

σ -estabilidad de sistemas de control basados en pasividad con retardos en la comunicación

Edgar Estrada*, Fernando Castaños, Sabine Mondié

Departamento de Control Automático, CINVESTAV-IPN

Av. IPN No. 2508, Col. Zacatenco C.P. 07360, A.P. 14-740, México DF

*eestrada@ctrl.cinvestav.mx

Resumen—El control proporcional-integral (PI) de un sistema lineal pasivo de primer orden a través de un canal de comunicación con retardos se revisa a la luz de la σ -estabilidad. Se lleva a cabo un análisis en el dominio de la frecuencia en el marco de sistemas con retardo, permitiendo determinar el máximo decaimiento exponencial alcanzable y la sintonización de las ganancias correspondientes. También se caracteriza la sintonización de ganancias mínimas para un decaimiento dado.

Palabras clave: Pasividad; σ -estabilidad; sistemas con retardo.

I. INTRODUCCIÓN

El control basado en pasividad se fundamenta en el hecho que la interconexión de dos subsistemas pasivos genera un sistema pasivo. La estabilidad de Lyapunov del sistema interconectado sigue de la pasividad, mientras la estabilidad asintótica es usualmente alcanzada mediante la adecuada adición de amortiguamiento. Debido a su simplicidad y robustez, el control basado en pasividad ha atraído a investigadores y profesionales en la comunidad de control por muchas décadas ((Ortega et al., 1998; Vanderschaft, 2000), por nombrar algunos). Sin embargo, si existe un canal de comunicación con retardos entre la planta y el controlador (escenario típico de control), el argumento de pasividad falla debido a la propiedad de no pasividad del canal de comunicación con retardos. En la propuesta multicitada (Anderson y Spong, 1989), una simple modificación del canal de comunicación —inspirada en el estudio de líneas de transmisión—permite la transformación del canal de comunicación en un sistema pasivo, recuperando la simplicidad y eficacia del diseño basado en pasividad.

En muchas contribuciones han discutido esta idea (ver el reciente tutorial (Nuño et al., 2011) y las referencias allí dentro) y ha dado lugar a un destacado número de propuestas dirigidas a optimalidad, canal de comunicación con retardos variables en el tiempo, así como aplicaciones en el campo de la robótica, control de motores...

Nuestro propósito es revisar la técnica antes mencionada desde la perspectiva de la teoría de los sistemas con retardo en el tiempo (dominio de la frecuencia) en un simple caso: el control PI de un sistema pasivo de primer orden. Se hace énfasis en el comportamiento del sistema en lazo cerrado, el cual se cuantifica en términos de su σ -estabilidad, esto

es, el decaimiento exponencial de su respuesta en el dominio del tiempo.

Nuestro análisis se basa en el conocimiento clásico de los sistemas con retardo en el tiempo de tipo retardado y neutral (Bellman y Cooke, 1963; Hale y Verduyn, 1993). El problema en consideración, aunque de dimensión infinita, implica un número reducido de parámetros, por lo que es posible un análisis exhaustivo en el dominio de la frecuencia del cuasipolinomio característico en lazo cerrado. En particular, usaremos una extensión trivial del método de \mathcal{D} -partición (Neimark, 1949) (ver (Sipahi et al., 2011) para métodos avanzados), que consiste de dos pasos: 1) la determinación de las fronteras correspondientes a las raíces en $s = -\sigma$ y $s = -\sigma + j\omega$ que proveen una partición del espacio de parámetros, 2) la verificación de la σ -estabilidad de un punto en cada región de la partición, dando lugar a útiles e ilustrativas regiones de σ -estabilidad en el espacio de parámetros. También caracterizamos, con herramientas algebraicas básicas, algunos puntos de especial interés sobre estas regiones.

La contribución esta organizada como sigue: en la Sección II, se analizan los casos libre de retardo y retardo diferente de cero y fijo, ilustrando el fracaso y la pérdida de rendimiento en la estrategia de diseño basada en pasividad. En la Sección III, la transformación de dispersión se introduce y se obtiene la función característica, las regiones de σ -estabilidad se dibujan y se determinan reglas de sintonización para puntos de interés. Se presentan resultados numéricos en la Sección IV. La contribución termina con algunos comentarios finales.

II. EFECTO DEL RETARDO EN EL CANAL DE COMUNICACIÓN

Considere un sistema lineal de primer orden de la forma

$$\dot{x} = -ax + bu_1, \quad (1a)$$

$$y_1 = x, \quad (1b)$$

(por ejemplo, un motor de CD), donde u_1 , y_1 y $x \in \mathbb{R}$ son el voltaje de entrada, la velocidad de salida y el estado, respectivamente. Los parámetros a y b se suponen positivos, lo cual asegura la pasividad.

Considere el controlador PI

$$\dot{\xi} = u_0, \quad (2a)$$

$$y_0 = k_p u_0 + k_i \xi, \quad (2b)$$

donde $u_0, y_0, \xi \in \mathbb{R}$ son la entrada, salida y estado del controlador, respectivamente. Las ganancias proporcional e integral k_p y k_i se suponen positivas, por lo tanto el controlador también es pasivo. Debido a que la interconexión por retroalimentación negativa de dos elementos pasivos es pasiva, en este caso $u_1 = -y_0$ y $u_0 = y_1 - y_1^*$, así el polinomio característico en lazo cerrado es estable para todas las ganancias.

Cuando un canal de comunicación con retardos se introduce en el lazo, la función de transferencia en lazo cerrado es

$$\frac{y_1(s)}{y_1^*(s)} = \frac{be^{-h_1s}(k_p s + k_i)}{s^2 + (a + bk_p e^{-hs})s + bk_i e^{-hs}}, \quad (3)$$

con retardo de ida y vuelta $h := h_1 + h_2$. Debido a que el canal de comunicación con retardos no es pasivo, el argumento de pasividad falla.

Decimos que el sistema es σ -estable si existe γ tal que $\|y_1(t)\| \leq \gamma e^{-\sigma t} \max_{\theta \in [-h, 0]} \|y_1(\theta)\|$, $t \geq 0$.

En el resto de la sección se analizan los casos de retardo cero y arbitrario.

II-A. Canal de comunicación libre de retardos

Cuando el retardo es cero, el polinomio característico es

$$p(s) = s^2 + (a + bk_p)s + bk_i. \quad (4)$$

II-A.1. Fronteras de σ -estabilidad: A partir del método de \mathcal{D} -partición, sustituimos $s = -\sigma$ en (4), lo cual nos da la frontera

$$k_i = \sigma \left(\frac{a - \sigma}{b} + k_p \right). \quad (5)$$

Sustituyendo $s = -\sigma + j\omega$ en (4) y resolviendo para k_p y k_i da las ecuaciones paramétricas

$$k_p = \frac{2\sigma - a}{b}, \quad (6a)$$

$$k_i(\omega) = \frac{\sigma^2 + \omega^2}{b}. \quad (6b)$$

II-A.2. Regiones de σ -estabilidad: Las regiones en el espacio de parámetros $(k_p, k_i) \in \mathbb{R}^2$, donde el polinomio (4) es σ -estable, se dibujan usando el método de \mathcal{D} -partición con las ecuaciones (5) y (6). Note que en todas las figuras de esta contribución los valores numéricos de los parámetros $a = 0.4, b = 50$ y $h = 0.3$ corresponden a un motor de CD experimental. En el caso libre de retardo, la determinación de las regiones de σ -estabilidad es sencilla.

Observación 1: En la Fig. 1 uno observa que puede asignarse un decaimiento exponencial σ arbitrariamente grande. Por otra parte, para un determinado σ las ganancias de control de magnitud pequeña corresponden al punto de la intersección de las fronteras (5) y (6).

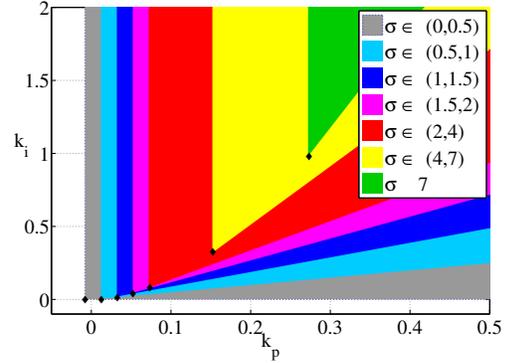


Figura 1: Regiones de σ -estabilidad, canal de comunicación libre de retardos, ver 6. (◆ indica las ganancias mínimas).

II-A.3. Ganancias mínimas para un decaimiento σ prescrito: Las observaciones de arriba permiten caracterizar las ganancias más pequeñas del controlador.

Proposición 1: Las ganancias mínimas del controlador PI dado un σ son

$$k_p = \frac{2\sigma - a}{b}, \quad (7a)$$

$$k_i = \frac{\sigma^2}{b}. \quad (7b)$$

Prueba: En vista de la observación 1, el resultado sigue de la solución de (4) y su derivada en $s = -\sigma$ para k_p y k_i . ■

II-B. Retardo arbitrario h

Cuando un canal de comunicación con retardos se introduce, la función característica es un cuasipolinomio

$$p(s) = s^2 + (a + bk_p e^{-hs})s + bk_i e^{-hs}. \quad (8)$$

II-B.1. Fronteras de σ -estabilidad: Siguiendo el método de \mathcal{D} -partición, sustituimos $s = -\sigma$ en (8), lo cual da la frontera

$$k_i = \frac{a\sigma - \sigma^2}{be^{h\sigma}} + k_p \sigma. \quad (9)$$

Sustituyendo $s = -\sigma + j\omega$ en (8) y resolviendo para k_p y k_i da las ecuaciones paramétricas

$$k_p(\omega) = \frac{(2\sigma - a)\omega \cos(h\omega)}{b\omega e^{h\sigma}} + \frac{(\sigma(a - \sigma) + \omega^2) \sin(h\omega)}{b\omega e^{h\sigma}}, \quad (10a)$$

$$k_i(\omega) = \frac{(\sigma^2 + \omega^2)(\omega \cos(h\omega) + (a - \sigma) \sin(h\omega))}{b\omega e^{h\sigma}}. \quad (10b)$$

II-B.2. Regiones de σ -estabilidad: Usando el método de \mathcal{D} -partición, la ecuación (9) y las ecuaciones paramétricas (10), se determinan las regiones en el espacio de parámetros $(k_p, k_i) \in \mathbb{R}^2$ donde el cuasipolinomio (8) es σ -estable.

Observación 2: Uno observa en la Fig. 2 una reducción drástica en la región de estabilidad. Por otro lado, cuando

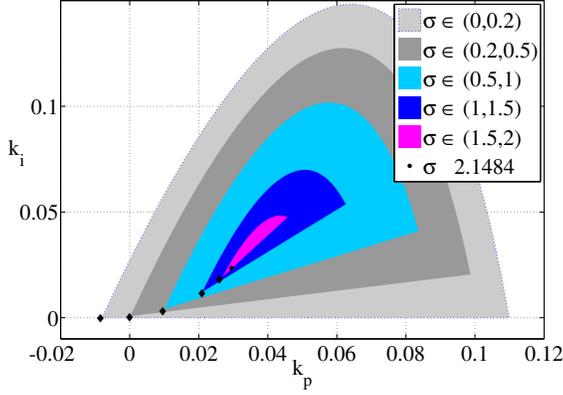


Figura 2: Regiones de σ -estabilidad, canal de comunicación con retardos.

el decaimiento exponencial deseado incrementa, la región de σ -estabilidad se contrae y colapsa en algún decaimiento σ^* . Para un decaimiento dado la región está delimitada por las ecuaciones correspondientes a las fronteras (9) y (10). Como una consecuencia, el punto de colapso ocurre en una raíz triple en $s = -\sigma$.

II-B.3. Máximo decaimiento alcanzable en lazo cerrado: En contraste con el caso libre de retardo, no es posible lograr un decaimiento exponencial arbitrariamente grande. Caracterizaremos el máximo decaimiento σ^* alcanzable.

Proposición 2: Considere el sistema (1) en lazo cerrado con la ley de control (2) con $k_p > 0$ y $k_i > 0$, a través del canal de comunicación con retardos $h_1, h_2 > 0$ como se muestra en la Fig. ?? . El máximo decaimiento alcanzable está dado por

$$\sigma^* = \frac{4 + ah - \sqrt{8 + a^2 h^2}}{2h}, \quad (11)$$

que corresponde a las ganancias de control

$$k_p^* = \frac{\sqrt{a^2 h^2 + 8} - 2}{h b e^\lambda}, \quad (12a)$$

$$k_i^* = \frac{(10 + ah) \sqrt{a^2 h^2 + 8} - (ah + 1)^2 - 27}{2h^2 b e^\lambda}, \quad (12b)$$

donde $\lambda = \frac{ah + 4 - \sqrt{a^2 h^2 + 8}}{2}$.

Prueba: En vista de la observación 2, el cuasipolinomio (8), su primera y segunda derivada son cero en $s = -\sigma$. En otras palabras,

$$b e^{h\sigma} k_i - b \sigma e^{h\sigma} k_p + \sigma^2 - a \sigma = 0, \quad (13a)$$

$$-h b e^{h\sigma} k_i + b e^{h\sigma} (1 + h\sigma) k_p - 2\sigma = -a, \quad (13b)$$

$$h^2 b e^{h\sigma} k_i - h b e^{h\sigma} (2 + h\sigma) k_p = -2. \quad (13c)$$

Resolviendo estas ecuaciones se obtiene

$$\sigma_{1,2} = \frac{4 + ah \pm \sqrt{8 + a^2 h^2}}{2h}.$$

La única solución que satisface $k_p > 0$ y $k_i > 0$ es (11). Las expresiones (12) siguen directamente al resolver (13). ■

II-B.4. Ganancias mínimas para un decaimiento σ prescrito: En la intersección de las fronteras del cuasipolinomio (8) hay una raíz doble en $-\sigma$, por lo tanto las condiciones $p(\cdot) |_{s=-\sigma} = 0$ y $\frac{\partial}{\partial s} p(\cdot) |_{s=-\sigma} = 0$ se mantienen. Ésta observación permite caracterizar el controlador con las ganancias más pequeñas.

Proposición 3: Considere el sistema (1) en lazo cerrado con la ley de control (2) a través del canal de comunicación con retardos. Entonces las ganancias mínimas para el controlador *PI* asignando un $\sigma < \sigma^*$, son

$$k_p = -\frac{h\sigma^2 - (2 + ah)\sigma + a}{b e^{h\sigma}}, \quad (15a)$$

$$k_i = \frac{\sigma^2 (ah - h\sigma + 1)}{b e^{h\sigma}}. \quad (15b)$$

Prueba: El resultado sigue resolviendo (13a) y (13b) para k_p y k_i . ■

III. TRANSFORMACIÓN DE DISPERSIÓN

Un enfoque clásico para el estudio de líneas de transmisión consiste en aplicar una transformación lineal en las variables de estado (Brayton, 1966). Mediante la aplicación de esta transformación, las ecuaciones de la línea de transmisión (i.e., las ecuaciones del telégrafo) se transforman en un par de ecuaciones con retardo desacopladas (i.e., ecuaciones de transporte). Entonces puede entenderse la dinámica de la línea de transmisión en términos de propagación de ondas.

El argumento inverso fue propuesto en (Anderson y Spong, 1989): Suponer que se tiene un canal de comunicación que consiste en un par de retardos. Aplicar la transformación inversa para emular el comportamiento de una línea de transmisión. Debido a que las líneas de transmisión son pasivas (sin pérdida), el argumento de pasividad se restaura.

Más preciso, considere un par de retardos dados por la ecuación diferencial parcial

$$\begin{pmatrix} s_l^+(l, t) \\ s_l^-(l, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -h_1 & 0 \\ 0 & h_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_t^+(l, t) \\ s_t^-(l, t) \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Note que, en las fronteras, las soluciones satisfacen $s^+(1, t) = s^+(0, t - h_1)$ y $s^-(1, t) = s^-(0, t + h_2)$. Esto es un canal de comunicación. Considere ahora la transformación lineal

$$\begin{pmatrix} \mu(l, t) \\ v(l, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 1 & -d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} s^+(l, t) \\ s^-(l, t) \end{pmatrix}, \quad d > 0. \quad (17)$$

Sigue de (17), (16) y $h := h_1 + h_2$ que

$$\begin{pmatrix} \mu_l(l, t) \\ v_l(l, t) \end{pmatrix} = -h \begin{pmatrix} 0 & d \\ 1/d & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_t(l, t) \\ v_t(l, t) \end{pmatrix}, \quad (18)$$

son un par de ecuaciones de telégrafo (sin pérdida).

La transformación (17) puede fácilmente aplicarse en las fronteras de (16), sólo se necesita tener precaución con respecto a la causalidad del sistema: las variables $s_0^+ := s^+(0, t)$, $s_1^- := s^-(1, t)$, $\mu_0 := \mu(0, t)$ y $v_1 := v(1, t)$ son libres, mientras $s_1^+ := s^+(1, t)$, $s_0^- := s^-(0, t)$, $v_0 := v(0, t)$ y $\mu_1 := \mu(1, t)$ dependen de las variables anteriores

$$\frac{y_1(s)}{y_1^*(s)} = \frac{2dbe^{-h_1s}(k_p s + k_i)}{(d + k_p + e^{-hs}(d - k_p))s^2 + (\alpha(d + k_p) + k_i - e^{-hs}(\beta(d - k_p) + k_i))s + \alpha k_i + e^{-hs}\beta k_i} \quad (14)$$

y sus valores pasados. Con estas restricciones en mente podemos poner, en la frontera $l = 0$,

$$\begin{pmatrix} v_0 \\ s_0^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/d & -1/d \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_0 \\ s_0^- \end{pmatrix}$$

(cf. (17) en $l = 0$). De $l = 1$ tenemos

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ s_1^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d & 1 \\ -2d & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ s_1^+ \end{pmatrix},$$

(cf. (17) en $l = 1$). Más detalles se pueden encontrar en (Nuño et al., 2011; Niemeyer y Slotine, 1991).

Finalmente, podemos usar el patrón de interconexión

$$u_0 = v_0 - y_1^*, \quad \mu_0 = -y_0, \quad u_1 = \mu_1 \quad \text{y} \quad v_1 = y_1, \quad (19)$$

como se muestra en la Fig. 3.

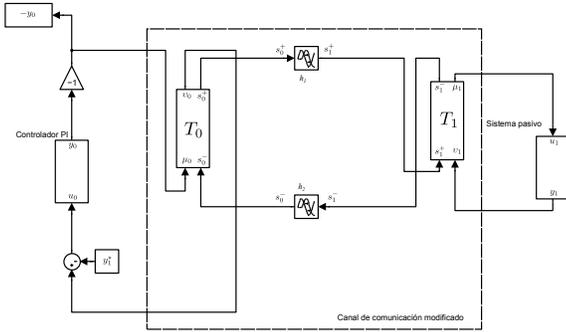


Figura 3: Lazo de control incluyendo canal de comunicación con retardos más la transformación de dispersión.

Cuando la transformación de dispersión se introduce como muestra la Fig. 3, y el parámetro d es arbitrario, la función de transferencia en lazo cerrado es (14) (ver la parte superior de p. 4), donde $\alpha = db + a$, $\beta = db - a$.

El cuasipolinomio ahora es

$$p(s) = (d + k_p + e^{-hs}(d - k_p))s^2 + (\alpha(d + k_p) + k_i - e^{-hs}(\beta(d - k_p) + k_i))s + \alpha k_i + e^{-hs}\beta k_i. \quad (20)$$

Este cuasipolinomio es en general de tipo neutral. Su coeficiente principal (el coeficiente de grado más grande en s) es $\{(d + k_p) + e^{-hs}(d - k_p)\}$. De hecho, el grado más grande en la variable e^{-hs} se presenta en este coeficiente (una discusión y análisis de cuasipolinomios puede encontrarse en (Bellman y Cooke, 1963; Kharitonov y Mondié, 2001), entre muchas otras). En el dominio del tiempo, esto significa que la derivada con respecto al tiempo del estado del sistema no sólo depende de los estados retardados, si no también de la derivada del estado retardado. Una condición necesaria para la estabilidad de

sistemas con retardo de tipo neutral es la estabilidad del operador en diferencia (la transformada inversa de Laplace del término principal); cuando $\sigma = 0$, la ecuación en diferencia $(d + k_p)x(t) + (d - k_p)x(t - h) = 0$. Debido a que $|(d - k_p)/(d + k_p)| < 1$, esta condición siempre se mantiene. Cuando $\sigma > 0$, la ecuación característica del operador en diferencia es $d + k_p + e^{-hs}e^{h\sigma}(d - k_p)$. En este caso el operador en diferencia del sistema del tipo neutral impone una nueva condición de estabilidad

$$\left| e^{h\sigma} \frac{d - k_p}{d + k_p} \right| < 1. \quad (21)$$

III-A. Elección original $d = 1$

En el resto de este análisis, la σ -estabilidad se analiza para la elección original $d = 1$. El cuasipolinomio (20) de tipo neutral se reduce a

$$p(s) = (1 + k_p + e^{-hs}(1 - k_p))s^2 + (\alpha(1 + k_p) + k_i - e^{-hs}(\beta(1 - k_p) + k_i))s + \alpha k_i + e^{-hs}\beta k_i. \quad (22)$$

III-A.1. Fronteras de σ -estabilidad: Sustituyendo $s = -\sigma$ en (22) se obtiene

$$k_i = \frac{k_p \sigma (\alpha - \sigma + e^{h\sigma}(\beta + \sigma))}{\alpha - \sigma + e^{h\sigma}(\beta + \sigma)} + \frac{\sigma (\alpha - \sigma - e^{h\sigma}(\beta + \sigma))}{\alpha - \sigma + e^{h\sigma}(\beta + \sigma)}, \quad (23)$$

Sustituyendo $s = -\sigma + j\omega$ en (22) y resolviendo para k_p y k_i da las ecuaciones paramétricas (24) (ver la parte superior de p. 5), donde $\Gamma = (\sigma + \beta)^2 + \omega^2$, $\Xi = (\alpha - \sigma)^2 + \omega^2$ y $\Lambda = (\sigma - \alpha) + (\sigma + \beta)$.

Finalmente, la condición de estabilidad (21) del operador en diferencia impone una restricción adicional

$$\frac{(e^{h\sigma} - 1)}{(1 + e^{h\sigma})} < k_p < \frac{(1 + e^{h\sigma})}{(e^{h\sigma} - 1)}, \quad (25)$$

que reduce la región de σ -estabilidad.

III-A.2. Regiones de σ -estabilidad: Las expresiones (24) y (23) se usan para determinar las regiones de σ -estabilidad en el plano de parámetros $(k_p, k_i) \in \mathbb{R}^2$.

Observación 3: La transformación de dispersión recupera una notable propiedad, observada en el caso libre de retardo, todo el primer cuadrante del espacio de parámetros garantiza estabilidad en lazo cerrado. En cuanto a la σ -estabilidad, para un σ dado, el tamaño de las regiones de la Fig. 4 son más grandes que las de la Fig. 2.

Observación 4: Como en el caso donde la transformación no es empleada, las regiones de σ -estabilidad colapsan en una raíz triple, en $-\sigma$, cuando la curva correspondiente a un par de raíces del cuasipolinomio en $s = -\sigma + j\omega$ (22)

$$k_p(\omega) = d \frac{\omega e^{2h\sigma} \Gamma + 2\sigma \omega e^{h\sigma} (\alpha + \beta) \cos(h\omega) - 2\sigma e^{h\sigma} (\Lambda + \omega^2) \sin(h\omega) - \omega \Xi}{\omega e^{2h\sigma} \Gamma - 2\omega e^{h\sigma} (\Lambda + \omega^2) \cos(h\omega) - 2\omega^2 e^{h\sigma} (\alpha + \beta) \sin(h\omega) + \omega \Xi}, \quad (24a)$$

$$k_i(\omega) = 2d(\sigma^2 + \omega^2) e^{h\omega} \frac{\omega(\alpha + \beta) \cos(h\omega) - (\Lambda + \omega^2) \sin(h\omega)}{\omega e^{2h\sigma} \Gamma - 2\omega e^{h\sigma} (\Lambda + \omega^2) \cos(h\omega) - 2\omega^2 e^{h\sigma} (\alpha + \beta) \sin(h\omega) + \omega \Xi}, \quad (24b)$$

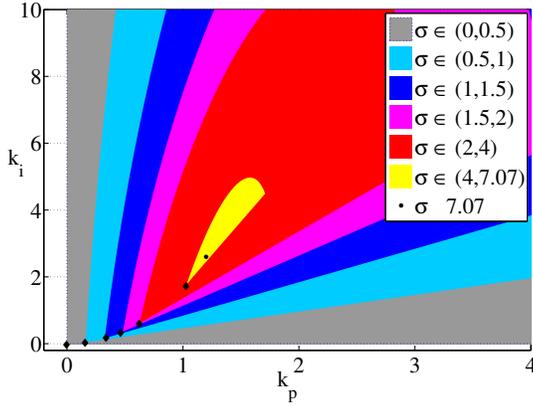


Figura 4: Regiones de σ -estabilidad, canal de comunicación con retardos más la transformación de dispersión.

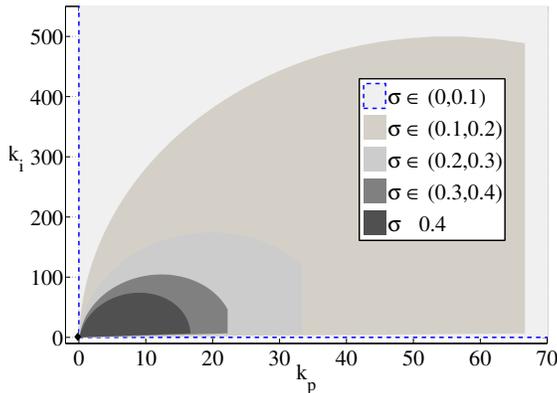


Figura 5: Regiones de σ -estabilidad, canal de comunicación con retardos más la transformación de dispersión, $\sigma < 0.4$.

intersecta en un solo punto la línea descrita con una simple raíz real en $s - \sigma$. Note también que el valor de σ^* es al menos tres veces más grande.

III-A.3. Máximo decaimiento alcanzable en lazo cerrado: Otra vez, caracterizamos el máximo decaimiento σ^* alcanzable y las ganancias de control correspondientes usando las observaciones de arriba. En este caso se obtiene una fórmula implícita.

Proposición 4: Considere el sistema (1) en lazo cerrado con la ley de control (2) con $k_p > 0$ y $k_i > 0$, a través del canal de comunicación con retardos, cuando la transformación de dispersión se introduce como muestra la Fig. 3. El máximo decaimiento alcanzable es la solución más grande y positiva de la ecuación implícita (26a) para

σ , tal que las ganancias $k_p(\sigma)$ y $k_i(k_p, \sigma)$, definidas en (26b) y (26c), respectivamente, son positivas.

Prueba: A causa de la observación 4 el cuasipolinomio (22), su primer y segunda derivada son cero en $s = -\sigma$, en otras palabras

$$(\sigma - \alpha - e^{h\sigma}(\beta + \sigma)) \sigma k_p + (\alpha - \sigma + e^{h\sigma}(\beta + \sigma)) k_i = (\alpha - \sigma - e^{h\sigma}(\beta + \sigma)) \sigma, \quad (27)$$

$$(\alpha - 2\sigma + e^{h\sigma}((\beta + \sigma)(h\sigma + 1) + \sigma)) k_p + (1 - e^{h\sigma}(h\beta + h\sigma + 1)) k_i = -(\alpha - 2\sigma - e^{h\sigma}((\beta + \sigma)(h\sigma + 1) + \sigma)), \quad (28)$$

$$(2 - e^{h\sigma}((h\sigma + h\beta + 1)(h\sigma + 2))) k_p + h e^{h\sigma}(h\beta + h\sigma + 2) k_i = -(2 + e^{h\sigma}((h\beta + h\sigma + 1)(h\sigma + 2) + h\sigma)). \quad (29)$$

Debido a $\sigma - \alpha - e^{h\sigma}(\sigma + \beta) \neq 0$, (26c) sigue de (27) y (28). Después, sustituyendo (26c) en (28) da (26b). Finalmente, sustituyendo (26c) y (26b) en (29) da la ecuación implícita (26a) para σ . ■

Un análisis más detallado de esta ecuación es posible. Para los valores de los parámetros dados, se puede resolver numéricamente, como en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1: Para los parámetros $a = 0.4$, $b = 50$ y $h = 0.3$ las soluciones están dadas en la Tabla I.

TABLA I: Soluciones de (26a), (26b) y (26c)

σ	k_p	k_i
-56.4758	-1	$-2.9491 \cdot 10^{-6}$
-7.0408	-1.1978	2.5514
7.0707	1.2026	2.6204
57.269	1	$-2.386 \cdot 10^{-6}$

Claramente, las soluciones de (26a) con decaimiento exponencial o parámetros negativos deberán descartarse. El punto de colapso está dado por $\sigma = 7.0707$, $k_p = 1.2026$ y $k_i = 2.6204$.

III-A.4. Ganancias mínimas para un decaimiento σ prescrito: En este caso, también pueden determinarse las ganancias mínimas para el controlador PI para un decaimiento exponencial deseado en lazo cerrado, usando el hecho de que hay una raíz doble del cuasipolinomio en este punto.

Proposición 5: Considere el sistema (1) en lazo cerrado con la ley de control (2) a través del canal de comunicación con retardos, cuando la transformación de dispersión se

$$h^2\sigma^4 + h(h\beta - 2h\alpha + 2)\sigma^3 - h\alpha(2h\beta - h\alpha + 6)\sigma^2 + h\alpha(4\alpha - 2\beta + h\alpha\beta)\sigma + 2\alpha(\alpha + \beta + h\alpha\beta) + e^{h\sigma}(h^2\sigma^4 - h(h\alpha - 2h\beta + 2)\sigma^3 - h\beta(2h\alpha - h\beta + 6)\sigma^2 + h\beta(2\alpha - 4\beta - h\alpha\beta)\sigma + 2\beta(\alpha + \beta + h\alpha\beta)) = 0, \quad (26a)$$

$$k_p(\sigma) = \left((\sigma + \beta)^2 e^{2h\sigma} + 2\sigma(\alpha + \beta + h(\alpha - \sigma)(\sigma + \beta)) - (\alpha - \sigma)^2 \right) / (\alpha - \sigma + e^{h\sigma}(\sigma + \beta))^2, \quad (26b)$$

$$k_i(\sigma) = 2\sigma^2 e^{h\sigma}(\alpha + \beta + h(\alpha - \sigma)(\sigma + \beta)) / (\alpha - \sigma + e^{h\sigma}(\sigma + \beta))^2. \quad (26c)$$

introduce. Para un decaimiento $\sigma < \sigma^*$ deseado, las ganancias mínimas k_p y k_i estan dadas por (26b) y (26c) respectivamente.

Prueba: El resultado sigue de (27) y (28). ■

IV. RESULTADOS NUMÉRICOS

Es digno de mencionar que las regiones de estabilidad pueden sufrir algunas variaciones de escala si otros parámetros a y b son elegidos. Los resultados de la sección II, la forma general y las propiedades cualitativas se conservan cuando los parámetros siguen siendo positivos. Por otro lado, la caracterización de puntos especiales y formulas de sintonización referidas al máximo σ alcanzable y ganancias mínimas para el controlador son validas para todos los parámetros positivos del sistema.

TABLA II: Parámetros del controlador para el máximo σ alcanzable con $a = 0.4$, $b = 50$ y $h = 0.3$.

Los siguientes acrónimos se emplean:

CLR – Canal libre de retardo

CRNC – Canal con retardo no compensado (Fig. 2)

CRC – Canal con retardo compensado, tipo neutral (Fig. 4, $d = 1$).

Esquema	σ^*	k_p^*	k_i^*
CRNC	2.1484 (11)	$2.9 \cdot 10^{-2}$ (12a)	$2.3 \cdot 10^{-2}$ (12b)
CRC	7.0707 (26a)	1.2026 (26b)	2.6204 (26c)

TABLA III: Parámetros mínimos del controlador para un $\sigma = 1.5 < \sigma^*$ con $a = 0.4$, $b = 50$ y $h = 0.3$.

Esquema	σ	k_p	k_i
CLR	1.5	$5.2 \cdot 10^{-2}$ (7a)	$4.5 \cdot 10^{-2}$ (7b)
CRNC	1.5	$2.68 \cdot 10^{-2}$ (15a)	$1.92 \cdot 10^{-2}$ (15b)
CRC	1.5	0.4821 (26b)	0.3672 (26c)

La Tabla II muestra que la introducción de la transformación de dispersión mejora el máximo decaimiento exponencial y permite ganancias más grandes.

Las Figs. 1, 2 y 4 muestran que la transformación de dispersión permite recobrar la estabilidad en el primer cuadrante, la cual se perdió por la introducción de los retardos. Por otro lado, la Tabla III muestra que, para un σ dado, cuando un canal de comunicación con retardos se introduce, se requiere una reducción significativa de las ganancias, mientras que la transformación de dispersión con $d = 1$ permite incrementarlas.

V. OBSERVACIONES FINALES

Un análisis detallado de los efectos de los retardos en un canal de comunicación dentro del lazo cerrado y la introducción de la llamada transformación dispersión se presenta para el caso escalar. El problema se estudia en el contexto de sistemas con retardo, que muestra el papel esencial de la naturaleza del cuasipolinomio en lazo cerrado. Además, se proponen formulas para la sintonización de *i*) máximo decaimiento en los casos de retardo acotado, *ii*) ganancias mínimas, cuando un decaimiento exponencial deseado es especificado.

REFERENCIAS

- Anderson, R. and M.W. Spong (1989). Bilateral control of teleoperators with time delay. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **34**, 494 – 501.
- Bellman, R. and K.L. Cooke (1963). *Differential-Difference Equations*. Academic Press. New York.
- Brayton, R.K. (1966). Nonlinear oscillations in a distributed network. *Quart. Appl. Math.*, **24**, 289–301.
- Hale, B. and S.M. Verduyn Lunel (1993). *Introduction to Functional Differential Equations*. Applied Mathematical Sciences, Springer Verlag, New York.
- Kharitonov, V. and S. Mondié (2001). “*Quasipolynômes et Stabilité Robuste*”, In *Traité IC2-Information-Commande-Communication, Algèbre et analyse pour l'automatique*. Editions HERMES Science Europe.
- Neimark, J. (1949). D-subdivisions and spaces of quasipolynomials. *Prikl. Mat. Meh.*, **13**, 349–380.
- Niemeyer, G. and J.L.E. Slotine (2004). Telemanipulation with Time Delays. *International Journal of Robotics Research*, **23(9)**, 873–890.
- Niemeyer, G. and J.L.E. Slotine (1991). Stable adaptive teleoperation. *Oceanic Engineering, IEEE Journal*, **16(1)**, 152–162.
- Nuño, E., L. J. Basañez, and R. Ortega (2011). Passivity based control for bilateral teleoperation: A tutorial. *Automatica*, **47**, 485–495.
- Ortega, R., A. Loría, J. P. Nicklasson, and H. Sira-Ramirez (1998). *Passivity-based Control of Euler-Lagrange Systems*. Springer-Verlag. Berlin.
- Sipahi, R., S. I. Niculescu, C. T. Abdallah, W. Michiels and K. Gu (2011). Stability and stabilization of systems with time delay. *IEEE Control Systems Magazine*, **31**, 39–65.
- Van der shaft, A. J (2000). *L2-Gain and Passivity Techniques in Nonlinear Control*. Springer-Verlag. London.