

**ESTIMACIÓN DEL CONJUNTO DE ACCESIBILIDAD DE  
SISTEMAS CONTROLABLES DE ORDEN DOS MEDIANTE EL  
PROBLEMA DE DESVIACIÓN MÁXIMA.**

ALEXANDROV V. V.      TEMOLTZI A. R.

Sea el sistema con una perturbación adicional

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{d\mathbf{y}}{d\tau} = A\mathbf{y} + \mathbf{b}w_1, & \mathbf{x}(0) = \mathbf{0} \\ w_1(\cdot) \in \mathcal{U} = \{u \in KC : |u(t)| \leq \nu\}, \end{cases}$$

donde  $A$  es una matriz constante de tamaño  $2 \times 2$  y  $\mathbf{b}$  es un vector constante de tamaño  $2 \times 1$ . La notación  $KC$  denota el conjunto de las funciones reales continuas trozos.

Se supone que la matriz  $U = (\mathbf{b}, A\mathbf{b})$  asociada al sistema (1) cumple la propiedad:  $\text{rang } U = 2$ . También se supone que la matriz  $A$  posee valores propios complejos conjugados tales que  $\text{Re } \lambda_i(A) < 0$ ,  $i = 1, 2$ . Directamente se comprueba que esta condición se satisface si se cumplen las desigualdades

$$(2) \quad \text{tr } A < 0, \quad \left(\frac{1}{2} \text{tr } A\right)^2 < \det A.$$

Sea  $S_{t_1}$  el conjunto de accesibilidad en el instante  $t_1$  del sistema (1), es decir, el conjunto de todos los puntos  $\mathbf{x}$  en  $\mathbb{R}^2$  a los cuales la solución de (1) puede acceder bajo la influencia de alguna perturbación  $w(\cdot) \in \mathcal{U}$  en el instante  $t_1$ . Es conocido que si  $\text{rang } U = 2$ , entonces  $S_{t_1}$  es una región convexa y  $\dim S_{t_1} = 2$ .

El conjunto de accesibilidad  $S$  del sistema (1) se define entonces como

$$S = \bigcup_{t_1 > 0} S_{t_1}.$$

El problema sobre la estimación del conjunto de accesibilidad de sistemas de orden  $n$  análogos a (1), admite el siguiente resultado el cual se demuestra empleando métodos de “desigualdades matriciales” basados sobre el método conocido como  $\mathcal{S}$ -procedimiento, (véase, por ejemplo, [1, 2, 3, 4]).

**Teorema 1.** Si  $A$  es una matriz de Hurwitz y  $U = (\mathbf{b}, A\mathbf{b}, \dots, A^{n-1}\mathbf{b})$  posee la propiedad  $\text{rang } U = n$ , entonces el conjunto de accesibilidad  $S$  pertenece al elipsoide invariante  $\mathcal{E}_{+\infty} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x}^\top P^{-1}\mathbf{x} \leq 1\}$  donde  $P = P(\alpha)$  es solución de la ecuación de Lyapunov

$$(3) \quad AP + PA^\top + \alpha P + \alpha^{-1}BB^\top = 0$$

y existe  $\alpha_0$  tal que  $S$  pertenece al menor elipsoide  $P(\alpha_0)$ , donde

$$(4) \quad P(\alpha_0) = \min_{0 < \alpha < +\infty} \text{tr } P(\alpha).$$

Por otra parte, es conocido que la transformación no degenerada  $\mathbf{x} = UV\mathbf{y}$ , donde

$$V = \begin{pmatrix} -\text{tr } A & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

permite escribir el sistema (1) en la forma

$$(5) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 & x_1(0) = 0 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 2\epsilon x_2 + bw_1 & x_2(0) = 0 \\ w_1(\cdot) \in \mathcal{U} = \{u \in KC : |u(t)| \leq 1\}, \end{cases}$$

donde

$$\epsilon = -\frac{1}{2} \operatorname{tr} A \cdot \det A^{-1}, \quad b = \nu \det A^{-1},$$

y  $(\cdot)$  denota diferenciación respecto al tiempo de escala  $t = (\det A)\tau$ . La condición (2) para el sistema (5) toma la forma

$$0 < \epsilon < 1.$$

El valor  $\alpha_0 = \alpha_0(\epsilon)$  dado en el Teorema 1 para el sistema (5) satisface la relación mostrada en la Figura 1.

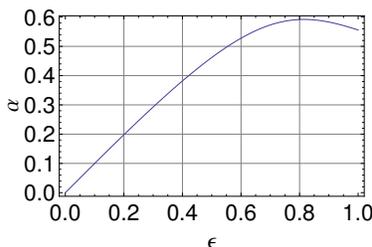


Figura 1.

Consideremos otro enfoque para aproximar el conjunto de accesibilidad  $S$  del sistema (5). Este se basa en el hecho de que si el conjunto de accesibilidad es acotado, entonces para cada punto  $\mathbf{x}_0$  de su frontera existe una perturbación  $w_1(\cdot) \in \mathcal{U}$  de manera tal que la solución  $\mathbf{x}_w(t, \mathbf{0})$  del sistema (5) puede acceder a  $\mathbf{x}_0$  bajo la influencia de  $w_1(\cdot)$ . En este caso, la trayectoria descrita por  $\mathbf{x}_w(t, \mathbf{0})$  pertenece completamente al conjunto de accesibilidad. Por otra parte, si en el sistema (5) se plantea el problema de desviación máxima respecto a la coordenada  $x_1(\cdot)$  tal como se presenta en [5, 6, 7], entonces cada punto del ciclo límite debe pertenecer al conjunto de accesibilidad de dicho sistema. Además, es claro que el ciclo límite y la frontera del conjunto de accesibilidad coinciden sobre el eje  $x_1$  dado que el ciclo límite posee desviación máxima sobre dicho eje. Más aún, debido a las propiedades del campo de velocidades fase del sistema (5) bajo la influencia de la peor perturbación que resuelve el problema de desviación máxima respecto a  $x_1(\cdot)$ , se sigue que cada punto del ciclo límite pertenece a la frontera del conjunto de accesibilidad.

Esto muestra que el ciclo límite obtenido al resolver el problema de desviación máxima coincide con la frontera del conjunto de accesibilidad. Un resultado análogo se muestra en [8] empleando el *principio de máxima controlabilidad* para conjuntos  $\nu$ -alcanzables.

Siguiendo los resultados de [6], se deduce que el sistema (5) posee un único ciclo límite orbitalmente estable el cual posee desviación máxima respecto a la coordenada  $x_1(\cdot)$ , la cual es dada por

$$\beta_* = \frac{b(1 + \exp(-\pi\epsilon/\omega))}{1 - \exp(-\pi\epsilon/\omega)}, \quad \omega = \sqrt{1 - \epsilon^2}.$$

El ciclo límite es determinado por la peor perturbación, la cual se expresa en la forma

$$w_1^o(t) = \text{sign } x_2(t, \mathbf{0}),$$

y la estructura del ciclo límite antedicho se expresa de forma paramétrica por las ecuaciones

$$(6) \quad \begin{cases} x_1(t) = \pm (b - (b + \beta_*)e^{-\epsilon t} (\cos \omega t + \frac{\epsilon}{\omega} \sin \omega t)), \\ x_2(t) = \pm \frac{(b + \beta_*)}{\omega} e^{-\epsilon t} \sin \omega t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{\omega}.$$

Los ejemplos siguientes muestra la comparación entre la aproximación de la elipse dado en el Teorema 1 y el ciclo límite (6).

**Ejemplo 1.** Sean los valores

$$\epsilon = \frac{1}{10}, \quad b = 1.$$

La expresión que da el valor óptimo  $\alpha_0(\epsilon)$  para la mejor aproximación elíptica se describe por la expresión

$$\alpha^5 - \frac{3}{5}\alpha^4 + \frac{203}{25}\alpha^3 - \frac{451}{125}\alpha^2 + \frac{408}{25}\alpha - \frac{8}{5} = 0,$$

cuyas raíces son aproximadas por

$$\alpha_1 = 0,09974811,$$

$$\alpha_{2,3} = -0,09192664 \pm 2,22644677i,$$

$$\alpha_{4,5} = 0,34205259 \pm 1,76447162i.$$

Por tanto, la traza  $p(\alpha)$  posee valor mínimo en  $\alpha_0(\epsilon) \approx 0,09974811$ . Es claro que tal valor pertenece al intervalo  $(0, 2\epsilon)$  (véase la Figura 2).

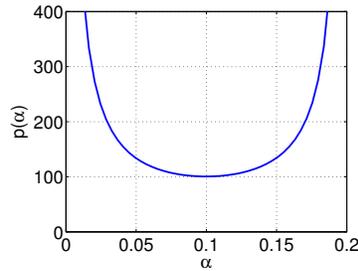


Figura 2.

La matriz  $P^{-1}(\alpha_0(\epsilon))$  es dada por la expresión

$$P^{-1}(\alpha_0(\epsilon)) \approx \begin{pmatrix} 0,01989987 & 0,00099747 \\ 0,00099747 & 0,01999987 \end{pmatrix}.$$

En consecuencia, la elipse descrita en el Teorema 1 tiene por frontera a la forma cuadrática

$$0,01989987x_1^2 + 0,00199494x_1x_2 + 0,01999987x_2^2 = 1.$$

La gráfica de la correspondiente elipse se muestra en la Figura 3 con línea quebrada.

Empleando los resultados del problema de desviación máxima en el sistema (5) con los valores de los parámetros antedichos, se halla que la desviación máxima del

ciclo límite satisface  $\beta_* \approx 6,38682318$ . En la Figura 3 se muestra el correspondiente ciclo límite con línea sólida.

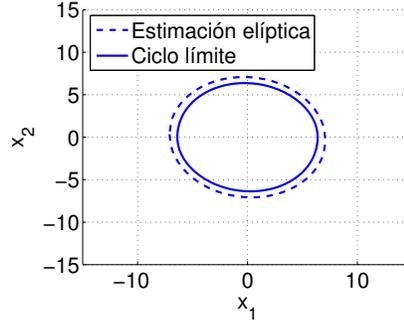


Figura 3.

**Ejemplo 2.** Consideremos los valores

$$\epsilon = \frac{8}{10}, \quad b = 1.$$

Con tales valores, la expresión  $\alpha_0(\epsilon)$  que da la aproximación elipsoidal toma la forma

$$\alpha^5 - \frac{24}{5}\alpha^4 + \frac{392}{25}\alpha^3 - \frac{4112}{125}\alpha^2 + \frac{912}{25}\alpha - \frac{64}{5} = 0,$$

cuyas raíces son aproximadas por

$$\alpha_1 = 0,59165718,$$

$$\alpha_{2,3} = 0,49692697 \pm 2,56496741i,$$

$$\alpha_{4,5} = 1,60724444 \pm 0,76559937i.$$

Por tanto  $p(\alpha)$  alcanza su valor mínimo en  $\alpha_0 \approx 0,59165718$ , el cual evidentemente pertenece al intervalo  $(0, 2\epsilon)$  (véase la Figura 4).

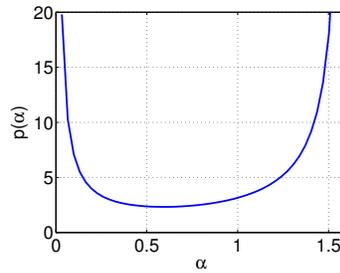


Figura 4.

La matriz  $P^{-1}(\alpha_0(\epsilon))$  satisface la relación

$$P^{-1}(\alpha_0(\epsilon)) \approx \begin{pmatrix} 0,83726301 & 0,35297869 \\ 0,35297869 & 1,19318654 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, el elipsoide que mejor aproxima el conjunto de accesibilidad del sistema (5) con los valores de los parámetros elegidos tiene por frontera la forma cuadrática

$$0,83726301x_1^2 + 0,70595738x_1x_2 + 1,19318654x_2^2 = 1.$$

En la Figura 5 se muestra la gráfica de la elipse correspondiente mediante una línea quebrada.

Por otra parte, empleando los resultados del problema de desviación máxima en el sistema (5) con los valores de los parámetros antedichos, se halla que la desviación máxima del ciclo límite satisface  $\beta_* \approx 1,03079625$ . En la Figura 5 se muestra el correspondiente ciclo límite con línea sólida.

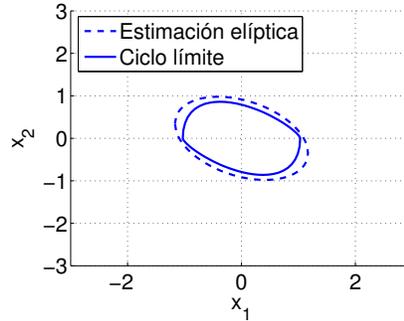


Figura 5.

#### REFERENCIAS

- [1] B. T. Polyak y P. S. Shcherbakov. *Estabilidad robusta y control*. Nauka, Moscú, 2002. [Б. Т. Поляк и П. С. Щербаков. Робастная устойчивость и управление. Наука. Москва, 2002.].
- [2] S. A. Nazin, B. T. Polyak, and M. V. Torunov. Rejection of bounded exogenous disturbances by the method of invariant ellipsoids. *Automation and Remote Control*, 68(3):467–486, 2007.
- [3] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear matrix inequalities in system and control theory*. SIAM Studies in Applied Mathematics. SIAM, Philadelphia, 1994.
- [4] A. S. Poznyak. *Advanced mathematical tools for automatic control engineers*, volume 1: Deterministic Techniques. Elsevier, Hungary, 2008.
- [5] V. N. Zhermolenko. El problema de B. V. Bulgakov sobre la desviación máxima del sistema oscilatorio de segundo orden. *Vestn. Mosk. Universiteta Matem. Mehan.*, 1980(2):87–91. [В. Н. Жермоленко. К задаче Б. В. Булгакова о максимальном отклонении колебательной системы второго порядка. *Вестн. Моск. Ун-та. Матем. Механ.*, 1980(2):87–91].
- [6] V. V. Alexandrov, O. V. Alexandrova, I. P. Prikhodko y R. Temoltzi-Avila. Síntesis de auto oscilaciones. *Vestn. Mosk. Universiteta Matem. Mehan.*, 2007(3):41–43. [В. В. Александров, О. В. Александрова, И. П. Приходько, Р. Темолтзи-Ауила. О синтезе автоколебаний. *Вестн. Моск. Ун-та. Матем. Механ.*, 2007(3):41–42].
- [7] V. N. Zhermolenko. Maximum deviation of oscillating system of the second order with external and parametric disturbances. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 46(3):407–412, 2007.
- [8] W. J. Grantham y T. L. Vincent. *Sistemas de control moderno. Análisis y diseño*. Limusa, Mexico, 1998. Traducción de la obra en inglés *Modern control systems analysis and design*, publicada por John Wiley and Sons, Inc.