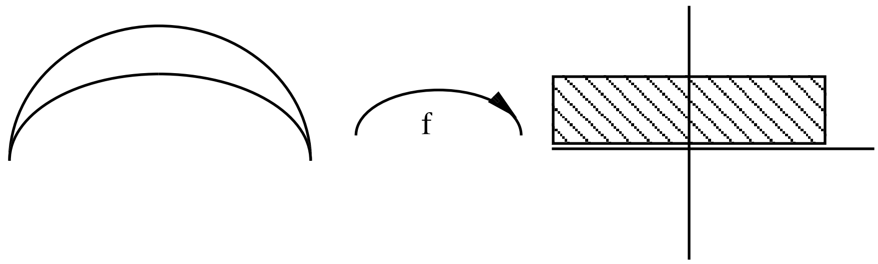
$$\beta = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6}$$

Es decir la figura es como sigue:



Entonces la transformación $T(z) = \dfrac{z-1}{z+1}$ es tal que manda esta lente en la región $D = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \dfrac{3\pi}{4} < \operatorname{Arg} z < \dfrac{5\pi}{6} \right\}$.

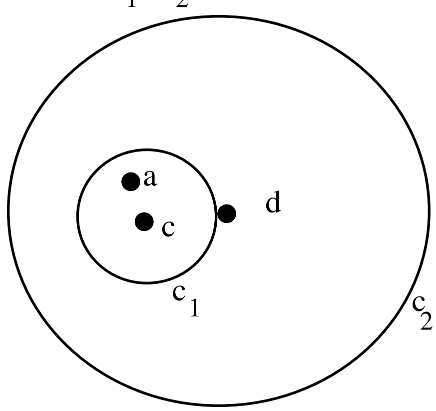
Ahora $\operatorname{Log} : D \longrightarrow \mathbb{C}$ manda D en la región $D_1 = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \dfrac{3\pi}{4} < \operatorname{Im} z < \dfrac{5\pi}{6} \right\}$. Finalmente $\varphi(z) = 6\left(z - \dfrac{3\pi}{4}\, i\right)$ transforma D_1 en $D_2 = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; 0 < \operatorname{Im} z < \dfrac{\pi}{2} \right\}$, es decir la función buscada es $\boxed{f(z) = 6\left(\operatorname{Log}\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right) - \dfrac{3\pi}{4}\, i\right)}$.



EJEMPLO 6.4.4:

Un problema diferente consiste en hallar mapeos conformes biyectivos que transformen la región limitada por dos círculos que no se intersectan en un anillo. Las transformaciones lineales de nuevo solucionan nuestro problema.

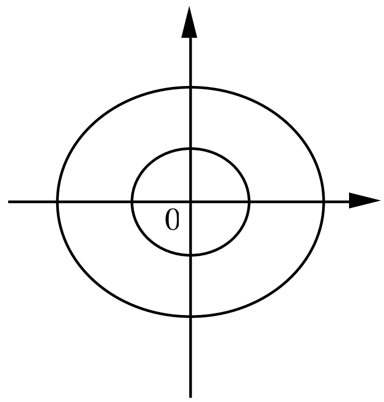
En general sean C_1, C_2 dos circunferencias que no se intersectan, digamos C_1 en el interior de C_2.



Se quiere transformar conformemente esta región en una anillo con centro en el origen.

Sea a en el interior de C_1 tal que $T(a) = 0$. Ahora si a^* es el simétrico de a con respecto a C_1 y a_1^* es el simétrico de a con respecto a C_2 se debe tener que $T(a^*) = T\left(a_1^*\right) = \infty$, es decir $a^* = a_1^*$.

Ahora si C_1 es el círculo con centro en c y radio r, C_2 es el círculo con centro en d y radio R, se tiene por el desarrollo anterior al Teorema 6.2.20 que $a^* = \dfrac{r^2}{\overline{a} - \overline{c}} + c$ y

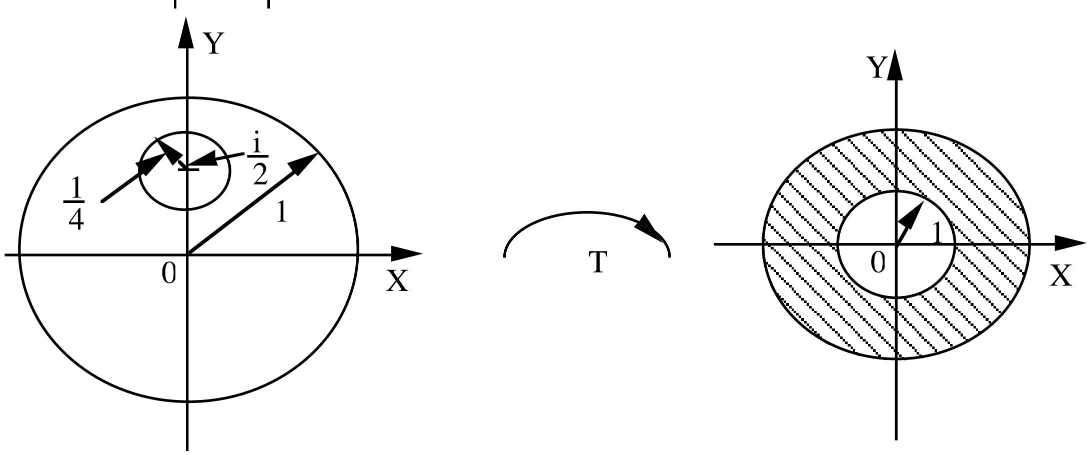


$a_1^* = \dfrac{R^2}{\overline{a} - \overline{d}} + d$. Puesto que estas dos cantidades deben ser iguales se sigue que $\dfrac{r^2}{\overline{a} - \overline{c}} + c = \dfrac{R^2}{\overline{a} - \overline{d}} + d$. De esta manera hallamos a tal que $T(a) = 0$ y $T(a^*) = \infty$.

Así T está dada por $T(z) = \alpha \dfrac{z - a}{z - a^*}$, con $\alpha \in \mathbb{C} - \{0\}$. El siguiente ejemplo es para 2 círculos dados.

<u>EJEMPLO 6.4.5:</u>

Hallemos un mapeo conforme que mande la región del interior del círculo unitario y exterior al círculo $\left| z - \dfrac{i}{2} \right| = \dfrac{1}{4}$ en un anillo con centro en el origen y cuyo menor radio es 1.



Del ejemplo anterior tenemos $c = \frac{i}{2}$, $r = \frac{1}{4}$, $d = 0$, $R = 1$, por lo tanto

$$\frac{\frac{1}{16}}{\overline{a} - \left(-\frac{i}{2}\right)} + \frac{i}{2} = \frac{1}{\overline{a} - 0} + 0 \Rightarrow \frac{\frac{1}{16}}{a - \frac{i}{2}} - \frac{i}{2} = \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{1}{16} - \frac{i}{2}\left(a - \frac{i}{2}\right) = \frac{1}{a}\left(a - \frac{i}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{16} - \frac{i}{2}\, a - \frac{1}{4} = 1 - \frac{i}{2}\,\frac{1}{a} \Rightarrow \frac{i}{2}\left(\frac{1}{a} - a\right) = \frac{19}{16} \Rightarrow 1 - a^2 = -\frac{19}{8}\, a\, i \Rightarrow$$

$$a = \frac{\frac{19\, i}{8} \pm \sqrt{-\frac{361}{64} + 4}}{2} = \frac{\frac{19\, i}{8} \pm \sqrt{\frac{105}{64}}\; i}{2} = \frac{19}{16}\, i \pm \frac{\sqrt{105}}{16}\, i = \frac{19 \pm \sqrt{105}}{16}\, i.$$

El valor que está en el interior de $|z| = 1$ es $a = \frac{19 - \sqrt{105}}{16}\, i$. Ahora bien $a^* = \frac{1}{\overline{a}} =$

$$= \frac{-16\, i}{19 - \sqrt{105}} = \frac{-16\left(19 + \sqrt{105}\right) i}{361 - 105} = -\frac{19 + \sqrt{105}}{16}\, i.$$ Por tanto

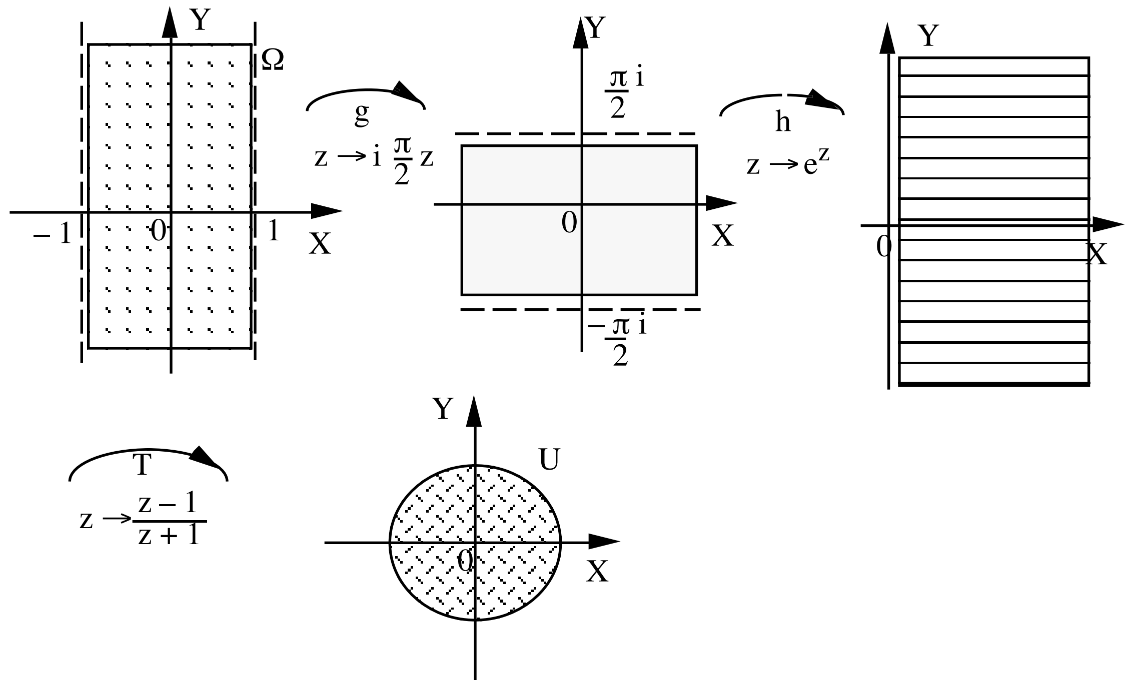
$$T(z) = \alpha\, \frac{16\, z - \left(19 - \sqrt{105}\right) i}{16\, z + \left(19 + \sqrt{105}\right) i}.$$

Finalmente, puesto que queremos que la circunferencia $\left|z - \frac{i}{2}\right| = \frac{1}{4}$ sea mandada a $|z| = 1$, podemos pedir $T\left(\frac{3\, i}{4}\right) = 1 = \alpha\, \frac{12 - 19 + \sqrt{105}}{12 + 19 + \sqrt{105}} = \frac{\sqrt{105} - 7}{\sqrt{105} + 31} \Rightarrow$ $\alpha = \frac{\sqrt{105} + 31}{\sqrt{105} - 7}$. Es decir la transformación buscada es

$$\boxed{T(z) = \frac{\sqrt{105} + 31}{\sqrt{105} - 7} \bullet \frac{16\, z - \left(19 - \sqrt{105}\right) i}{16\, z + \left(19 + \sqrt{105}\right) i}}.$$

EJEMPLO 6.4.6:

Encontremos una transformación conforme biyectiva de $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid -1 < \text{Re } z < 1\}$ en U. Para esto consideremos las siguientes transformaciones:



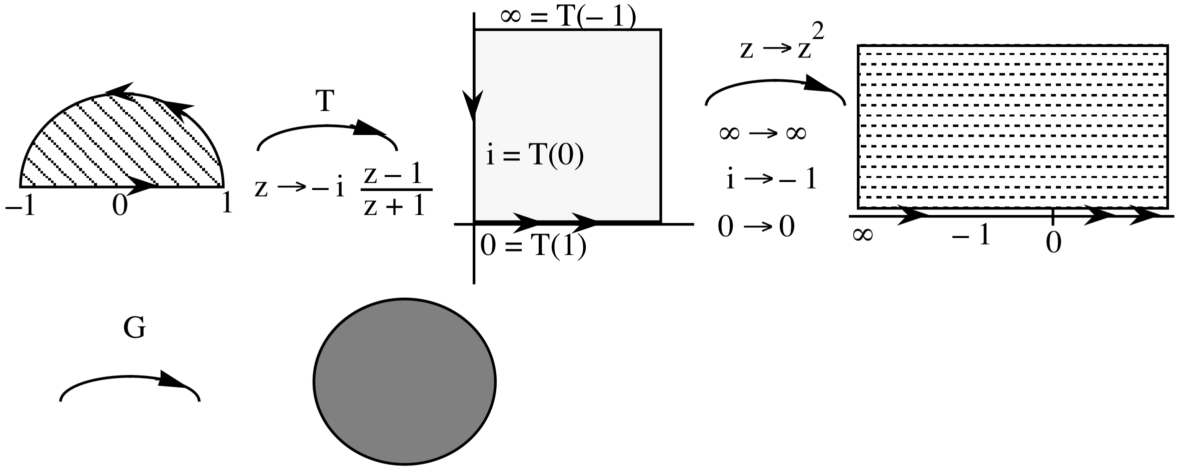
Es decir, $\varphi : \Omega \longrightarrow U$, $\varphi = T \circ h \circ g$; $\varphi(z) = T(h(g(z))) = T\left(h\left(i\,\frac{\pi}{2}\,z\right)\right) = T\left(e^{\frac{\pi i z}{2}}\right) =$

$$= \frac{e^{\frac{\pi i z}{2}} - 1}{e^{\frac{\pi i z}{2}} + 1} = i\,\mathrm{Tan}\left(\frac{\pi\ z}{4}\right)$$ es una transformación buscada.

La función inversa $\psi : U \longrightarrow \Omega$ está dada por $\psi(z) = g^{-1}\left(h^{-1}\left(T^{-1}(z)\right)\right) = g^{-1}\left(h^{-1}\left(\frac{1\ +\ z}{1\ -\ z}\right)\right) = g^{-1}\left(\mathrm{Ln}\ \left(\frac{1\ +\ z}{1\ -\ z}\right)\right) = -\frac{2}{\pi}\,i\,\mathrm{Ln}\left(\frac{1\ +\ z}{1\ -\ z}\right)$.

EJEMPLO 6.4.7:

Encontremos una biyección conforme f entre Ω = la parte superior del círculo unitario U y U tal que $\{-1, 0, 1\}$ es mandada a $\{-1, -\,i, 1\}$. Para esto consideremos las siguientes transformaciones:



Se quiere G : $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\ z > 0\} \longrightarrow U$ transformación lineal tal que G(∞) = – 1, G(–1) = – i y G(0) = 1. Es fácil verificar que $G(z) = -\dfrac{z - i}{z + 1}$ es la transformación requerida. Por lo tanto $f : \Omega \longrightarrow U$ está dada por $f = G \circ S \circ T$, f(z) =

$$\frac{z^2 (1 + i) + 2z(-1 + i) + (1 + i)}{z^2 (-1 + i) + 2z(1 + i) + (-1 + i)} = = \frac{1 + i}{-1 + i} \bullet \frac{z^2 + 2z\dfrac{-1 + i}{1 + i} + 1}{z^2 + 2z\dfrac{1 + i}{-1 + i} + 1} =$$

$$-(1 + i) \bullet \frac{z^2 + (i - 1)z + 1}{z^2 - 2(1 + i)z + 1}.$$

§ 5. Resultado Generales.

Ahora que se ha visto la definición de transformación conforme y se han analizado la funciones elementales como transformaciones conformes, en esta sección nos proponemos enunciar las propiedades generales de los mapeos conformes. Empezamos con un interesante resultado debido a Schwarz.

TEOREMA 6.5.1 (LEMA DE SCHWARZ):

Sea $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$, $f \in \mathbf{H}(U)$ tal que

(1) $|f(z)| \leq 1 \ \forall\, z \in U$.

(2) $f(0) = 0$.

Entonces $|f'(0)| \leq 1$ y $|f(z)| \leq |z|$ $\forall$ $z \in U$. Más aún, si $|f'(0)| = 1$ o $|f(z)| = |z|$ para algún $z \neq 0$, entonces existe una constante c tal que $|c| = 1$ y $f(z) = c\,z$ $\forall$ $z \in U$.

DEMOSTRACION:

Sea $g : U \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)}{z} & \text{si } z \neq 0 \\ f'(0) & \text{si } z = 0 \end{cases}$. Entonces es fácil ver que $g \in \mathbf{H}(U)$. Por el principio del módulo máximo 5.1.4, se tiene que para $0 < r < 1$, $|g(z)| \leq \frac{1}{r}$ para $|z| \leq r$, por lo que haciendo $r \to 1$ se tendrá $|g(z)| \leq 1$ $\forall$ $z \in U$, lo cual significa que $|f(z)| \leq |z|$ $\forall$ $z \in U$. Además $|f'(0)| = |g(0)| \leq 1$, lo que prueba la primera parte del Teorema.

Ahora bien, si $|f'(0)| = 1$ o $|f(z)| = |z|$ para algún $z \neq 0$, esto significa que $|g(z)| = 1$ para algún $z \in U$, lo cual implica por el principio del módulo máximo que $g(z) = c$ = constante. Esto implica que $f(z) = c\,z$ $\forall$ $z \in U$ con $|c| = 1$. ♦

Usaremos el Lema de Schwarz para caracterizar todas las transformaciones conformes biyectivas de U en sí mismo.

DEFINICION 6.5.2:

Si $|a| < 1$, sea $\varphi_a(z) = \dfrac{z - a}{1 - \overline{a}\,z}$.

PROPOSICION 6.5.3:

Se tiene que $\varphi_a \in \mathbf{H}(U)$, $\varphi_a(U) = U$, $\varphi_a(\partial U) = \partial U$, $\varphi_a : U \longrightarrow U$ es una biyección. La inversa de φ_a es φ_{-a}. Finalmente $\varphi_a(a) = 0$, $\varphi_a(0) = -a$, $\varphi_a'(0) = 1 - |a|^2$, $\varphi_a'(a) = \left(1 - |a|^2\right)^{-1}$.

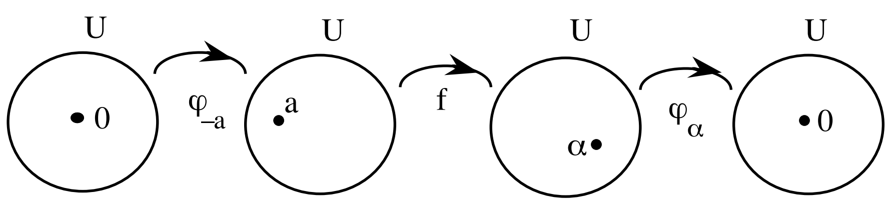
DEMOSTRACION:

Si $\theta \in \mathbb{R}$, $\left|\varphi_a\left(e^{i\theta}\right)\right| = \left|\dfrac{e^{i\theta} - a}{1 - \overline{a}\, e^{i\theta}}\right| = \left|\dfrac{e^{i\theta} - a}{e^{-i\theta} - \overline{a}}\right| = 1$, por lo tanto $\varphi_a(\partial U) \subseteq \partial U$. Además $\varphi_a(0) = -a$, y puesto que φ_a es una transformada de Möbius, se tiene que $\varphi_a(U) = U$, $\varphi_a(\partial U) = \partial U$. El resto de la Proposición se verifica directamente. ♦

PROPOSICION 6.5.4:

Sea $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ analítica tal que $|f(z)| < 1$ $\forall$ $z \in U$. Sea $a \in U$ con $f(a) = \alpha$. Entonces $|f'(a)| \leq \dfrac{1 - |\alpha|^2}{1 - |a|^2} = \dfrac{1 - |f(a)|^2}{1 - |a|^2}$. Más aún, la igualdad sucede solo cuando $f(z) = \varphi_{-\alpha}\left(c\, \varphi_a(z)\right)$ con $|c| = 1$.

DEMOSTRACION:



Sea $g = \varphi_\alpha \circ f \circ \varphi_{-a}$, entonces $g \in \mathbf{H}(U)$, $g(0) = 0$ y $g'(0) = \varphi'_\alpha(\alpha) \bullet f'(a) \bullet \varphi'_{-a}(0)$ $= \dfrac{1}{1 - |\alpha|^2} \bullet f'(a) \bullet \left(1 - |a|^2\right)$. Por el Lema de Schwarz se tiene $|g'(0)| \leq 1$, o sea $|f'(a)| \leq \dfrac{1 - |\alpha|^2}{1 - |a|^2}$.

Finalmente, la igualdad se alcanza solo si $|g'(0)| = 1$ o sea $g(z) = c\, z$, es decir, $g = c\, Id$, con $|c| = 1$. Esto es, la igualdad ocurre solo en el caso en que $\varphi_\alpha \circ f \circ \varphi_{-a} = c\, Id$, o $f = \varphi_\alpha^{-1}\, (c\, Id)\, \varphi_{-a}^{-1} = \varphi_{-\alpha} \circ (c\, \varphi_a)$. ♦

Ahora probamos la consecuencia principal del Lema de Schwarz.

TEOREMA 6.5.5:

Sea $f : U \longrightarrow U$ analítica biyectiva. Si $f(a) = 0$, entonces existe una constante c, $|c| = 1$ tal que $f = c\,\varphi_a$.

DEMOSTRACION:

Sea $g = f^{-1} : U \longrightarrow U$, $g(f(z)) = f(g(z)) = z$, $g(0) = a$. Usando 6.5.4 tanto para g como para f se tiene $|f'(a)| \leq \dfrac{1}{1 - |a|^2}$ y $|g'(0)| \leq 1 - |a|^2$. Puesto que $g \circ f = Id \Rightarrow 1 = g'(f(a))\, f'(a) = g'(0)\, f'(a) \Rightarrow |f'(a)| = \dfrac{1}{1 - |a|^2}$. Entonces por 6.5.4 se sigue que $f = \varphi_0 \circ \left(c\,\varphi_a\right) = c\,\varphi_a$ $(\varphi_0 = Id)$. ♦

EJEMPLO 6.5.6:

Sea $f : U \longrightarrow U$ con $f\left(-\frac{i}{2}\right) = \frac{i+1}{2}$. Entonces $\left|f'\left(-\frac{i}{2}\right)\right| \leq \dfrac{1 - \left|\frac{i+1}{2}\right|^2}{1 - \left|\frac{-i}{2}\right|^2} = \dfrac{1 - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}$. En particular, no existe $f : U \longrightarrow U$ holomorfa con $f\left(-\frac{i}{2}\right) = \frac{i+1}{2}$ y $f'\left(-\frac{i}{2}\right) = \frac{3}{4}$.

A continuación enunciamos el Teorema de Mapeo de Riemann el cual caracteriza los dominios simplemente conexos del plano complejo $\mathbb{C}$. Primero enunciamos varias caracterizaciones de dominios simplemente conexos en $\mathbb{C}$. No presentamos su demostración aunque la mayoría de la implicaciones ya las hemos probado implícitamente en el transcurso de estas notas.

DEFINICION 6.5.7:

Dos regiones Ω, $W \subseteq \mathbb{C}$ se llaman conformemente equivalentes si existe $f: \Omega \longrightarrow W$ analítica biyectiva (es decir f es holomorfa, conforme, 1-1 y sobre).

TEOREMA 6.5.8:

Sea $A \subseteq \mathbb{C}$ un abierto. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) Ω es simplemente conexo.

(ii) Ω es homeomorfo a U.

(iii) $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = 0$ para todo camino cerrado γ en Ω y para todo $\alpha \in S^2 - \Omega$.

(iv) $S^2 - \Omega$ es conexo.

(v) Cualquier $f \in \mathbf{H}(\Omega)$ puede ser uniformemente aproximada en compactos de Ω, por polinomios.

(vi) $\int_\gamma f(\xi)\, d\xi = 0$ para cualquier $f \in \mathbf{H}(\Omega)$ y cualquier camino cerrado γ en Ω.

(vii) Cualquier $f \in \mathbf{H}(\Omega)$ tiene primitiva en Ω.

(viii) Si $f \in \mathbf{H}(\Omega)$, $f(z) \neq 0\ \forall\ z \in \Omega$, entonces existe $g \in \mathbf{H}(\Omega)$ tal que $f = e^g$.

(ix) Si $f \in \mathbf{H}(\Omega)$, $f(z) \neq 0\ \forall\ z \in \Omega$, entonces existe $g \in \mathbf{H}(\Omega)$ tal que $f = h^2$.

(x) Si $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es armónica, entonces existe $v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ armónica tal que $f = u + i\, v \in \mathbf{H}(\Omega)$.

(Una función $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ se llama armónica si u tiene segundas derivadas parciales continuas y $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.) ♦

TEOREMA 6.5.9 (TEOREMA DEL MAPEO DE RIEMANN):

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, $\Omega \neq \mathbb{C}$ simplemente conexo. Entonces Ω es conformemente equivalente a U.

DEMOSTRACION:

Ver Rudin [10] página 302, Teorema 14.8 y página 316, ejercicio 26; Conway [4] página 204, Teorema 3.2 y página 279, ejercicio 3. ♦

OBSERVACION 6.5.10:

La condición $\Omega \neq \mathbb{C}$ en 6.5.9 es necesaria pues si $\mathbb{C}$ fuese conformemente equivalente a U, entonces existiría $f : \mathbb{C} \longrightarrow U$ analítica, biyectiva, lo cual contradice el Teorema de Liouville 4.2.24. Así mismo 6.5.9 dice que esencialmente solo hay solo 2 conjuntos abiertos simplemente conexos de $\mathbb{C}$: U y $\mathbb{C}$ (y sólo 3 en S^2: U, $\mathbb{C}$ y S^2).

Aunque la demostración del Teorema del Mapeo de Riemann es difícil, la demostración de la unicidad es fácil, a saber:

TEOREMA 6.5.11:

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, Ω simplemente conexo, $\Omega \neq \mathbb{C}$. Sea $a \in \Omega$. Entonces existe una única función $f : \Omega \longrightarrow U$ analítica biyectiva tal que $f(a) = 0$ y $f'(a) > 0$.

DEMOSTRACION:

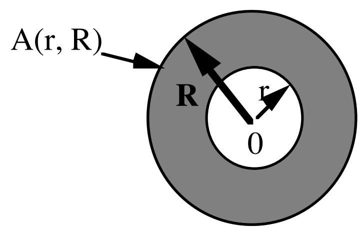
Sea $g : \Omega \longrightarrow U$ analítica biyectiva. Sea $g(a) = b \in U$. Entonces $\Phi = \varphi_a \circ g : \Omega \longrightarrow U$ es tal que $\Phi(a) = 0$. Ahora bien, si $\Phi'(a) = \alpha \neq 0$, $f = \frac{|\alpha|}{\alpha} \Phi$ satisface $f(a) = 0$, $f'(a) = |\alpha| > 0$. Sea h otra tal función, entonces $f \circ h^{-1} : U \longrightarrow U$ es biyectiva tal que $\left(f \circ h^{-1}\right)(0) = 0 \Rightarrow$ (6.5.5) $\left(f \circ h^{-1}\right)(z) = c\, z$, $|c| = 1$. Además $f'(0) \left(h^{-1}\right)'(0) = c > 0$, por lo tanto $c = 1$ y $f = h$. ♦

Los dominios simplemente conexos son aquéllos que su complemento en S^2 es conexo. Así pues los dominios <u>doblemente conexos</u> $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ son aquéllos tales que $S^2 - \mathbb{C}$

tiene dos componentes conexas. Los ejemplos más simples de estos dominios son los anillos (ver el Teorema de Laurent 5.2.7).

DEFINICION 6.5.12:

Sean $0 < r < R$a, r, R $\in \mathbb{R}$. Entonces definimos el anillo con centro en el origen y radios r, R por $A(r, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z| < R\}$.



Motivados por el Teorema del Mapeo de Riemann uno podría pensar que todo dominio doblemente conexo es conformemente equivalente a un anillo y que cualesquiera dos anillos son conformemente equivalentes. 6.5.13 prueba la validez de la primera conjetura y 6.5.14 la falsedad de la segunda.

TEOREMA 6.5.13:

Cualquier región doblemente conexa es conformemente equivalente a un anillo.

DEMOSTRACION:

Ver Ahlfors [1] Teorema 10 página 247 o Nehari [9] Capítulo VII, 1.2, páginas 333-352. ♦

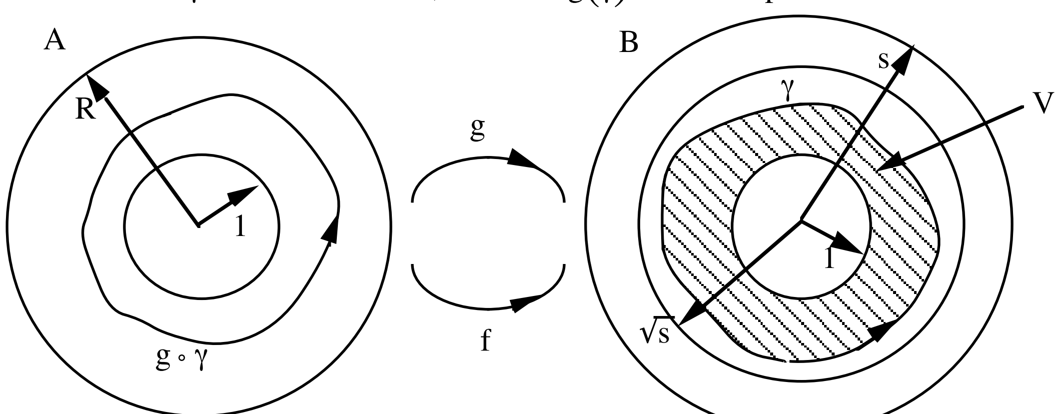
TEOREMA 6.5.14:

Dos anillos $A(r, R)$ y $A(s, S)$, $r, s > 0$ son conformemente equivalentes $\Leftrightarrow \frac{r}{R} = \frac{s}{S}$.

DEMOSTRACION:

Si $\frac{r}{R} = \frac{s}{S} = \alpha$, entonces si $\beta = \frac{S}{R}$, $f(z) = \beta z$ satisface $f(A(r, R)) = A(s, S)$ y $f \in \mathbf{H}(A(r, R))$, f es biyectiva.

Recíprocamente supongamos que $A(r, R)$ y $A(s, S)$ son conformemente equivalentes. Claramente se puede suponer $r = s = 1$. Se quiere probar que $R = S$. Sean $A = A(1, R)$, $B = A(1, S)$ y sea $f : A \longrightarrow B$ biyectiva, holomorfa. Sea $g = f^{-1}$. Consideremos γ el círculo $|z| = \sqrt{S}$, entonces $g(\gamma)$ es un compacto en A.



Por lo tanto existe $\varepsilon > 0$ tal que $A(1, 1 + \varepsilon) \cap g(\gamma) = \emptyset$. Esto implica que $V = f(A(1, 1 + \varepsilon))$ es un conjunto conexo en B que no intersecta a γ por lo que $V \subseteq A(1, \sqrt{S})$ ó $V \subseteq A(\sqrt{S}, S)$. Si sucede la segunda posibilidad cambiamos f por $\frac{S}{f}$, por lo que podemos suponer $V \subseteq A(1, \sqrt{S})$. Si $1 < |z_n| < 1 + \varepsilon$ y $|z_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, entonces $|f(z_n)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ pues $\{f(z_n)\}_{n=1}^{\infty} \subseteq V$ y no tiene punto límite en B debido a que es continua. Similarmente tendremos que si $|z_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} R$, entonces $|f(z_n)| \xrightarrow[n\to\infty]{} S$.

Sea ahora $\alpha = \frac{\ln S}{\ln R}$ y sea $u(z) = 2 \ln |f(z)| - 2 \alpha \ln |z|$. Usando las ecuaciones de Cauchy-Riemann para f(z), es fácil verificar que u(z) es armónica en A. Además por la primera parte, $u : \overline{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua con $\lim\limits_{|z|\to 1} u(z) = 2 \ln |1| - 2\,\alpha \ln |1| = 0$ y $\lim\limits_{|z|\to R} u(z) = 2 \ln S - 2\,\alpha \ln R = 0$.

Puesto que u es una función armónica idénticamente 0 en la frontera se sigue que u = 0 (el principio del módulo máximo se puede aplicar a las funciones armónicas, ver por ejemplo Rudin [10] páginas 259-260 o Conway [4] página 255, 1.6).

Ahora $2 \ln |f(z)| = \ln |f(z)|^2 = \ln f \bullet \overline{f}$, entonces si ponemos $\partial = \frac{\partial}{\partial x} - i\,\frac{\partial}{\partial y}$, es fácil ver que $\partial(2 \ln |f|) = \frac{f'}{f} \Rightarrow 0 = \partial(u(z)) = \frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{\alpha}{z} \Rightarrow \frac{f'}{f} = \frac{\alpha}{z}$. Ahora bien, por el Principio del Argumento 5.2.16, $\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=\sqrt{R}} \frac{f'(\xi)}{f(\xi)}\, d\xi$ = Número de ceros de f – Número de polos de f $= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=\sqrt{R}} \frac{\alpha}{\xi}\, d\xi = \alpha \Rightarrow \alpha \in \mathbb{Z}$. Sea $g(z) = \frac{f(z)}{z^{\alpha}}$, $g'(z) =$

$$\frac{f'(z)\, z^{\alpha} - \alpha\, f(z)\, z^{\alpha-1}}{z^{2\alpha}} = \frac{\frac{\alpha\, f(z)}{z}\, z^{\alpha} - \alpha\, f(z)\, z^{\alpha-1}}{z^{2\alpha}} = 0 \Rightarrow g(z) = c = \text{constante}.$$

Finalmente, se tiene que $f(z) = c\, z^{\alpha}$. Puesto que f es 1–1 $\Rightarrow \alpha = 1$, por lo que $f(z) = c\, z$ y en particular R = S. ♦

DEFINICION 6.5.15:

Una curva $\gamma : [a, b] \longrightarrow S^2$ se llama de <u>Jordan</u> si γ es C^1 por tramos, γ es cerrada y para $a < t < s < b$ se tiene $\gamma(t) \neq \gamma(s)$.

TEOREMA 6.5.16:

Si $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ es una región simplemente conexa $\Omega \neq \mathbb{C}$ con frontera $\partial\Omega \subseteq S^2$ una curva de Jordan, entonces la función dada por el mapeo de Riemann $f : \Omega \longrightarrow U$ se puede extender de manera continua a la frontera de Ω, $f : \overline{\Omega} \longrightarrow \overline{U}$. Más aún, si $z \in \partial\Omega \Rightarrow |f(z)| = 1$ y además es biyectiva en todo $\overline{\Omega}$.

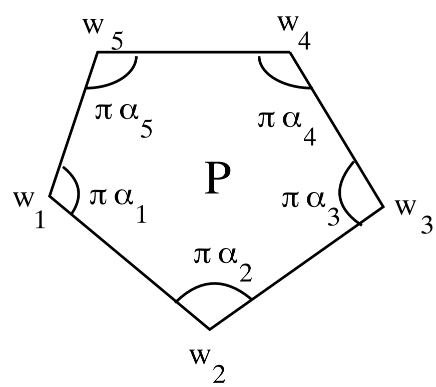
DEMOSTRACION:

Ver Rudin [10], página 309, Teorema 14.18. ♦

Terminamos este Capítulo estudiando una familia de mapeos conformes que transforman un semiplano ó un círculo en el interior de un polígono. Estas transformaciones se llaman de Schwarz-Christoffel.

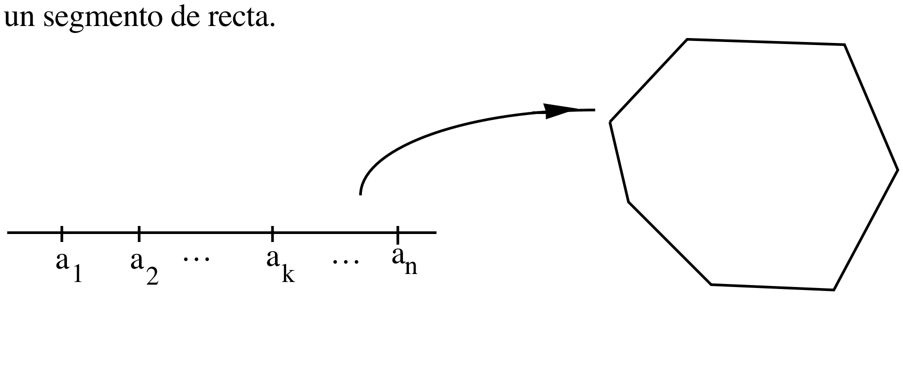
Consideremos un polígono P en $\mathbb{C}$, con vértices en $w_1, \ldots, w_n$. Suponemos que los lados no se intersectan, es decir el polígono es simplemente conexo. Supongamos que los ángulos interiores del polígono son $\alpha_1 \pi, \alpha_2 \pi, \ldots, \alpha_n \pi$. Si $\beta_1 \pi, \beta_2 \pi, \ldots, \beta_n \pi$ son lo ángulos exteriores, se tiene que $\alpha_i + \beta_i = 1$, $1 \leq i \leq n$ y $\sum_{i=1}^{n} \beta_i = 2$.

Por 6.5.16, existe $f : \overline{H^+} \cup \{\infty\} \longrightarrow \overline{P}$ tal que f es biyectiva y $f \in \mathbf{H}(H^+)$.

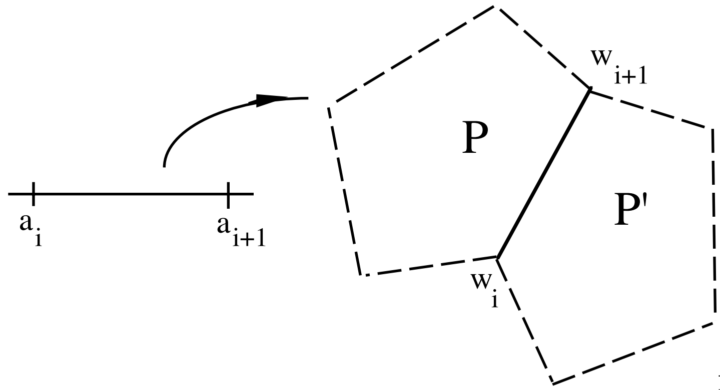


Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ tales que $f(a_i) = w_i$.

Ahora los puntos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dividen $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ en segmentos cada uno de los cuales se mapea en un segmento de recta.

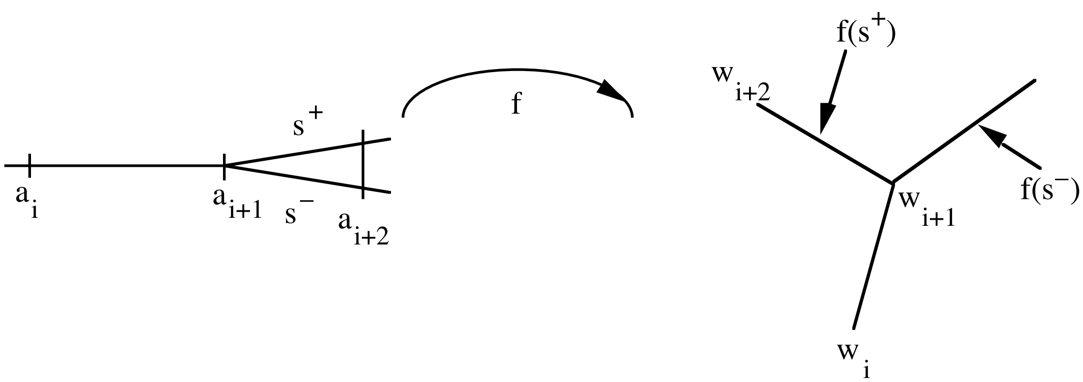


Entonces si L es cualquiera de estos segmentos, por el principio de reflexión de



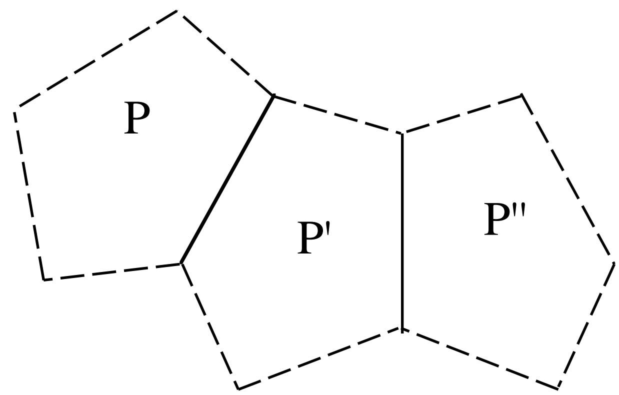
Schwarz, f se extiende a una función $f(H^-) = P'$.

$f : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $f \in \mathbf{H}(H^+ \cup H^- \cup L)$.

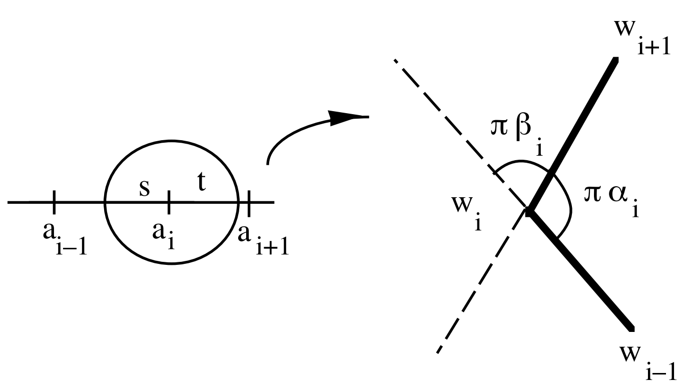


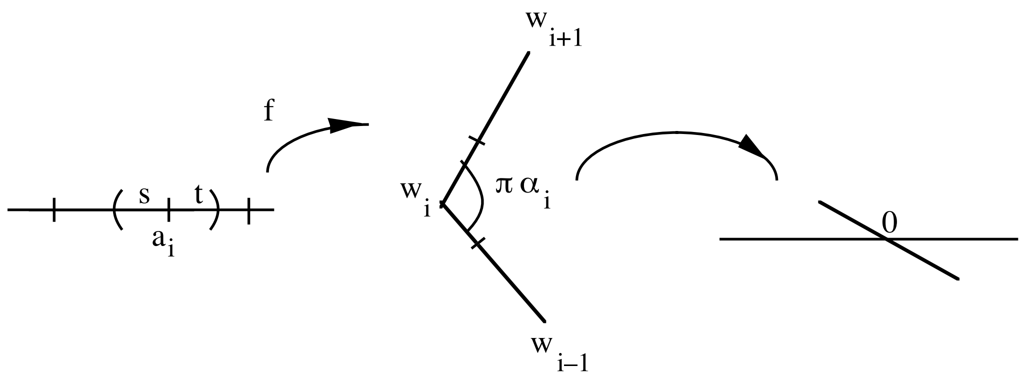
Aplicando nuevamente el principio de simetría, ahora a H^+, entonces existe f_1 en H^+ que extiende a f en H^+. Notemos que f_1 no necesariamente es f pues la reflexión pudo haber sido a través de otro subintervalo. Sea $f_1(H^+) = P''$.

Sin embargo P y P'' son congruentes es decir P'' se obtiene de P mediante una translación y una rotación alrededor del origen, por lo que se tiene que existen constantes A, B tales que $f_1(z) = A\, f(z) + B$, $A \neq 0$, $z \in H^+$. Por tanto $f_1'(z) = A\, f'(z)$; $f_1''(z) = A\, f''(z)$ $\Rightarrow \dfrac{f_1''(z)}{f_1'(z)} = \dfrac{f''(z)}{f'(z)}$ (notemos que $f'(z) \neq 0$ $\forall\, z \in H^+$ pues f es conforme).



Esto muestra que la función $g(z) = \frac{f''(z)}{f'(z)}$, toma, para $z \in H^+$ el mismo valor después de dos reflexiones a través del eje real. Lo mismo es cierto para $z \in H^-$. Entonces g está definida y es holomorfa en $\left(\mathbb{C} \cup \{\infty\}\right) - \left\{a_1, a_2, \ldots, a_n\right\}$. Para analizar la clase de singularidad que g tiene en cada a_i, veamos el comportamiento de f en una vecindad de a_i. De momento suponemos que $a_i \neq \infty \forall$ i. Sea $h(z) = \left[f(z) - f\left(a_i\right)\right]^{\frac{1}{\alpha_i}}$.





Por el principio de simetría, h es analítica en a_i , por lo tanto $f(z) = f(a_i) + h(z)^{\alpha_i}$, $h(a_i) = 0$, $h'(a_i) \neq 0$. Escribamos $h(z) = (z - a_i)\, m(z)$, m holomorfa en una vecindad de $a_i \Rightarrow f(z) = f(a_i) + (z - a_i)^{\alpha_i}\, m(z)^{\alpha_i}$. Entonces $g(z) = \dfrac{f''(z)}{f'(z)} = \dfrac{\alpha_i - 1}{z - a_i} + k(z) = \dfrac{-\beta_i}{z - a_i} + k(z)$, donde k es analítica en a_i, es decir $g(z) + \dfrac{\beta_i}{z - a_i}$ es holomorfa alrededor de $z = a_i$. Entonces $g_1(z) = g(z) + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\beta_i}{z - a_i} \in \mathbf{H}(\mathbb{C} \cup \{\infty\})$ y es acotada, por lo que por el Teorema de Liouville tenemos que $g_1(z)$ es constante. De hecho f es analítica en $z = \infty$, por lo que $f\left(\frac{1}{z}\right)$ es analítica en $z = 0$ o sea que para $\left|\frac{1}{z}\right| < \frac{1}{R}$ (o $|z| > R$), $f(z) = f(\infty) + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \ldots$; $f'(z) = - c_1 z^{-2} - 2 c_2 z^{-2} - \ldots$; $f''(z) = 2 c_1 z^{-3} + 6 c_2 z^{-4} + \ldots$, por lo que $g(\infty) = 0 \Rightarrow g_1(\infty) = 0 \Rightarrow g_1 \equiv 0$, lo que implica que

$$g(z) = \frac{f''(z)}{f'(z)} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\beta_i}{z - a_i} = (\operatorname{Ln}(f'(z)))' \Rightarrow \operatorname{Log} f'(z) =$$

$$\left\{-\sum_{i=1}^{n} \beta_i \operatorname{Ln}(z - a_i)\right\} + \operatorname{Ln} C = \operatorname{Ln}\left\{C \prod_{i=1}^{n} (z - a_i)^{-\beta_i}\right\} \Rightarrow f'(z) = C \prod_{i=1}^{n} (z - a_i)^{-\beta_i}$$

y $\boxed{f(z) = C \displaystyle\int \prod_{i=1}^{n} (z - a_i)^{-\beta_i}\, dz + D}$, con C y D constantes. C y D determinan el tamaño y la posición del polígono P.

Como se describe en el Teorema del Mapeo de Riemann, tres puntos pueden ser descritos, es decir, podemos escoger tres puntos de entre $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ de antemano. El resto de los a_i's quedará automáticamente determinado.

Resumiendo, el anterior desarrollo prueba:

TEOREMA 6.5.17 (FORMULA DE SCHWARZ-CHRISTOFFEL PARA H^+):

Sea P un polígono con vértices $w_1, w_2, \dots, w_n$ y con ángulos exteriores $\pi\,\beta_i$, $-1 < \beta_i < 1$. Entonces los mapeos conformes biyectivos entre H^+ y P están dados por:

$$f(z) = a\left(\int_{z_0}^{z} \left(\xi - x_1\right)^{-\beta_1} \bullet \dots \bullet \left(\xi - x_n\right)^{-\beta_n} d\xi\right) + b$$

donde $a, b \in \mathbb{C}$ son constantes, $z_0 \in H^+$ está fijo y la integral se hace sobre cualquier camino que conecte z_0 con $z \in H^+$. Además se tiene:

(i) Tres de los puntos $x_1, x_2, \dots, x_n$ pueden ser escogidos arbitrariamente.

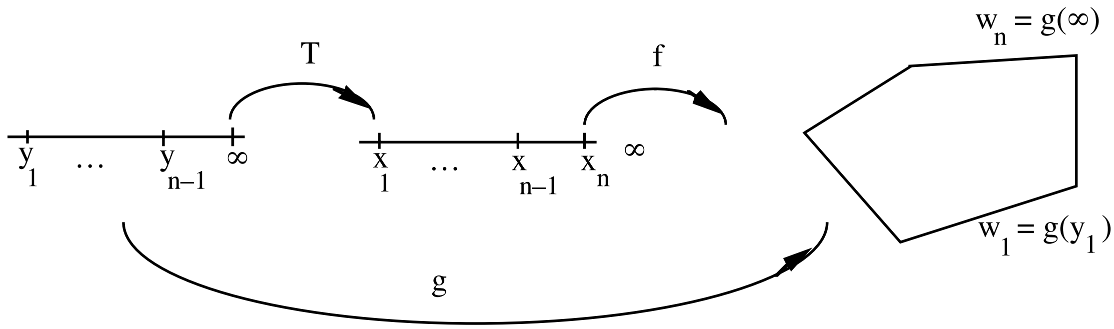
(ii) a y b determinan el tamaño y la posición de P.

(iii) $f(x_i) = w_i$, $i = 1, \dots, n$. ♦

OBSERVACION 6.5.18:

En el desarrollo anterior se supuso que los puntos $x_1, x_2, \dots, x_n$ eran reales. Si queremos encontrar la fórmula de Schwarz-Christoffel con uno de los puntos al infinito, hagamos un cambio de variable con una transformada de Möbius: $T(z) = -\frac{1}{z} + x_n$. Por el desarrollo anterior a 6.2.17, se tiene que $T\left(H^+\right) = H^+$ y si $T\left(y_i\right) = x_i$, $1 \le i \le n-1$, $T(\infty) = x_n$, $y_1 < y_2 < \ldots < y_{n-1}$ (" $< y_n = \infty$ ").

Ahora bien se tiene que si $g(z) = f(T(z))$, $g(z) = a\left(\int_{w_0}^{w = T(z) = -\frac{1}{z} + x_n} \prod_{i=1}^{n} \left(\xi - x_i\right)^{-\beta_i} d\xi\right) + b.$



Con el cambio de variable $\eta = T^{-1}\,\xi$, $\xi = T\,\eta = -\frac{1}{\eta} + x_n$, se tendrá:

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\xi - x_i\right)^{-\beta_i} d\xi = \left\{\prod_{i=1}^{n-1}\left(T\eta - Ty_i\right)^{-\beta_i}\right\} \bullet \left(T\eta - T\infty\right)^{-\beta_n} \bullet \left(T\eta\right)' \, d\eta =$$

$$= \left\{\prod_{i=1}^{n-1}\left[\left(-\frac{1}{\eta} + x_n\right) - \left(-\frac{1}{y_i} + x_n\right)\right]^{-\beta_i}\right\} \bullet \left(-\frac{1}{\eta} + x_n - x_n\right)^{-\beta_n} \bullet \left(\frac{1}{\eta^2}\right) d\eta =$$

$$= \left\{\prod_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{y_i} - \frac{1}{\eta}\right)^{-\beta_i}\right\} \bullet \left(-\frac{1}{\eta}\right)^{-\beta_n} \bullet \left(\frac{1}{\eta^2}\right) d\eta = c \prod_{i=1}^{n-1}\left(\eta - y_i\right)^{-\beta_i} \bullet \eta^{\beta_1 + \ldots + \beta_n} \bullet \left(\frac{1}{\eta^2}\right) d\eta,$$

con $c = \prod_{i=1}^{n-1} y_i^{\beta_i}$. Puesto que $\sum_{i=1}^{n} \beta_i = 2$, se sigue que:

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\xi - x_i\right)^{-\beta_i} d\xi = c \prod_{i=1}^{n-1}\left(\eta - y_i\right)^{-\beta_i} d\eta, \text{ es decir}$$

$$g(z) = A\left(\int_{T^{-1}\left(w_0\right)=z_0}^{T^{-1}(w)=z} \prod_{i=1}^{n-1}\left(\eta - y_i\right)^{-\beta_i} d\eta\right) + B, \text{ la cual es la misma que la}$$

fórmula de Schwarz-Christoffel pero reducida en un factor lo que hace un poco menos difícil de calcular esta integral.

Resumiendo, hemos probado:

TEOREMA 6.5.19 (FORMULA DE SCHWARZ-CHRISTOFFEL PARA H^+):

Sea P un polígono con vértices $w_1, w_2, \ldots, w_n$ y con ángulos exteriores $\pi\ \beta_i$, $-1 < \beta_i < 1$. Entonces los mapeos conformes biyectivos entre H^+ y P tales que el ∞ se mapea en w_n están dados por:

$$g(z) = A\left(\int_{z_0}^{z}\left(\xi - y_1\right)^{-\beta_1} \bullet \ldots \bullet \left(\xi - y_{n-1}\right)^{-\beta_{n-1}} d\xi\right) + B$$

donde $A, B \in \mathbb{C}$ son constantes, $z_0 \in H^+$ está fijo y la integral se hace sobre cualquier camino que conecte z_0 con $z \in H^+$. Además se tiene:

(i) Dos de los puntos $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ pueden ser escogidos arbitrariamente.

(ii) A y B determinan el tamaño y la posición de P.

(iii) $g\left(x_i\right) = w_i$, $i = 1, \ldots, n-1$, $g(\infty) = w_n$. ♦

Similarmente podemos obtener fórmulas de Schwarz-Christoffel cambiando H^+ por U. Digamos que $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \partial U$ y sea $T : U \longrightarrow H^+$ de Möbius tal que $T\left(z_i\right) = x_i$. Entonces con el cambio de variable $\eta = T^{-1}\xi$ se tendrá:

TEOREMA 6.5.20 (FORMULA DE SCHWARZ-CHRISTOFFEL PARA U):

Sea P un polígono con vértices $w_1, w_2, \ldots, w_n$ y con ángulos exteriores $\pi\,\beta_i$, $-1 < \beta_i < 1$. Entonces los mapeos conformes biyectivos entre U y P están dados por:

$$f(z) = A\left(\int_0^z \left(\xi - z_1\right)^{-\beta_1} \bullet \ldots \bullet \left(\xi - z_n\right)^{-\beta_n} d\xi\right) + B$$

con $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \partial U$ y donde $A, B \in \mathbb{C}$ son constantes, $z \in U$ está fijo y la integral se hace sobre cualquier camino que conecte 0 con z. Además se tiene:

(i) Tres de los puntos $z_1, z_2, \ldots, z_n$ pueden ser escogidos arbitrariamente.

(ii) A y B determinan el tamaño y la posición de P.

(iii) $f\left(z_i\right) = w_i$, $i = 1, \ldots, n$. ♦

OBSERVACION 6.5.21:

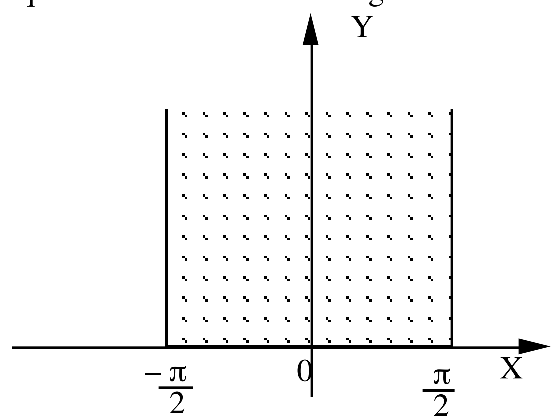
Las fórmulas de Schwarz-Christoffel permanecen correctas si uno de los vértices del polígono esta en el infinito. El ángulo en ∞ se calcula acorde a que la suma de la ángulos exteriores debe ser $2\,\pi$.

EJEMPLO 6.5.22:

La transformación conforme que manda H^+ en el interior de un triángulo tal que ∞ va a un vértice es de la forma: $f(z) = A\left(\displaystyle\int_0^z \frac{d\xi}{(\xi - a)^{\beta_1} \bullet (\xi - b)^{\beta_2}}\right) + B$, con $a, b \in \mathbb{R}$, $\left|\beta_i\right| \leq 1$, $i = 1, 2$.

EJEMPLO 6.5.23:

Encontremos un mapeo conforme que transforme H^+ en la región Ω definida por



$\Omega = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Re}\ z| < \frac{\pi}{2},\ \mathrm{Im}\ z > 0 \right\}$.

Aquí el triángulo en consideración tendrá vértices en $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \infty$. Los ángulos interiores del triángulo serán $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0$ (y por lo tanto los exteriores serán $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \pi$).

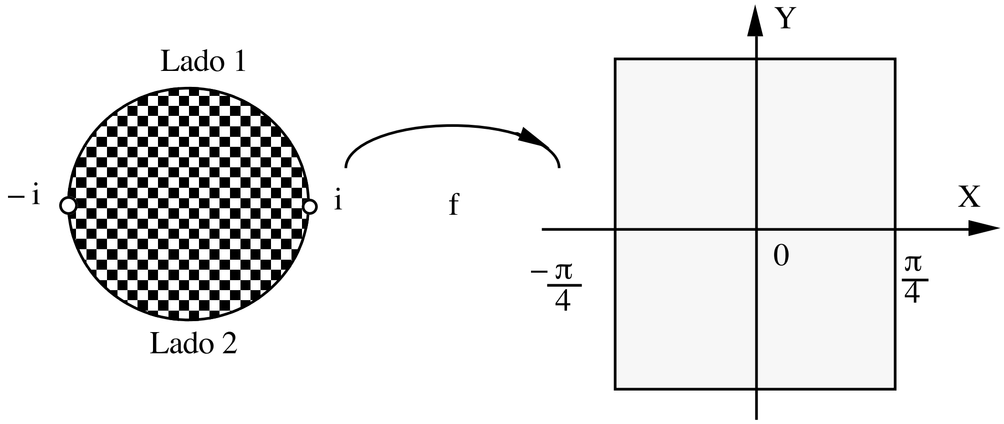
Entonces si pedimos $f : H^+ \longrightarrow \Omega$, $f(-1) = -\frac{\pi}{2}$, $f(1) = \frac{\pi}{2}$, $f(\infty) = \infty$, por 6.5.19 se tendrá que $f(z) = \alpha \left(\int_0^z (\xi + 1)^{-\frac{1}{2}} \bullet (\xi - 1)^{-\frac{1}{2}} d\xi \right) + \beta = \alpha \left(\int_0^z \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} \right) + \beta =$ α Arc Sen $z + \beta$.

Puesto que $\left. \begin{array}{l} f(-1) = -\frac{\pi}{2} = -\alpha \frac{\pi}{2} + \beta \\ f(1) = \frac{\pi}{2} = \alpha \frac{\pi}{2} + \beta \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha = 1,\ \beta = 0$, por lo tanto $\boxed{f(z) = \text{Arc Sen } z}$, lo cual coincide con lo visto en § 3.4.

EJEMPLO 6.5.24:

Hallemos un mapeo conforme que transforme U en $\Omega = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid -\frac{\pi}{4} < \mathrm{Re}\ z < \frac{\pi}{4} \right\}$

conf(i) = f(– i) = ∞. Notemos que Ω puede ser considerado un polígono de 2 lados con ángulos en ∞ = 0, es decir lo ángulos exteriores son iguales a π.

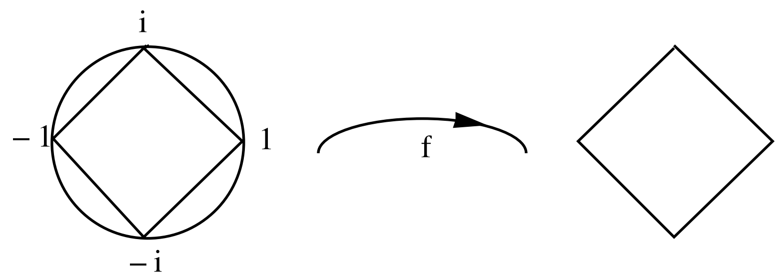


Entonces, usando 6.5.20, f será de la forma: $f(z) = A\int_0^z (z+i)^{-1}(z-i)^{-1}dz + B = A\int_0^z \frac{dz}{z^2+1} + B = A \text{ Arc Tan } z + B$. Tomando A = 1, B = 0, se tendrá que f(z) = Arc Tan z.

Aquí es importante hacer notar que se necesita una justificación especial para usar las fórmulas de Schwarz-Christoffel. De cualquier manera es más sencillo verificar la validez de la fórmula obtenida usando § 3.4, que esta justificación.

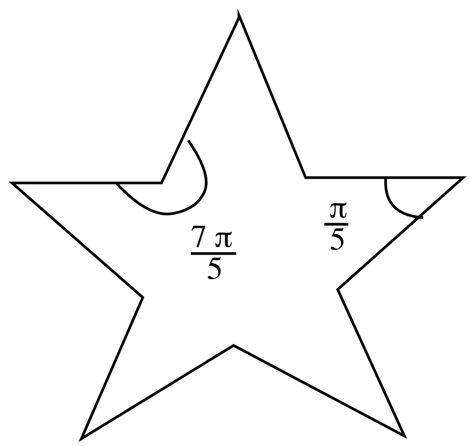
EJEMPLO 6.5.25:

Consideremos $w = \int_0^z \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^4 - 1}} = f(z)$. Entonces $\frac{1}{\sqrt{\xi^4-1}} = \left((\xi^2-1)(\xi^2+1)\right)^{-\frac{1}{2}} = = (\xi-1)^{-\frac{1}{2}}(\xi+1)^{-\frac{1}{2}}(\xi-i)^{-\frac{1}{2}}(\xi+i)^{-\frac{1}{2}}$, por lo que f(z) manda U en un rectángulo debido a que lo ángulos exteriores son $\frac{\pi}{2}$.

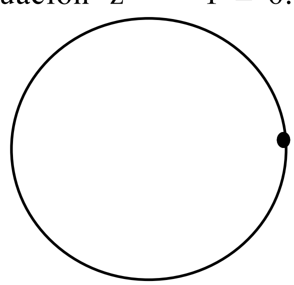


EJEMPLO 6.5.26:

Hallemos un mapeo conforme que transforme U en el pentagrama:



Puesto que el pentagrama tiene 10 lados, consideremos las raíces décimas de la unidad, es decir las soluciones de la ecuación $z^{10} - 1 = 0$. Ahora $z^{10} - 1 = (z^5 - 1)(z^5 + 1)$ por lo que el mapeo



$T : U \longrightarrow P$, P = pentagrama, debe ser dado mandando las raíces de $z^5 - 1$ a los ángulos agudos del pentagrama y las raíces de $z^5 + 1$ a los ángulos obtusos. Para los ángulos agudos, los ángulos exteriors son $\frac{4}{5}\pi$ y para los obtusos $\pi - \frac{7}{5}\pi = -\frac{2}{5}\pi$, por lo que $f(z) = A\int_0^z \left(\xi^5 - 1\right)^{-\frac{4}{5}} \left(\xi^5 + 1\right)^{\frac{2}{5}} d\xi + B$. Podemos tomar A = 1, B= 0 y entonces f será:

$$\boxed{f(z) = \int_0^z \frac{\left(\xi^5 + 1\right)^{\frac{2}{5}}}{\left(\xi^5 - 1\right)^{\frac{4}{5}}}\, d\xi}\,.$$

CAPITULO 7.

APLICACIONES

§1. Problema de Dirichlet.

Primero recordemos la definición de lo que es una función armónica.

DEFINICION 7.1.1:

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ una región, $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ se llama armónica si tiene segundas derivadas parciales continuas y $\nabla^2 u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

OBSERVACION 7.1.2:

Las partes real e imaginaria de una función holomorfa son armónicas y éstas reciben el nombre de armónicas conjugadas.

Anteriormente hicimos mención al hecho de que una función armónica satisface el principio del módulo máximo, esto implica que si dos funciones u y v son armónicas en una región Ω, continuas en $\overline{\Omega}$ y coinciden en la frontera $\partial\Omega$ de Ω, entonces $u \equiv v$. Esto se sigue del hecho de que $u - v$ tiene máximo y mínimo igual a 0. Es decir, tenemos el siguiente Teorema:

TEOREMA 7.1.3:

Una función armónica en una región Ω y continua en $\overline{\Omega}$, está unívocamente determinada por sus valores en $\partial\Omega$. ♦

Capítulo 7

Ahora bien, el problema de Dirichlet es el siguiente:

PROBLEMA 7.1.4:

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ una región. Sea $f : \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. ¿Existe $u : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que u es armónica en Ω y tal que $u(z) = f(z)\ \forall\, z \in \partial\Omega$?

En esta sección demostraremos que la respuesta al problema de Dirichlet es afirmativa en el caso de que Ω sea simplemente conexo con $\partial\Omega$ simple de Jordan y f sea continua.

Primero solucionemos el problema en el caso de que $\Omega = U =$ disco unitario.

Sea $f : T = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \} \longrightarrow \mathbb{R}$. consideremos la función $u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\, P_r(\theta - t)\, dt$, con $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le r < 1$, $P_r(\theta - t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in(\theta - t)} = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - t) + r^2} = \operatorname{Re}\left(\frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}\right)$, $z = re^{i\theta}$. Se tiene:

TEOREMA 7.1.5 (POISSON-SCHWARZ):

$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\, P_r(\theta - t)\, dt$, con $z = re^{i\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le r < 1$, es armónica en U y se tiene $\lim_{z \to e^{i\theta}} u(z) = f(e^{i\theta})$ para lo puntos en que $f(e^{i\theta})$ es continua.

DEMOSTRACION:

De hecho $u(z) = \operatorname{Re}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=1} \frac{\xi + z}{\xi - z}\, f(\xi)\, \frac{d\xi}{\xi}\right]$, la integral es holomorfa y por tanto u(z) es armónica. Para la verificación de este resultado, ver Rudin [10], Teorema 5.25 páginas 118-119, Teorema 11.10, página 255; Ahlfors, Teoremas 24 y 25, páginas 165-169. ♦

7.1.5 da solución explícita al problema de Dirichlet para U. Si Ω es cualquier región simplemente conexa, $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$, cuya frontera $\partial\Omega$ es una curva simple de Jordan en S^2, entonces por el Teorema del Mapeo de Riemann existe $\varphi : \overline{\Omega} \longrightarrow \overline{U}$ continua biyectiva tal que $\varphi \in \mathbf{H}(\Omega)$. Para solucionar el problema de Dirichlet en Ω, sea $f : \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, digamos, continua por tramos, entonces $\varphi(\partial\Omega) = T = \partial U = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \right\}$ y $f \circ \varphi^{-1}|_T : T \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua por tramos. Entonces si u(z) es la solución al problema de Dirichlet con respecto a U y la función $f \circ \varphi^{-1}$, $u : \overline{U} \longrightarrow \mathbb{R}$. Entonces $v : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $v = u \circ \varphi$ es la solución buscada. Explícitamente:

$$\boxed{\begin{aligned} v(z) &= \operatorname{Re}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=1} \frac{\xi + \varphi(z)}{\xi - \varphi(z)} \left(f \circ \varphi^{-1}\right)(\xi)\,\frac{d\xi}{\xi}\right] = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\varphi^{-1}\left(e^{it}\right)\right) \operatorname{Re}\left(\frac{e^{it} + \varphi(z)}{e^{it} - \varphi(z)}\right) dt \end{aligned}}.$$

EJEMPLO 7.1.6:

Cuando $\Omega = B\left(z_0, R\right)$, $\varphi : \overline{B\left(z_0, R\right)} \longrightarrow \overline{U}$, $\varphi(z) = \dfrac{z - z_0}{R}$, $\varphi^{-1}(z) = R\,z + z_0$, por lo que la solución al problema de Dirichlet para $B\left(z_0, R\right)$ está dada por:

$$v(z) = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=1}\frac{\xi + \dfrac{z - z_0}{R}}{\xi - \dfrac{z - z_0}{R}}\, f\left(R\ \xi + z_0\right)\frac{d\xi}{\xi}\right] =$$

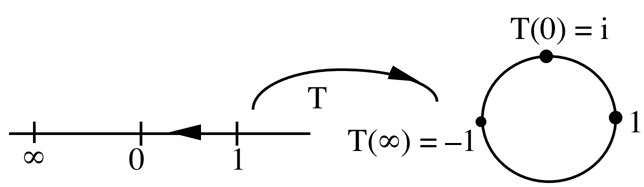
$$= \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=1}\frac{R\ \xi + z_0 + z - 2\ z_0}{R\ \xi + z_0 - z}\, f\left(R\ \xi + z_0\right)\frac{d\xi}{\xi}\right].$$

Sea $\eta = R\ \xi + z_0$; $d\eta = R\ d\xi$; $\dfrac{d\xi}{\xi} = \dfrac{\dfrac{d\eta}{R}}{\dfrac{\eta - z_0}{R}} = \dfrac{d\eta}{\eta - z_0}$, por lo tanto

$$\boxed{v(z) = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{|\eta - z_0|=R}\frac{\eta + z - 2\ z_0}{\eta - z}\, f\left(\eta\right)\frac{d\eta}{\eta - z_0}\right]}.$$

EJEMPLO 7.1.7:

Para solucionar el problema de Dirichlet en el semiplano superior, consideremos la transformación $T : H^+ \longrightarrow U$ dada por $T^{-1}(z) = (z\ ,\ 1,\ -\ i,\ -\ 1) = \dfrac{\left(\dfrac{z\ +\ i}{z\ +\ 1}\right)}{\left(\dfrac{1\ +\ i}{2}\right)} =$



$(1\ -\ i)\ \dfrac{z\ +\ i}{z\ +\ 1}$, por lo que $T(z) = \dfrac{z\ -\ (1\ -\ i)\ i}{-\ z\ +\ (1\ -\ i)} = -\dfrac{z\ -\ 1\ -\ i}{z\ -\ 1\ +\ i}$.

Entonces la solución al problema de Dirichlet con función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ será:

$$v(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left((1 - i)\,\frac{e^{it} + i}{e^{it} + 1}\right) \operatorname{Re}\left[\frac{e^{it} - \dfrac{z - 1 - i}{z - 1 + i}}{e^{it} + \dfrac{z - 1 - i}{z - 1 + i}}\right] dt.$$

Con el cambio de variable $\eta = T^{-1}(\xi)$, se obtiene:

$$\boxed{v(x + i\,y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y\, f(\eta)\, d\eta}{(x - \eta)^2 + y^2}}\,.$$

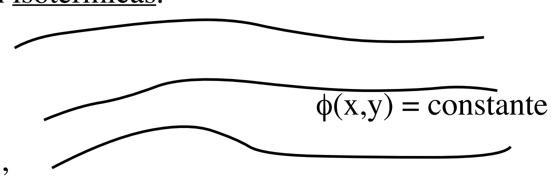
§ 2. Aplicaciones a la Física.

Hay varios problemas en Física cuya solución depende de la ecuación de Laplace : $\nabla^2\phi = \phi_{xx} + \phi_{yy} = 0,\ \phi : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

Las soluciones a esta ecuación son las funciones armónicas en Ω. La teoría de las soluciones de la Ecuación de Laplace recibe el nombre de Teoría del Potencial. Como ejemplos de la teoría del potencial están el caso bidimensional de un estado estable en electrostática, el fluído de calor en un medio homogeneo, la mecánica de un fluído ideal, etc.

En electrostática, $\phi(x, y)$ se interpreta como el potencial eléctrico o voltaje en el punto (x, y) y $\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}$ son las componentes de la intensidad del campo eléctrico. Las curvas $\phi(x, y) =$ constante reciben el nombre de equipotenciales.

En problemas de fluído de calor, $\phi(x, y)$ es la temperatura en el punto (x, y) y las curvas $\phi(x, y) =$ constante se llaman isotérmicas.

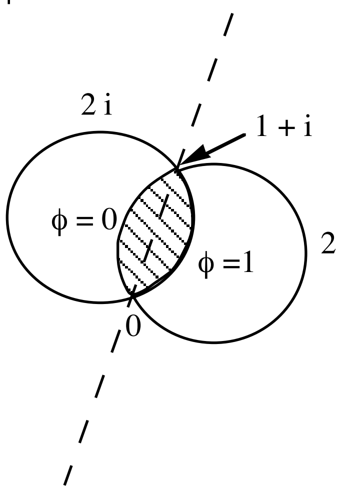


En mecánica de fluídos, las curvas $\phi(x, y) =$ constante son los caminos que recorren las partículas del fluído, es decir son las líneas de corriente.

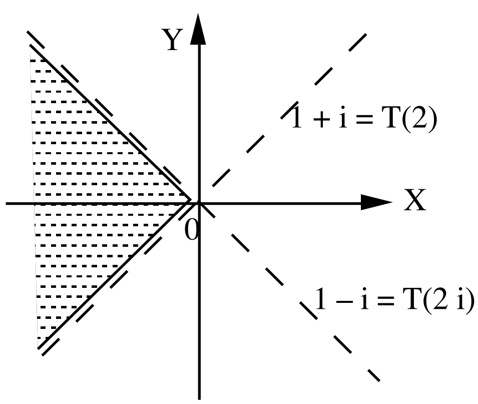
Capítulo 7

EJEMPLO 7.2.1:

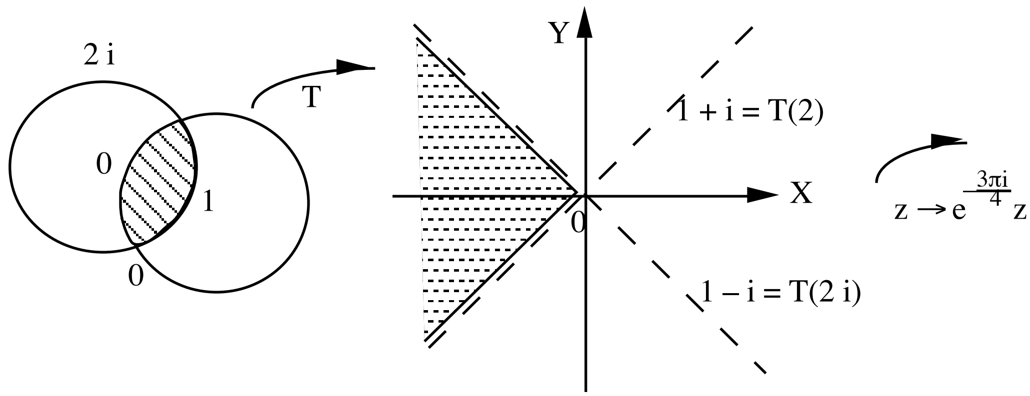
Encontremos la temperatura ϕ dentro de la lente acotada por los círculos $|z - 1| = 1$ y $|z - i| = 1$, y tal que sobre el círculo $|z - 1| = 1$ la temperatura $\phi = 0$ y sobre $|z - i| = 1$, $\phi = 1$.

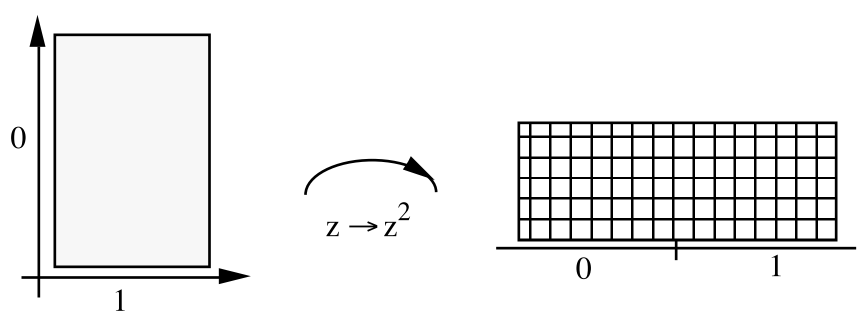


Primero transformemos la región en una región más simple; por ejemplo $T(z) = \dfrac{z}{z - (1 + i)}$ manda los dos círculos en dos rectas que se intersectan en 0, pues $T(0) = 0$ y $T(1 + i) = \infty$. Ahora $T(2) = \dfrac{2}{1 - i} = 1 + i$, $T(2i) = \dfrac{2i}{i - 1} = i(-1 - i) = 1 - i$.



Rotemos esta región un ángulo de $-\dfrac{3\pi}{4}$, es decir aplicamos la función $z \to e^{-\frac{3\pi i}{4}} z$, y finalmente elevemos al cuadrado.





La función total es $\varphi(z) = \left(\dfrac{e^{-\frac{3\pi i}{4}} z}{z - (1 + i)} \right)^2$.

La solución para el semiplano superior está dado por el ejemplo 7.1.7, es decir

$u(x, y) = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{y\, f(\eta)\, d\eta}{(x - \eta)^2 + y^2}$. Ahora bien, $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$, por lo que

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{y\, d\eta}{(x - \eta)^2 + y^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{y\, d\eta}{(\eta - x)^2 + y^2} = \frac{1}{\pi\, y} \int_0^{\infty} \frac{d\eta}{\left(\frac{\eta - x}{y}\right)^2 + 1}.$$

Sea $t = \frac{\eta - x}{y}$, $d\eta = y\,dt$, entonces $u(x, y) = \frac{1}{\pi\ y}\int_{0}^{\infty} \frac{y\ dt}{t^2 + 1} = \frac{1}{\pi}\text{Arc Tan } t\Big|_{-\frac{x}{y}}^{\infty} =$

$\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \text{Arc Tan}\left(-\frac{x}{y}\right)\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\text{Arg}\,(-\,i\ z) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2} + \text{Arg } z\right) = 1 - \frac{1}{\pi}\text{Arg } z,$

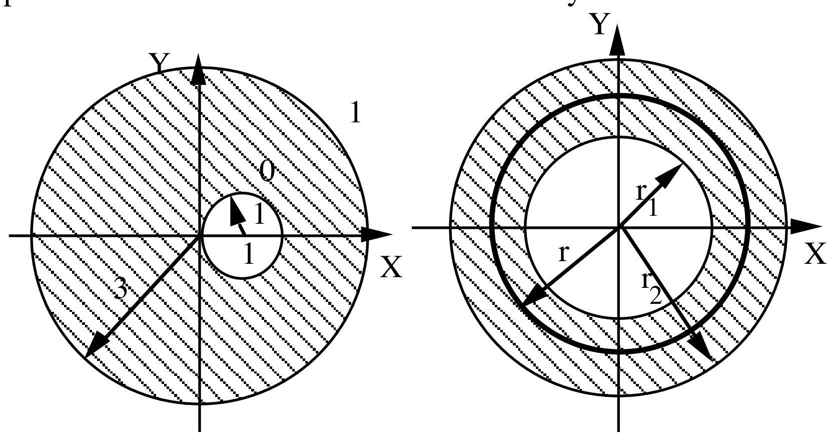
$0 \le \text{Arg } z \le \pi$.

u es la solución para H^+, por lo que la solución al problema original es:

$$\phi(x, y) = u\big(\varphi(z)\big) = u\left(\left(\frac{e^{-\frac{3\pi i}{4}}\ z}{z - (1 + i)}\right)^2\right) = 1 - \frac{1}{\pi}\text{Arg}\left(\left(\frac{e^{-\frac{3\pi i}{4}}\ z}{z - (1 + i)}\right)^2\right).$$

EJEMPLO 7.2.2:

Encontremos el potencial eléctrico de un capacitor formado por 2 conductores cilíndricos paralelos con centros en 1 y 0 y radios 1 y 3 respectivamente, cuando el potencial eléctrico en el cilindro interior es 0 y 1 en el cilindro exterior.



Primer notemos que si los dos cilindros fuesen concéntricos, entonces las líneas equipotenciales serían círculos concéntricos.

En este último caso, si el potencial es a en el cilindro interior y b en el exterior, se debe tener que si u es el potencial, $u(x, y) = u\left(r\ e^{i\theta}\right) = f(r)$, es decir u solo depende de r y no de θ.

Se tiene que $\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{array}\right\}$ y $\left\{\begin{array}{l} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \mathrm{Arc\,Tan}\,\frac{y}{x} \end{array}\right.$, por lo que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} = u_r \frac{2\,x}{2\sqrt{x^2+y^2}} + 0 = \frac{u_r\,x}{r} = u_r \cos\theta;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y} = u_r \frac{2\,y}{2\sqrt{x^2+y^2}} + 0 = \frac{u_r\,y}{r} = u_r\,\mathrm{sen}\,\theta;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u_r\cos\theta\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(u_r\cos\theta\right)\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(u_r\cos\theta\right)\frac{\partial \theta}{\partial x} =$$

$$= u_{r\,r}\cos\theta\cos\theta - u_r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}} = u_{r\,r}\cos^2\theta + u_r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\frac{y}{x^2+y^2} =$$

$$= u_{r\,r}\cos^2\theta + u_r\,\mathrm{sen}\,\theta\frac{r\,\mathrm{sen}\,\theta}{r^2} = u_{r\,r}\cos^2\theta + \frac{u_r}{r}\mathrm{sen}^2\,\theta;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(u_r\,\mathrm{sen}\,\theta\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(u_r\,\mathrm{sen}\,\theta\right)\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(u_r\cos\theta\right)\frac{\partial \theta}{\partial y} =$$

$$= u_{r\,r}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\theta + u_r\cos\theta\,\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}} = u_{r\,r}\,\mathrm{sen}^2\,\theta + u_r\cos\theta\,\frac{x}{x^2+y^2} =$$

$$= u_{r\,r}\mathrm{sen}^2\,\theta + u_r\cos\theta\frac{r\cos\theta}{r^2} = u_{r\,r}\,\mathrm{sen}^2\,\theta + \frac{u_r}{r}\cos^2\theta,$$

por lo que la ecuación de Laplace queda:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u_{r\,r}\left(\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\,\theta\right) + \frac{u_r}{r}\left(\mathrm{sen}^2\,\theta + \cos^2\theta\right) = u_{r\,r} + \frac{u_r}{r} = 0.$$

Se tiene que $u_{r\,r} = f''$, $u_r = f'$, por lo que $(\mathrm{Ln}\ f')' = \frac{f''}{f'} = -\frac{1}{r} \Rightarrow \mathrm{Ln}\ f' = -\mathrm{Ln}\ r + A_1$ $= -\mathrm{Ln}\ r + \mathrm{Ln}\ A = \mathrm{Ln}\,\frac{A}{r} \Rightarrow f' = \frac{A}{r} \Rightarrow u = A\ \mathrm{Ln}\ r + B = u(r)$.

Ahora las condiciones iniciales son: $\left.\begin{array}{l} u(r_1) = A \operatorname{Ln} r_1 + B = a \\ u(r_2) = A \operatorname{Ln} r_2 + B = b \end{array}\right\} \Rightarrow A = \dfrac{b - a}{\operatorname{Ln} \dfrac{r_2}{r_1}}$,

$$B = a - \frac{b - a}{\operatorname{Lr} \dfrac{r_2}{r_1}} \operatorname{Ln} r_1 = \frac{a \operatorname{Ln} r_2 - a \operatorname{Ln} r_1 - b \operatorname{Ln} r_1 + a \operatorname{Ln} r_1}{\operatorname{L} \dfrac{r_2}{r_1}} =$$

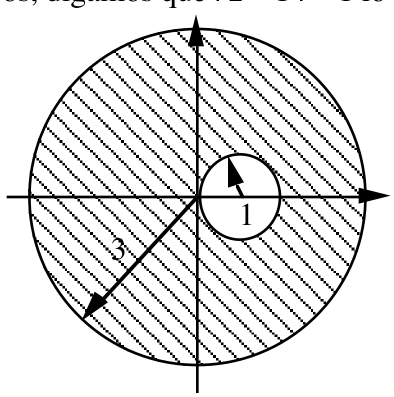
$$= \frac{a \operatorname{Ln} r_2 - b \operatorname{Ln} r_1}{\operatorname{Ln} r_2 - \operatorname{Ln} r_1}.$$

Es decir la solución para el caso de dos cilindros paralelos es

$$u(z) = u\left(r\, e^{i\theta}\right) = f(r) = u(x, y) = \left(\frac{b - a}{\operatorname{Ln} \dfrac{r_2}{r_1}}\right) \operatorname{Ln} r + \frac{a \operatorname{Ln} r_2 - b \operatorname{Ln} r_1}{\operatorname{Ln} r_2 - \operatorname{Ln} r_1} =$$

$$= \frac{(b - a) \operatorname{Ln} r + a \operatorname{Ln} r_2 - b \operatorname{Ln} r_1}{\operatorname{Ln} r_2 - \operatorname{Ln} r_1}.$$

Para resolver nuestro problema original, sea T de Möbius que transforma nuestra región en 2 círculos concéntricos, digamos que $| z - 1 | = 1$ lo manda a $| z | = 1$. La solución



al problema será $v = u \circ T$. Sea $T(a) = 0$, entonces el conjugado de a con respecto a ambos círculos debe coincidir y lo llamamos a*. Se tiene que $T(a^*) = \infty$ y a* satisface: $\left.\begin{array}{l} (a^* - 1)\ \overline{(a - 1)} = 1 \\ (a^*)\ \overline{(a)} = 9 \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{1}{a - 1} + 1 = \dfrac{9}{a} \Rightarrow a + a\,(a - 1) =$ $9\,(a - 1) \Rightarrow a^2 - 9\,a + 9 = 0 \Rightarrow a = \dfrac{9 \pm \sqrt{81 - 36}}{2} = \dfrac{9 \pm \sqrt{45}}{2}$. Puesto que $| a - 1 | < 1$,

$a = \dfrac{9 - \sqrt{45}}{2}$, $a^* = \dfrac{18}{9 - \sqrt{45}} = \dfrac{18\left(9 + \sqrt{45}\right)}{81 - 45} = \dfrac{9 + \sqrt{45}}{2}$. Entonces $T(z) = \alpha\, \dfrac{z - a}{z - a^*} =$

$$\alpha\, \frac{z - \dfrac{9 - \sqrt{45}}{2}}{z - \dfrac{9 + \sqrt{45}}{2}} = \alpha \frac{2\,z - 9 + \sqrt{45}}{2\,z - 9 - \sqrt{45}}.$$

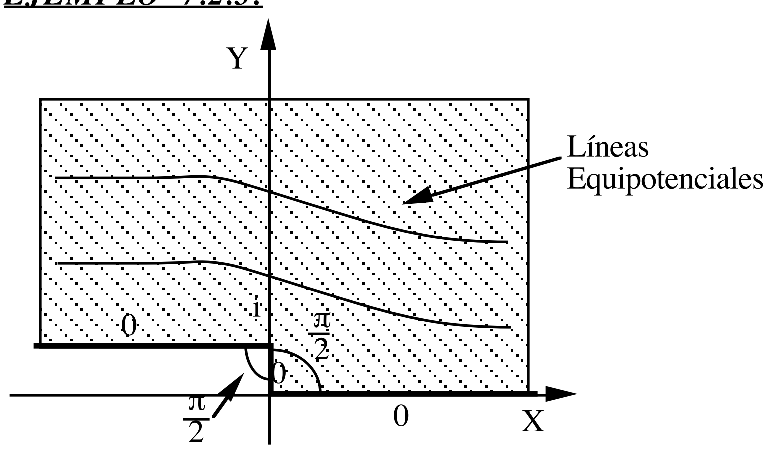
Para hallar α, hagamos $T(1) = 1 \Rightarrow 1 = \alpha \dfrac{2 - 9 + \sqrt{45}}{2 - 9 - \sqrt{45}} \Rightarrow \alpha = \dfrac{-7 - \sqrt{45}}{-7 + \sqrt{45}} =$ $= \dfrac{\sqrt{45} + 7}{\sqrt{45} - 7}$, por lo que $T(z) = \dfrac{\sqrt{45} + 7}{\sqrt{45} - 7} \bullet \dfrac{2\,z - 9 + \sqrt{45}}{2\,z - 9 - \sqrt{45}}$.

Ahora $T(3) = \dfrac{\sqrt{45} + 7}{\sqrt{45} - 7} \bullet \dfrac{6 - 9 + \sqrt{45}}{6 - 9 - \sqrt{45}} = \dfrac{\left(\sqrt{45} + 7\right)\left(-3 + \sqrt{45}\right)}{\left(\sqrt{45} - 7\right)\left(-3 - \sqrt{45}\right)} =$ $= \dfrac{4\sqrt{45} + 24}{4\sqrt{45} - 24}$.

Así pues tenemos $r_1 = 1$, $r_2 = \dfrac{4\sqrt{45} + 24}{4\sqrt{45} - 24}$, $a = 0$, $b = 1 \Rightarrow$ la solución al problema es:

$$v(z) = u(T(z)) = \frac{(1 - 0)\ \mathrm{Ln}\ |T(z)| + 0 - 0}{\mathrm{Ln}\ \dfrac{4\sqrt{45} + 24}{4\sqrt{45} - 24}} = \boxed{\frac{\mathrm{Ln}\left\{\left|\dfrac{\sqrt{45} + 7}{\sqrt{45} - 7} \bullet \dfrac{2\,z - 9 + \sqrt{45}}{2\,z - 9 - \sqrt{45}}\right|\right\}}{\mathrm{Ln}\left(4\sqrt{45} + 24\right) - \mathrm{Ln}\left(4\sqrt{45} - 24\right)}}.$$

EJEMPLO 7.2.3:



Encontremos una función no

constante en la región Ω de la siguiente figura, y cuyo flujo en toda la orilla es 0.

Primero veamos que si tuviésemos el semiplano superior, la solución sería $u(x, y) = C\,y$, con C una constante arbitraria. Hallaremos una transformación conforme f de la región Ω en H^+ y entonces la solución será: $v(z) = u(f(z)) = C \operatorname{Im} f$.

Ahora, la región Ω puede considerarse un triángulo con vértices en i, 0 y ∞. Los ángulos exteriores serán $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ y 2π respectivamente. Por tanto $g = f^{-1} : H^+ \longrightarrow \Omega$ con $g(-1) = i$, $g(1) = 0$, $g(\infty) = \infty$, se puede dar por las fórmulas de Schwarz-Christoffel (6.5.19). Se tiene $g'(z) = A\,(z + 1)^{+\frac{1}{2}}\,(z - 1)^{-\frac{1}{2}} = A\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Ahora bien, sea $I = \int \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{1}{2}} dz$. Consideremos el cambio de variable $\eta = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{1}{2}}$, $\eta^2 = \frac{z+1}{z-1}$, $\Rightarrow z = \frac{\eta^2+1}{\eta^2-1} = 1 + \frac{2}{\eta^2-1}$, $dz = \frac{-4}{\left(\eta^2-1\right)^2} d\eta$, por lo que $I = \int \frac{-4}{\left(\eta^2-1\right)^2} d\eta$.

Resolviendo ésta última integral por fracciones racionales obtenemos:

$I = \operatorname{Ln}\left[z + \sqrt{z^2 - 1}\right] + 2\sqrt{z^2 - 1}$ + constante, es decir,

$g(z) = A\left\{\operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2-1}\right) + 2\sqrt{z^2-1}\right\} + B.$

Aquí $\left(z^2 - 1\right)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}\operatorname{Ln}\left(z^2-1\right)}$ y tomamos la rama de Ln con $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Arg} z < \frac{3\pi}{2}$.

Ahora, $\begin{array}{lllll} g(-1) & = A\left(\operatorname{Ln}(-1) + 2\sqrt{0}\right) + B & = A\pi i + B & = i \\ g(1) & = A\left(\operatorname{Ln}(1) + 2\sqrt{0}\right) + B & = B & = 0 \end{array} \Rightarrow B = 0$ y

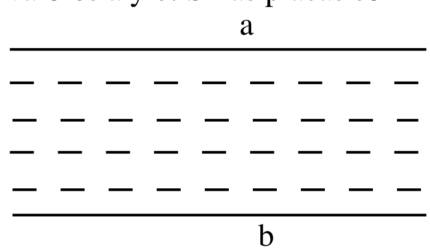
$A = \frac{1}{\pi}$. Así que $g(z) = f^{-1}(z) = \frac{1}{\pi}\left\{2\sqrt{z^2-1} + \operatorname{Ln}\left[z + \sqrt{z^2-1}\right]\right\}$.

La solución buscada será: $\boxed{v(z) = u(f(z)) = C \operatorname{Im}\left(g^{-1}(z)\right)}$.

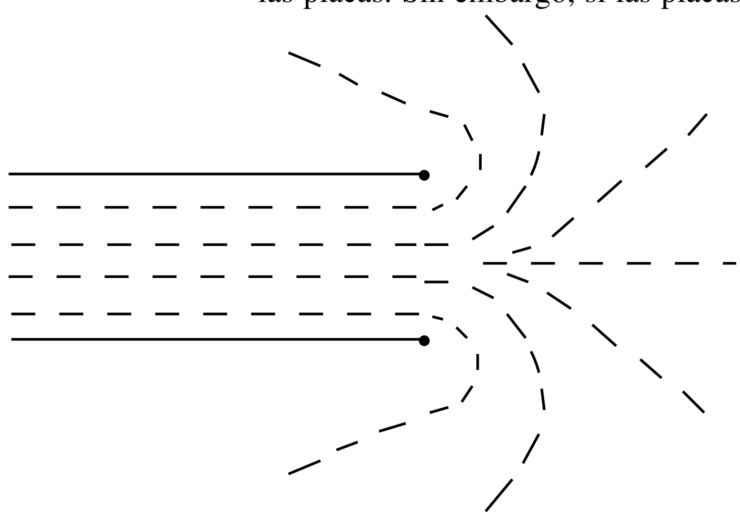
EJEMPLO 7.2.4:

Aplicaciones

Consideremos el problema de encontrar el potencial eléctrico de un capacitor con placas paralelas y valores a y b. Si las placas son infinitas, las lineal equipotenciales serán

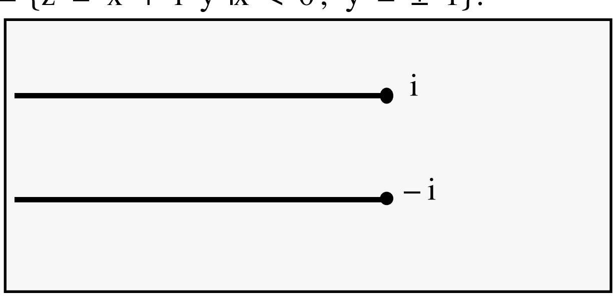


planos paralelos a las placas. Sin embargo, si las placas

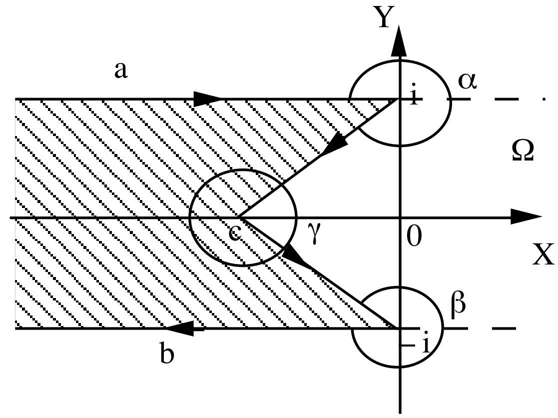


son semiinfinitas, es decir se extienden a ∞ en un solo lado el comportamiento del potencial es más complicado.

Así pues consideremos la región $\Omega = \mathbb{C} - L$, donde $L = \{z = x + iy \mid x < 0,\ y = \pm 1\}$.



Notemos que esta región es el límite

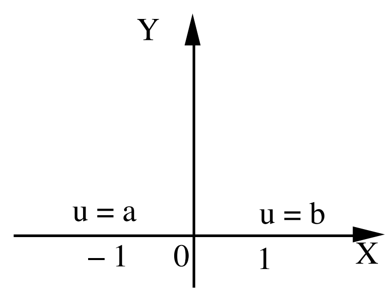


cuando c → – ∞ de las regiones de la figura:

Los ángulos interiores cumplen: $\alpha, \beta \xrightarrow[c \to -\infty]{} 2\pi$, $\gamma \xrightarrow[c \to -\infty]{} 0$, por lo que los ángulos exteriores en el límite serán: – π, – π y π (y el ángulo en el punto al ∞ será 3 π).

Sea $g : H^+ \longrightarrow \Omega$ la transformación de Schwarz-Christoffel tal que g(– 1) = i, g(0) = c ("– ∞"), g(1) = – i, entonces $g'(z) = A\,(z+1)^1\,(z-0)^{-1}\,(z-1)^1 = A\left(z^2-1\right)\frac{1}{z}$ $= A\left(z - \frac{1}{z}\right) \Rightarrow g(z) = A\left(\frac{z^2}{2} - \mathrm{Ln}\ z\right) + B, -\frac{\pi}{2} < \mathrm{Arg}\ z < \frac{3\pi}{2}$.

Además $\left.\begin{array}{l} g(-1) = A\left(\frac{1}{2} - \pi i\right) + B = i \\ g(1) = A\left(\frac{1}{2} - 0\right) + B = -i \end{array}\right\} \Rightarrow A = -\frac{2}{\pi};\ B = -i + \frac{1}{\pi}$, por lo tanto $\boxed{g(z) = -\frac{2}{\pi}\left(\frac{z^2}{2} - \mathrm{Ln}\ z\right) + \frac{1}{\pi} - i}$.



Ahora en el semiplano superior nuestro problema es:

Por 7.1.7 se tiene:

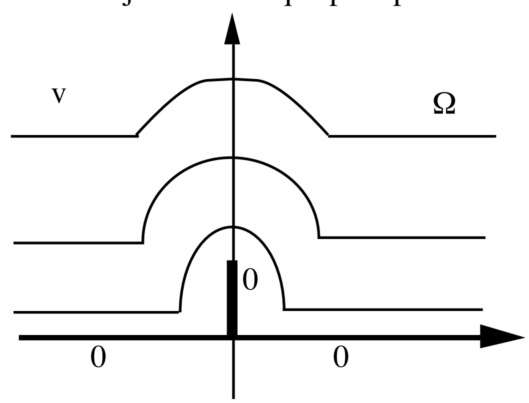
$$u(x, y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y\, f(\xi)\, d\xi}{(x-\xi)^2 + y^2}) = \frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{0} \frac{y\, f(\xi)\, d\xi}{(x-\xi)^2 + y^2} + \frac{b}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{y\, f(\xi)\, d\xi}{(x-\xi)^2 + y^2}$$

= \f(a,π) \b\bc\[(Arc Tan \b(– \f(x,y)) – \b(– \f(π,2))) + \f(b,π) \b\bc\[(\f(π,2) – Arc Tan \b(– \f(x,y))) = \f(a + b,2) + \f(a – b,π) Arc Tan \b(– \f(x,y)) = \f(a + b,2) + \f(a – b,π) Arg $(-\ i\ z) = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{\pi}\left\{-\frac{\pi}{2} + \text{Arg } z\right\} = b + \frac{a-b}{\pi}\,\text{Arg } z.$

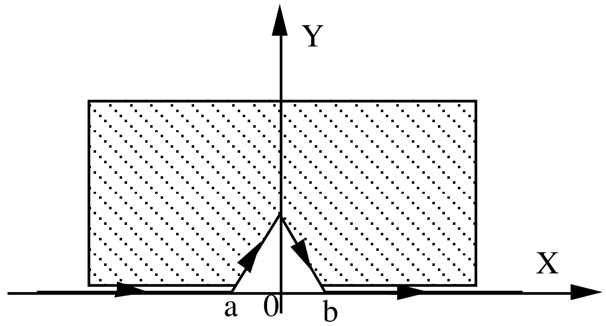
La solución al problema original será: $\boxed{v(z) = u\left(g^{-1}(z)\right) = b + \frac{a-b}{\pi}\,\text{Arg}\,\left(g^{-1}(z)\right)}$.

EJEMPLO 7.2.5:

Encontremos una función armónica v no constante en la región $\Omega = H^{+} - \{y\ i \mid 0 < y \leq 1\}$ tal que $v(x, 0) = 0$ y $v(0, y) = 0$, $0 \leq y < 1$. Este problema puede ser interpretado como el flujo de un río que pasa por un obstáculo.



En este problema Ω puede ser visto como el límite cuando a, b $\longrightarrow$ 0 de la región

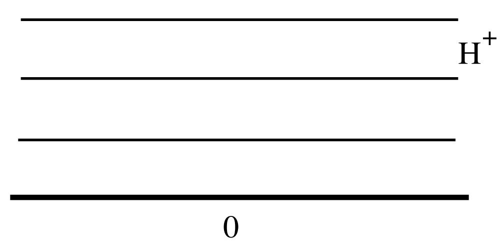


representada en la figura:

Otra vez, para aplicar la fórmula de Schwarz-Christoffel, notemos que se tendrá que lo ángulos exteriores tenderán a $\frac{\pi}{2}$ en a, $-\pi$ en i, $\frac{\pi}{2}$ en b (y por tanto a 2π en ∞).

Sea $g : H^+ \longrightarrow \Omega$ con $g(-1) = 0$, $g(1) = 0$, $g(0) = i$. Entonces se tiene que $g'(z) = A\,(z+1)^{-\frac{1}{2}} \bullet (z-1)^{-\frac{1}{2}} \bullet z^1 = \dfrac{A\,z}{\sqrt{z^2-1}} \Rightarrow g(z) = A\sqrt{z^2-1} + B$, donde tomamos la rama de $\sqrt{z^2-1}$ tal que $\sqrt{x^2-1} > 0$ para $x > 1$.

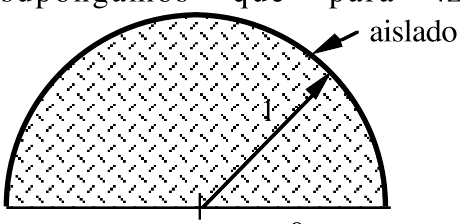
Ahora bien, $g(-1) = B = 0$; $g(1) = B = 0$; $g(0) = A\sqrt{-1} + B = A\,i = i \Rightarrow A = 1$, por lo tanto $g(z) = \sqrt{z^2-1}$. Entonces $f = g^{-1} : \Omega \longrightarrow H^+$, $f(z) = \sqrt{z^2+1}$.



Finalmente, en el semiplano superior, se tiene solución $u(z) = y = \operatorname{Im} z$, por lo que nuestra solución será: $v(z) = u(f(z)) = \operatorname{Im}\left(z^2+1\right)^{\frac{1}{2}}$.

<u>EJEMPLO 7.2.6:</u>

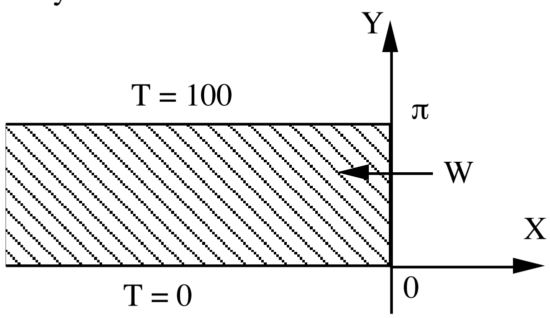
Consideremos el semicírculo $\Omega = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z| < 1,\ \operatorname{Im} z > 0 \right\}$ tal que su temperatura T en la frontera está dado por $T = 100°$ para $z = x < 0$, $T = 0°$ para $z = x > 0$ y supongamos que para $|z| = 1$ el semicírculo está aislado.



Nuestro problema consiste en hallar T en Ω.

Ahora, $\operatorname{Ln} : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ transforma Ω en $\{z = x + iy \mid -\infty < x < 0,\ 0 < y < \pi\} = W$. Aquí, estamos considerando la rama de Ln tal que $-\dfrac{\pi}{2} < \operatorname{Arg} z < \dfrac{3\pi}{2}$.

Ahora, si $|z| = 1$, $\operatorname{Ln} z = i \operatorname{Arg} z$, es decir la parte aislada será la línea $z = iy$, $0 < y < \pi$.

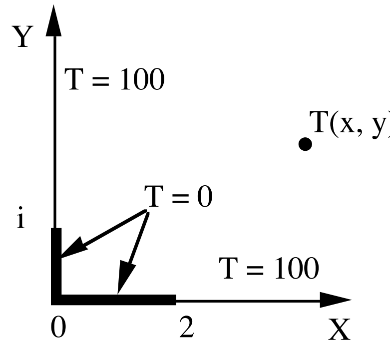


La solución para W es $u(z) = \dfrac{100}{\pi} \operatorname{Im} z$, por lo tanto

$$\boxed{T(x, y) = \frac{100}{\pi} \operatorname{Im} (\operatorname{Ln} z) = \frac{100}{\pi} \operatorname{Arg} z = \frac{100}{\pi} \operatorname{Arc\,Tan} \left(\frac{y}{x}\right)}.$$

<u>EJEMPLO 7.2.7:</u>

Otra vez consideremos de hallar la temperatura, ahora en Ω = el primer cuadrante,



cuando T en la frontera está dada en la figura:

Otra vez podemos transformar Ω en el semiplano superior mediante $f(z) = z^2$.

Ahora en H^+ las condiciones de frontera son: $u(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 < \xi < 2 \\ 100 & \text{si } \xi > 2 \text{ ó } \xi < -1 \end{cases}$.

Por 7.1.7, la solución está dada por

$$u(x, y) = u(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y\, u(\xi)\, d\xi}{(x-\xi)^2 + y^2} = 100 \int_{-\infty}^{-1} \frac{y\, d\xi}{(x-\xi)^2 + y^2} + 100 \int_{2}^{\infty} \frac{y\, d\xi}{(x-\xi)^2 + y^2} =$$

$$= \frac{100}{\pi}\left[\text{Arc Tan}\Big|_{-\infty}^{\frac{-1-x}{y}} + \text{Arc Tan}\Big|_{\frac{2-x}{y}}^{\infty}\right] =$$

$$= \frac{100}{\pi}\left[+\frac{\pi}{2} - \text{Arc Tan}\,\frac{1+x}{y} + \frac{\pi}{2} - \text{Arc Tan}\,\frac{2-x}{y}\right] =$$

$$= \frac{100}{\pi}\left[\pi + \text{Arc Tan}\left(-\frac{\frac{1+x}{y} + \frac{2-x}{y}}{1 - \frac{1+x}{y} \bullet \frac{2-x}{y}}\right)\right] =$$

$$= \frac{100}{\pi}\left[\pi + \text{Arc Tan}\left(\frac{-3y}{y^2 + x^2 - x - 2}\right)\right].$$

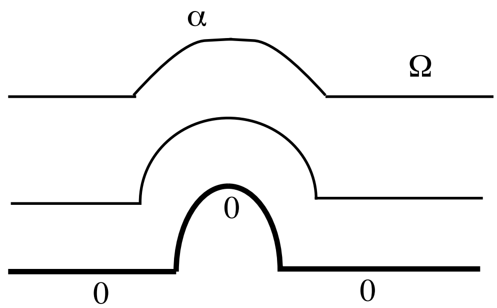
La solución para Ω será

$$v(x, y) = u(f(x, y)) = \frac{100}{\pi}\left[\pi + \text{Arc Tan}\left(\frac{-3\,(2\,x\,y)}{(4\,x^2\,y^2) + (x^2 - y^2)^2 - (x^2 - y^2) - 2}\right)\right]$$

$$= \boxed{100 - \frac{100}{\pi}\,\text{Arc Tan}\left[\frac{6\,x\,y}{\left(x^2+y^2\right)^2 - x^2 + y^2 - 2}\right]}.$$

EJEMPLO 7.2.8:

Encontremos el flujo alrededor de la parte superior del círculo unitario U, si el flujo F es 0 en la orilla y si la velocidad V es paralela al eje X y esta velocidad es α en ∞, es decir tenemos:



$F(x, 0) = 0$, $|x| > 1$; $F(z) = 0$ $|z| = 1$, $\text{Re } z > 0$ y $V(\infty) = \frac{\partial F}{\partial y}(\infty) = \alpha$. La región es $\Omega = \left\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1,\ \text{Im } z > 0\right\}$.

Recordemos que el mapeo de Joukowski J manda Ω en H^+, $J : \Omega \longrightarrow H^+$. La solución en H^+ está dada por $u(x, y) = \beta\, y$, β = constante $\quad \overline{}$ $v = 0$

Puesto que $\frac{\partial u}{\partial y} = \beta = \alpha \Rightarrow u(x, y) = \alpha\, y$. La solución a la región Ω está dada por:

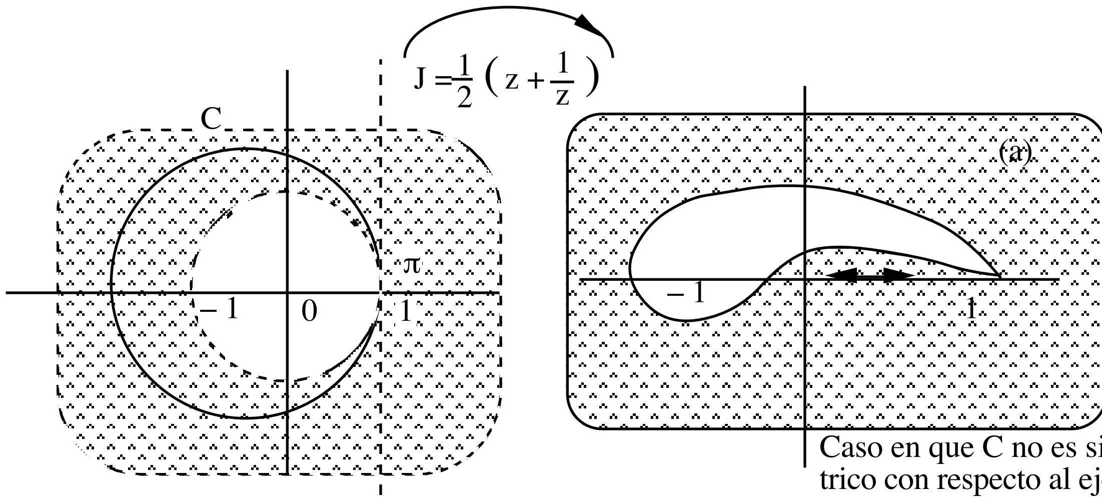
$$F(x, y) = u(J(z)) = u\left(z + \frac{1}{z}\right) = \alpha\ \text{Im}\left(z + \frac{1}{z}\right) = \boxed{\alpha\ y\left(\frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2}\right)},$$ ó en su

forma polar:

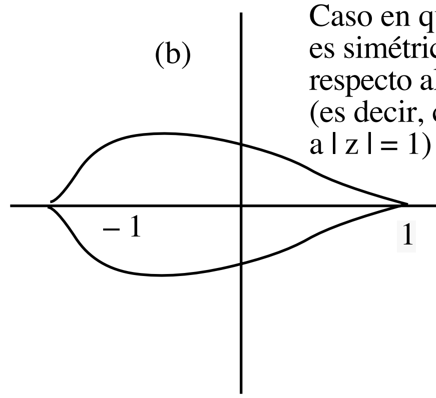
$$F\left(r\,e^{i\theta}\right) = \alpha\left(1 - \frac{1}{r^2}\right) r \text{ sen } \theta = \boxed{\alpha\left(r - \frac{1}{r}\right) \text{sen } \theta}.$$

EJEMPLO 7.2.9:

Finalizamos este Capítulo encontrando el flujo alrededor de un ala de avión (idealizada). Sea Ω el exterior del ala.

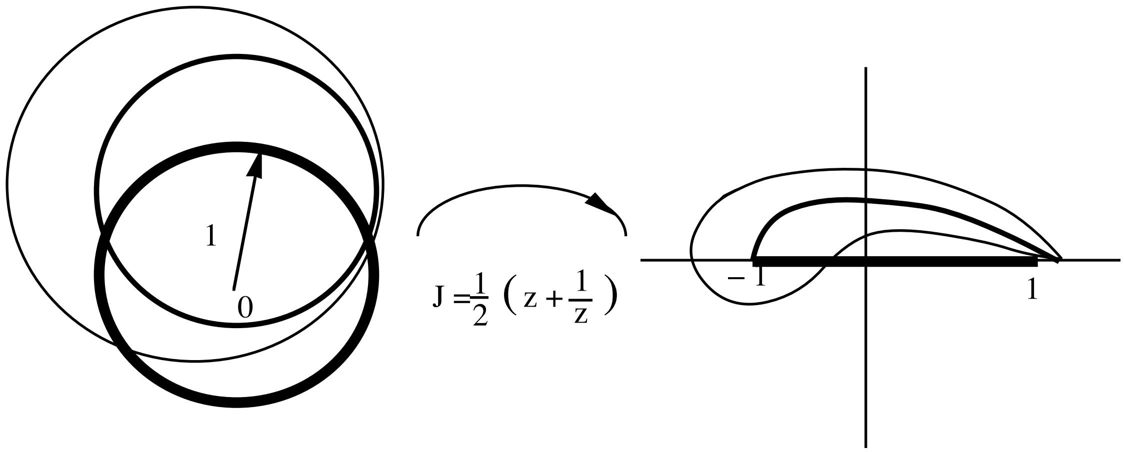


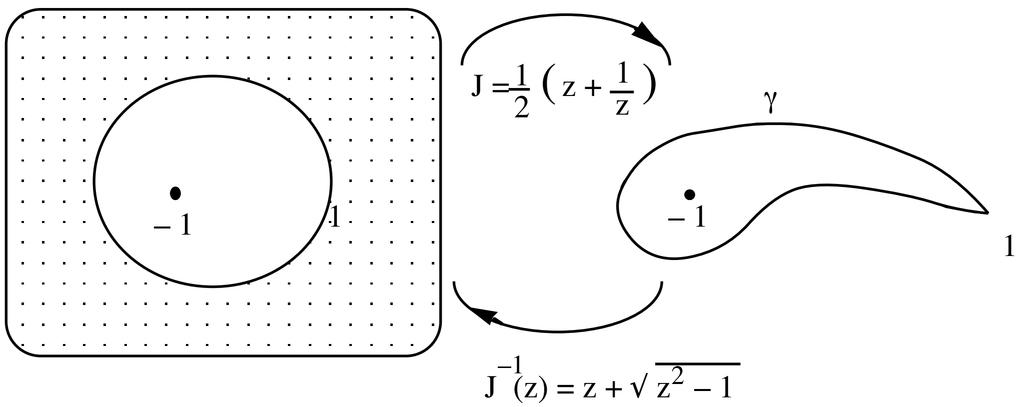
Caso en que C no es simétrico con respecto al eje real.



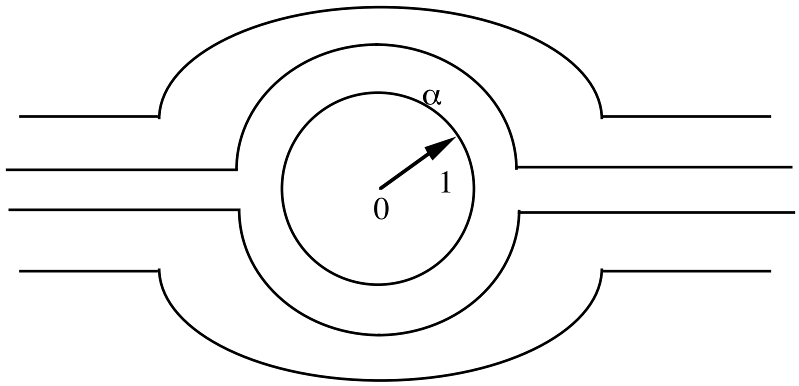
Caso en que C si es simétrico con respecto al eje real (es decir, contiene a $|z| = 1$)

$J'(z) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2z^2}$; $J''(z) = \frac{1}{z^3}$; $J'(1) = 0$; $J''(1) = 1 \neq 0$, por lo que J dobla el ángulo en $z = 1$.

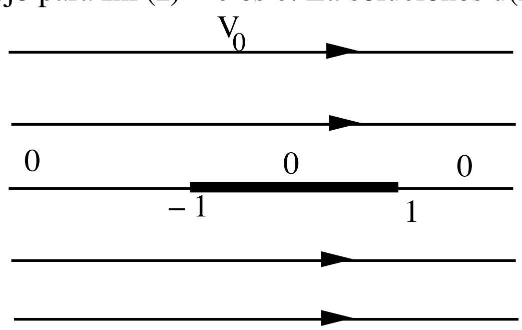




Sea C el círculo $|z - z_0| = R$ tal que J(C) = perfil del ala γ. Ahora queremos transformar el interior de C en $\overline{U}$. Esto lo hace la función $f : C \longrightarrow \overline{U}$, $f(z) = \frac{z - z_0}{R}$. Consideremos la función $g : \Omega \longrightarrow \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$, $g(z) = f\left(J^{-1}(z)\right) = \frac{z - z_0 + \sqrt{z^2 - 1}}{R}$. Nuestro problema se reduce a encontrar el flujo exterior al círculo unitario U. Sea $W = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$.



Supongamos que el flujo es 0 para |z| = 1. Entonces J : $\mathbb{C} - U = W \longrightarrow \mathbb{C} - [-1, 1]$, donde J es otra vez el mapeo de Joukowski, es biyectiva, por lo que el problema se convierte en encontrar el flujo en $\mathbb{C} - [-1, 1]$ tal que el flujo para Im (z) = 0 es 0. La soluciones u(x, y) = β y (ver 7.2.8).



Por tanto la solución al problema original es $v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\boxed{v(z) = u(J(g(z))) = \beta \ \mathrm{Im} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{z - z_0 + \sqrt{z^2 - 1}}{R} + \frac{R}{z - z_0 + \sqrt{z^2 - 1}} \right) \right\}}.$$

REFERENCIAS.

[1] **Ahlfors**, Lars V.; Complex Analysis, Second Edition, McGraw-Hill Kogakusha LTD, 1966.

[2] **Boas**, Mary L.; Mathematical Methods in the Physical Sciences, John Wiley & Sons, Inc., 1966.

[3] **Churchill**, Ruel V.; **Brown**, James W.; **Verhey**, Roger F.; Complex Variables and Applications, Third Edition, McGraw-Hill Kogakusha LTD, 1974.

[4] **Conway**, John B.; Functions of One Complex Variable, Springer-Verlag GTM # 11, 1973.

[5] **Greenleaf**, Frederick P.; Introduction to Complex Variables, Saunders Company, 1972.

[6] **Kreyszig**, Erwing; Matemáticas Avanzadas para Ingeniería, Volumen 2, Tercera Edición, Editorial Limusa, 1976.

[7] **Markushevich**, Alexei; Teoría de las Funciones Analíticas, Tomos I y II, Editorial Mir, 1970.

[8] **Marsden**, Jerrold E., Basic Complex Analysis, W.H. Freeman and Company, 1973.

[9] **Nehari** Zeev; Conformal Mapping, Dover Publications, Inc, 1952.

[10] **Rudin**,Walter; Real and Complex Analysis Second Edition, McGraw-Hill, Inc. 1974.

[11] **Saff**, Edward Barry; **Snider**, Arthur David; Fundamentals of Complex Analysis for Mathematics, Science and Engineering, Prentice Hall, Inc., 1976.

[12] **Spivak**, Michael; Cálculo en Variedades, Editorial Reverté, 1972.

[13] **Vargas Guadarrama**, Carlos Arturo; Un segundo curso de Variable Compleja, Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados del I.P.N., 1987.

INDICE

D

E

F

H

I

L

M

N

O

P

R

S

CÁLCULO DE INTEGRALES POR EL MÉTODO DE RESIDUOS.

1). Sea $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1 + x^4}\, dx.$

Consideremos $f(z) = \dfrac{z^2}{1 + z^4}$.

Ahora $1 + z^4 = 0 \Leftrightarrow z^4 = -1 = e^{\pi i} \Leftrightarrow$

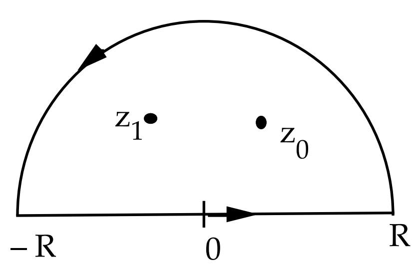
$z = z_k = \exp\left(\dfrac{\pi i + 2k\pi i}{4}\right) = \exp\left(\dfrac{(2k+1)\pi i}{4}\right)$, $k = 0, 1, 2, 3.$

$z_0 = \exp\left(\dfrac{\pi i}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + i\right);$

$z_1 = \exp\left(\dfrac{3\pi i}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(-1 + i\right);$

$z_2 = \exp\left(\dfrac{5\pi i}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(-1 - i\right);$

$z_3 = \exp\left(\dfrac{7\pi i}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - i\right).$



Sea γ_R el camino cerrado que es la frontera del semicírculo superior con centro en 0 y radio R ($R > 1$), recorrido en sentido positivo.

Entonces $\displaystyle\int_{\gamma_R} \frac{z^2}{1+z^4}\,dz = \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \left(\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) \right).$

Ahora bien, $\displaystyle\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} \left(z-z_0\right) f(z) = \lim_{z\to z_0} \frac{\left(z-z_0\right) z^2}{1+z^4} = \lim_{z\to z_0} \frac{3z^2 - 2zz_0}{4z^3} = \frac{z_0^2}{4z_0^3} = \frac{1}{4z_0}.$

Similarmente $\displaystyle\operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) = \frac{1}{4z_1}.$

Por lo tanto tenemos:

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \left(\frac{1}{4z_0} + \frac{1}{4z_1} \right) = \frac{\pi i}{2} \left(\exp\left(-\frac{\pi i}{4}\right) + \exp\left(-\frac{3\pi i}{4}\right)\right) =$$

$$\frac{\pi i}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i) + \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i) \right) = \frac{\pi i}{2}\left(-\sqrt{2}\, i\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

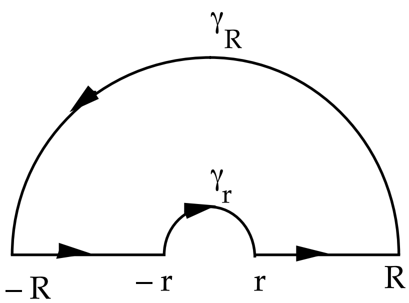
Por otro lado, $\displaystyle\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{\rho_R^+} f(z)\,dz$, donde ρ_R^+ es el semicírculo superior. Finalmente, notemos que $\displaystyle\left|\int_{\rho_R^+} f(z)\,dz\right| = \left|\int_{\rho_R^+} \frac{z^2}{1+z^4}\,dz\right|$

$\displaystyle\leq \pi R \frac{R^2}{R^4-1} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$, y que $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx = I.$

Por lo tanto $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx = I = \frac{\pi}{\sqrt{2}}}.$

2). Sea $I = \int_0^{\infty} \frac{\text{sen } x}{x} \, dx$.

Sea $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$, f(z) tiene un polo simple en z = 0. Sea γ la curva dada en



la figura. Entonces $\int_{\gamma} f(z)\, dz = 0$.

Por otro lado, $\int_{\gamma} f(z)\, dz = \int_r^R \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z} dz.$

Ahora, $\left| \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z} dz \right| = \left| \int_0^{\pi} i\, e^{it} \frac{\exp\left(i R e^{it}\right)}{e^{it}} dt \right| \le \int_0^{\pi} \left|\exp\left(i R e^{it}\right)\right| dt =$

$\int_0^{\pi} \exp(-R \text{ sen } t)\, dt \xrightarrow[R \to \infty]{} 0.$

$\frac{e^{iz} - 1}{z}$ tiene una singularidad removible en 0, por tanto,

$\lim_{r \to 0} \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz} - 1}{z} dz = 0 = \lim_{r \to 0} \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z} dz - \lim_{r \to 0} \int_{\gamma_r} \frac{dz}{z}.$

Ahora $\int_{\gamma_r} \frac{dz}{z} = -\int_0^{\pi} \frac{i\, e^{it}}{e^{it}} dt = -\pi i$, por lo tanto $\lim_{r \to 0} \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z} dz = -\pi i.$

Por otro lado, $\displaystyle\int_{-R}^{-r} \frac{e^{i x}}{x}\, dx \underset{\substack{\uparrow \\ y = -x}}{=} = \int_{R}^{r} \frac{e^{-i y}}{-y}(-dy) = -\int_{r}^{R} \frac{e^{-i x}}{x}\, dx$. Por lo tanto se tiene que $\displaystyle\lim_{\substack{r \to 0 \\ R \to \infty}} \int_{\gamma} \frac{e^{i z}}{z}\, dz = \lim_{\substack{r \to 0 \\ R \to \infty}} \left(\int_{r}^{R} \frac{e^{i x} - e^{-i x}}{x}\, dx \right) - \pi i + 0$

$$= \int_{0}^{\infty} \frac{2 i \operatorname{sen} x}{x}\, dx - \pi i = 0 \Rightarrow \boxed{\int_{0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}}.$$

3). Sea $a > 1$, $\displaystyle I = \int_{0}^{\pi} \frac{d\theta}{a + \cos\theta}$.

Se tiene $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$, por lo tanto si definimos $z = e^{i\theta}$ se tiene que $dz = i e^{i\theta}\, d\theta = i z\, d\theta$; $\qquad a + \cos\theta = a + \dfrac{z}{2} + \dfrac{z^{-1}}{2} = a + \dfrac{z}{2} + \dfrac{1}{2z} = \dfrac{2 a z + z^2 + 1}{2z}$.

Entonces $$\int_{0}^{\pi} \frac{d\theta}{a + \cos\theta} = \frac{1}{2} \int_{0}^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \cos\theta} = \frac{1}{2} \int_{\gamma} \frac{\left(\frac{dz}{iz}\right)}{\left(\frac{z^2 + 2 a z + 1}{2z}\right)} = -i \int_{\gamma} \frac{dz}{z^2 + 2 a z + 1},$$ donde $\gamma = e^{i\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$.

Ahora bien, $z^2 + 2 a z + 1 = 0$ para $z = \dfrac{-2a \pm \sqrt{4 a^2 - 4}}{2} = -a \pm \sqrt{a^2 - 1} \in \mathbb{R}$.

Notemos que $\left|-a - \sqrt{a^2 - 1}\right| = a + \sqrt{a^2 - 1} > 1$; $\left|-a + \sqrt{a^2 - 1}\right| = a - \sqrt{a^2 - 1} < 1$.

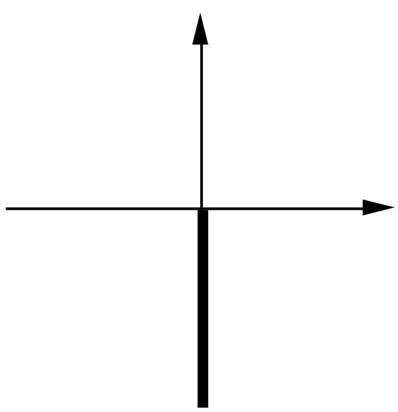
Por tanto $I = -i\,(2\pi i) \operatorname*{Res}_{z=-a+\sqrt{a^2-1}} f(z)$, donde $f(z) = \dfrac{1}{z^2+2az+1}$.

Entonces se tiene: $\operatorname*{Res}_{z=-a+\sqrt{a^2-1}} f(z) = \lim_{z\to -a+\sqrt{a^2-1}} \dfrac{1}{2z+2a} = \dfrac{1}{2\sqrt{a^2-1}}$.

Por lo tanto: $\boxed{\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{a+\cos\theta} = 2\pi\,\frac{1}{2\sqrt{a^2-1}} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}}$.

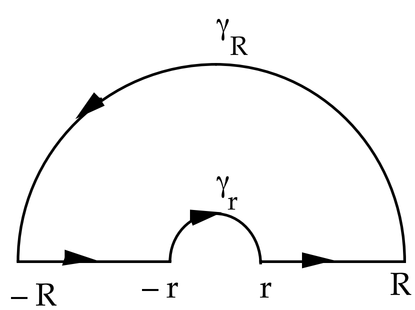
4). Sea $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\log x}{1+x^2}\,dx = I$.

Aquí usamos la rama de log z con $-\dfrac{\pi}{2} < \operatorname{Arg} z < \dfrac{3\pi}{2}$.



Si $z = |z|\, e^{i\theta} \neq 0$, $\log z = \log |z| + i\,\theta$, $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{3\pi}{2}$.

Sea γ la curva:



Para $R > 1$, el único polo de $f(z) = \dfrac{\log z}{1+z^2}$ dentro de γ es $z = i$; por tanto

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \frac{2\pi i \log i}{2i} = \pi i \left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{i\pi^2}{2}.$$

Ahora: $$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_r^R \frac{\log x}{1+x^2}\,dx + \int_0^\pi \frac{\log\left(R e^{i\theta}\right)}{1+R^2 e^{2i\theta}} R i e^{i\theta}\,d\theta +$$

$$+ \int_{-R}^{-r} \frac{\log|x| + \pi i}{1+x^2}\,dx - \int_0^\pi \frac{\log\left(r e^{i\theta}\right)}{1+r^2 e^{2i\theta}} r i e^{i\theta}\,d\theta.$$

$$\left|\int_0^\pi \frac{\log\left(R e^{i\theta}\right)}{1+R^2 e^{2i\theta}} R i e^{i\theta}\,d\theta\right| = R \left|\int_0^\pi \frac{\log\left(R e^{i\theta}\right)}{1+R^2 e^{2i\theta}} i e^{i\theta}\,d\theta\right| \le$$

$$\le R\,\frac{\log R + \pi}{R^2 - 1} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0;$$

$$\left|\int_0^\pi \frac{\log\left(r e^{i\theta}\right)}{1+r^2 e^{2i\theta}} r i e^{i\theta}\,d\theta\right| \le r\,\frac{\log r + \pi}{1 - r^2} \xrightarrow[r\to 0]{} 0.$$

Finalmente, $$\int_{-R}^{-r} \frac{\log|x| + \pi i}{1+x^2}\,dx = \int_r^R \frac{\log x}{1+x^2}\,dx + \pi i \int_r^R \frac{dx}{1+x^2}.$$

Así pues, tenemos: $$\lim_{\substack{r\to 0\\ R\to\infty}} \int_r^R \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \Big[\operatorname{Arc\,tg} x\Big]_0^\infty = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Por tanto: $\dfrac{i\,\pi^2}{2} = 2\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^2}\,dx + 0 + 0 + \frac{\pi}{2}(\pi\, i) \Rightarrow \boxed{\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^2}\,dx = 0}$.

Ejercicios:

1) Calcular: (a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{x^4+x^2+1}$; (b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x - 1}{x^2}\,dx$;

(c) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\cos 2\theta\, d\theta}{1 - 2\,a\cos\theta + a^2}$, $a^2 < 1$; (d) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{d\,\theta}{(a+\cos\theta)^2}$; $a > 1$.

2) Probar que:

(a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{d\,x}{(x^2+a^2)^2} = \frac{\pi}{4\,a^3}$, $a > 0$;

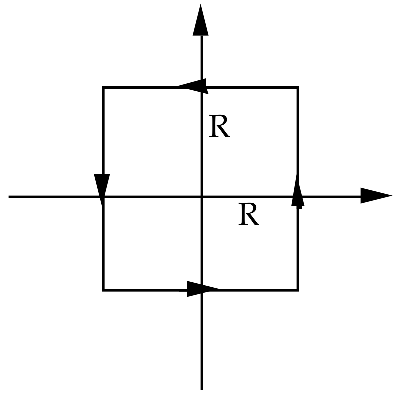
(b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos ax}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{\pi\,(a+1)\,e^{-a}}{4}$, $a > 0$;

(c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log x}{(1+x^2)^2}\,dx = -\frac{\pi}{4}$.

Cálculo de una serie por medio de residuos.

Consideremos $f(z) = \dfrac{\operatorname{Cot} \pi z}{z^2} = \dfrac{\operatorname{Cos} \pi z}{z^2 \operatorname{Sen} \pi z}$.

Ahora, $\operatorname{Sen} \pi z = 0 \Leftrightarrow \pi z = n \pi \Leftrightarrow z = n \in \mathbb{Z}$. Sea γ_R el cuadrado con



centro en el origen y lado 2 R.

Puesto que se tiene que $\operatorname{Cot} \pi z = \dfrac{\operatorname{Cos} \pi z}{\operatorname{Sen} \pi z} = \dfrac{e^{i \pi z} + e^{-i \pi z}}{\dfrac{e^{i \pi z} - e^{-i \pi z}}{i}} =$

$\underset{z = x + i y}{\overset{\uparrow}{=}} \dfrac{e^{-\pi y} e^{i \pi x} + e^{\pi y} e^{-i \pi x}}{e^{-\pi y} e^{i \pi x} - e^{\pi y} e^{-i \pi x}}$, se verifica que para $R = n + \frac{1}{2}$, $n \in \mathbb{N}$,

$\left| \int_{\gamma_R} f(z)\, dz \right| \xrightarrow[R \to \infty]{} 0.$

Por tanto $\displaystyle \lim_{R \to \infty} \int_{\gamma_R} f(z)\, dz = 2 \pi i \left(\sum_{n = -\infty}^{\infty} \operatorname*{Res}_{z = n} f(z) \right).$

Para n = 0 se tiene: $\displaystyle \operatorname*{Res}_{z = 0} f(z) = \operatorname*{Res}_{z = 0} \frac{\operatorname{Cos} \pi z}{z^2 \operatorname{Sen} \pi z} = \frac{1}{2} \lim_{z \to 0} \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{(\operatorname{Coz} \pi z)\, z}{\operatorname{Sen} \pi z} \right) =$

$\displaystyle \frac{1}{2} \lim_{z \to 0} \left(\frac{d^2}{dz^2} \left(z \operatorname{Cot} \pi z \right) \right) = \frac{1}{2} \lim_{z \to 0} \left(\frac{d}{dz} \left(\operatorname{Cot} \pi z - \pi z \operatorname{Csc}^2 \pi z \right) \right) =$

$\displaystyle \frac{1}{2} \lim_{z \to 0} \left(- \pi \operatorname{Csc}^2 \pi z - \pi \operatorname{Csc}^2 \pi z + 2 \pi^2 z \operatorname{Csc}^2 \pi z \operatorname{Cot} \pi z \right) =$

$\displaystyle \frac{1}{2} \lim_{z \to 0} \left(2 \pi \operatorname{Csc}^2 \pi z \left(-1 + \pi z \operatorname{Cot} \pi z \right) \right) =$

$$\lim_{z \to 0} \pi \left(\frac{z \pi \operatorname{Cot} \pi z - 1}{\operatorname{Sen}^2 \pi z} \right) = \pi \lim_{z \to 0} \left(\frac{\pi z \operatorname{Cos} \pi z - \operatorname{Sen} \pi z}{\operatorname{Sen}^3 \pi z} \right) =$$

$$\pi \lim_{z \to 0} \left(\frac{\pi \operatorname{Cos} \pi z - \pi^2 z \operatorname{Sen} \pi z - \pi \operatorname{Cos} \pi z}{\pi\, 3 \operatorname{Sen}^2 \pi z \operatorname{Cos} \pi z} \right) = \frac{\pi}{3} (- 1) = - \frac{\pi}{3}.$$

Para $n \neq 0$:

$$\operatorname*{Res}_{z = n} f(z) = \operatorname*{Res}_{z = n} \frac{\operatorname{Cos} \pi z}{z^2 \operatorname{Sen} \pi z} = \lim_{z \to n} \frac{(z - n) \operatorname{Cos} \pi z}{z^2 \operatorname{Sen} \pi z} =$$
$$\frac{\operatorname{Cos} \pi n}{n^2} \frac{1}{\pi \operatorname{Cos} \pi n} = \frac{1}{\pi n^2}.$$

Por tanto, $0 = 2 \pi i \left(- \frac{\pi}{3} + 2 \sum_{n = 1}^{\infty} \frac{1}{\pi n^2} \right) \Rightarrow \boxed{\sum_{n = 1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi}{3} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{6}}.$

Transformada de Laplace

Definición. Sea f(t) una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Se define la <u>transformada de Laplace de f</u> por: $\pounds\left\{ f \right\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = \lim_{M\to\infty} \int_0^M e^{-st} f(t)\,dt$ siempre y cuando este límite exista para $s > s_0$, algún s_0. Notemos que el parámetro s puede ser tomado complejo.

Proposición. Si $|f(t)| \le K e^{at}$, entonces $\pounds\left\{ f \right\}(s)$ existe para $s > a$.

Demostración. $\left|\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt\right| \le K \int_0^\infty e^{(a-s)t}\,dt = K \int_0^\infty e^{-(a-s)t}\,dt$

$= \dfrac{K}{s-a} e^{-(a-s)t}\Big|_0^\infty = \dfrac{K}{s-a} < \infty.$

♦

Proposición. £ es un operador lineal, es decir:

$$\pounds\left\{ \alpha f_1 + \beta f_2 \right\} = \alpha\, \pounds\left\{ f_1 \right\} + \beta\, \pounds\left\{ f_2 \right\};\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Demostración.

$$\pounds\left\{ \alpha f_1 + \beta f_2 \right\} = \int_0^\infty e^{-st}\left(\alpha f_1 + \beta f_2\right) dt =$$

$$\alpha \int_0^\infty e^{-st} f_1(t)\,dt + \beta \int_0^\infty e^{-st} f_2(t)\,dt = \alpha\, \pounds\left\{ f_1 \right\}(s) + \beta\, \pounds\left\{ f_2 \right\}(s).$$ ♦

Ejemplos:

1). $\pounds\left\{ 1 \right\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\,dt = -\frac{1}{s}\,e^{-st}\Big|_0^\infty = \frac{1}{s},\ s > 0.$

2). $\pounds\left\{ e^{at} \right\}(s) = \int_0^\infty e^{at}\,e^{-st}\,dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}\,dt = \frac{1}{s-a},\ s > a.$

3). $\pounds\left\{ \cos at \right\}(s) = \pounds\left\{ \frac{1}{2}\left(e^{iat} + e^{-iat}\right) \right\}(s) = \frac{1}{2}\,\pounds\left\{ e^{iat} \right\}(s) + \frac{1}{2}\,\pounds\left\{ e^{-iat} \right\}(s)$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s - ia} + \frac{1}{s + ia} \right) = \frac{1}{2}\left(\frac{s + ia + s - ia}{s^2 + a^2} \right) = \frac{s}{s^2 + a^2}.$

4) $\pounds\left\{ \operatorname{sen} at \right\}(s) = \frac{a}{s^2 + a^2}.$

5) $\pounds\left\{ \cosh at \right\}(s) = \pounds\left\{ \frac{1}{2}\left(e^{at} + e^{-at}\right) \right\}(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a} \right) = \frac{s}{s^2 - a^2},\ s > a.$

6) $\pounds\left\{ \operatorname{senh} at \right\}(s) = \frac{a}{s^2 - a^2}.$

Proposición. Si $\pounds\left\{ f \right\}(s) = F(s)$, entonces $\pounds\left\{ e^{at} f \right\}(s) = F(s - a)$.

Demostración. $F(s) = \pounds\left\{ f \right\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt \Rightarrow F(s-a) =$

$\int_0^\infty e^{-(s-a)t} f(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-st}\,e^{at} f(t)\,dt = \pounds\left\{ e^{at} f \right\}(s).$ ♦

Teorema. $\pounds\left\{ f' \right\}(s) = s\,\pounds\left\{ f \right\}(s) - f(0).$

Demostración. $\pounds\left\{ f' \right\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)\,dt$. Integremos por partes tomando $v = e^{-st}$, $du = f'(t)\,dt$. Por lo tanto $dv = -s\,e^{-st}\,dt$, $u = f(t)$.

$$\pounds\left\{ f' \right\}(s) = e^{-st} f(t)\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = -f(0) + s\,\pounds\left\{ f \right\}(s).$$ ♦

Así, $£\left\{ f'' \right\}(s) = £\left\{ (f'(t))' \right\}(s) = s\, £\left\{ f' \right\}(s) - f'(0) =$
$s\left(s\, £\left\{ f \right\}(s) - f(0) \right) - f'(0) = s^2\, £\left\{ f \right\}(s) - s\, f(0) - f'(0)$. En general:

Teorema.

$$£\left\{ f^{(n)} \right\} = s^n\, £\left\{ f \right\} - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - s\, f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0) =$$

$$s^n\, £\left\{ f \right\} - \sum_{i=0}^{n-1} s^{n-i-1} f^{(i)}(0).$$

♦

Ejemplos.

1). Sea $f(t) = t^n$, $f^{(i)}(t) = n\,(n-1) \dots (n-i+1)\, t^{n-i}$, $f^{(i)}(0) = 0$, $0 \le i \le n-1$;

$f^{(n)}(t) = n!$, por lo que $£\left\{ f^{(n)}(t) \right\} = n!\, £\left\{ 1 \right\} = \dfrac{n!}{s} = s^n\, £\left\{ t^n \right\} - 0$, por tanto $\boxed{£\left\{ t^n \right\} = \dfrac{n!}{s^{n+1}}}$.

2). $£\left\{ e^{at} t^n \right\}(s) = £\left\{ t^n \right\}(s-a) = \dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$, $\quad s > a$.

3). $£\left\{ e^{at} \cos b\,t \right\}(s) = £\left\{ \cos b\,t \right\}(s-a) = \dfrac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}$.

4). $£\left\{ e^{at} \operatorname{sen} b\,t \right\}(s) = £\left\{ \operatorname{sen} b\,t \right\}(s-a) = \dfrac{b}{(s-a)^2 + b^2}$.

5). $f(t) = \operatorname{sen}^2 t$, $f(0) = 0$, $f'(t) = 2 \operatorname{sen} t \cos t = \operatorname{sen} 2\,t$, por lo tanto $£\left\{ \operatorname{sen} 2\,t \right\}(s) = s\, £\left\{ f \right\}(s) - f(0) \Rightarrow \dfrac{2}{s^2+4} = s\, £\left\{ \operatorname{sen}^2 t \right\}(s) \Rightarrow$

$\boxed{£\left\{ \operatorname{sen}^2 t \right\}(s) = \dfrac{2}{s\left(s^2+4\right)}}$.

Si $F(s) = £\left\{ f(t) \right\}(s)$, se denota $£^{-1}\left\{ F(s) \right\}(t) = f(t)$.

Ejemplos.

1). Sea $F(s) = \dfrac{s-1}{s^2 - s - 2}$, hallemos $£^{-1}\left\{ F(s) \right\}(t)$.

Se tiene $\dfrac{s-1}{s^2-s-2} = \dfrac{s-1}{(s-2)(s+1)} = \dfrac{A}{s-2} + \dfrac{B}{s+1} = \dfrac{(A+B)\,s + (A-2B)}{(s-2)(s+1)}$,

por lo tanto $\left.\begin{array}{rcl} A + B & = & 1 \\ A - 2B & = & -1 \end{array}\right\} \Rightarrow 3B = 2,\ \boxed{B = \frac{2}{3},\ A = \frac{1}{3}}$.

Es decir tenemos $\dfrac{s-1}{s^2-s-2} = \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{s-2} + \dfrac{2}{3}\dfrac{1}{s+1}$.

Por lo tanto $£^{-1}\left\{ F(s) \right\}(t) = \dfrac{1}{3}\, £^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-2}\right\}(t) + \dfrac{2}{3}\, £^{-1}\left\{\dfrac{1}{s+1}\right\}(t) =$

$\boxed{\frac{1}{3} e^{2t} + \frac{2}{3} e^{-t}}$.

2). Sea $F(s) = \dfrac{s^2+6}{\left(s^2+1\right)\left(s^2+4\right)}$. Hallemaos $£^{-1}\left\{ F(s) \right\}(t)$.

$$\frac{s^2+6}{\left(s^2+1\right)\left(s^2+4\right)} = \frac{A}{s^2+1} + \frac{B}{s^2+4} = \frac{A\left(s^2+4\right) + B\left(s^2+1\right)}{\left(s^2+1\right)\left(s^2+4\right)}.$$

De aquí obtenemos: $A = \dfrac{5}{3}$, $B = -\dfrac{2}{3}$.

Así: $£^{-1}\left\{ F(s) \right\}(t) = \dfrac{5}{3}\, £^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2+1}\right\}(t) - \dfrac{2}{3}\, £^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2+4}\right\}(t) =$

$\boxed{\frac{5}{3}\,\text{sen } t - \frac{2}{3}\,\text{sen } 2t}$.

<u>**Teorema.**</u> $£\left\{ \displaystyle\int_0^t f(u)\,du \right\}(s) = \dfrac{1}{s}\, £\left\{ f \right\}(s)$. Equivalentemente

$$£^{-1}\left\{\frac{1}{s} F(s)\right\}(t) = \int_0^t £^{-1}\left\{ F(s) \right\}(u)\,du.$$

Demostración. Sea $g(t) = \int_0^t f(u)\,du$, $g(0) = 0$; $g'(t) = f(t) \Rightarrow £\left\{ g'(t) \right\}(s)$

$= £\left\{ f(t) \right\}(s) = s\, £\left\{ g(t) \right\}(s) - g(0)$, por lo que $£\left\{ g(t) \right\}(s) = \frac{1}{s}\, £\left\{ f(t) \right\}(s)$.

◆

Ejemplo. Hallemos $£^{-1}\left\{ \dfrac{1}{s^2\left(s^2 + w^2\right)} \right\}(t)$.

$$£^{-1}\left\{ \frac{1}{s^2 + w^2} \right\}(t) = \frac{1}{w} \text{sen } w\, t \Rightarrow £^{-1}\left\{ \frac{1}{s}\, \frac{1}{s^2 + w^2} \right\}(t) =$$

$$\int_0^t £^{-1}\left\{ \frac{1}{s^2 + w^2} \right\}(u)\,du = \int_0^t \frac{1}{w} \text{sen } w\, u\,du = -\frac{1}{w^2} \cos wu \Big|_0^t =$$

$$\frac{1}{w^2}\left(1 - \cos w\, t\right).$$

$$£^{-1}\left\{ \frac{1}{s^2\left(s^2 + w^2\right)} \right\}(t) = \int_0^t £^{-1}\left\{ \frac{1}{s}\, \frac{1}{s^2 + w^2} \right\}(u)\,du = \int_0^t \frac{1}{w^2}\left(1 - \cos w\, u\right) du$$

$$= \frac{1}{w^2}\left(u - \frac{1}{w} \text{sen } w\, u\right)\Big|_0^t = \frac{1}{w^2}\left(t - \frac{1}{w} \text{sen } w\, t\right).$$

La transformada de Laplace se usa para resolver ecuaciones diferenciales. Aquí la ventaja es que al aplicar la transformada, la ecuación original se convierte en una ecuación algebraica.

Ejemplos.

1). Hallemos la solución de $y'' + 9\, y = 0$ sujeta a las condiciones $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

Se tiene $\pounds\left\{ y'' \right\} = s^2 \pounds\left\{ y \right\} - s\, y'(0) - y(0) = s^2 z - 2$, donde $z = \pounds\left\{ y \right\}$. Por lo tanto

$$s^2 z - 2 + 9 z = 0 \Rightarrow z = \frac{2}{s^2 + 9} \Rightarrow y = \pounds^{-1}\left\{ z \right\} = \pounds^{-1}\left\{ \frac{2}{s^2 + 9} \right\}(t) =$$

$$\pounds^{-1}\left\{ \frac{2}{3} \frac{3}{s^2 + 9} \right\}(t) = \boxed{\frac{2}{3} \operatorname{sen} 3t}.$$

2). Hallemos y, donde $y'' + 2y' + 5y = 0$; $y(0) = 2$, $y'(0) = -4$.

Sea $z = \pounds\left\{ y \right\}(s)$, $\pounds\left\{ y'' \right\}(s) = s^2 z - s\, y(0) - y'(0) = s^2 z - 2s + 4$;

$\pounds\left\{ y' \right\}(s) = s z - y(0) = s z - 2$, por lo tanto: $s^2 z - 2s + 4 + 2\left(z s - 2\right) + 5z$

$$= 0 \Rightarrow z = \frac{2s}{s^2 + 2s + 5} = \frac{2s}{(s+1)^2 + 4} = 2\frac{s+1}{(s+1)^2 + 2^2} - 2\frac{1}{(s+1)^2 + 2^2} \Rightarrow$$

$$y = \pounds^{-1}\left\{ z \right\}(t) = 2 e^{-t} \cos 2t - e^{-t} \operatorname{sen} 2t = \boxed{e^{-t}\left(2 \cos 2t - \operatorname{sen} 2t\right)}.$$

3). Hallemos la solución de $y'' + y = \operatorname{sen} 2t$, tal que $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Sea $z = \pounds\left\{ y \right\}(s)$, $\pounds\left\{ y'' \right\}(s) = s^2 z - s\, y(0) - y'(0) = s^2 z - 1$, $\pounds\left\{ \operatorname{sen} 2t \right\}(s) =$

$$\frac{2}{s^2 + 4} \Rightarrow s^2 z - 1 + z = \frac{2}{s^2 + 4} \Rightarrow z = \frac{2}{\left(s^2 + 1\right)\left(s^2 + 4\right)} + \frac{1}{s^2 + 1} =$$

$$= \frac{A}{s^2 + 1} + \frac{B}{s^2 + 4} + \frac{1}{s^2 + 1} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} A + B = 0 \\ 4A + B = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow -3A = -2 \Rightarrow A = \frac{2}{3}; B = -\frac{2}{3} \Rightarrow z = \frac{5}{3}\frac{1}{s^2 + 1} - \frac{2}{3}\frac{1}{s^2 + 4} \Rightarrow$$

$$\boxed{y = \frac{5}{3} \operatorname{sen} t - \frac{1}{3} \operatorname{sen} 2t}.$$

4). Hallemos la solución de la ecuación diferencial $y''' + y'' + 4y' + 4y = -2$, con las condiciones iniciales: $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = -1$.

Si $z = \pounds\left\{y\right\}$, $s^3 z - s^2 y(0) - s y'(0) - y''(0) + s^2 z - s y(0) - y'(0) + 4sz - 4y(0) +$

$4z$

$$= -\frac{2}{s}$$

$$\Rightarrow s^3 z - s + 1 + s^2 z - 1 + 4 s z + 4 z = -\frac{2}{s} ; z \underbrace{\left(s^3 + s^2 + 4 s + 4\right)}_{\left(s^2+4\right)\left(s+1\right)} = -\frac{2}{s} + s \Rightarrow$$

$$z = \frac{-2}{s\left(s^2+4\right)\left(s+1\right)} + \frac{s}{\left(s^2+4\right)\left(s+1\right)} = \frac{s^2-2}{s\left(s^2+4\right)\left(s+1\right)} =$$

$$= \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C s + D}{s^2+4} \Rightarrow$$

$$A = -\frac{1}{2} ; B = \frac{1}{5} ; C = \frac{3}{10} ; D = \frac{6}{5} \Rightarrow z = \frac{-\frac{1}{2}}{s} + \frac{\frac{1}{5}}{s+1} + \frac{\frac{3}{10} s + \frac{6}{5}}{s^2+4} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{s+1}\right) + \frac{3}{10}\frac{s}{s^2+4} + \frac{3}{5}\frac{2}{s^2+4} \Rightarrow$$

$$\boxed{y = £^{-1}\left\{ z \right\}(t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{5} e^{-t} + \frac{3}{10} \cos 2t + \frac{3}{5} \operatorname{sen} 2t}\,.$$

5). Hallar la solución del sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{matrix} y_1' + y_1 = y_2' + y_2 \\ y_1'' + y_2'' = e^t \end{matrix} \quad \text{con} \quad \begin{matrix} y_1(0) = 0 \;;\; y_1'(0) = 1 \\ y_2(0) = 1 \;;\; y_2'(0) = 0 \end{matrix}.$$

Sean $z_i = £\left\{ y_i \right\}(s)$, $i = 1, 2$.

$$s z_1 - y_1(0) + z_1 = s z_2 - y_2(0) + z_2;$$
$$s^2 z_1 - s y_1(0) - y_1'(0) + s^2 z_2 - s y_2(0) - y_2'(0) = \frac{1}{s-1}.$$

$$\begin{matrix} \left(s+1\right) z_1 - \left(s+1\right) z_2 = -1 \\ s^2 z_1 + s^2 z_2 = \dfrac{1}{s-1} + 1 + s \end{matrix} \;\Rightarrow\; \begin{matrix} z_1 - z_2 = \dfrac{-1}{s+1} \\ z_1 + z_2 = \dfrac{1}{s^2\left(s-1\right)} + \dfrac{s+1}{s^2} = \dfrac{1 + s^2 - 1}{s^2\left(s-1\right)} = \dfrac{1}{s-1} \end{matrix}$$

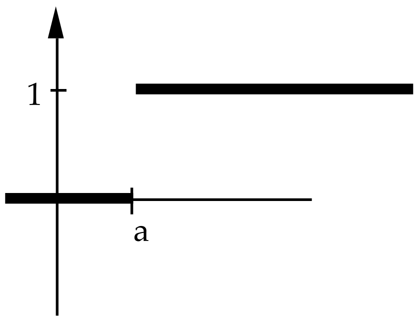
$$\Rightarrow z_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1}\right); z_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s+1}\right) \Rightarrow$$

$$y_1 = £^{-1}\left\{ z_1 \right\}(t) = \frac{1}{2}\left(e^t - e^{-t} \right); y_2 = £^{-1}\left\{ z_2 \right\}(t) = \frac{1}{2}\left(e^t + e^{-t} \right) \Rightarrow$$

$\boxed{y_1 = \text{Senh}\, t \quad ; \quad y_2 = \text{Cosh}\, t}$.

Otras propiedades.

Sea $u_a(t)$ la función escalón unitario definida por: $u_a(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < a \\ 1 & \text{para } t > a \end{cases}$.



$$£\left\{ u_a(t) \right\}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}\, u_a(t)\, f(t)\, dt =$$

$$= \int_a^{\infty} e^{-st}\, dt = -\frac{1}{s}\, e^{-st}\Big|_a^{\infty} = \frac{1}{s}\, e^{-as}.$$

Proposición. Si $F(s) = £\left\{ f(t) \right\}(s)$, entonces $e^{-as} F(s) = £\left\{ f(t - a)\, u_a(t) \right\}(s)$.

Demostración.

$$£\left\{ f(t-a)\, u_a(t) \right\}(s) = \int_a^{\infty} e^{-st} f(t-a)\, dt \underset{y = t - a}{\overset{}{=}} \int_0^{\infty} e^{-s(y+a)} f(y)\, dy =$$

$$e^{-sa} \int_0^{\infty} e^{-sy} f(y)\, dy = e^{-sa} F(s). \qquad \blacklozenge$$

Ejemplos.

1). Hallemos $£^{-1}\left\{ \dfrac{e^{-3s}}{s^3} \right\}(t)$.

Sea $F(s) = \frac{1}{s^3}$, $£^{-1}\{ F(s) \}(t) = \frac{1}{2} t^2 \Rightarrow$

$$£^{-1}\{ e^{-as} F(s) \}(t) \underset{\substack{\uparrow \\ a = 3}}{=} f(t - a)\ u_a(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} (t-3)^2 , & t > a \\ 0 , & t < a \end{cases} =$$

$\frac{1}{2} (t-3)^2\, u_3(t)$.

2). Resolvamos la ecuación diferencial y'' + 3 y' + 2 y = r(t), donde

$r(t) = \begin{cases} 1 \text{ para } & 0 < t < 1 \\ 0 \text{ en otro caso} & \end{cases}$. Entonces $r(t) = u_0(t) - u_1(t)$. Sea $z = £\{ y \}(s)$.

Se tiene

$s^2 z - s\, y(0) - y'(0) + 3\, s\, z - 3\, y(0) + 2\, z = £\{ u_0(t) - u_1(t) \}(s) \Rightarrow$

$s^2 z + 3\, s\, z + 2\, z = £\{ u_0(t) \}(s) - £\{ u_1(t) \}(s) = -\frac{1}{s} \left(e^{-s} - 1\right)$, por lo que se

tiene $z = -\dfrac{e^{-s} - 1}{s \left(s^2 + 3\, s + 2\right)} = -\dfrac{e^{-s} - 1}{s\,(s+2)\,(s+1)}$.

Si $F(s) = \dfrac{1}{s \left(s^2 + 3\, s + 2\right)} = \dfrac{A}{s} + \dfrac{B}{s+1} + \dfrac{C}{s+2} =$

$= \dfrac{A\,(s+1)\,(s+2) + B\, s\,(s+2) + C\, s\,(s+1)}{s\,(s+1)\,(s+2)}$.

$$\left.\begin{array}{lll} s = 0 : & 1 = 2\,A \\ s = -1 : & 1 = -B \\ s = -2 : & 1 = 2\,C \end{array}\right\} \begin{array}{l} A = \frac{1}{2} \\ B = -1 \\ C = \frac{1}{2} \end{array} \Rightarrow £^{-1}\{ F(s) \}(t) = \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2} e^{-2t} =$$

f(t).

$z = -e^{-s} F(s) + F(s) \Rightarrow y = -£^{-1}\{ e^{-s} F(s) \}(t) + £^{-1}\{ F(s) \}(t) = f(t-1)\, u_1(t) - f(t)$

$$\Rightarrow \boxed{y = u_1(t)\left[\frac{1}{2} - e^{-(t-1)} + \frac{1}{2}e^{-2(t-1)}\right] - \left[\frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t}\right]}.$$

Proposición.

Sea $F(s) = £\{f\}$. Entonces $£\{t^n f\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$ ó $£^{-1}\{F^{(n)}(s)\} = (-1)^n t^n f(t)$.

Demostración. $F(s) = £\{f\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$, por tanto se tiene que

$$F'(s) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}\left(e^{-st} f(t)\right) dt = -\int_0^\infty t\, e^{-st} f(t)\, dt = £\{(-1)\, t\, f(t)\}(s). \quad \blacklozenge$$

Ejemplos.

1). $£\{t \text{ sen } t\}(s) = (-1)\, £\{t \text{ sen } t\}'(s) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = \frac{2s}{s^2+1}$.

2). $£\{2e^{2t} \text{ sen } t \cos t\}(s) = £\{e^{2t} \text{ sen } 2t\}(s) = £\{\text{sen } 2t\}(s-2) = \frac{2}{(s-2)^2+4}$.

3). Hallemos $£^{-1}\left\{\ln \frac{s+3}{s+2}\right\}(t)$. Se tiene, $\ln\left(\frac{s+3}{s+2}\right) = \ln(s+3) - \ln(s+2) = F(s)$, $F'(s) = \frac{1}{s+3} - \frac{1}{s+2}$. Entonces si $£\{f(t)\}(s) = F(s) \Rightarrow £\{t\, f(t)\}(s) = -F'(s) \Rightarrow t\, f(t) = e^{-2t} - e^{-3t}$, por lo tanto $\boxed{f(t) = \frac{e^{-2t} - e^{-3t}}{t}}$.

Producto de Convolución.

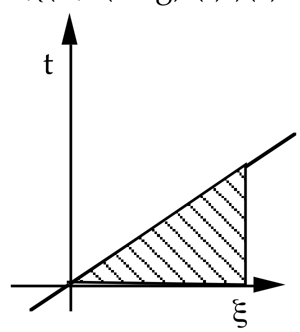
<u>Definición.</u> Dadas 2 funciones f(t), g(t), se define el <u>producto de convolución</u> por: $\left(f * g\right)(t) = \int_0^t f\left(t - \xi\right) g\left(\xi\right) d\xi = \int_0^t f\left(\xi\right) g\left(t - \xi\right) d\xi$.

<u>Teorema.</u> $\pounds\left\{ \left(f * g\right)(t) \right\}(s) = \pounds\left\{ f(t) \right\}(s) \bullet \pounds\left\{ g(t) \right\}(s)$.

<u>Demostración.</u>

Sea $F(s) = \pounds\left\{ f \right\}(s)$, $G(s) = \pounds\left\{ g \right\}(s)$. Entonces se tiene que £\b\bc\{(\b(f * g) (t))(s) = \i(0,∞, e^{-st} \b\bc\[(\i(0,t, f \b(t – ξ) g \b(ξ) d ξ))

d t) =



$0 \le \xi \le t < \infty$

$$= \int_0^\infty \int_\xi^\infty e^{-st} f\left(t - \xi\right) g\left(\xi\right) dt \; d\xi = \int_0^\infty g\left(\xi\right) d\xi \left\{ \int_\xi^\infty e^{-st} f\left(t - \xi\right) dt \right\} \underset{\substack{\uparrow \\ y = t - \xi}}{=}$$

$$\int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty e^{-s\left(y + \xi\right)} f(y)\, dy \right\} g\left(\xi\right) d\xi = \left(\int_0^\infty e^{-s\xi} g\left(\xi\right) d\xi \right) \left(\int_0^\infty e^{-sy} f(y)\, dy \right) =$$

$F(s)\, G(s)$.

♦

El Teorema anterior dice en otras palabras que:

$$\boxed{\pounds^{-1}\left\{ F(s)\, G(s) \right\}(t) = \pounds^{-1}\left\{ F(s) \right\}(t) * \pounds^{-1}\left\{ G(s) \right\}(t)}\,.$$

Ejemplos.

1). $£^{-1}\left\{\frac{1}{s\left(s^2+1\right)}\right\}(t) = £^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}(t) * £^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}(t) = \left(1 * \text{sen}\right)(t) =$

$\int_0^t \text{sen}\,\xi\, d\,\xi\, P = -\cos\xi \,\Big|_0^t = 1 - \cos t.$

2). $\left(1 * 1\right)(t) = \int_0^t 1\, d \; = t;\qquad \left(1 * 1 * 1\right)(t) = \int_0^t \xi\, d\,\xi = \frac{\xi^2}{2}\Big|_0^t = \frac{t^2}{2}.$