

Álgebra y Álgebra Lineal  
(septiembre - noviembre 2019)  
- notas de clase para el estudiante -

Petra Wiederhold

DCA, CINVESTAV-IPN ZACATENCO, CIUDAD DE MÉXICO

*E-mail address:* pwiederhold@gmail.com

*URL:* <http://www.ctrl.cinvestav.mx/~biene/>

RESUMEN. .

El presente curso de 45 horas es la primera parte del curso “Álgebra lineal y ecuaciones diferenciales” (60 horas) el cual es un curso obligatorio del programa de maestría del Departamento de Control Automático (DCA) del CINVESTAV-IPN, Unidad Zacatenco, Ciudad de México. Las presentes notas fueron elaboradas para la impartición de septiembre a noviembre 2019.

El curso 2019 se basa de manera importante en que el estudiante conoce el anterior curso propedeutico “Álgebra lineal” que fue impartido en el DCA por Martha Rzedowski en mayo y junio 2019. Son utilizadas las notaciones introducidas por Martha, y son aplicadas las definiciones como Martha las dió a conocer. Es recomendable que cada estudiante tenga presente las notas de clase del mencionado curso anterior, disponibles en la página Web del DCA, las cuales son referenciadas aquí como [Martha].

Los capítulos 1-3 del presente curso corresponden a la parte “Álgebra” (15 horas), estudian temas de álgebra abstracta, principalmente en base del libro:

I.N. Herstein: Álgebra abstracta, Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1988.

La parte “Álgebra lineal” (30 horas, capítulos 4-6), es una continuación del anterior curso de álgebra lineal reportado en [Martha], en base (entre otros) a los libros:

T. Arens, R. Busam, F. Hettlich, C. Karpfinger, H. Stachel: Grundwissen Mathematik-studium, Springer Spectrum 2013.

S. Axler: Linear Algebra Done Right, Second Edition, Springer 1997.

Pequeñas partes del curso siguen un desarrollo parecido como partes del libro:

T. Matos y P. Wiederhold: Principios matemáticos para ciencias exactas, Editorial Colofón S.A. de C.V., Ciudad de México, 2017.

Las presentes notas contienen las definiciones y anunciados de forma completa, sin embargo, no todos los ejemplos y demostraciones son detallados, algunos son presentados, discutidos o ampliados durante las clases, otros son dejados como ejercicios, algunas pocas demostraciones fueron omitidas. Cada capítulo contiene serie(s) de ejercicios; después de haber sido trabajados por los estudiantes, los ejercicios también son discutidos en clase.

\*\*\*\*\*

## Índice de contenido

Capítulo 1. Algunas propiedades de números	1
1.1. Preliminares	1
1.2. Operaciones	3
1.3. Orden	4
1.4. Propiedades de números naturales y enteros	6
1.4.1. Principio del Buen Orden	6
1.4.2. Divisores, algoritmo de Euclides, mcd, mcm	7
1.4.3. Primos	11
Ejercicios de capítulo 1	15
Capítulo 2. Grupos	17
2.1. Semigrupos y grupos	17
2.2. Producto y suma general, potencias y múltiplos	21
2.3. Subgrupos	25
2.4. Grupos cíclicos	27
2.5. Subgrupos normales y grupos cociente	29
2.6. Homomorfismos	33
Ejercicios de capítulo 2	39
Capítulo 3. Anillos y campos	41
3.1. Definiciones, ejemplos, reglas de cálculo	41
3.2. Divisibilidad	45
3.3. Subanillos	46
3.4. Anillos de funciones	46
3.5. Anillo de polinomios sobre un anillo	48
3.6. Polinomios sobre un campo	52
3.7. Anillos de matrices	59
3.8. Homomorfismos	60
3.9. Ideales y anillos cociente	62
3.10. El anillo de los residuos de congruencia módulo $k$	66
Ejercicios de capítulo 3	69
Capítulo 4. Espacios vectoriales y mapeos lineales	71
4.1. Espacios vectoriales	71
Ejercicios de capítulo 4 — Serie 1	81
4.2. Sistemas lineales y los Métodos de Eliminación de Gauss y de Gauss-Jordan	83
4.3. Mapeos lineales - homomorfismos entre espacios vectoriales	90
4.4. Núcleo e imagen, inyectividad, fórmula de dimensión, rango	96
4.5. Vector de coordenadas, isomorfía de espacios de la misma dimensión finita	98

4.6. Representación matricial de mapeos lineales	100
Ejercicios de capítulo 4 — Serie 2	101
(Continuación de Sección 4.6)	103
4.7. Invertibilidad	111
4.8. Transformación de base y matrices similares	114
4.9. Espacio dual	117
Ejercicios de capítulo 4 — Serie 3	121
Capítulo 5. Determinantes	123
5.1. Determinante de una matriz	123
5.2. Determinante de un endomorfismo (de un operador lineal)	128
5.3. Desarrollo del determinante según Laplace	129
5.4. Determinante bajo transformaciones elementales de la matriz	131
5.5. Determinante como función multilinear	132
5.6. Aplicaciones de determinantes: matriz inversa	133
5.7. Aplicaciones de determinantes: solución de sistemas de ecuaciones lineales	135
5.8. Aplicaciones de determinantes: interpolación de polinomios	137
5.9. Aplicaciones de determinantes: áreas y volúmenes	140
Ejercicios de capítulo 5	145
Capítulo 6. Formas normales	147
6.1. Diagonalización y triangularización	147
6.2. Eigenvalores (valores propios) y eigenvectores (vectores propios) y su relación a la diagonalizabilidad	149
6.3. Determinación de eigenvalores, eigenvectores y eigenespacios	151
6.4. Multiplicidad de eigenvalores y dimensión de eigenespacios	158
6.5. Potencias y polinomios de matrices, Teorema de Cayley-Hamilton	161
6.6. La función exponencial para matrices	162
Ejercicios de capítulo 6	167
6.7. Triangularización de endomorfismos	169
6.8. Calcular potencias de matrices mediante la fórmula binomial	176
6.9. La forma normal de Jordan	178
6.9.1. Células de Jordan	178
6.9.2. Forma canónica y base de Jordan - definición y propiedades	179
6.9.3. Determinación de una matriz y base de Jordan	183
6.10. Resumen sobre invariantes y formas normales de matrices similares	195