

Álgebra y Ecuaciones Diferenciales
(curso de maestría, septiembre - diciembre 2022)

Petra Wiederhold

DCA, CINVESTAV-IPN ZACATENCO, CIUDAD DE MÉXICO
E-mail address: pwiederhold@gmail.com

RESUMEN. ...

Índice de contenido

Capítulo 1. Algunas propiedades de números	1
1.1. Preliminares	1
1.2. Operaciones	3
1.3. Orden	5
1.4. Propiedades de números naturales y enteros	7
1.4.1. Principio del Buen Orden	7
1.4.2. Divisores, algoritmo de Euclides, mcd, mcm	8
1.4.3. Primos	13
Capítulo 2. Grupos	15
2.1. Semigrupos y grupos	15
2.2. Producto y suma general, potencias y múltiplos	18
2.3. Subgrupos	21
2.4. Grupo de permutaciones	22
2.5. Grupos cíclicos	24
2.6. Subgrupos normales y grupos cociente	27
2.7. Homomorfismos	32
Capítulo 3. Anillos y campos	37
3.1. Definiciones, ejemplos, reglas de cálculo	37
3.2. Divisibilidad	41
3.3. Subanillos	42
3.4. Anillos de funciones	42
3.5. Anillo de polinomios sobre un anillo	44
3.6. Polinomios sobre un campo	47
3.7. Anillos de matrices	56
3.8. Homomorfismos	57
3.9. Ideales y anillos cociente	59
3.10. El anillo de los residuos de congruencia módulo k	63
Capítulo 4. Espacios vectoriales y mapeos lineales	65
4.1. Espacios vectoriales	65
4.2. Sistemas lineales y los Métodos de Eliminación de Gauss y de Gauss-Jordan	76
4.3. Mapeos lineales - homomorfismos entre espacios vectoriales	83
4.4. Núcleo e imagen, inyectividad, fórmula de dimensión, rango	89
4.5. Vector de coordenadas, isomorfía de espacios de la misma dimensión finita	93
4.6. Representación matricial de mapeos lineales	95
4.7. Invertibilidad	102
4.8. Transformación de base y matrices similares	108

4.9. Espacio dual	112
Capítulo 5. Determinantes	117
5.1. Determinante de una matriz	117
5.2. Determinante de un endomorfismo (de un operador lineal)	122
5.3. Desarrollo del determinante según Laplace	123
5.4. Determinante bajo transformaciones elementales de la matriz	126
5.5. Determinante como función multilineal	127
5.6. Aplicaciones de determinantes: matriz inversa	128
5.7. Aplicaciones de determinantes: solución de sistemas de ecuaciones lineales	130
5.8. Aplicaciones de determinantes: interpolación de polinomios	132
5.9. Aplicaciones de determinantes: áreas y volúmenes	135
Capítulo 6. Diagonalización, eigenvalores y eigenvectores, triangularización, forma normal de Jordan	141
6.1. Diagonalización	141
6.2. Eigenvalores (valores propios) y eigenvectores (vectores propios) y su relación a la diagonalizabilidad	143
6.3. Determinación de eigenvalores, eigenvectores y eigenespacios de matrices	146
6.4. Multiplicidad de eigenvalores y dimensión de eigenespacios	158
6.5. Potencias y polinomios de matrices, Teorema de Cayley-Hamilton	164
6.6. La función exponencial para matrices	165
6.7. Triangularización de endomorfismos	170
6.8. Calcular potencias de matrices mediante la fórmula binomial	178
6.9. La forma normal de Jordan	180
6.9.1. Células de Jordan	180
6.9.2. Forma canónica y base de Jordan - definición y propiedades	181
6.9.3. Determinación de una matriz y base de Jordan	183
6.10. Resumen sobre invariantes y formas normales de matrices similares	204
Capítulo 7. Espacios euclidianos	205
7.1. Aprendiendo del \mathbb{R}^n sobre normas y métricas	205
7.2. El producto escalar canónico en \mathbb{R}^n	209
7.3. Otros productos entre vectores de \mathbb{R}^3	214
7.3.1. Producto de vectores o producto cruz	214
7.3.2. Producto mixto	215
7.3.3. Producto diádico	216
7.4. Aplicación de productos entre vectores a la geometría analítica de \mathbb{R}^3	216
7.4.1. Distancia entre un punto y una línea recta	216
7.4.2. Distancia entre un punto y un plano	217
7.4.3. Forma normal de Hesse de la ecuación de un plano	218
7.4.4. Proyección ortogonal a un plano como mapeo afín	220
7.5. Espacios euclidianos - espacios vectoriales reales con producto escalar	221
7.6. La relación entre el producto escalar y matrices definidas positivas	223
7.7. Producto escalar y norma, distancia, ángulos, ortogonalidad	228
7.8. Bases ortogonales y ortonormales, el método de ortonormalización de Gram-Schmidt	234
7.9. Complemento ortogonal, proyección ortogonal a un subespacio	242

7.10.	Aplicación de la proyección ortogonal al problema lineal de ajuste	244
7.11.	Aplicación del problema lineal de ajuste a la aproximación de datos por funciones mediante el método de mínimos cuadrados	246
7.12.	Producto escalar unitario, espacios unitarios	250
7.13.	Operadores lineales ortogonales y unitarios	253
7.13.1.	Definición y propiedades	253
7.13.2.	Eigenvalores y eigenvectores de operadores ortogonales/unitarios	258
7.13.3.	Matrices reales ortogonales 2x2	259
7.13.4.	Comentarios sobre matrices reales ortogonales, rotaciones y mapeos de reflexión (mapeos espejo)	261
7.13.5.	Diagonalizabilidad de operadores unitarios	261
7.14.	Operadores lineales auto-adjuntos	263
7.14.1.	Definición, ejemplos, relación con matrices simétricas/hermitianas	263
7.14.2.	Eigenvalores y eigenvectores de matrices simétricas o hermitianas	264
7.14.3.	Diagonalizabilidad de operadores auto-adjuntos y matrices reales simétricas/hermitianas	265
Capítulo 8.	Ecuaciones Diferenciales Ordinarias - una breve introducción	267
8.1.	Ideas y conceptos básicos, condiciones para la existencia de soluciones	267
8.2.	Ecuación diferencial de primer orden con variables separables	272
8.3.	Ecuación diferencial de primer orden homogénea	273
8.4.	Ecuación diferencial exacta y el factor integrante	276
8.5.	Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales	278
8.6.	Transformadas integrales	288
8.7.	Método de series	295
	Fin del curso	298

