

Álgebra y Ecuaciones Diferenciales

(curso de maestría, septiembre - diciembre 2021)

Petra Wiederhold

DCA, CINVESTAV-IPN ZACATENCO, CIUDAD DE MÉXICO

E-mail address: `pwiederhold@gmail.com`

URL: `http://www.ctrl.cinvestav.mx/~biene/`

Índice de contenido

Presentación del curso	vii
* Contenido	vii
* Clases	vii
* Tareas a cumplir por los estudiantes	vii
* Temario	viii
* Literatura	ix
Capítulo 1. Algunas propiedades de números	1
1.1. Preliminares	1
1.2. Operaciones	3
1.3. Orden	5
1.4. Propiedades de números naturales y enteros	7
1.4.1. Principio del Buen Orden	7
1.4.2. Divisores, algoritmo de Euclides, mcd, mcm	8
1.4.3. Primos	13
Capítulo 2. Grupos	15
2.1. Semigrupos y grupos	15
2.2. Producto y suma general, potencias y múltiplos	18
2.3. Subgrupos	21
2.4. Grupo de permutaciones	22
2.5. Grupos cíclicos	24
2.6. Subgrupos normales y grupos cociente	27
2.7. Homomorfismos	32
Capítulo 3. Anillos y campos	37
3.1. Definiciones, ejemplos, reglas de cálculo	37
3.2. Divisibilidad	41
3.3. Subanillos	42
3.4. Anillos de funciones	42
3.5. Anillo de polinomios sobre un anillo	44
3.6. Polinomios sobre un campo	47
3.7. Anillos de matrices	56
3.8. Homomorfismos	57
3.9. Ideales y anillos cociente	58
3.10. El anillo de los residuos de congruencia módulo k	63
Capítulo 4. Espacios vectoriales y mapeos lineales	65
4.1. Espacios vectoriales	65
4.2. Sistemas lineales y los Métodos de Eliminación de Gauss y de Gauss-Jordan	76

4.3.	Mapeos lineales - homomorfismos entre espacios vectoriales	83
4.4.	Núcleo e imagen, inyectividad, fórmula de dimensión, rango	89
4.5.	Vector de coordenadas, isomorfía de espacios de la misma dimensión finita	93
4.6.	Representación matricial de mapeos lineales	95
4.7.	Invertibilidad	102
4.8.	Transformación de base y matrices similares	108
4.9.	Espacio dual	110
Capítulo 5. Determinantes		115
5.1.	Determinante de una matriz	115
5.2.	Determinante de un endomorfismo (de un operador lineal)	120
5.3.	Desarrollo del determinante según Laplace	121
5.4.	Determinante bajo transformaciones elementales de la matriz	124
5.5.	Determinante como función multilineal	125
5.6.	Aplicaciones de determinantes: matriz inversa	126
5.7.	Aplicaciones de determinantes: solución de sistemas de ecuaciones lineales	128
5.8.	Aplicaciones de determinantes: interpolación de polinomios	130
5.9.	Aplicaciones de determinantes: áreas y volúmenes	134
Capítulo 6. Diagonalización, eigenvalores y eigenvectores, triangularización, forma normal de Jordan		139
6.1.	Diagonalización	139
6.2.	Eigenvalores (valores propios) y eigenvectores (vectores propios) y su relación a la diagonalizabilidad	141
6.3.	Determinación de eigenvalores, eigenvectores y eigenespacios de matrices	144
6.4.	Multiplicidad de eigenvalores y dimensión de eigenespacios	155
6.5.	Potencias y polinomios de matrices, Teorema de Cayley-Hamilton	161
6.6.	La función exponencial para matrices	163
6.7.	Triangularización de endomorfismos	167
6.8.	Calcular potencias de matrices mediante la fórmula binomial	176
6.9.	La forma normal de Jordan	178
6.9.1.	Células de Jordan	178
6.9.2.	Forma canónica y base de Jordan - definición y propiedades	179
6.9.3.	Determinación de una matriz y base de Jordan	181
6.10.	Resumen sobre invariantes y formas normales de matrices similares	201
Capítulo 7. Espacios euclidianos		203
7.1.	Aprendiendo del \mathbb{R}^n sobre normas y métricas	203
7.2.	El producto escalar canónico en \mathbb{R}^n	207
7.3.	Otros productos entre vectores de \mathbb{R}^3	211
7.3.1.	Producto de vectores o producto cruz	211
7.3.2.	Producto mixto	212
7.3.3.	Producto diádico	213
7.4.	Aplicación de productos entre vectores a la geometría analítica de \mathbb{R}^3	213
7.4.1.	Distancia entre un punto y una línea recta	213
7.4.2.	Distancia entre un punto y un plano	214
7.4.3.	Forma normal de Hesse de la ecuación de un plano	215
7.4.4.	Proyección ortogonal a un plano como mapeo afín	217

7.5. Espacios euclidianos - espacios vectoriales reales con producto escalar	218
7.6. La relación entre el producto escalar y matrices definidas positivas	220
7.7. Producto escalar y norma, distancia, ángulos, ortogonalidad	225
7.8. Bases ortogonales y ortonormales, el método de ortonormalización de Gram-Schmidt	231
7.9. Complemento ortogonal, proyección ortogonal a un subespacio	239
7.10. Aplicación de la proyección ortogonal al problema lineal de ajuste	241
7.11. Aplicación del problema lineal de ajuste a la aproximación de datos por funciones mediante el método de mínimos cuadrados	243
7.12. Espacios unitarios	246
7.13. Operadores lineales ortogonales y unitarios	250
7.14. Operadores lineales auto-adjuntos	259
Capítulo 8. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias - una breve introducción	263
8.1. Ideas y conceptos básicos, condiciones para la existencia de soluciones	263
8.2. Ecuación diferencial de primer orden con variables separables	268
8.3. Ecuación diferencial de primer orden homogénea	269
8.4. Ecuación diferencial exacta y el factor integrante	272
8.5. Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales	274
8.6. Transformadas integrales	284
8.7. Método de series	291
Fin del curso	294