

CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS
AVANZADOS DEL I.P.N.

DEPARTAMENTO DE CONTROL AUTOMÁTICO

TESIS DE MAESTRIA:

SINCRONIZACIÓN DE DOS SISTEMAS BARRA ESFERA
VÍA REDES NEURONALES

SAÚL JIMÉNEZ ZAVALA

DIRECTOR DE TESIS
DR. WEN YU LIU

Agradecimientos

Al Dr. Wen Yu Liu por dirigir el trabajo de tesis, por compartir conmigo sus conocimientos y su experiencia. Al Dr. Ruben Garrido y al Dr. Marco Antonio Moreno Armendariz por las críticas constructivas para mejorar el presente trabajo. Al CONACYT por el apoyo financiero que me presto para la realización de mis estudios. Al CINVESTAV, en especial al departamento de Control Automático por proporcionarme los medios necesarios para mi formación académica y por las facilidades otorgadas durante mi estancia.

Resumen

Este trabajo presenta la sincronización de dos sistemas barra-esfera vía redes neuronales bajo el enfoque de sincronización interna, es decir, los sistemas barra-esfera tienen la misma jerarquía; cada uno de los sistemas tiene la misma importancia que el otro. El sistema barra-esfera es muy utilizado en aplicaciones académicas dado que es un sistema mecánico subactuado inestable en lazo abierto. Se propone un controlador PD (Proporcional-derivativo) más una compensación basada en redes neuronales y un acoplamiento cruzado para inducir el comportamiento síncrono entre las posiciones de las esferas para el caso de regulación. La compensación con redes neuronales se emplea en el análisis con base en el modelo matemático no lineal de los sistemas barra esfera. Se realiza el análisis de estabilidad del sistema conjunto, primeramente utilizando el modelo lineal y finalmente, con el modelo no lineal de los sistemas barra esfera. El controlador se implementa en tiempo real para confirmar los resultados teóricos obtenidos.

Abstract

This thesis focuses on controlled synchronization of two ball and beam systems with the use of neural networks for the case of internal synchronization, in other words the two synchronized ball and beam systems occur on equal terms in the unified multi-composed system. Ball and beam system is widely used for teaching control systems engineering because is an underactuated system and is open loop unstable. A synchronization controller based on a PD controller (Proportional Derivative controller) plus a neural network compensator and the so called cross-coupling controller is proposed to induce the mutual synchronization behaviour between the balls positions for the regulation case. The neural network compensation is used for the analysis with the

nonlinear models of the ball and beam systems. The stability analysis of the multi-composed system, firstly based on linear models and finally with nonlinear models of the ball and beam systems is presented. Real experiments are applied to test our theory results.

Índice general

Resumen	III
1. Preliminares	1
1.1. Sincronización de sistemas mecánicos	1
1.1.1. Sincronización	1
1.1.2. Sincronización controlada	3
1.1.3. Sincronización de sistemas mecánicos subactuados	6
1.2. Objetivo de la tesis	8
1.3. Descripción de la tesis	8
2. Sincronización de dos sistemas barra esfera: Caso de estructura y parámetros conocidos	11
2.1. Descripción del sistema barra esfera	11
2.2. Sincronización basada en el modelo lineal de los sistemas BE (barra esfera)	14
2.2.1. Modelo lineal de los sistemas barra esfera	14
2.2.2. Controlador para sincronización basado en el modelo lineal de los sistemas BE	15
2.3. Sincronización basada en el modelo no lineal de los sistemas BE	18
2.4. Resultados de simulación	24
3. Controlador neuronal para la sincronización de dos sistemas BE	29
3.1. Compensación usando redes neuronales con FBR (Funciones de base radial)	29

3.2. Controlador PD (Proporcional derivativo) más compensación neuronal y acoplamiento cruzado para la sincronización de dos sistemas BE	31
3.2.1. Controlador con redes neuronales de una capa	32
3.2.2. Controlador con redes neuronales de dos capas	34
3.3. Simulación del controlador neuronal para la sincronización de dos sistemas BE	37
4. Aplicación del controlador neuronal para la sincronización de dos sistemas barra esfera en tiempo real	43
4.1. Preliminares para la ejecución en tiempo real	43
4.2. Controlador neuronal para la sincronización de dos sistemas barra esfera	44
5. Conclusiones	49
5.1. Perspectivas de trabajo futuro	50
A. Sistemas barra-esfera	51
A.1. Tarjeta de adquisición de datos A/D-D/A (Analógico/Digital - Digital/Analógico)	52
A.2. <i>Software</i>	53
A.2.1. <i>Real Time Conection</i> (RT-CON)	54
A.2.2. <i>Real Time Workshop</i> (RTW)	54
A.2.3. <i>Real Time Windows Target</i> (RTWT)	55
B. Prueba de que las matrices M, B son definidas positivas en los teoremas 2.1, 3.1 y 3.2	57

Índice de figuras

1.1. Sincronización interna	3
1.2. Sincronización externa	4
1.3. Sincronización interna o descentralizada de dos sistemas barra esfera diferentes	9
2.1. Sistema barra esfera con centro de rotación en el extremo izquierdo de la barra	12
2.2. Sistema barra esfera con centro de rotación en la mitad de la barra . .	13
2.3. Estructura de control para la sincronización de dos sistemas barra esfera	16
2.4. Estructura de control simplificada	17
2.5. Controlador en configuración serie (a) y en configuración paralela (b) para la sincronización de dos sistemas barra esfera	19
2.6. r_1, r_2, r^d y $r_2 - r_1$: sin sincronización	26
2.7. r_1, r_2, r^d y error de sincronización, $\beta = 0,95$	27
3.1. Controlador neuronal en configuración serie (a) y en configuración paralela (b) para sincronización	31
3.2. r_1, r_2, r^d y $r_2 - r_1$: sin sincronización	38
3.3. r_1, r_2, r^d y $r_2 - r_1$: sin sincronización, respuesta a una perturbación . .	39
3.4. r_1, r_2, r^d y error de sincronización. Controlador con redes neuronales de una capa, $\beta = 0,95$	40
3.5. r_1, r_2, r^d y error de sincronización. Controlador con redes neuronales de una capa, respuesta a una perturbación, $\beta = 0,95$	40

3.6.	r_1, r_2, r^d y error de sincronización. Controlador con redes neuronales de dos capas, $\beta = 0,95$.	41
3.7.	r_1, r_2, r^d y error de sincronización. Controlador con redes neuronales de dos capas, respuesta a una perturbación, $\beta = 0,95$.	42
4.1.	Salidas de los sistemas BE en tiempo real: r_1, r_2 y salida deseada r^d . Sin sincronización	45
4.2.	Diferencia entre la salida del sistema BE_2 y el sistema BE_1 : $r_2 - r_1$	45
4.3.	Salidas de los sistemas BE en tiempo real: r_1, r_2 y salida deseada r^d . Controlador neuronal para sincronización, $\beta = 0,5$	46
4.4.	Error de sincronización: $r_2 - r_1$. Controlador neuronal para sincronización, $\beta = 0,5$	46
A.1.	Prototipo de laboratorio <i>Balance Control Work Bench</i> : Sistema barra barril	52
A.2.	Prototipo de laboratorio <i>Quanser</i> : Sistema barra esfera	53

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Sincronización de sistemas mecánicos

En los sistemas mecánicos en los que dos máquinas tienen que cooperar, la sincronización es muy importante. El comportamiento cooperativo en los sistemas mecánicos proporciona una mayor flexibilidad y maniobrabilidad, que no puede ser obtenida por un solo sistema, esta ventaja se aprovecha por ejemplo en algunos procesos de producción como en la industria automotriz, en donde se utilizan sistemas multicompuestos los cuales son un grupo de sistemas individuales, idénticos o diferentes que trabajan en conjunto para ejecutar una tarea bajo esquemas de cooperación o de coordinación [21].

1.1.1. Sincronización

De acuerdo a Blekhman [23] la palabra sincronización puede ser definida como una conformidad en el tiempo mutua entre dos o más procesos, que se refiere a que las variables de los procesos deben ser iguales en el tiempo. Esta conformidad puede ser caracterizada por ciertas relaciones entre algunas funcionales o funciones dependientes de los procesos. Se pueden definir diferentes tipos de sincronización [22]:

- Sincronización natural: En este tipo de sincronización, sistemas desconectados presentan un comportamiento síncrono, por ejemplo, los relojes de alta precisión que se sincronizan en el dominio de la frecuencia [22].

- **Autosincronización:** Cuando la sincronización es alcanzada por interconexiones propias entre los sistemas, sin una acción externa introducida artificialmente, por ejemplo, en un par de relojes de péndulo colgados sobre una barra, experimento reportado por Huygens en 1673.
- **Sincronización controlada:** Cuando la sincronización es resultado de acciones externas (entradas de control) y/o interconexiones artificiales, por ejemplo los sistemas maestro-esclavo.

En el problema de sincronización controlada se pueden distinguir dos tipos de sincronizaciones, sincronización mutua (interna) y sincronización externa también conocidas como sincronización descentralizada y sincronización centralizada respectivamente [1].

- **Sincronización interna o descentralizada:** En este tipo de sincronización todos los elementos a sincronizar tienen la misma jerarquía en un sistema multicompuesto unificado. Existen interconexiones entre todos los elementos de tal forma que el comportamiento síncrono es el resultado de la interacción entre todos ellos. El problema de sincronización puede ser formulado como el de diseñar una ley de control para cada uno de los elementos del sistema tal que se sincronicen con respecto a la salida deseada común y_d . La figura (1.1) muestra la representación de un esquema de sincronización interna, u_i es la entrada al sistema i , y_i es la salida del sistema i y y_d es la salida deseada común.
- **Sincronización externa o centralizada:** Un elemento en el sistema multicompuesto tiene mayor jerarquía que los otros y su movimiento puede ser considerado como independiente de los movimientos de los otros elementos. En este tipo de sincronización solo hay interconexiones del sistema maestro o sistema dominante hacia los sistemas no dominantes por lo que el comportamiento síncrono está predeterminado por el sistema independiente dominante. La Figura (1.2) muestra la representación de un esquema de sincronización interna los subíndices m y s se refieren a un sistema maestro y a un sistema esclavo respectivamente, u es la entrada, y_d es la salida deseada y y_m denota la salida de sistema maestro.

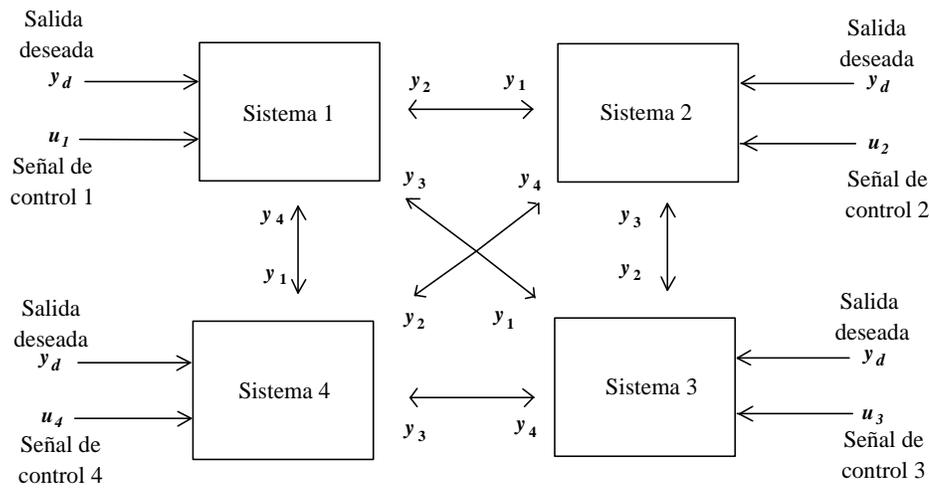


Figura 1.1: Sincronización interna

El problema de sincronización es diseñar un controlador para cada uno de los sistemas no dominantes (esclavos), tal que se sincronicen con respecto a la salida del sistema maestro y_m y no con la salida deseada de este, dado que puede no ser alcanzada debido a dinámicas no modeladas, parámetros inciertos, cargas no conocidas, etc..

En la sincronización existen varios aspectos a considerar. Primero se considera una funcional con respecto a la cual la meta de sincronización deseada debe ser formulada, estas funcionales dependen del tipo de sistemas y de las variables de interés, por ejemplo, con la norma de la diferencia entre las variables de interés como posiciones, velocidades. Segundo se diseñan los acoplamientos e interconexiones para asegurar el comportamiento síncrono. Finalmente, se deben de establecer condiciones para asegurar que la meta de sincronización sea alcanzada.

1.1.2. Sincronización controlada

El problema de sincronización controlada se ha analizado de diferentes formas, por ejemplo, en [19] se investiga como un problema de regulación dado que el problema de regulación en Control Automático, trata del seguimiento asintótico de cierta clase

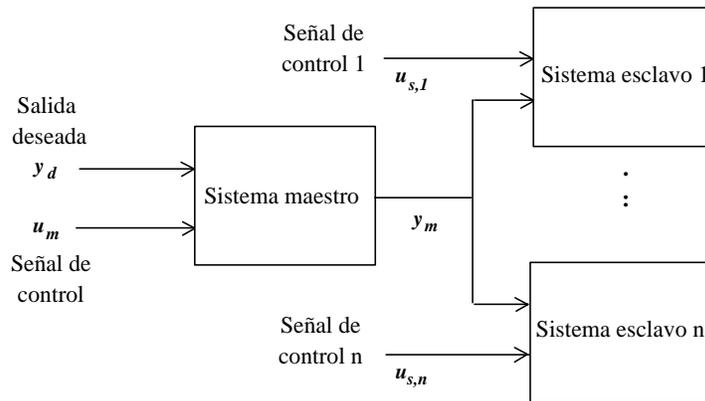


Figura 1.2: Sincronización externa

de trayectorias y rechazo asintótico de perturbaciones no deseadas, cuya solución requiere de un compensador de retroalimentación que incorpora un modelo interno de un exosistema que genera las señales de referencia y perturbaciones exógenas. Para el problema de sincronización se considera que el exosistema de un sistema transmisor (maestro) genera las trayectorias que debe seguir un sistema receptor (esclavo). En [20] se analiza el problema de sincronización como el problema de observación de la teoría de control no lineal en la que para resolver el problema de observación se utiliza un receptor (esclavo) como una copia del transmisor (maestro), modificado con un término que depende de la diferencia entre la señal del transmisor y la señal predecida por el observador. El término adicional debe atenuar la diferencia entre la señal del emisor y la señal predecida por el observador. Para sincronizar los sistemas se requiere establecer estabilidad asintótica global del error de observación (diferencia entre la señal de emisor y la señal predecida por el observador). Las dos formas anteriores de resolver el problema de sincronización se encuentran dentro de la sincronización externa, es decir, existe un maestro y un esclavo. En los últimos años se han desarrollado nuevos esquemas de control para sincronización interna, algunos utilizan la idea del acoplamiento cruzado originalmente introducida por Koren en 1980 y posteriormente utilizada por otros autores para máquinas herramientas tales como Tomizuka, Koren and Lo, Kamanano [7] etc.. El control adaptable junto con el acoplamiento cruzado, es una estrategia efectiva en la sincronización de sistemas con el esquema de sincronización interna [7],

Tomizuka, Hu y Chiu [35], propusieron un control adaptable con prealimentación para la sincronización de velocidad de dos motores, Yang y Chan [33] sincronizan dos giroscopios, consideran un esquema de control adaptable para alcanzar la sincronización de movimiento y coordinar el movimiento de dos giroscopios cuando hay perturbaciones. Proponen una ley de control para cada giroscopio que se complementa con una ley de acoplamiento que se introduce en respuesta al error de sincronización.

Para sistemas mecánicos la sincronización en sistemas de robots múltiples ha sido ampliamente estudiada en las últimas décadas, esas ideas pueden extenderse a otros sistemas como robots móviles, motores, balanceo y desbalanceo de rotores, etc.. Sun y Mills [7], tratan el caso de sincronización interna de sistemas con robots múltiples, proponen un controlador con una arquitectura de control adaptable y acoplamiento cruzado, a través de una retroalimentación de posición y de los errores de sincronización al controlador y adaptador de parámetros de tal forma que los errores de seguimiento y sincronización, convergen a cero. El acoplamiento cruzado, se incorpora para regular las trayectorias del robot en el estado transitorio, el error de sincronización se define como $\epsilon(t) = \sum_{i=1}^n c_i(t)e_i(t)$, para obtener una sincronización entre los robots se debe cumplir $\epsilon(t) = 0$. Donde $c_i(t) = -\frac{\partial f(\cdot)}{\partial x_i} \Big|_{x_i^d}$, con $e_i(t) = x_i^d(t) - x_i(t)$, $x_i^d(t)$ es la posición deseada, $x_i(t)$ la posición real del manipulador y $f(\cdot)$ es la función de sincronización. Rodríguez y Nijmeijer [4] proponen un controlador para sincronización que emplea los errores de acoplamiento para inducir un comportamiento de sincronización mutua, diseñan interconexiones y controladores $\tau_i(\cdot)$ para todos los robots en el sistema, tal que las posiciones angulares y velocidades del i -ésimo robot estén sincronizadas con respecto a una trayectoria deseada común y las posiciones, velocidades del j -ésimo robot. Utilizan observadores basados en modelos no lineales para estimar las velocidades y aceleraciones que son usadas en el lazo de retroalimentación de tal forma que el controlador para sincronización y el observador, garantizan sincronización mutua del sistema de robots múltiples.

En [6] se utiliza lógica difusa para sincronizar el movimiento de dos pistones electrohidráulicos por medio de un controlador compuesto por un controlador difuso que se encarga de generar las señales de control para inducir el comportamiento síncrono en los dos cilindros y un controlador difuso más una prealimentación para controlar la

posición de cada uno de los pistones.

Sincronización de sistemas mecánicos vía redes neuronales

Otra forma de resolver el problema de sincronización se propone en [18] en donde se sincronizan dos ejes de movimiento por medio de redes neuronales, introducen una función de costo que contiene el error de sincronización y proponen una ley de aprendizaje basada en el método de gradiente para ajustar los pesos de la red neuronal. En [50] se estudia el caso de coordinación de robots múltiples que sujetan un cuerpo rígido firmemente, parten del hecho de que se forma una cadena cinemática cerrada, como resultado se tiene que los grados de libertad del sistema completo se reducen y se genera una fuerza interna que necesita ser controlada, proponen un controlador que utiliza redes neuronales para estimar los elementos de las matrices de inercia, de fuerzas de coriolis y centrípetas y de pares gravitacionales. Yu y Chen [58] sincronizan un sistema de dos ejes de movimiento controlado cada uno por un motor, por medio de un controlador PID neuronal para controlar la posición y velocidad de cada eje de movimiento y un controlador PID neuronal para sincronizar la posición de los dos ejes, la actualización de los pesos de las redes neuronales se realiza por medio de un algoritmo de entrenamiento basado en el método de gradiente. Obtienen el modelo del sistema basado en funciones de transferencia por medio de un proceso de identificación fuera de línea considerando el caso en el que aplica una carga al sistema.

1.1.3. Sincronización de sistemas mecánicos subactuados

Los sistemas mecánicos subactuados tienen la ventaja de tener menor peso, consumen menor energía y tienen diseños más compactos que los sistemas completamente actuados [52], [53]. La sincronización de sistemas mecánicos subactuados empieza a ser estudiada en los últimos años. En [55] se trata el caso de sincronización de dos manipuladores subactuados que sostienen un cuerpo rígido, hacen la suposición de que cada manipulador sujeta al cuerpo firmemente y proponen una ley de control que extiende el controlador PD más compensación de gravedad propuesto en [30] para manipuladores completamente actuados, de tal forma que se puedan compensar las fuerzas de gravedad en las juntas que no se encuentran actuadas. El estudio de manipuladores

subactuados tiene aplicación en el diseño de controladores con tolerancia a fallas de manipuladores completamente actuados, que presentan una falla en alguno de sus actuadores, la tolerancia a fallas se utiliza por ejemplo en aplicaciones espaciales [10]. En [21] se expone la idea de extender la teoría de sincronización de los robots, para sincronizar algunos sistemas mecánicos subactuados como el control de robots móviles en el espacio cartesiano, un ejemplo se muestra en [9] en donde se sincronizan robots móviles con el enfoque de sincronización externa.

Para la sincronización interna de sistemas mecánicos subactuados inestables en lazo abierto, el problema que se tiene que resolver es el caso de que se desee sincronizar un grado de libertad de los sistemas, que no se encuentra actuado (variable no actuada), es que se tienen que establecer las interconexiones necesarias entre los sistemas y ser incluidas en la ley de control, de tal forma que el controlador establezca la variable no actuada de cada sistema subactuado en el mismo punto de equilibrio que los otros sistemas al mismo tiempo en el que sincroniza a esta variable con respecto a los otros sistemas, debido a esto se estudia el caso de sincronización estable [47], que se refiere a la sincronización de las variables que se encuentran actuadas y a la estabilización de la dinámica inestable asociada con las variables no actuadas, por ejemplo, en [47] se propone un controlador para la sincronización interna de sistemas mecánicos inestables que satisfacen la condición de coordinación simplificada [3], se utiliza el método de Lagrangianos controlados [3] y un moldeo de energía potencial para acoplar los sistemas mecánicos subactuados. Se presenta un caso de simulación para la sincronización de dos sistemas de péndulo invertido sobre un carro, en donde se sincronizan la posición de los dos carros y se estabilizan cada uno de los péndulos en el punto de equilibrio superior, en la posición vertical arriba del péndulo. M. Tsai y B.H. Shen [31] investigan el caso de sincronización estable, de forma interna y externa de dos péndulos invertidos desplazados cada uno de ellos por un servo motor lineal. Los dos péndulos se encuentran unidos en su extremo superior por medio de una barra, linealizan el modelo no lineal de los sistemas alrededor del punto de equilibrio superior y proponen una ley de control en cascada compuesta por un controlador interno, para estabilizar el punto de equilibrio superior de los péndulos invertidos por medio de un controlador robusto para asignación de polos y un controlador externo compuesto por un PD y un acoplamiento cruzado, para sincronizar la posición de los dos motores lineales.

1.2. Objetivo de la tesis

Dentro de las diferentes clasificaciones de sincronización existe la sincronización controlada, que consiste en diseñar una entrada de control tal que exista una conformidad en el tiempo de alguna variable entre varios procesos. En el caso de dos sistemas barra esfera se considerara la variable no actuada, es decir, la posición de las dos esferas, el objetivo es sincronizar dos sistemas barra esfera vía redes neuronales, con el enfoque de la sincronización interna o descentralizada, figura (1.3). Los dos sistemas barra esfera a sincronizar deben tener la misma jerarquía, con una posición deseada r^d común para los dos sistemas. El problema de control consiste en diseñar interconexiones y una ley de retroalimentación para los dos sistemas de tal forma que las posiciones de los dos sistemas, r_1 posición de la esfera del sistema barra esfera número uno y r_2 posición de la esfera del sistema barra esfera número dos, se sincronicen en el estado transitorio con respecto a la posición deseada r^d para el caso de regulación. Se considera el error de sincronización dado por

$$\epsilon(t) = e_1(t) - e_2(t) \quad (1.1)$$

Con $e_1(t) = r^d - r_1$, $e_2(t) = r^d - r_2$, por lo que se tiene $\epsilon(t) = r_2 - r_1$

1.3. Descripción de la tesis

En el Capítulo 2 se propone un controlador para la sincronización de dos sistemas barra-esfera basado en el modelo matemático lineal y un controlador basado en el modelo matemático no lineal de los sistemas así como su prueba de estabilidad. En el Capítulo 3 se proponen dos controladores basados en redes neuronales y un acoplamiento cruzado para la sincronización de dos sistemas barra esfera, el primer controlador está basado en redes neuronales de una capa y el segundo en redes neuronales de dos capas. El Capítulo 4 está dedicado a la parte experimental, se muestran algunos resultados de la sincronización de dos sistemas barra esfera. Finalmente, en el Capítulo 5 se establecen las conclusiones y las líneas de investigación futuras asociadas a este trabajo.

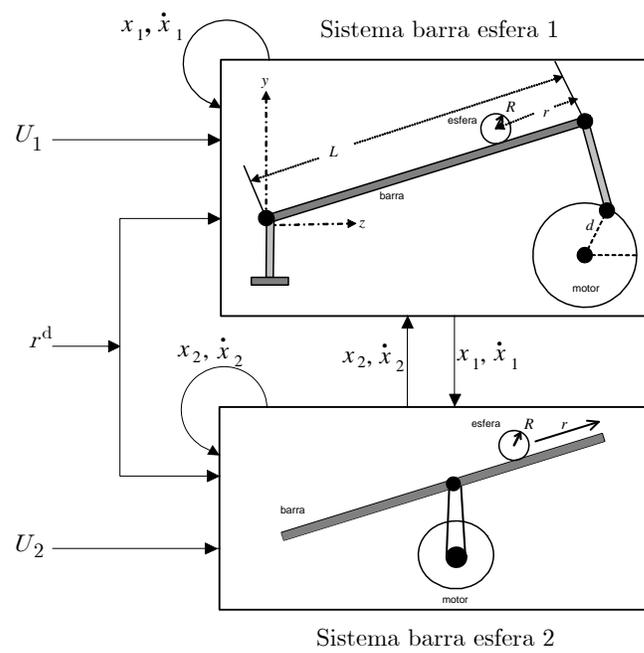


Figura 1.3: Sincronización interna o descentralizada de dos sistemas barra esfera diferentes

Capítulo 2

Sincronización de dos sistemas barra esfera: Caso de estructura y parámetros conocidos

2.1. Descripción del sistema barra esfera

El sistema barra esfera figura (2.1), es un sistema mecánico subactuado, es decir presenta un número menor de actuadores que de grados de libertad, es un prototipo utilizado en aplicaciones académicas y de investigación en donde se pueden probar diferentes técnicas de control por ejemplo, un controlador PD (proporcional derivativo) en cascada [37], controlador vía linealización entrada salida aproximada [25], controlador de modos deslizantes [38], controlador con lógica difusa [34], controladores neuronales [27], [54], [57], controlador neurodifuso [36], etc..

El sistema barra esfera es un sistema inestable en lazo abierto, es decir la salida diverge, para un ángulo fijo de la barra, además de tener un grado relativo no bien definido [25]. El problema de control, es diseñar un controlador el cual calcule un voltaje aplicado U , para mover la esfera de tal forma que su posición sobre la barra, sea la posición deseada r^d , variando el ángulo de la barra α .

Los sistemas barra esfera, se muestran en la figura (2.1) y (2.2). Cada sistema está constituido por una barra rígida que rota sobre un plano, al aplicarle un par en el punto

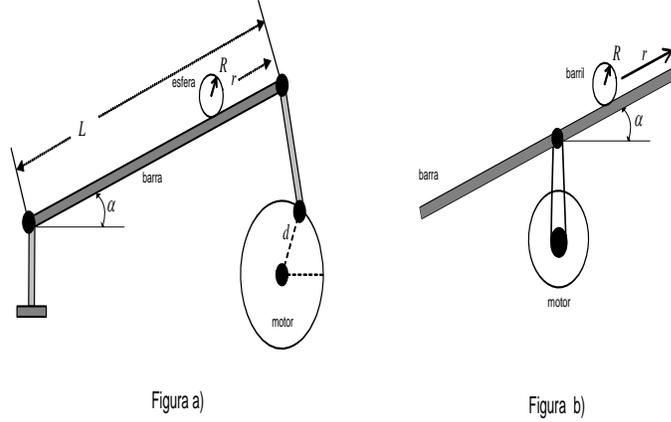


Figura 2.1: Sistema barra esfera con centro de rotación en el extremo izquierdo de la barra

de rotación, también se compone ya sea de una esfera o de un barril, que se desplaza sobre la barra, la posición de la esfera o el barril r , es controlada al variar el ángulo α de la barra, que está relacionado de manera directa con el ángulo θ del motor.

Modelo matemático

El modelo matemático del sistema se puede obtener usando el método de Euler-Lagrange, obteniendo primero las energías cinética y potencial del sistema, sustituyéndose en la función Lagrangiana (diferencia entre la energía potencial y energía cinética) y obteniéndose las ecuaciones de movimiento para sistemas conservativos [5], [13].

Las ecuaciones de movimiento que describen a los sistemas de la figura (2.1) y de la figura (2.2) son

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{J_e}{R^2} + m\right) \ddot{r} + mg \sin \alpha - mr \dot{\alpha}^2 \\ \tau &= (mr^2 + J + J_e) \ddot{\alpha} + 2mr \dot{r} \dot{\alpha} + \xi \cos \alpha \end{aligned} \quad (2.1)$$

Donde J es el momento de inercia de la barra, J_e el momento de inercia de la esfera o del barril, m la masa de la esfera, R el radio de la esfera, g la aceleración de gravedad, r es la posición de la esfera sobre la barra, α es el ángulo de la barra, τ es el par aplicado a la barra. Con $\xi = mgr$ [25] para el sistema barra esfera con eje de rotación de la barra, localizado a la mitad de la barra (Figura 2.2) y $\xi = mgr + \frac{L}{2} Mg$ [13] para el

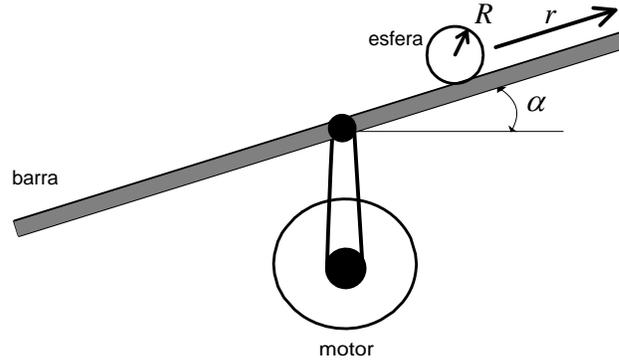


Figura 2.2: Sistema barra esfera con centro de rotación en la mitad de la barra

sistema barra esfera con eje de rotación de la barra, localizado en el extremo izquierdo de la barra (Figura 2.1), donde L es la longitud de la barra y M es la masa de la barra.

El modelo matemático del motor está dado por [13]:

$$\frac{R_m J_m}{K_m K_g} \ddot{\theta} + \left(K_b + \frac{R_m B_m}{K_m K_g} \right) \dot{\theta} = U \quad (2.2)$$

Donde U es el voltaje de entrada, θ es el ángulo del motor, R_m es la resistencia de armadura, J_m es el momento de inercia del eje del motor, K_m es una constante de par del motor, K_g es la razón de reducción de los engranes, K_b es la constante de fuerza contraelectromotriz, B_m es el coeficiente de fricción viscosa. La relación entre el ángulo que se mueve el motor θ y el ángulo que se mueve la barra α , puede se expresada por la relación

$$\alpha \gamma = \theta$$

2.2. Sincronización basada en el modelo lineal de los sistemas BE (barra esfera)

2.2.1. Modelo lineal de los sistemas barra esfera

Para una posición fija se tiene $\dot{\alpha} = 0$, considerando que el primer sistema BE es un sistema barra esfera y el segundo es un sistema barra barril. Sustituyendo en la primera ecuación de (2.1) se tiene que para el primer sistema la aceleración de la esfera está dada por [37]:

$$0 = \left(\frac{J_e}{R^2} + m \right) \ddot{r} + mg \sin \alpha$$

$$\left(\frac{J_e}{R^2} + m \right) \ddot{r} = -mg \sin \alpha \quad (2.3)$$

Dado que para una esfera el momento de inercia está dado por $J_e = \frac{2}{5}mR^2$, sustituyendo J_e en la ecuación (2.3)

$$\frac{7}{5}m\ddot{r} = -mg \sin \alpha$$

Para valores pequeños de α la ecuación anterior se linealiza de la siguiente forma [13],[37]:

$$\frac{7}{5}\ddot{r} = -g\alpha$$

Aplicando la transformada de Laplace en ambos lados de la ecuación anterior, con las condiciones iniciales iguales a cero y sustituyendo $g = 9,81m/s^2$ tenemos:

$$\frac{r(s)}{\alpha(s)} = -\frac{7}{s^2} \quad (2.4)$$

Para el segundo sistema barra barril (se considera que es un cilindro el que se mueve sobre la barra), el momento de inercia J_e es $J_e = \frac{1}{2}mR^2$, sustituyendo en la ecuación (2.3), linealizando para valores pequeños de α , aplicando la Transformada de Laplace y sustituyendo $g = 9,81m/s^2$ se tiene:

$$\frac{r(s)}{\alpha(s)} = -\frac{6,5}{s^2} \quad (2.5)$$

El modelo matemático del motor está dado por la ecuación (2.2).

$$\frac{R_m J_m}{K_m K_g} \ddot{\theta} + \left(K_b + \frac{R_m B_m}{K_m K_g} \right) \dot{\theta} = U$$

Definiendo las siguientes constantes $a = \frac{R_m J_m}{K_m K_g}$, $b = \left(K_b + \frac{R_m B_m}{K_m K_g} \right)$, se tiene $a\ddot{\theta} + b\dot{\theta} = U$

Aplicando la transformada de Laplace

$$\frac{\theta(s)}{U(s)} = \frac{1}{as^2 + bs} \quad (2.6)$$

La relación entre el ángulo que gira el motor θ y el ángulo que gira la barra α , está dada por $\alpha\gamma = \theta$.

2.2.2. Controlador para sincronización basado en el modelo lineal de los sistemas BE

En esta sección se propone un controlador para la sincronización de dos sistemas barra esfera en base a su modelo lineal, se emplean funciones de transferencia como en [31] en donde sincronizan un sistema de dos ejes de movimiento controlado cada uno por un motor o en [58] en donde se estudia el caso de sincronización estable de forma interna y externa de dos péndulos invertidos. Para la sincronización de los dos sistemas barra esfera se considera el enfoque de acoplamiento cruzado [7], [33], [35], se considera un controlador PD (Proporcional derivativo) en cascada [13], para cada uno de los sistemas barra esfera y se anexa un acoplamiento cruzado para inducir el comportamiento síncrono, con una constante de sincronización β . Sea el controlador para el sistema barra esfera i , $i = 1, 2$ para la esfera i y para el motor i dado por:

$$\begin{aligned} u_1 &= k_{pm1}(\alpha_1^* - \alpha_1) + k_{dm1}(\dot{\alpha}_1^* - \dot{\alpha}_1) \\ \alpha_1^* &= k_{pb1}\tilde{r}_1 + k_{db1}\dot{\tilde{r}}_1 + k_{pb1}\beta(\tilde{r}_1 - \tilde{r}_2) + k_{db1}\beta(\dot{\tilde{r}}_1 - \dot{\tilde{r}}_2) \\ u_2 &= k_{pm2}(\alpha_2^* - \alpha_2) + k_{dm2}(\dot{\alpha}_2^* - \dot{\alpha}_2) \\ \alpha_2^* &= k_{pb2}\tilde{r}_2 + k_{db2}\dot{\tilde{r}}_2 + k_{pb2}\beta(\tilde{r}_2 - \tilde{r}_1) + k_{db2}\beta(\dot{\tilde{r}}_2 - \dot{\tilde{r}}_1) \end{aligned} \quad (2.7)$$

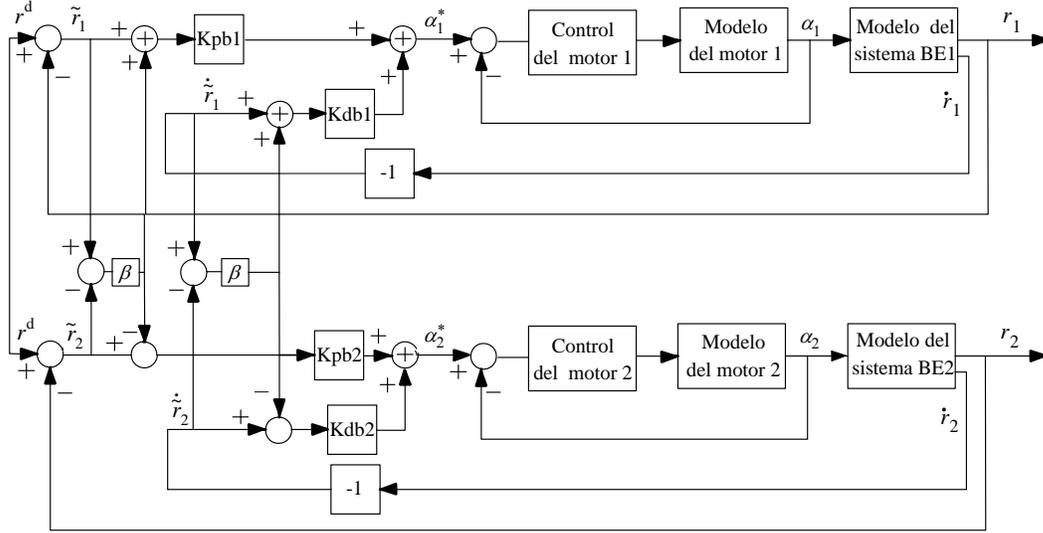


Figura 2.3: Estructura de control para la sincronización de dos sistemas barra esfera

Donde $\tilde{r}_i = r^d - r_i$, $\tilde{r}_i = \dot{r}^d - \dot{r}_i = -\dot{r}_i$ dado que se considera el caso de regulación $\dot{r}^d = 0$, $\dot{\alpha}_i^* = \frac{d\alpha_i^*}{dt}$, $i = 1, 2$. Sea $\tilde{\alpha}_i = \alpha_i^* - \alpha_i$ y aplicando la transformada de Laplace a la ecuación (2.7) se obtiene:

$$u_i(s) = k_{pmi}\tilde{\alpha}_i(s) + k_{dmi}\tilde{\alpha}_i(s)s$$

$$\alpha_i^*(s) = k_{pbi}\tilde{r}_i(s) - k_{dbi}r(s)s + k_{pbi}\beta(r_{iM2}(s) - r_i(s)) + k_{dbi}\beta(\dot{r}_{iM2}(s) - \dot{r}_i(s))s$$

Donde el subíndice $iM2$, es $iM2 = 2$ cuando $i = 1$ y $iM2 = 1$ cuando $i = 2$.

El controlador (2.7) tiene la estructura de control mostrada en la figura (2.3). Simplificando el diagrama de la figura (2.3), se obtiene el diagrama de la figura (2.4).

Considerando la ecuación (2.6) para el motor y el controlador para el motor dado por $u_i(s)$, el sistema en lazo cerrado para el motor y el controlador es:

$$G_{mi} = \frac{k_{pmi} + k_{dmi}s}{a_i s^2 + b_i s + k_{dmi}s + k_{pmi}}$$

Si se considera que el sistema barra esfera uno tiene una esfera sobre la barra (ecuación (2.4)) y el sistema barra esfera dos tiene un barril (ecuación (2.5)), las funciones de transferencia de los dos subsistemas de los sistemas barra esfera: G_{11} para el sistema número uno (BE₁) y G_{12} para el sistema número dos (BE₂) son:

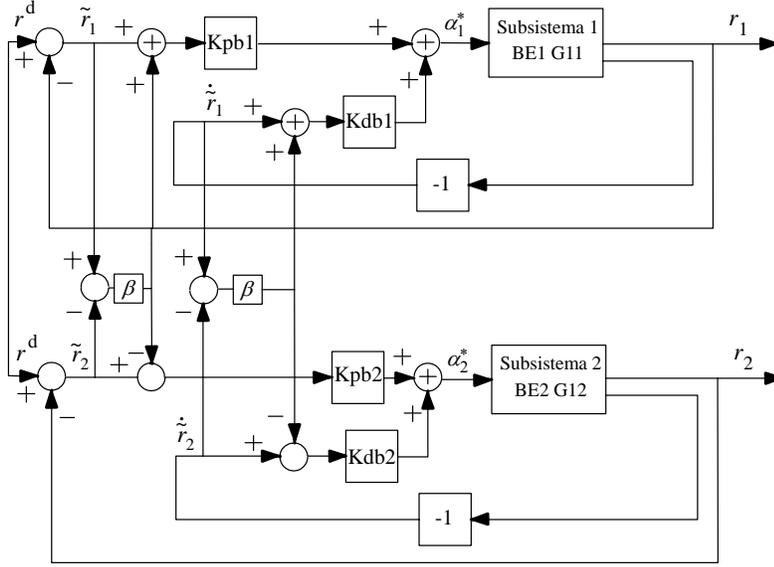


Figura 2.4: Estructura de control simplificada

$$G_{11} = \frac{k_{pm1} + k_{dm1}s}{a_1s^2 + b_1s + k_{pm1} + k_{dm1}s} \left(-\frac{7}{s^2}\right) \quad (2.8)$$

$$G_{12} = \frac{k_{pm2} + k_{dm2}s}{a_2s^2 + b_2s + k_{pm2} + k_{dm2}s} \left(-\frac{6.5}{s^2}\right)$$

De acuerdo al diagrama de la figura (2.3), las ecuaciones para las posiciones de la esfera y el barril de los dos sistemas barra esfera BE₁ y BE₂ ($r_1(s)$ y $r_2(s)$), están dadas por:

$$r_1(s) = G_{11}r_1(-k_{pb1} - k_{pb1}\beta - k_{db1}s - k_{db1}\beta s) + G_{11}r_2(k_{pb1}\beta + k_{db1}\beta s) + G_{11}r^d k_{pb1} \quad (2.9)$$

$$r_2(s) = G_{12}r_2(-k_{pb2} - k_{pb2}\beta - k_{db2}s - k_{db2}\beta s) + G_{12}r_1(k_{pb2}\beta + k_{db2}\beta s) + G_{12}r^d k_{pb2} \quad (2.10)$$

Despejando $r_2(s)$ de ecuación (2.10) y sustituyendo en la ecuación (2.9) se obtiene la función de transferencia $\frac{r_1(s)}{r^d(s)}$

$$\frac{r_1(s)}{r^d(s)} = \left(\frac{G_{11}G_{12}k_{pb2}(k_{pb1}\beta + k_{db1}\beta s)}{1 + G_{12}(k_{pb2} + k_{pb2}\beta + k_{db2}s + k_{db2}\beta s)} + G_{11}k_{pb1} \right) / \left(1 + G_{11}(k_{pb1} + k_{pb1}\beta + k_{db1}s + k_{db1}\beta s) - \frac{G_{11}G_{12}(k_{pb2}\beta + k_{db2}\beta s)(k_{pb1}\beta + k_{db1}\beta s)}{1 + G_{12}(k_{pb2} + k_{pb2}\beta + k_{db2}s + k_{db2}\beta s)} \right) \quad (2.11)$$

Despejando $r_1(s)$ de ecuación (2.9) y sustituyendo en la ecuación (2.10) se obtiene la función de transferencia $\frac{r_2(s)}{r^d(s)}$:

$$\frac{r_2(s)}{r^d(s)} = \left(\frac{G_{12}G_{11}k_{pb1}(k_{pb2}\beta + k_{db2}\beta s)}{1 + G_{11}(k_{pb1} + k_{pb1}\beta + k_{db1}s + k_{db1}\beta s)} + G_{12}k_{pb2} \right) / \left(1 + G_{12}(k_{pb2} + k_{pb2}\beta + k_{db2}s + k_{db2}\beta s) - \frac{G_{12}G_{11}(k_{pb1}\beta + k_{db1}\beta s)(k_{pb2}\beta + k_{db2}\beta s)}{1 + G_{11}(k_{pb1} + k_{pb1}\beta + k_{db1}s + k_{db1}\beta s)} \right) \quad (2.12)$$

Con G_{11}, G_{12} dados por (2.8).

El error de sincronización es $\epsilon(t) = e_1(t) - e_2(t) = r_2 - r_1$. La función de transferencia $\frac{\epsilon(s)}{r^d(s)}$ es

$$\frac{r_2(s) - r_1(s)}{r^d(s)} = \frac{r_2(s)}{r^d(s)} - \frac{r_1(s)}{r^d(s)} \quad (2.13)$$

Donde $\frac{r_1(s)}{r^d(s)}, \frac{r_2(s)}{r^d(s)}$ están dados por (2.11) y (2.12) respectivamente. Para que el sistema compuesto por el control (2.7) con los dos sistemas barra esfera sea estable, las raíces del polinomio del denominador de las funciones de transferencia (2.11), (2.12), deben estar en el semiplano izquierdo del plano complejo Ogata [28]. Las constantes $k_{pb1}, k_{db1}, k_{pb2}, k_{db2}, k_{pm1}, k_{dm1}, k_{pm2}, k_{dm2}, \beta$, deben elegirse de tal forma que las raíces del polinomio del denominador, estén en el semiplano izquierdo del plano complejo.

2.3. Sincronización basada en el modelo no lineal de los sistemas BE

Para la sincronización de dos sistemas barra esfera en base a sus modelos matemáticos no lineales, se considera el enfoque de acoplamiento cruzado [7], [33], [35]. Se propone una ley de control que tiene un término de acoplamiento cruzado para inducir el comportamiento síncrono con una constante de sincronización β , para dos sistemas con su modelo matemático para cada uno de ellos, dado por la ecuación en lazo abierto (2.14) para un sistema barra esfera con motor obtenida en [14].

$$\begin{aligned} (mr^2 + k_1)\ddot{\alpha} + 2mr\dot{r}\dot{\alpha} + \zeta \cos \alpha &= k_2U - k_3\dot{\alpha} \\ k_4\ddot{r} - r\dot{\alpha}^2 + g \sin \alpha &= 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

Con la relación entre α y θ dada por $\gamma = \frac{L}{d}$ [37]. Donde U es la entrada de control, ζ definida previamente para la ecuación (2.1), $k_1 = \frac{R_m J_m}{K_m K_g} \gamma + J_1$, $k_2 = 1 + \frac{K_m}{R_m}$, $k_3 =$

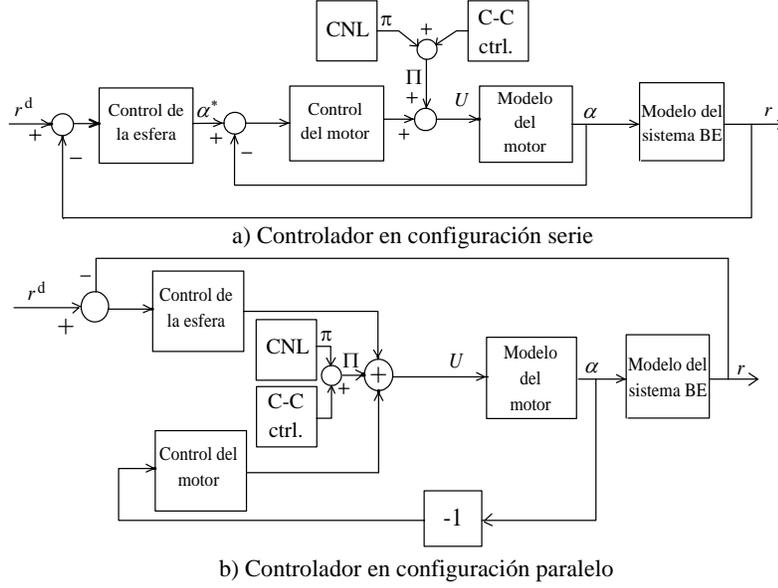


Figura 2.5: Controlador en configuración serie (a) y en configuración paralela (b) para la sincronización de dos sistemas barra esfera

$\gamma \left(\frac{k_m K_b}{R_m} + K_b + \frac{R_m B_m}{k_m k_g} \right)$, $k_4 = \frac{7}{5}$ para una esfera y $k_4 = \frac{3}{2}$ para un barril, $0 < k_i < c_{k_i}$ ($i = 1, \dots, 4$). Dado que en un sistema barra esfera, la esfera tiene un rango limitado de movimiento sobre la barra y la barra solo puede girar alrededor del eje de rotación hasta cierto ángulo, se considera $|r| < d_1$ y $|\alpha| < d_2$.

Se propone una ley de control en dos configuraciones [14], configuración serie y configuración paralela. En donde el controlador para sincronización figura (2.5) tiene un compensador Π_i compuesto por un compensador no lineal (CNL) y un término de acoplamiento cruzado (C-C. ctrl.).

Las ecuaciones en lazo abierto de dos sistemas barra esfera con motor con el centro de rotación a la mitad de la barra, están dadas por (2.15) para $i = 1, 2$.

$$\begin{aligned} (m_i r_i^2 + k_{1i}) \ddot{\alpha}_i + 2m_i r_i \dot{r}_i \dot{\alpha}_i + (m_i g r_i + \frac{L_i}{2} M_i g) \cos \alpha_i &= k_{2i} U_i - k_{3i} \dot{\alpha}_i \\ k_{4i} \ddot{r}_i - r_i \dot{\alpha}_i^2 + g \sin \alpha_i &= 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

Se define el error de sincronización $s_i = r_i - r_{iM2}$ y su derivada $\dot{s}_i = \dot{r}_i - \dot{r}_{iM2}$, donde

el subíndice $iM2$ es $iM2 = 2$ cuando $i = 1$ y $iM2 = 1$ cuando $i = 2$, es decir

$$\begin{aligned} s_1 &= r_1 - r_2, & \dot{s}_1 &= \dot{r}_1 - \dot{r}_2 \\ s_2 &= r_2 - r_1, & \dot{s}_2 &= \dot{r}_2 - \dot{r}_1 \end{aligned} \quad (2.16)$$

El controlador en configuración serie para sincronización, tiene la siguiente forma:

$$U_i = k_{pmi}(\alpha_i^* - \alpha_i) + k_{dmi}(\dot{\alpha}_i^* - \dot{\alpha}_i) + \beta a_{1i}s_i + \beta a_{2i}\dot{s}_i + \pi_i \quad (2.17)$$

Donde π_i es un compensador, a_{1i} , a_{2i} son constantes positivas, $\alpha_i^* = -k_{pbi}(r^d - r_i) + k_{dbi}\dot{r}_i$, $\dot{\alpha}_i^* = \frac{d\alpha_i^*}{dt} = k_{pbi}\dot{r}_i + k_{dbi}\ddot{r}_i$ con r^d la posición deseada de la esfera, $|r^d| < d_{1i}$. El controlador PD en configuración paralela para sincronización está dado por

$$U_i = \left(-k_{pmi}\alpha_i - k_{dmi}\dot{\alpha}_i \right) - \left[k_{pbi}(r^d - r_i) - k_{dbi}\dot{r}_i \right] + \beta k_{pbi}s_i + \beta k_{dbi}\dot{s}_i + \pi_i \quad (2.18)$$

Dado que se desea que $\alpha_i^{*d} = 0$, para que la esfera no se mueva sobre la barra, $\tilde{\alpha}_i^* = \alpha_i^{*d} - \alpha_i = -\alpha_i$ [14] figura 2.5(b).

Las leyes de control (2.17), (2.18) pueden ser reescritas como:

$$U_i = -a_{1i}\tilde{r}_i + a_{2i}\dot{r}_i + a_{3i}\ddot{r}_i - a_{4i}\alpha_i - a_{5i}\dot{\alpha}_i + a_{6i}s_i + a_{7i}\dot{s}_i + \pi_i \quad (2.19)$$

Donde para el controlador en configuración serie $a_{1i} = k_{pmi}k_{pbi}$, $a_{2i} = k_{pmi}k_{dbi} + k_{dmi}k_{pbi}$, $a_{3i} = k_{dmi}k_{dbi}$, $a_{4i} = k_{pmi}$, $a_{5i} = k_{dmi}$, $a_{6i} = \beta a_{1i}$, $a_{7i} = \beta a_{2i}$ y para el controlador en configuración paralela $a_{1i} = k_{pbi}$, $a_{2i} = k_{dbi}$, $a_{3i} = 0$, $a_{4i} = k_{pmi}$, $a_{5i} = k_{dmi}$, $a_{6i} = \beta a_{1i}$, $a_{7i} = \beta a_{2i}$, $a_{ji} > 0$, $j = 1..7$, $i = 1, 2$, $\beta > 0$. Con \tilde{r} dada por $\tilde{r} = r^d - r$, $|\tilde{r}| = |r^d - r| \leq |r^d| + |r| \leq 2d_{1i}$.

Sea

$$\begin{aligned} x_i &= \begin{bmatrix} \alpha_i & r_i & s_i \end{bmatrix}^T, & \tilde{x}_i &= \begin{bmatrix} -\alpha_i & \tilde{r}_i & -s_i \end{bmatrix}^T \\ x_{1i} &= \tilde{x}_i, & x_{2i} &= \dot{x}_i, & \dot{x}_{1i} &= -x_{2i}, & \dot{x}_{2i} &= -\ddot{x}_i \end{aligned} \quad (2.20)$$

Teorema 2.1 *La ley de control para sincronización (2.19) con el compensador π_i*

dado por

$$\pi_i = \begin{cases} \frac{1}{k_{2i}\dot{\alpha}_i} [\dot{r}_i s_i + k_{2i} a_{1i} \alpha_i \dot{r}_i + 2\tilde{r}_i \dot{r}_i - k_{2i} a_{2i} \dot{\alpha}_i \dot{r}_i \\ + k_{2i} a_{3i} \ddot{\alpha}_i \dot{r}_i - \ddot{r}_{iM2} \dot{r}_i - k_{4i} \ddot{r}_i \dot{r}_i - s_i^2 \\ - \dot{s}_i \tilde{r}_{iM2} + \ddot{r}_{iM2} \dot{s}_i + k_{2i} a_{6i} \alpha_i \dot{s}_i - k_{2i} a_{7i} \dot{\alpha}_i \dot{s}_i & |\dot{\alpha}_i| > c_i \\ + \frac{1}{k_{2i}} [(m_i g r_i + \frac{L_i}{2} M_i g) \cos \alpha_i \\ + m_i r_i \dot{\alpha}_i \dot{r}_i] \\ \\ \frac{1}{k_{2i}} [(m_i g r_i + \frac{L_i}{2} M_i g) \cos \alpha_i + m_i r_i \dot{\alpha}_i \dot{r}_i] & |\dot{\alpha}_i| \leq c_i \end{cases} \quad (2.21)$$

y si se cumple la condición

$$\begin{aligned} k_{1i} k_{4i} &> k_{2i}^2 a_{3i}^2, \quad a_{4i} > \frac{k_{2i} a_{1i}^2}{2} \\ a_{4i} &> a_{1i}^2 k_{2i} + 2a_{6i}^2 k_{2i} + 2k_{2i} a_{1i} a_{6i} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Se tiene que $\dot{\alpha}_i$ y s_i permanecen acotadas. Además para cualquier $T \in (0, \infty)$ s_i satisface el siguiente índice de desempeño

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T s_i^2 dt \leq \phi_i \quad (2.23)$$

Donde

$$\begin{aligned} \phi_{1i} &= d_{4i} [d_{7i} + k_{2i} a_{1i} d_{2i} + 4d_{1i} + k_{2i} a_{3i} d_{5i} + d_{3iM2} + k_{2i} a_{2i} c_i + k_{4i} d_{3i}] \\ &+ d_{6i} [2d_{1iM2} + d_{3iM2} + k_{2i} a_{6i} d_{2i} + k_{2i} a_{7i} c_i], \quad s_i^2 \leq \phi_{2i} \text{ cuando } |\dot{\alpha}_i| = c_i \\ \phi_i &= \phi_{1i} + \phi_{2i} \end{aligned} \quad (2.24)$$

Demostración. Sustituyendo la ecuación (2.19) en el sistema en lazo abierto (2.15) tenemos:

$$\begin{aligned} &(m_i r_i^2 + k_{1i}) \ddot{\alpha}_i + 2m_i r_i \dot{r}_i \dot{\alpha}_i + (m_i g r_i + \frac{L_i}{2} M_i g) \cos \alpha_i \\ &= -k_{2i} a_{1i} \tilde{r}_i + k_{2i} a_{2i} \dot{r}_i + k_{2i} a_{3i} \ddot{r}_i - k_{2i} a_{4i} \alpha_i - k_{2i} a_{5i} \dot{\alpha}_i + k_{2i} a_{6i} s_i + k_{2i} a_{7i} \dot{s}_i + k_{2i} \pi_i - k_{3i} \dot{\alpha}_i \\ &- \ddot{s}_i + \ddot{r}_1 - k_{2i} a_{3i} \ddot{\alpha}_i + k_{4i} \ddot{r}_i - r_i \dot{\alpha}_i^2 + g \sin \alpha_i = 2\tilde{r}_i + k_{2i} a_{1i} \alpha_i + s_i + \ddot{r}_{iM2} - k_{2i} a_{3i} \ddot{\alpha}_i - 2\tilde{r}_i \\ &- k_{2i} a_{1i} \alpha_i - s_i \\ &\ddot{s}_i - \ddot{r}_1 + s_i = r_i - r_{iM2} - \ddot{r}_{iM2} + k_{2i} a_{6i} \alpha_i - k_{2i} a_{6i} \dot{\alpha}_i \end{aligned} \quad (2.25)$$

En forma matricial la ecuación (2.25) se reescribe como

$$M_i(x_i) \ddot{x}_i + C_i(x_i, \dot{x}_i) \dot{x}_i + G_i(x_i) = B_i \tilde{x}_i + D_i \quad (2.26)$$

$$M_i(x) = \begin{bmatrix} k_{1i} + m_i r_i^2 & -k_{2i} a_{3i} & 0 \\ -k_{2i} a_{3i} & k_{4i} + 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad G_i(x) = \begin{bmatrix} (m_i g r_i + \frac{L_i}{2} M_i g) \cos \alpha_i \\ g \sin \alpha_i \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_i(x, \dot{x}) = \begin{bmatrix} k_{2i} a_{5i} + k_{3i} & -k_{2i} a_{2i} + 2m_i r_i \dot{\alpha}_i & -k_{2i} a_{7i} \\ -r_i \dot{\alpha}_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_i = \begin{bmatrix} k_{2i} a_{4i} & -k_{2i} a_{1i} & -k_{2i} a_{6i} \\ -k_{2i} a_{1i} & 2 & -1 \\ -k_{2i} a_{6i} & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_i = \begin{bmatrix} k_{2i} \pi_i \\ \ddot{r}_{iM2} - k_{2i} a_{3i} \ddot{\alpha}_i - 2\ddot{r}_i - k_{2i} a_{1i} \alpha_i - s_i \\ r^d - r_{iM2} - \ddot{r}_{iM2} - k_{2i} a_{6i} \alpha_i \end{bmatrix}$$

Con $M_i(x)$, B_i simétrica y definida positiva para $k_{1i} k_{4i} > k_{2i}^2 a_{3i}^2$, $a_{4i} > \frac{k_{2i} a_{1i}^2}{2}$, $a_{4i} > a_{1i}^2 k_{2i} + 2a_{6i}^2 k_{2i} + 2k_{2i} a_{1i} a_{6i}$ (Demostración en el Apéndice B). Sea la función candidata de Lyapunov, definida positiva, dada por:

$$\begin{aligned}
 V_i(x_{1i}, x_{2i}) &= \frac{1}{2} x_{1i}^T M_i(x_i) x_{1i} + \frac{1}{2} x_{2i}^T B_i x_{2i} \\
 &= \frac{1}{2} \dot{x}_i^T M_i(x_i) \dot{x}_i + \frac{1}{2} \tilde{x}_i^T B_i \tilde{x}_i
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

Derivando respecto al tiempo la ecuación (2.27)

$$\dot{V}_i = \dot{x}_i^T M_i(x_i) \ddot{x}_i + \frac{1}{2} \dot{x}_i^T \dot{M}_i(x_i) \dot{x}_i + \dot{\tilde{x}}_i^T B_i \tilde{x}_i$$

Despejando $M_i(x_i) \ddot{x}_i$ de la ecuación (2.26) y sustituyendo en la ecuación anterior

$$\dot{V}_i = \dot{x}_i^T D_i + \dot{x}_i^T B_i \tilde{x}_i - \dot{x}_i^T C_i(x_i, \dot{x}_i) \dot{x}_i - \dot{x}_i^T G_i(x_i) + \dot{x}_i^T \dot{M}_i(x_i) \dot{x}_i + \dot{\tilde{x}}_i^T B_i \tilde{x}_i \tag{2.28}$$

Dado que $\dot{\tilde{x}}_i^T = -\dot{x}_i^T$ se obtiene $\dot{\tilde{x}}_i^T B_i \tilde{x}_i = -\dot{x}_i^T B_i \tilde{x}_i$, sustituyendo en (2.28)

$$\dot{V}_i = \dot{x}_i^T D_i - \dot{x}_i^T C_i(x_i, \dot{x}_i) \dot{x}_i - \dot{x}_i^T G_i(x_i) + \dot{x}_i^T \dot{M}_i(x_i) \dot{x}_i$$

Sustituyendo $M_i(x_i)$, D_i , $G_i(x_i)$, $\dot{M}_i(x_i)$, \dot{x}_i y \tilde{x}_i en la ecuación (2.28)

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_i &= -(k_{2i} a_{5i} + k_{3i}) \dot{\alpha}_i^2 - s_i^2 + k_{2i} \pi_i \dot{\alpha}_i \\
 &\quad \dot{\alpha}_i [- (m_i g r_i + \frac{L_i}{2} M_i g) \cos \alpha_i - m_i r_i \dot{r}_i \dot{\alpha}_i] \\
 &\quad + \dot{r}_i [-s_i - k_{2i} a_{1i} \alpha_i - 2\ddot{r}_i - k_{2i} a_{3i} \ddot{\alpha}_i + \ddot{r}_{iM2} + k_{2i} a_{2i} \dot{\alpha}_i] \\
 &\quad + \dot{s}_i [\ddot{r}_{iM2} - \ddot{r}_{iM2} - k_{2i} a_{6i} \alpha_i + k_{2i} a_{7i} \dot{\alpha}_i] \\
 &\quad + s_i^2 + r_i \dot{\alpha}_i^2 \dot{r}_i - g \sin \alpha_i \dot{r}_i
 \end{aligned}$$

De la segunda ecuación en (2.15) se tiene $k_{4i}\ddot{r}_i = -g \sin \alpha_i + r_i \dot{\alpha}_i^2$, sustituyendo en la ecuación anterior

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &= -(k_{2i}a_{5i} + k_{3i})\dot{\alpha}_i^2 - s_i^2 + k_{2i}\pi_i\dot{\alpha}_i \\ &\dot{\alpha}_i[-(m_i g r_i + \frac{L_i}{2} M_i g) \cos \alpha_i - m_i r_i \dot{r}_i \dot{\alpha}_i] \\ &+ \dot{r}_i[-s_i - k_{2i}a_{1i}\alpha_i - 2\tilde{r}_i - k_{2i}a_{3i}\ddot{\alpha}_i + \ddot{r}_{iM2} + k_{2i}a_{2i}\dot{\alpha}_i + k_{4i}\ddot{r}_i] \\ &+ \dot{s}_i[\tilde{r}_{iM2} - \ddot{r}_{iM2} - k_{2i}a_{6i}\alpha_i + k_{2i}a_{7i}\dot{\alpha}_i] + s_i^2 \end{aligned} \quad (2.29)$$

Si $|\dot{\alpha}_i| > c_i$, sustituyendo π_i dado por la ecuación (2.21) en la ecuación (2.29)

$$\dot{V}_i = -(k_{2i}a_{5i} + k_{3i})\dot{\alpha}_i^2 - s_i^2$$

Dado que $k_{2i}a_{5i} + k_{3i} > 0$, se obtiene $\dot{V}_i \leq 0$, \dot{x}_i, \tilde{x}_i permanecen acotadas, además V_i es decreciente así $\dot{\alpha}_i^2, \dot{s}_i^2, s_i^2$ son decrecientes, $|\dot{\alpha}_i|$ decrece hasta $|\dot{\alpha}_i| = c_i$ en donde se tiene que $s_i^2 \leq \phi_{2i}$. Si $|\dot{\alpha}_i| \leq c_i$ sustituyendo π_i dado por la ecuación (2.21) en la ecuación (2.29)

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &= -(k_{2i}a_{5i} + k_{3i})\dot{\alpha}_i^2 - s_i^2 \\ &+ \dot{r}_i[-s_i - k_{2i}a_{1i}\alpha_i - 2\tilde{r}_i - k_{2i}a_{3i}\ddot{\alpha}_i + \ddot{r}_{iM2} + k_{2i}a_{2i}\dot{\alpha}_i + k_{4i}\ddot{r}_i] \\ &+ \dot{s}_i[\tilde{r}_{iM2} - \ddot{r}_{iM2} - k_{2i}a_{6i}\alpha_i + k_{2i}a_{7i}\dot{\alpha}_i] + s_i^2 \end{aligned} \quad (2.30)$$

Dado que $|\dot{\alpha}_i| \leq c_i, |r_i| < d_{1i}$ se considera que $|\ddot{r}_i| < d_{3i}$, suponiendo que no se cumple la desigualdad anterior, es decir \ddot{r}_i no es acotada, entonces de la segunda ecuación de (2.15) $k_{4i}\ddot{r}_i - r_i \dot{\alpha}_i^2 + g \sin \alpha_i = 0$ implicaría que $r_i, \dot{\alpha}_i$ o ambas no son acotadas lo que es una contradicción, así se tiene que \ddot{r}_i debe ser acotada. Además sabemos que $|r_i| < d_{1i}, |\ddot{r}_i| < d_{3i}$, por lo que \dot{r}_i es acotada, suponiendo que \dot{r}_i no es acotada, esto implicaría que la esfera recorre una distancia infinita en algún tiempo, lo que es una contradicción con el hecho de que $|r_i| < d_{1i}, \dot{r}_i$ debe ser acotada $|\dot{r}_i| < d_{4i}$. De la ecuación (2.19), ya que $\tilde{r}_i, r_i, \dot{r}_i, \ddot{r}_i, \alpha_i, \dot{\alpha}_i$ son acotadas se obtiene que U_i es acotada, $|U_i| < f_i$ y dado que $|\dot{\alpha}_i| \leq c_{1i}, |r_i| < d_{1i}, |\dot{r}_i| < d_{4i}$ tenemos de la primera ecuación de (2.15) que si $\ddot{\alpha}_i$ no fuera acotada implicaría que $\dot{\alpha}_i, r_i, \dot{r}_i, U_i$ no son acotadas o alguna de ellas no es acotada, lo cual es una contradicción, por lo que $\ddot{\alpha}_i$ debe ser acotada $|\ddot{\alpha}_i| < d_{5i}$.

De la ecuación (2.30) tenemos

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &\leq -(k_{2i}a_{5i} + k_{3i})\dot{\alpha}_i^2 - s_i^2 \\ &+ |\dot{r}_i| [|s_i| + k_{2i}a_{1i}|\alpha_i| + 2|\tilde{r}_i| + k_{2i}a_{3i}|\ddot{\alpha}_i| + |\ddot{r}_{iM2}| + k_{2i}a_{2i}|\dot{\alpha}_i| + k_{4i}|\ddot{r}_i|] \\ &+ |\dot{s}_i| [|\tilde{r}_{iM2}| + |\ddot{r}_{iM2}| + k_{2i}a_{6i}|\alpha_i| + k_{2i}a_{7i}|\dot{\alpha}_i|] + |s_i|^2 \end{aligned}$$

Dado que $|\alpha_i| < d_{2i}$, $|\dot{\alpha}_i| < c_i$, $|\ddot{\alpha}_i| < d_{5i}$, $|\tilde{r}_i| < d_{3i}$, $|\tilde{r}_i| < 2d_{1i}$, $|\dot{r}_i| < d_{4i}$, $|\dot{s}_i| = |\dot{r}_i - \dot{r}_{iM2}| \leq |\dot{r}_i| + |\dot{r}_{iM2}| \leq d_{4i} + d_{4iM2} = d_{6i}$ sustituyendo en la ecuación anterior

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &\leq -(k_{2i}a_{5i} + k_{3i})\dot{\alpha}_i^2 - s_i^2 \\ &+ d_{4i}[d_{7i} + k_{2i}a_{1i}d_{2i} + 4d_{1i} + k_{2i}a_{3i}d_{5i} + d_{3iM2} + k_{2i}a_{2i}c_i + k_{4i}d_{3i}] \\ &+ d_{6i}[2d_{1iM2} + d_{3iM2} + k_{2i}a_{6i}d_{2i} + k_{2i}a_{7i}c_i] + \phi_{2i} \\ &= -(k_{2i}a_{5i} + k_{3i})\dot{\alpha}_i^2 - s_i^2 + \phi_{1i} + \phi_{2i} \end{aligned}$$

Donde ϕ_{1i} está dada por (2.24). Sea $\Lambda_i = k_{2i}a_{5i} + k_{3i}$ y $\phi_i = \phi_{1i} + \phi_{2i}$

$$\dot{V}_i \leq -\Lambda_i\dot{\alpha}_i^2 - s_i^2 + \phi_i \leq -s_i^2 + \phi_i \quad (2.31)$$

Integrando (2.31) de 0 a T

$$\begin{aligned} \int_0^T s_i^2 dt &\leq V_{i,0} - V_{i,T} + \phi_i T \leq V_{i,0} + \phi_i T \\ \int_0^T s_i^2 dt &\leq V_{i,0} + \phi_i T \end{aligned}$$

Dado que $V_{i,0}$ es acotada se obtiene (2.23). ■

2.4. Resultados de simulación

En la simulación de la respuesta de los dos sistemas BE con la ley de control para sincronización se consideran dos sistemas, un sistema barra esfera con motor ecuación (2.15) con $k_{41} = \frac{7}{5}$, $\xi_1 = mgr_1 + \frac{L}{2}M_1g$ con en el centro de rotación de la barra en el centro de la barra, figura (2.1) y un sistema barra barril, con $k_{42} = \frac{3}{2}$, $\xi_2 = mgr_2$ con en el centro de rotación de la barra en el extremo izquierdo, figura (2.2), con los modelos matemáticos dados para el sistema BE₁ por

$$\begin{aligned} (m_1r_1^2 + k_{11})\ddot{\alpha}_1 + 2m_1r_1\dot{r}_1\dot{\alpha}_1 + (m_1gr_1 + \frac{L}{2}M_1g) \cos \alpha_1 &= k_{21}U - k_{31}\dot{\alpha}_1 \\ k_{41}\ddot{r}_1 - r_1\dot{\alpha}_1^2 + g \sin \alpha_1 &= 0 \end{aligned} \quad (2.32)$$

Con las siguientes constantes [37]:

$$\begin{aligned} m_1 &= 0,06kg, M_1 = ,12kg, g = 9,81m/s^2, R_{m1} = 9\Omega, \\ J_{m1} &= 7,35 \times 10^{-4}Nm s^2, K_{m1} = ,0075Nm/A, K_{g1} = 75, B_{m1} = 1,6 \times 10^{-3}Nms, \\ K_{b1} &= ,4326Nm/A, J_1 = 0,01Kg m^2, \gamma_1 = 16,0 \end{aligned} \quad (2.33)$$

Sustituyendo (2.33) en las constantes definidas para la ecuación (2.14) se obtiene: $k_{11} = 0,19816$, $k_{21} = 1.0008$, $k_{31} = 7.3370$, $k_{41} = \frac{7}{5}$

Y para el sistema BE_2 :

$$\begin{aligned} (m_2 r_2^2 + k_{12}) \ddot{\alpha}_2 + 2m_2 r_2 \dot{r}_2 \dot{\alpha}_2 + m_2 g r_2 \cos \alpha_2 &= k_{22} U_2 - k_{32} \dot{\alpha}_2 \\ k_{42} \ddot{r}_2 - r_2 \dot{\alpha}_2^2 + g \sin \alpha_2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.34)$$

con las siguientes constantes

$$\begin{aligned} m_2 &= 0,03kg, g = 9,81m/s^2, R_{m2} = 9\Omega \\ J_{m2} &= 7,35 \times 10^{-4} Nm s, K_{m2} = ,0075 Nm/A, K_{g2} = 60, B_{m2} = 1,6 \times 10^{-3} Nm s, \\ K_{b2} &= ,4326 Nm/A, J_2 = 0,015 Kg m^2, \gamma_2 = 6,0 \end{aligned} \quad (2.35)$$

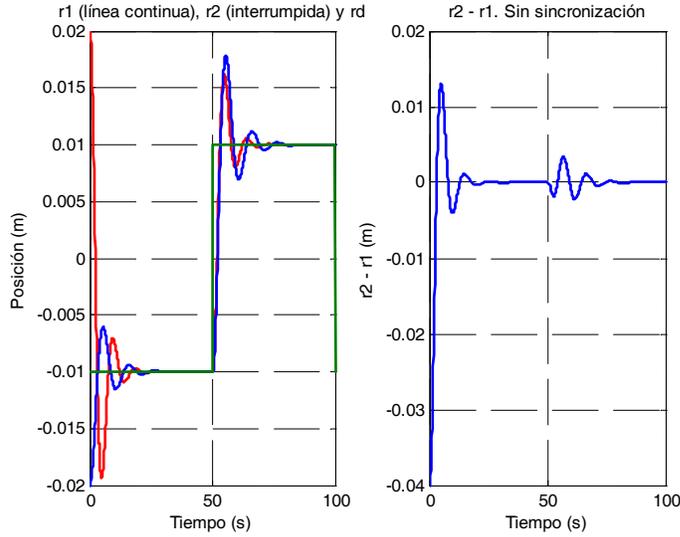
Sustituyendo (2.35) en las constantes definidas para la ecuación (2.14) se tiene: $k_{12} = 0,1032$, $k_{22} = 1.0008$, $k_{32} = 2.7898$, $k_{42} = \frac{3}{2}$.

Se considera el controlador en configuración serie para sincronización dado por (2.19) y (2.21). El controlador para el sistema BE_2 se obtiene al cambiar en la ecuación (2.21) $(m_i g r_i + \frac{L_i}{2} M_i g) \cos \alpha_i$ por $m_i g r_i \cos \alpha_i$ dado que es un sistema barra esfera con centro de rotación en el extremo izquierdo de la barra

La ley de control para el sistema BE_1 es

$$\begin{aligned} U_1 &= -a_{11} \tilde{r}_1 + a_{21} \dot{r}_1 + a_{31} \ddot{r}_1 - a_{41} \alpha_1 - a_{51} \dot{\alpha}_1 + a_{61} s_1 + a_{71} \dot{s}_1 + \pi_1 \\ \pi_1 &= \begin{cases} \frac{1}{k_{21} \dot{\alpha}_1} [\dot{r}_1 s_1 + k_{21} a_{11} \alpha_1 \dot{r}_1 + 2\tilde{r}_1 \dot{r}_1 - k_{21} a_{21} \dot{\alpha}_1 \dot{r}_1 \\ \quad + k_{21} a_{31} \ddot{\alpha}_1 \dot{r}_1 - \ddot{r}_2 \dot{r}_1 - k_{41} \ddot{r}_1 \dot{r}_1 - s_1^2 \\ \quad - \dot{s}_1 \tilde{r}_2 + \ddot{r}_2 \dot{s}_1 + k_{21} a_{61} \alpha_1 \dot{s}_1 - k_{21} a_{71} \dot{\alpha}_1 \dot{s}_1 \\ \quad + \frac{1}{k_{21}} [(m_1 g r_1 + \frac{L_1}{2} M_1 g) + m_1 r_1 \dot{\alpha}_1 \dot{r}_1] & |\dot{\alpha}_1| > c_1 \\ \frac{1}{k_{21}} [(m_1 g r_1 + \frac{L_1}{2} M_1 g) \cos \alpha_1 + m_1 r_1 \dot{\alpha}_1 \dot{r}_1] & |\dot{\alpha}_1| \leq c_1 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.36)$$

Y para el sistema BE_2 :


 Figura 2.6: r_1 , r_2 , r^d y $r_2 - r_1$: sin sincronización

$$\begin{aligned}
 U_2 &= -a_{12}\tilde{r}_2 + a_{22}\dot{r}_2 + a_{32}\ddot{r}_2 - a_{42}\alpha_2 - a_{52}\dot{\alpha}_2 + a_{62}s_2 + a_{72}\dot{s}_2 + \pi_2 \\
 \pi_2 &= \begin{cases} \frac{1}{k_{22}\dot{\alpha}_2} [\dot{r}_2 s_2 + k_{22} a_{12} \alpha_2 \dot{r}_2 + 2\tilde{r}_2 \dot{r}_2 - k_{22} a_{22} \dot{\alpha}_2 \dot{r}_2 \\ \quad + k_{22} a_{32} \ddot{\alpha}_2 \dot{r}_2 - \ddot{r}_1 \dot{r}_2 - k_{42} \ddot{r}_2 \dot{r}_2 - s_2^2 \\ \quad - \dot{s}_2 \tilde{r}_1 + \ddot{r}_1 \dot{s}_2 + k_{22} a_{62} \alpha_2 \dot{s}_2 - k_{22} a_{72} \dot{\alpha}_2 \dot{s}_2 \\ \quad + \frac{1}{k_{22}} [m_2 g r_2 \cos \alpha_2 + m_2 r_2 \dot{\alpha}_2 \dot{r}_2] & |\dot{\alpha}_2| > c_2 \\ \frac{1}{k_{22}} [m_2 g r_2 \cos \alpha_2 + m_2 r_2 \dot{\alpha}_2 \dot{r}_2] & |\dot{\alpha}_2| \leq c_2 \end{cases} \quad (2.37)
 \end{aligned}$$

Con las siguientes constantes para el controlador

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= 3, a_{21} = 3,5, a_{31} = 0,11, a_{41} = 43,2, a_{51} = 1,52, a_{61} = 3\beta, a_{71} = 3,5\beta, \\
 a_{12} &= 2, a_{22} = 2,1, a_{32} = 0,094, a_{42} = 35,2, a_{52} = 1,6, a_{62} = 2\beta, a_{72} = 2,1\beta \\
 c_1 &= 0,01, c_2 = 0,01, \beta = 0,95
 \end{aligned}$$

y una señal de referencia r^d cuadrada de $0,01m$ de amplitud, con una frecuencia de $0,01Hz$, con condiciones iniciales $r_1(0) = 0,02m$ y $r_2(0) = -0,02m$.

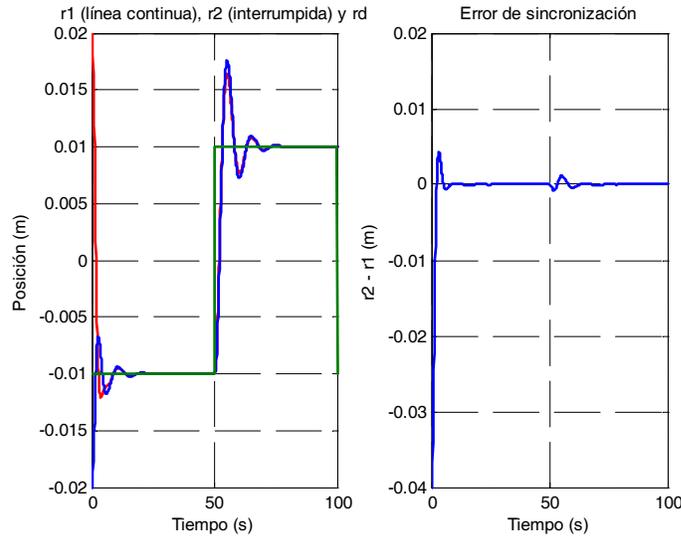


Figura 2.7: r_1 , r_2 , r^d y error de sincronización, $\beta = 0,95$.

La gráfica obtenida para la salida de los dos sistemas barra esfera y barra barril (2.32), (2.34) en el caso de que no exista sincronización es (2.6). En el caso de utilizar el controlador para sincronización (2.36), (2.37), con $\beta = 0,95$ se tiene la gráfica (2.7).

Como se muestra en la figura (2.7), la salida del sistema barra esfera con centro de rotación en un extremo de la barra, la salida del sistema barra barril con centro de rotación en el centro de la barra y el error de sincronización ($r_2 - r_1$) son acotados, además se tiene que el error de sincronización se reduce considerablemente en el estado transitorio y tiende a cero más rápido, comparado con el caso de no utilizar el controlador para sincronización figura (2.6), debido a que en ese caso cada sistema independientemente trata de seguir a la señal de referencia y dependiendo de las constantes de control elegidas es la respuesta de cada sistema y en consecuencia el error de sincronización, por el contrario con el controlador para sincronización (2.36), (2.37), se tiene que dado el acoplamiento cruzado, los errores de acoplamiento inducen el comportamiento síncrono, así si la salida de un sistema está lejos de la señal de referencia, el otro sistema trata de seguir a la salida de ese sistema, de tal forma que los dos sistemas barra esfera se sincronizan y siguen a la señal de referencia común para ambos sistemas.

28 Sincronización de dos sistemas barra esfera: Caso de estructura y parámetros conocidos

Capítulo 3

Controlador neuronal para la sincronización de dos sistemas BE

3.1. Compensación usando redes neuronales con FBR (Funciones de base radial)

El uso de redes neuronales para el control de sistemas mecánicos, por ejemplo robots manipuladores, ha sido estudiado por varios autores. En [2] se aproxima las funciones no lineales desconocidas por medio de redes neuronales teniendo como base un modelo aproximado se utiliza las redes neuronales para compensar el error del modelo aproximado, con respecto a la dinámica real del robot manipulador. En [11], [12], [51], se aproximan ciertas funciones de la dinámica del robot sin emplear un modelo aproximado, por medio de dos capas en [12], [24] y por medio de una capa en [11], [48], [46] en el último se ajustan, además de los pesos, la varianza y el centro de las FBR

El control presentado en esta tesis emplea redes neuronales FBR para aproximar funciones no lineales en el sistema. Se utiliza redes neuronales FBR dadas las ventajas como linealidad en los parámetros (una capa) y la disponibilidad de algoritmos de entrenamiento eficientes y rápidos [45]. La salida de la red neuronal puede ser representada por

$$y = \sum_{j=1}^N w_j \phi_j(Vx) + b \quad (3.1)$$

Donde N es el número de neuronas ocultas, w_j es el peso que conecta la capa oculta y la capa de salida, x es el vector de entrada $x \in \mathfrak{R}^m$ (m número de entradas), $V \in \mathfrak{R}^{N \times m}$ es la matriz de pesos en la capa oculta, b es el bias, el bias puede ser incluido como el primer término en w_j de la siguiente forma $w_{0,j} = b$, $\phi_0(Vx) = 1$, así $y = \sum_{j=0}^N w_j \phi_j(Vx)$, $\phi_j(Vx)$ es una función de base radial dada por

$$\phi_j(V_i x_{inn}) = \exp \left\{ -\frac{\|V_i x_{inn} - c_j\|^2}{2\sigma_{g_j}^2} \right\} \quad (3.2)$$

Donde c_j y σ_j^2 representan el centro y la varianza de la función gaussiana.

El compensador neuronal FBR no requiere de la información de su estructura [45]. De acuerdo al teorema de Stone-Weierstrass [16], el compensador no lineal π_i en (2.21) puede ser aproximado por una red neuronal, sea:

$$-\pi_i(x_{inn}) = W_i^{*T} \phi_i(V_i^{*T} x_{inn}) + \eta_i, \quad i = 1, 2 \quad (3.3)$$

Donde $x_{inn} = [\alpha_i, \dot{\alpha}_i, \ddot{\alpha}_i, r_i, \dot{r}_i, \ddot{r}_i, \tilde{r}_i, \tilde{r}_{iM2}, \ddot{r}_{iM2}, \dot{s}_i, s_i]^T$, W_i^* , V_i^* son matrices de pesos fijos, η_i es el error de aproximación, cuya magnitud depende de los valores de \hat{W}_t y \hat{V}_t , se asume que η_i cumple la siguiente condición

$$\eta_i^2 \leq \bar{\eta}_i \quad (3.4)$$

Donde $\bar{\eta}_i$ es una constante positiva, π_i puede ser estimada por $\hat{W}_{it}^T \phi_i(\hat{V}_{it}^T x_{inn})$, donde \hat{W}_{it}^T y \hat{V}_{it}^T son pesos variables de la red neuronal. Las funciones gaussianas usadas comúnmente en las redes neuronales cumplen con la condición de Lipschitz [24].

$$\tilde{\phi}_i = \phi_i(V_{it}^{*T} x_{inn}) - \phi_i(\hat{V}_{it}^T x_{inn}) = D_{\sigma i} \tilde{V}_{it}^T x_{inn} + \nu_{\sigma i} \quad (3.5)$$

donde $\tilde{V}_{it} = V_{it}^* - \hat{V}_{it}$, $D_{\sigma i} = \frac{\partial \phi_i^T(Z)}{\partial Z} \Big|_{Z=\hat{V}_{it}^T x_{inn}}$ y

$$\|\nu_{\sigma i}\|_{\Lambda_{\sigma i}}^2 = \nu_{\sigma i}^T \Lambda_{\sigma i} \nu_{\sigma i} \leq \bar{\eta}_{\sigma i} \quad (3.6)$$

donde $\bar{\eta}_{\sigma}$ es una constante positiva [24]. Además tenemos la siguiente relación

$$\begin{aligned} W_i^{*T} \phi_i(\hat{V}_i^{*T} x) - \hat{W}_i^T \phi_i(\hat{V}_i^T x) &= W_i^{*T} \phi_i(\hat{V}_i^{*T} x) - \hat{W}_i^T \phi_i(\hat{V}_i^T x) \pm W_i^{*T} \phi_i(\hat{V}_i^T x_{inn}) \\ &= \tilde{W}_i^T \phi_i(\hat{V}_i^T x_{inn}) + W_i^{*T} \tilde{\phi}_i = \tilde{W}_i^T \phi_i(\hat{V}_i^T x_{inn}) + W_i^{*T} D_{\sigma i} \tilde{V}_i^T x_{inn} + W_i^{*T} \nu_{\sigma i} \\ &= \tilde{W}_i^T \phi_i(\hat{V}_i^T x_{inn}) + \hat{W}_i^T D_{\sigma i} \tilde{V}_i^T x_{inn} + \tilde{W}_i^T D_{\sigma i} \tilde{V}_i^T x_{inn} + W_i^{*T} \nu_{\sigma i} \end{aligned} \quad (3.7)$$

donde $\tilde{W}_i = W_i^* - \hat{W}_i$.

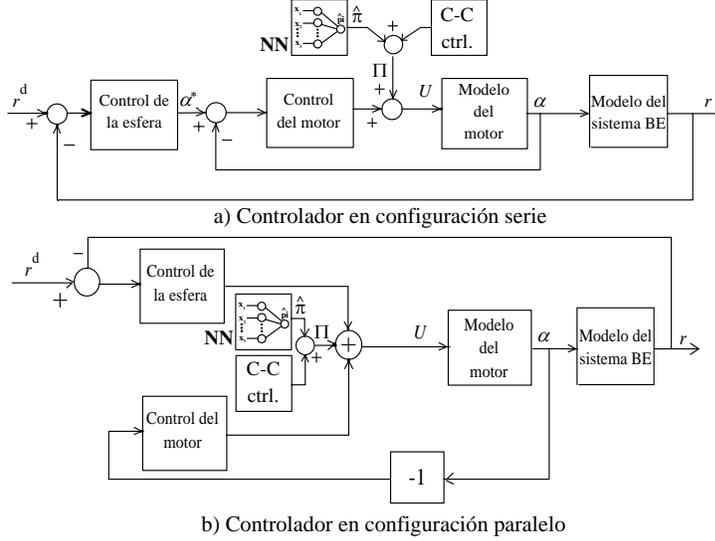


Figura 3.1: Controlador neuronal en configuración serie (a) y en configuración paralela (b) para sincronización

3.2. Controlador PD (Proporcional derivativo) más compensación neuronal y acoplamiento cruzado para la sincronización de dos sistemas BE

El controlador neuronal en configuración serie o en configuración paralela, para la sincronización de dos sistemas BE se muestra en la figura (3.1) y está dado por:

$$U_i = -a_{1i}\tilde{r}_i + a_{2i}\dot{r}_i + a_{3i}\ddot{r}_i - a_{4i}\alpha_i - a_{5i}\dot{\alpha}_i + a_{6i}s_i + a_{7i}\dot{s}_i + \hat{\pi}_i \quad (3.8)$$

Donde $\hat{\pi}_i = -\hat{W}_i^T \phi_i(\hat{V}_i^T x_{inn})$, $\tilde{r}_i = r^d - r_i$ y s_i , \dot{s}_i dados por (2.16), con las siguientes constantes para el controlador en configuración serie: $a_{1i} = k_{pmi}k_{pbi}$, $a_{2i} = k_{pmi}k_{dbi} + k_{dmi}k_{pbi}$, $a_{3i} = k_{dmi}k_{dbi}$, $a_{4i} = k_{pmi}$, $a_{5i} = k_{dmi}$, $a_{6i} = \beta a_{1i}$, $a_{7i} = \beta a_{2i}$ y para el controlador en configuración paralela: $a_{1i} = k_{pbi}$, $a_{2i} = k_{dbi}$, $a_{3i} = 0$, $a_{4i} = k_{pmi}$, $a_{5i} = k_{dmi}$, $a_{6i} = \beta a_{1i}$, $a_{7i} = \beta a_{2i}$, $a_{ji} > 0$, $j = 1..,7$, $i = 1,2$, $\beta > 0$.

3.2.1. Controlador con redes neuronales de una capa

Primero se considera el caso de redes neuronales de una capa es decir $\hat{V}_i = I$. El siguiente teorema establece un algoritmo de entrenamiento para las redes neuronales de una capa.

Teorema 3.1 *Sea la ley de control neuronal para sincronización dada por (3.8) con la siguiente ley de aprendizaje*

$$\hat{W}_i = k_{2i} \dot{\alpha}_i \Gamma_i \phi_i(x_{inn}) \quad (3.9)$$

Donde Γ_i es una constante de aprendizaje, $\Gamma_i > 0$, $x_{inn} = [\alpha_i, \dot{\alpha}_i, \ddot{\alpha}_i, r_i, \dot{r}_i, \ddot{r}_i, \tilde{r}_i, \tilde{r}_{iM2}, \ddot{r}_{iM2}, \dot{s}_i, s_i]^T$ y la condición

$$\begin{aligned} a_{4i} &> \frac{k_{2i} a_{1i}^2}{2}, \quad a_{4i} > a_{1i}^2 k_{2i} + 2a_{6i}^2 k_{2i} + 2(a_{1i} a_{6i}) k_{2i} \\ k_{1i} k_{4i} &> k_{2i}^2 a_{3i}^2, \quad k_{2i} a_{5i} + k_{3i} > \frac{k_{2i}}{2} \end{aligned}$$

Si $\dot{\alpha}_i > \sqrt{\frac{\bar{\Psi}_i}{\Lambda_i}}$ se tiene que \dot{x}_i , \tilde{x}_i y \hat{W} permanecen acotados, donde $\Lambda_i = k_{2i} a_{5i} + k_{3i} - \frac{k_{2i}}{2}$, $\bar{\Psi}_i = \frac{k_{2i}}{2} \bar{\eta}_i$. Además para cualquier $T \in (0, \infty)$ s_i satisface el siguiente índice de desempeño

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T s_i^2 dt \leq \bar{\Psi}_i \quad (3.10)$$

Demostración. Dada la ecuación (2.26), con las matrices $M_i(x)$ y B_i positivas definidas, se propone la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V_i(\tilde{x}_i, \dot{x}_i) = \frac{1}{2} \dot{x}_i^T M_i(x_i) \dot{x}_i + \frac{1}{2} \tilde{x}_i^T B_i \tilde{x}_i + \frac{1}{2} \tilde{W}_i^T \Gamma_i^{-1} \tilde{W}_i \quad (3.11)$$

Derivando la ecuación (3.11) respecto al tiempo

$$\dot{V}_i = \dot{x}_i^T M_i(x_i) \ddot{x}_i + \frac{1}{2} \dot{x}_i^T \dot{M}_i(x_i) \dot{x}_i + \tilde{x}_i^T B_i \dot{\tilde{x}}_i + \tilde{W}_i^T \Gamma_i^{-1} \dot{\tilde{W}}_i$$

Despejando de la ecuación (2.26) $M_i(x_i) \ddot{x}_i$ y dado que $\dot{\tilde{x}}_i^T = -\dot{x}_i^T$ se tiene $\dot{\tilde{x}}_i^T B_i \tilde{x}_i = -\dot{x}_i^T B_i \tilde{x}_i$, sustituyendo en la ecuación anterior tenemos

$$\dot{V}_i = -\dot{x}_i^T C_i(x_i, \dot{x}_i) \dot{x}_i - \dot{x}_i^T G_i(x_i) \dot{x}_i + \dot{x}_i^T D_i + \frac{1}{2} \dot{x}_i^T \dot{M}_i(x_i) \dot{x}_i + \tilde{W}_i^T \Gamma_i^{-1} \dot{\tilde{W}}_i \quad (3.12)$$

Sustituyendo $M_i(x_i)$, D_i , $G_i(x_i)$, $\dot{M}_i(x_i)$, \dot{x}_i y \ddot{x}_i en la ecuación (3.12)

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_i &= -(k_{2i}a_{5i} + k_{3i})\dot{\alpha}_i^2 - s_i^2 + k_{2i}\dot{\alpha}_i\hat{\pi}_i \\
 &+ \dot{\alpha}_i[-(m_i g r_i + \frac{L_i}{2} M_i g) \cos \alpha_i - m_i r_i \dot{r}_i \dot{\alpha}_i] \\
 &+ \dot{r}_i[-s_i - k_{2i}a_{1i}\alpha_i - 2\tilde{r}_i - k_{2i}a_{3i}\ddot{\alpha}_i + \ddot{r}_{iM2} + k_{2i}a_{2i}\dot{\alpha}_i + k_{4i}\ddot{r}_i] \\
 &+ \dot{s}_i[\tilde{r}_{iM2} - \ddot{r}_{iM2} - k_{2i}a_{6i}\alpha_i + k_{2i}a_{7i}\dot{\alpha}_i] + s_i^2 + \tilde{W}_i^T \Gamma_i^{-1} \tilde{W}_i
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Considerando el compensador dado por $\hat{\pi}_i = -\hat{W}_{it}^T \phi_i(x_{inn})$ y la ecuación (3.3)

$$\begin{aligned}
 V_i &= -(k_{2i}a_{5i} + k_{3i})\dot{\alpha}_i^2 - s_i^2 \\
 &+ k_{2i}\dot{\alpha}_i \left[W_i^{*T} \phi_i(x_{inn}) + \eta_i - \hat{W}_{it}^T \phi_i(x_{inn}) \right] + \tilde{W}_i^T \Gamma_i^{-1} \tilde{W}_i
 \end{aligned}$$

De la definición \tilde{W}_i^T tenemos $\tilde{W}_i^T = W_i^{*T} - \hat{W}_{it}^T$, $\tilde{W}_i = -\hat{W}_{it}^T$

$$\begin{aligned}
 V_i &= -(k_{2i}a_{5i} + k_{3i})\dot{\alpha}_i^2 - s_i^2 \\
 &+ k_{2i}\dot{\alpha}_i \left[\tilde{W}_i^T \phi_i(x_{inn}) + \eta_i \right] - \tilde{W}_i^T \Gamma_i^{-1} \tilde{W}_i
 \end{aligned}$$

De la ley de aprendizaje (3.9) se tiene $-\tilde{W}_i^T \left(\Gamma_i^{-1} \hat{W}_{it}^T - k_{2i}\dot{\alpha}_i \phi_i(x_{inn}) \right) = 0$, dado que $k_{2i}\dot{\alpha}_i \eta_i \leq \frac{k_{2i}}{2} (\dot{\alpha}_i^2 + \eta_i^2)$ y la ecuación (3.4), sustituyendo en la ecuación anterior se obtiene

$$\dot{V}_i \leq -(k_{2i}a_{5i} + k_{3i} - \frac{k_{2i}}{2})\dot{\alpha}_i^2 - s_i^2 + \frac{k_{2i}}{2}\bar{\eta}_i$$

La ecuación anterior puede ser reescrita como

$$\dot{V}_i \leq -\Lambda_i \dot{\alpha}_i^2 - s_i^2 + \bar{\Psi}_i \tag{3.14}$$

Donde $\Lambda_i = k_{2i}a_{5i} + k_{3i} - \frac{k_{2i}}{2}$, $\bar{\Psi}_i = \frac{k_{2i}}{2}\bar{\eta}_i$. Si se cumplen las condiciones $k_{2i}a_{5i} + k_{3i} > \frac{k_{2i}}{2}$ y $\dot{\alpha}_i \notin L_i = \left\{ \dot{\alpha}_i \mid \dot{\alpha}_i \leq \sqrt{\frac{\bar{\Psi}_i}{\Lambda_i}} \right\}$ se tiene que $\dot{V}_i \leq 0$ entonces la matriz de pesos \hat{W}_i con la ley de aprendizaje (3.9), \dot{x}_i y \ddot{x}_i permanecen acotados. Integrando (3.14) de 0 a T

$$\begin{aligned}
 \int_0^T \Lambda_i \dot{\alpha}_i^2 dt + \int_0^T s_i^2 dt &\leq V_{i,0} - V_{i,T} + \bar{\Psi}_i T \leq V_{i,0} + \bar{\Psi}_i T \\
 \int_0^T s_i^2 dt &\leq V_{i,0} + \bar{\Psi}_i T
 \end{aligned}$$

Dado que $V_{i,0}$ es acotada por que $\tilde{W}_i^o = W_i^* - \hat{W}_i^o$, donde \hat{W}_i^o es una condición inicial de \hat{W}_i se obtiene (3.10). ■

Comentario 3.1 Si la ley de aprendizaje (3.9) se modifica con la llamada σ -modificación, [32], [49],[56] para mejorar la robustez en presencia de errores de aproximación η_i , cuando el sistema es sujeto a perturbaciones acotadas y para evitar que los valores de los pesos divergan, la ley de adaptación (3.9) se modifica de la siguiente forma:

$$\hat{W}_i = \Gamma_i[k_{2i}\dot{\alpha}_i\phi_i(x) - \sigma_i\hat{W}_i]$$

considerando que

$$\begin{aligned} \sigma_i(\tilde{W}_i^T\hat{W}_i) &= \sigma_i\tilde{W}_i^T(W_i^* - \tilde{W}_i) \leq \sigma_i\|\tilde{W}_i\|\|W_i^*\| - \sigma_i\|\tilde{W}_i\|^2 \pm \frac{1}{2}\sigma_i\|\tilde{W}_i\|^2 \pm \frac{1}{2}\sigma_i\|W_i^*\|^2 \\ &\leq -\frac{1}{2}\sigma_i\|\tilde{W}_i\|^2 + \frac{1}{2}\sigma_i\|W_i^*\|^2 \end{aligned}$$

Donde σ_i es una constante $\sigma_i > 0$. Definiendo $\Psi_i = \frac{k_{2i}}{2}\bar{\eta}_i + \frac{1}{2}\sigma_i\|W_i^*\|^2$, con la elección de $\sigma_i \geq \lambda_{\max}(\Gamma_i)$ se tiene $-\sigma_i\|\tilde{W}_i\|^2 \leq -\lambda_{\min}(\Gamma_i)\|\tilde{W}_i\|^2$, así $\dot{V}_i \leq 0$ cuando $\dot{\alpha}_i \notin R_{1i} = \left\{ \dot{\alpha}_i \mid \dot{\alpha}_i \leq \sqrt[2]{\frac{\Psi_i}{\Lambda_i}} \right\}$ o $\tilde{W}_i \notin R_{2i} = \left\{ \|\tilde{W}_i\| \leq \sqrt[2]{\frac{2\Psi_i}{\lambda_{\min}(\Gamma_i)}} \right\}$, con $\lambda_{\min}(\cdot)$ el valor propio mínimo de la matriz (\cdot) .

3.2.2. Controlador con redes neuronales de dos capas

Con el fin de analizar la respuesta del sistema y sí el error de sincronización se reduce, se utilizan redes neuronales de dos capas, se considera el caso $\hat{V}_i \neq I$. El siguiente teorema establece un algoritmo de aprendizaje para las redes neuronales de dos capas.

Teorema 3.2 Sea la ley de control neuronal para sincronización (3.8) con la siguiente ley de aprendizaje

$$\begin{aligned} \hat{W}_i &= \kappa_{wi}\Gamma_{wi}[\dot{\alpha}_ik_{2i}\phi_i(\hat{V}_i^T x_{inn}) + \dot{\alpha}_ik_{2i}D_{\sigma i}\tilde{V}_i^T x_{inn}] \\ \hat{V}_i &= \kappa_{vi}\Gamma_{vi}[\dot{\alpha}_ik_{2i}x_{inn}\hat{W}_i^T D_{\sigma i}] \end{aligned} \quad (3.15)$$

Donde Γ_{vi} , Γ_{wi} son constantes de aprendizaje, $\Gamma_{vi}, \Gamma_{wi} > 0$, $\tilde{V}_i = V_i^o - \hat{V}_i$ con V_i^o una condición inicial para V_i ,

$$\kappa_{wi} = \begin{cases} 1 & \dot{\alpha}_i > \sqrt[2]{\frac{\Psi_i}{\Lambda_i}} \\ 0 & \dot{\alpha}_i \leq \sqrt[2]{\frac{\Psi_i}{\Lambda_i}} \end{cases} \quad (3.16)$$

$$\kappa_{vi} = \begin{cases} 1 & \dot{\alpha}_i > \sqrt{\frac{\bar{\Psi}_i}{\Lambda_i}} \\ 0 & \dot{\alpha}_i \leq \sqrt{\frac{\bar{\Psi}_i}{\Lambda_i}} \end{cases} \quad (3.17)$$

y la condición:

$$a_{4i} > \frac{k_{2i}a_{1i}^2}{2}, a_{4i} > a_{1i}^2 k_{2i} + 2a_{6i}^2 k_{2i} + 2(a_{1i}a_{6i}) k_{2i}, \\ k_{1i}k_{4i} > k_{2i}^2 a_{3i}^2, \quad k_{2i}a_{5i} + k_{3i} > \frac{3k_{2i}}{4}$$

entonces los pesos de las redes neuronales \hat{W}_i, \hat{V}_i están acotados. Si $\dot{\alpha}_i > \sqrt{\frac{\bar{\Psi}_i}{\Lambda_i}}$ se tiene que \dot{x}_i, \tilde{x}_i permanecen acotados, donde $\Lambda_i = k_{2i}a_{5i} + k_{3i} - \frac{3k_{2i}}{4}$, $\bar{\Psi}_i = \frac{k_{2i}}{2}\bar{\eta}_i + \bar{\eta}_{\sigma i}$. Además para cualquier $T \in (0, \infty)$ s_i satisface el siguiente índice de desempeño

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T s_i^2 dt \leq \bar{\Psi}_i \quad (3.18)$$

Demostración. Dado que $M_i(x)$ y B_i son positivas definidas, se escoge la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V_i(x_{1i}, x_{2i}) = \frac{1}{2}x_{1i}^T M_i(x_i)x_{1i} + \frac{1}{2}x_{2i}^T B_i x_{2i} + \frac{1}{2}\tilde{W}_i^T \Gamma_{wi}^{-1} \tilde{W}_i + \frac{1}{2}tr(\tilde{V}_i^T \Gamma_{vi}^{-1} \tilde{V}_i) \\ = \frac{1}{2}\dot{x}_i^T M_i(x_i)\dot{x}_i + \frac{1}{2}\tilde{x}_i^T B_i \tilde{x}_i + \frac{1}{2}\tilde{W}_i^T \Gamma_{wi}^{-1} \tilde{W}_i + \frac{1}{2}tr(\tilde{V}_i^T \Gamma_{vi}^{-1} \tilde{V}_i)$$

Derivando respecto al tiempo la ecuación anterior

$$\dot{V}_i = \dot{x}_i^T M_i(x_i)\ddot{x}_i + \frac{1}{2}\dot{x}_i^T \dot{M}_i(x_i)\dot{x}_i + \dot{\tilde{x}}_i^T B_i \tilde{x}_i + \tilde{W}_i^T \Gamma_{wi}^{-1} \dot{\tilde{W}}_i + tr(\tilde{V}_i^T \Gamma_{vi}^{-1} \dot{\tilde{V}}_i)$$

Despejando de la ecuación (2.26) $M_i(x_i)\ddot{x}_i$ y dado que $\dot{\tilde{x}}_i^T = -\dot{x}_i^T$ se tiene $\dot{\tilde{x}}_i^T B_i \tilde{x}_i = -\dot{x}_i^T B_i \tilde{x}_i$, sustituyendo en la ecuación anterior

$$\dot{V}_i = -\dot{x}_i^T C_i(x_i, \dot{x}_i)\dot{x}_i - \dot{x}_i^T G_i(x_i)\dot{x}_i + \dot{x}_i^T D_i + \frac{1}{2}\dot{x}_i^T \dot{M}_i(x_i)\dot{x}_i \\ + \tilde{W}_i^T \Gamma_{wi}^{-1} \dot{\tilde{W}}_i + tr(\tilde{V}_i^T \Gamma_{vi}^{-1} \dot{\tilde{V}}_i) \quad (3.19)$$

Sustituyendo $M_i(x_i)$, D_i , $G_i(x_i)$, $\dot{M}_i(x_i)$, \dot{x}_i , \ddot{x}_i en la ecuación (3.19)

$$\dot{V}_i = -(k_{2i}a_{5i} + k_{3i})\dot{\alpha}_i^2 - s_i^2 + k_{2i}\dot{\alpha}_i\hat{\pi}_i \\ + \dot{\alpha}_i[-(m_i g r_i + \frac{L_i}{2}M_i g)\cos\alpha_i - m_i r_i \dot{r}_i \dot{\alpha}_i] \\ + \dot{r}_i[-s_i - k_{2i}a_{1i}\alpha_i - 2\tilde{r}_i - k_{2i}a_{3i}\ddot{\alpha}_i + \ddot{r}_{iM2} + k_{2i}a_{2i}\dot{\alpha}_i + k_{4i}\ddot{r}_i] \\ + \dot{s}_i[\tilde{r}_{iM2} - \ddot{r}_{iM2} - k_{2i}a_{6i}\alpha_i + k_{2i}a_{7i}\dot{\alpha}_i] + s_i^2 - \dot{\tilde{W}}_i^T \Gamma_{wi}^{-1} \dot{\tilde{W}}_i - tr(\tilde{V}_i^T \Gamma_{vi}^{-1} \dot{\tilde{V}}_i)$$

Donde en la ecuación anterior se utiliza el hecho de que $\tilde{W}_i = -\hat{W}_i$, $\tilde{V}_i = -\hat{V}_i$. Considerando el compensador dado por $\hat{\pi}_i = -\hat{W}_{it}^T \phi_i(\hat{V}_{it}^T x_{inn})$ y la ecuación (3.3) se tiene

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -(k_{2i}a_{5i} + k_{3i})\dot{\alpha}_i^2 - s_i^2 \\ &+ \dot{\alpha}_i k_{2i} \left[-\hat{W}_i^T \phi_i(\hat{V}_i^T x_{inn}) + W_i^{*T} \phi_i(V_i^{*T} x_{inn}) + \eta_i \right] - \tilde{W}_i^T \Gamma_{wi}^{-1} \hat{W}_i - \text{tr}(\tilde{V}_i^T \Gamma_{vi}^{-1} \hat{V}_i) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Usando la ecuación (3.6) y la siguiente propiedad de matrices $X^T Y + (X^T Y) \leq X^T \Lambda^{-1} X + Y^T \Lambda Y$, donde $X, Y, \Lambda \in R^{n \times k}$ para cualquier matriz positiva definida Λ

$$\dot{\alpha}_i k_{2i} W_i^{*T} v_{\sigma i} \leq \frac{k_{2i}}{4} \dot{\alpha}_i^2 + (W_i^{*T} v_{\sigma i})^T W_i^{*T} v_{\sigma i} = \frac{k_{2i}}{4} \dot{\alpha}_i^2 + v_{\sigma i}^T W_i^* W_i^{*T} v_{\sigma i} \leq \frac{k_{2i}}{4} \dot{\alpha}_i^2 + \bar{\eta}_{\sigma i} \quad (3.21)$$

Donde $\bar{\eta}_{\sigma i}$ es definida en (3.6). Sustituyendo (3.7), $k_{2i} \dot{\alpha}_i \eta_i \leq \frac{k_{2i}}{2} (\dot{\alpha}_i^2 + \eta_i^2)$ y (3.21) en ecuación (3.20) tenemos

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &\leq -(k_{2i}a_{5i} + k_{3i} - \frac{3}{4}k_{2i})\dot{\alpha}_i^2 - s_i^2 \\ &+ \dot{\alpha}_i k_{2i} \left[\tilde{W}_i^T \phi_i(\hat{V}_i^T x_{inn}) + \hat{W}_i^T D_{\sigma i} \tilde{V}_i^T x_{inn} + \tilde{W}_i^T D_{\sigma i} \tilde{V}_i^T x_{inn} \right] + \frac{k_{2i}}{2} \bar{\eta}_i + \bar{\eta}_{\sigma i} - \tilde{W}_i^T \Gamma_{wi}^{-1} \hat{W}_i \\ &- \text{tr}(\tilde{V}_i^T \Gamma_{vi}^{-1} \hat{V}_i) \\ &= -(k_{2i}a_{5i} + k_{3i} - \frac{3}{4}k_{2i})\dot{\alpha}_i^2 - s_i^2 \\ &+ \text{tr}[\tilde{V}_i^T (-\Gamma_{vi}^{-1} \hat{V}_i + \dot{\alpha}_i k_{2i} x_{inn} \tilde{W}_i^T D_{\sigma i})] - \tilde{W}_i^T \Gamma_{wi}^{-1} \hat{W}_i \\ &+ \dot{\alpha}_i k_{2i} \tilde{W}_i^T \phi_i(\hat{V}_i^T x_{inn}) + \dot{\alpha}_i k_{2i} \tilde{W}_i^T D_{\sigma i} \tilde{V}_i^T x_{inn} + \frac{k_{2i}}{2} \bar{\eta}_i + \bar{\eta}_{\sigma i} \end{aligned}$$

De la ley de aprendizaje (3.15) obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &\leq -(k_{2i}a_{5i} + k_{3i} - \frac{3}{4}k_{2i})\dot{\alpha}_i^2 - s_i^2 + \frac{k_{2i}}{2} \bar{\eta}_i + \bar{\eta}_{\sigma i} \\ V_i &\leq -\Lambda_i \dot{\alpha}_i^2 - s_i^2 + \bar{\Psi}_i \end{aligned} \quad (3.22)$$

Donde $\Lambda_i = k_{2i}a_{5i} + k_{3i} - \frac{3k_{2i}}{4}$, $\bar{\Psi}_i = \frac{k_{2i}}{2} \bar{\eta}_i + \bar{\eta}_{\sigma i}$. Si se cumplen las condiciones $k_{2i}a_{5i} + k_{3i} > \frac{3k_{2i}}{4}$ y $\dot{\alpha}_i \notin L_i = \left\{ \dot{\alpha}_i \mid \dot{\alpha}_i \leq \sqrt{\frac{\bar{\Psi}_i}{\Lambda_i}} \right\}$ se tiene que $\dot{V}_i \leq 0$, los pesos \hat{W}_i , \hat{V}_i con la ley de aprendizaje (3.15), \dot{x}_i y $\dot{\tilde{x}}_i$ permanecen acotados. Integrando (3.22) de 0 a T

$$\begin{aligned} \int_0^T \Lambda_i \dot{\alpha}_i^2 dt + \int_0^T s_i^2 dt &\leq V_{i,0} - V_{i,T} + \bar{\Psi}_i T \leq V_{i,0} + \bar{\Psi}_i T \\ \int_0^T s_i^2 dt &\leq V_{i,0} + \bar{\Psi}_i T \end{aligned} \quad (3.23)$$

Dado que $V_{i,0}$ es acotada por que $\tilde{W}_i^o = W_i^* - \hat{W}_i^o$, $\tilde{V}_i = V_i^o - \hat{V}_i^o$ con \hat{W}_i^o , \hat{V}_i^o condiciones iniciales para \hat{W}_i, \hat{V}_i se obtiene (3.18) [24]. Si $\dot{\alpha}_i \leq \sqrt{\frac{\bar{\Psi}_i}{\Lambda_i}}$ de (3.16) y (3.17) tenemos $\kappa_{wi} = 0$, $\kappa_{vi} = 0$ sustituyendo en (3.15) obtenemos que \hat{W}_i, \hat{V}_i permanecen acotados. ■

Comentario 3.2 *El Teorema 3.2 muestra que V_i^o no tiene influencia sobre la propiedad de estabilidad, se puede iniciar con algún valor para V_i^o como condición inicial. V_i^o puede ser seleccionado con los siguientes pasos fuera de línea:*

1. *Iniciar con cualquier valor para V_i^o*
2. *Utilizar la ley de aprendizaje en línea con V_i^o*
3. *Considerar \hat{V}_t como nueva condición inicial i.e., $V_i^o = \hat{V}_t$*
4. *Si el error disminuye, repetir el proceso e ir al paso 2. De otra forma definir \hat{V}_t como valor final para V_i^o .*

3.3. Simulación del controlador neuronal para la sincronización de dos sistemas BE

Para la simulación se consideran los dos sistemas barra esfera utilizados en el Capítulo 2. Un sistema barra esfera con centro de rotación de la barra en un extremo (3.24) y un sistema barra barril con centro de rotación en el centro de la barra (3.25).

$$\begin{aligned} (m_1 r_1^2 + k_{11}) \ddot{\alpha}_1 + 2m_1 r_1 \dot{r}_1 \dot{\alpha}_1 + (m_1 g r_1 + \frac{L_1}{2} M_1 g) \cos \alpha_1 &= k_{21} U - k_{31} \dot{\alpha}_1 \\ k_{41} \ddot{r}_1 - r_1 \dot{\alpha}_1^2 + g \sin \alpha_1 &= 0 \end{aligned} \quad (3.24)$$

donde $k_{11} = 0,198\ 16$, $k_{21} = 1.000\ 8$, $k_{31} = 7.337\ 0$, $k_{41} = \frac{7}{5}$ y para el sistema BE₂

$$\begin{aligned} (m_2 r_2^2 + k_{12}) \ddot{\alpha}_2 + 2m_2 r_2 \dot{r}_2 \dot{\alpha}_2 + m_2 g r_2 \cos \alpha_2 &= k_{22} U_2 - k_{32} \dot{\alpha}_2 \\ k_{42} \ddot{r}_2 - r_2 \dot{\alpha}_2^2 + g \sin \alpha_2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.25)$$

donde $k_{12} = 0,103\ 2$, $k_{22} = 1.000\ 8$, $k_{32} = 2.789\ 8$, $k_{42} = \frac{3}{2}$. Se considera el controlador neuronal en configuración serie dado por (3.8).

$$U_i = -a_{1i} \tilde{r}_i + a_{2i} \dot{r}_i + a_{3i} \ddot{r}_i - a_{4i} \alpha_i - a_{5i} \dot{\alpha}_i + a_{6i} s_i + a_{7i} \dot{s}_i + \hat{\pi}_i$$

$$\hat{\pi}_i = -W_i^{*T} \phi_i(V_i^{*T} x_{inn})$$

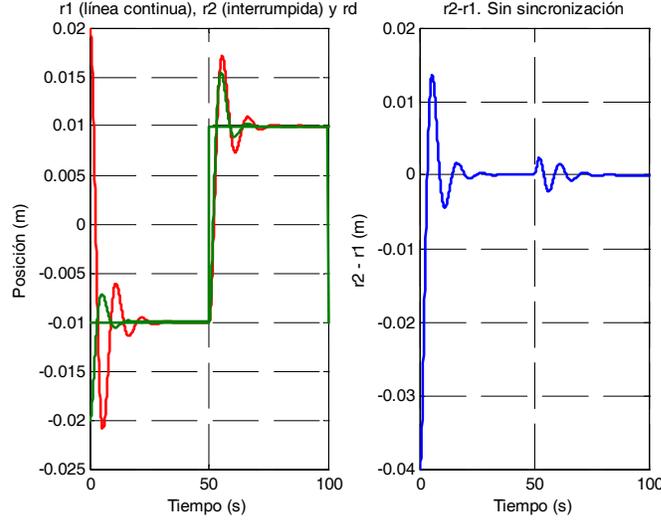


Figura 3.2: r_1 , r_2 , r^d y $r_2 - r_1$: sin sincronización

con las siguientes constantes:

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= 3, a_{21} = 3,5, a_{31} = 0,11, a_{41} = 43,2, a_{51} = 1,52, a_{61} = 3\beta, a_{71} = 3,5\beta, \\
 a_{12} &= 2, a_{22} = 2,1, a_{32} = 0,094, a_{42} = 35,2, a_{52} = 1,6, a_{62} = 2\beta, a_{72} = 2,1\beta, \\
 \beta &= 0,95
 \end{aligned}$$

Para el caso de redes neuronales de una capa se consideran los siguientes parámetros:

$$\Gamma_1 = \text{diag}\{0,6\}, m_1 = 11, N_1 = 50, \sigma_1 = 0,7, c_{ji} \text{ en } [-1,1], \sigma_{g_j} = 1, \Gamma_2 = \text{diag}\{0,45\}, \\
 m_2 = 11, N_2 = 20, \sigma_2 = 0,9$$

y para el caso de redes neuronales de dos capas:

$$\Gamma_{v1} = \text{diag}\{0,9\}, \Gamma_{w1} = \text{diag}\{0,1\}, V_1^o = \{0,3\}, m_1 = 11, N_1 = 20, c_j \text{ en } [-1,1], \\
 \sigma_{g_j} = 1, \Gamma_{v2} = \text{diag}\{0,1\}, \Gamma_{w2} = \text{diag}\{0,4\}, V_1^o = \{0,2\}, m_2 = 11, N_2 = 10$$

Con una señal de referencia r^d cuadrada de $0,01m$ de amplitud y $0,01Hz$, con condiciones iniciales $r_1(0) = 0,02m$ y $r_2(0) = -0,02m$. Primero se considera el caso sin sincronización, la respuesta del sistema se muestra en la figura (3.2).

En el caso de agregar una perturbación en $40s$ de $0,01m$ de amplitud y $3s$ de duración al sistema BE_1 , se tiene la respuesta de la figura (3.3).

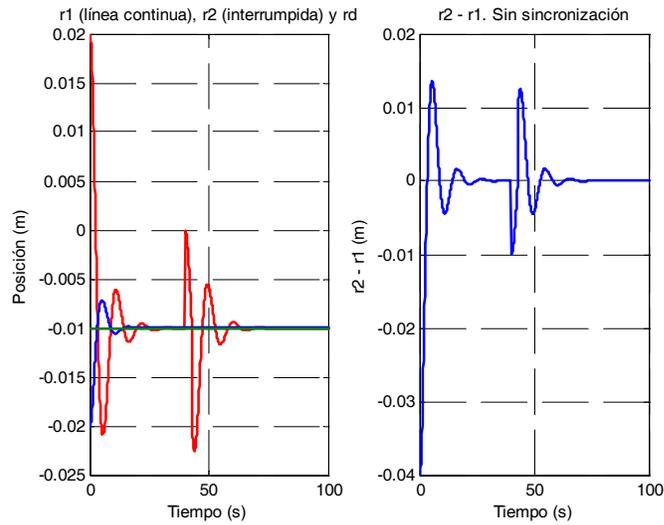


Figura 3.3: r_1 , r_2 , r^d y $r_2 - r_1$: sin sincronización, respuesta a una perturbación

Como se muestra en las figuras (3.2) y (3.3) cada sistema barra esfera trata independientemente de seguir a la señal de referencia y su salida depende de las constantes del controlador elegidas, así sí la respuesta de un sistema tiene una perturbación, este sistema trata de seguir nuevamente a la señal de referencia sin que el otro sistema modifique su respuesta dado que no existen interconexiones entre los sistemas. Si se utiliza el controlador para sincronización (3.8) con redes neuronales de una capa se tiene la respuesta de la figura (3.4).

En el caso de agregar una perturbación al sistema BE_1 , se tiene la respuesta de la figura (3.5). Las gráficas (3.4) y (3.5) muestran el caso en el que se utiliza el controlador para sincronización (3.8), en este caso las salidas de los dos sistemas barra esfera r_1 y r_2 se sincronizan; ambos sistemas tratan de seguir a la señal de referencia conjuntamente como resultado del acoplamiento cruzado que se induce a través de la ley de control, así si salida de un sistema está lejos de la señal de referencia o tiene una perturbación, el otro sistema barra esfera modifica su respuesta y sigue a la salida de ese sistema, para reducir el error de sincronización en el estado transitorio, este se reduce considerablemente y tiende a cero más rápido comparado con el caso de no utilizar un controlador para sincronización.

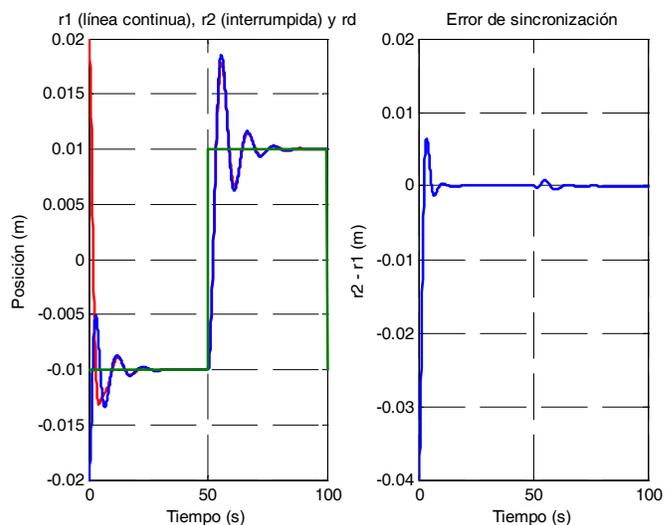


Figura 3.4: r_1 , r_2 , r^d y error de sincronización. Controlador con redes neuronales de una capa, $\beta = 0,95$.

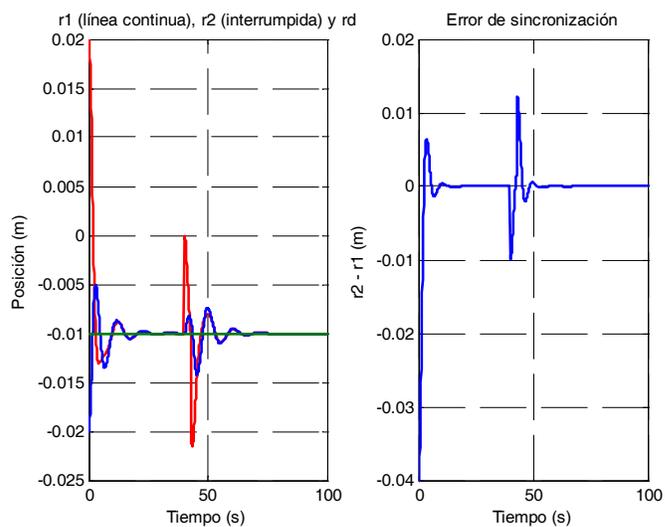


Figura 3.5: r_1 , r_2 , r^d y error de sincronización. Controlador con redes neuronales de una capa, respuesta a una perturbación, $\beta = 0,95$.

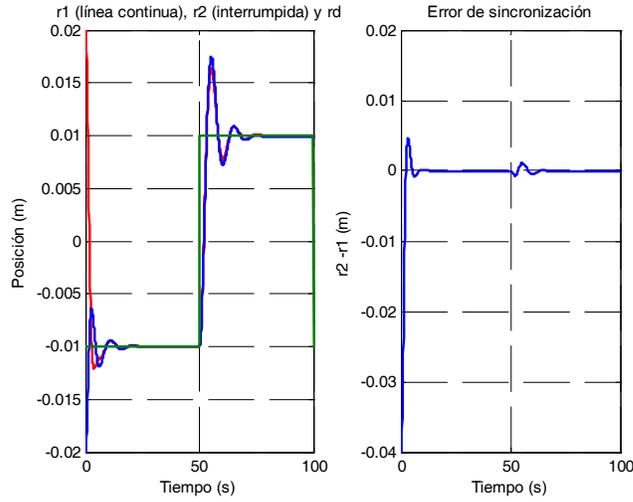


Figura 3.6: r_1 , r_2 , r^d y error de sincronización. Controlador con redes neuronales de dos capas, $\beta = 0,95$.

Para el caso del controlador (3.8) con redes neuronales de dos capas, la respuesta del sistema se muestra en la figura (3.6).

Si se agrega una perturbación al sistema BE_1 la respuesta se muestra en la figura (3.7). Como se muestra en las figuras (3.6) y (3.7) la respuesta es similar a la respuesta utilizando redes neuronales de una capa, para ambas leyes de control, el error de sincronización se reduce y tiende a cero más rápido, comparado con el caso de no utilizar un controlador para sincronización. En el controlador (3.8) no se requiere conocer el modelo matemático exacto de los sistemas, el acoplamiento cruzado incluido con el error de acoplamiento y su derivada s_i , \dot{s}_i , inducen el comportamiento síncrono entre las salidas de los dos sistemas barra esfera r_1 y r_2 , así si la salida de un sistema está lejos de la señal de referencia, el otro sistema barra esfera modifica su respuesta y sigue a ese sistema de tal forma que el error de sincronización se reduce, el comportamiento síncrono depende de la constante de sincronización β que debe de cumplir las condiciones del teorema 3.1 o 3.2.

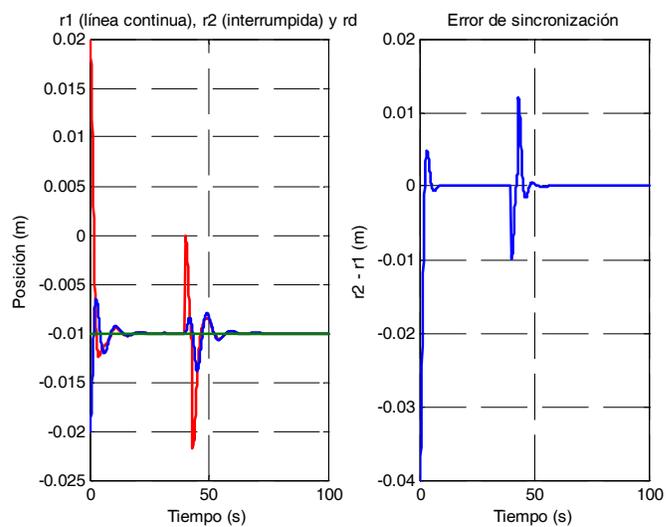


Figura 3.7: r_1 , r_2 , r^d y error de sincronización. Controlador con redes neuronales de dos capas, respuesta a una perturbación, $\beta = 0,95$.

Capítulo 4

Aplicación del controlador neuronal para la sincronización de dos sistemas barra esfera en tiempo real

4.1. Preliminares para la ejecución en tiempo real

Para la aplicación en tiempo real del controlador neuronal para la sincronización de dos sistemas barra esfera, se utiliza la tarjeta de adquisición de datos RT-DAC4/PCI [42], que es una tarjeta multifuncional analógica y digital de entradas/salidas dedicada a la adquisición de datos en tiempo real bajo un ambiente *Windows 95/98/NT/2000*. Se utiliza un periodo de muestreo de $10ms$ [13].

Para tratar de cancelar el efecto de la zona muerta del motor (rango de valores de voltaje en donde el motor no mueve a la barra) en cada uno de los sistemas BE y la señal de salida del sistema no presente discontinuidades [13] se implementa un bloque inverso a la zona muerta [13], [17]. La zona muerta del motor no está considerada en el modelo matemático de los sistemas BE, sin embargo en la aplicación en tiempo real sí se considera. Para el sistema BE número uno se tiene que la zona muerta se encuentra entre los valores

$$u^- = -1,3V, \quad u^+ = 1,3V$$

y para el sistema BE número dos

$$u^- = -0,5V, \quad u^+ = 0,5V$$

Dado que en la practica los motores solo funcionan con un valor de voltaje que se encuentra dentro de cierto rango, se considera para protección de los motores una señal de control entre los siguientes valores de voltaje para el sistema BE₁ entre $[-1, 1]V$ y para el sistema BE₂ entre $[-5, 5]V$.

4.2. Controlador neuronal para la sincronización de dos sistemas barra esfera

En el caso de considerar dos sistemas BE que son independientes, es decir, un controlador independiente para cada uno de los sistemas BE, se utiliza un controlador PD en cascada [13], [37] para cada uno de los sistemas barra esfera con las siguientes constantes: $k_{pm1} = 0,9$, $k_{dm1} = 0,065$, $k_{pb1} = 0,35$, $k_{db1} = 0,015$, $k_{pm2} = 0,7$, $k_{dm2} = 0,1$, $k_{pb2} = 0,15$, $k_{db2} = 0,09$, con una señal de referencia $r^d = 1V$. La respuesta de los dos sistemas BE y la diferencia entre la salida del sistema número dos y la salida del sistema número uno ($r_2 - r_1$), son mostrados en figuras (4.1), (4.2).

Controlador neuronal para la sincronización de dos sistemas BE en tiempo real

Para la sincronización de los dos sistemas BE se utiliza el controlador dado por (3.8) con redes neuronales de una capa, con los siguientes parámetros $k_{pm1} = 0,9$, $k_{dm1} = 0,065$, $k_{pb1} = 0,35$, $k_{db1} = 0,015$, $k_{pm2} = ,7$, $k_{dm2} = 0,1$, $k_{pb2} = 0,15$, $k_{db2} = 0,09$, $k_{21} = 1,2$, $k_{22} = 1,0008$, $\Gamma_1 = diag\{1,8\}$, $\sigma_1 = 0,7$, $\Gamma_2 = diag\{,5\}$, $\sigma_{g_j} = 0,7071$, $N_1 = 10$, $N_2 = 50$, c_{ji} en $[-1, 1]$, $\beta = 0,5$, con una señal de referencia $r^d = 1V$. La respuesta de los dos sistemas BE y el error de sincronización ($r_2 - r_1$) se muestra en las figuras (4.3), (4.4).

Como se muestra en las figuras (4.3) y (4.4) el error de sincronización se reduce considerablemente en el estado transitorio, si se emplea el controlador neuronal para sincronización, comparado con el caso de no emplear un controlador para sincronización

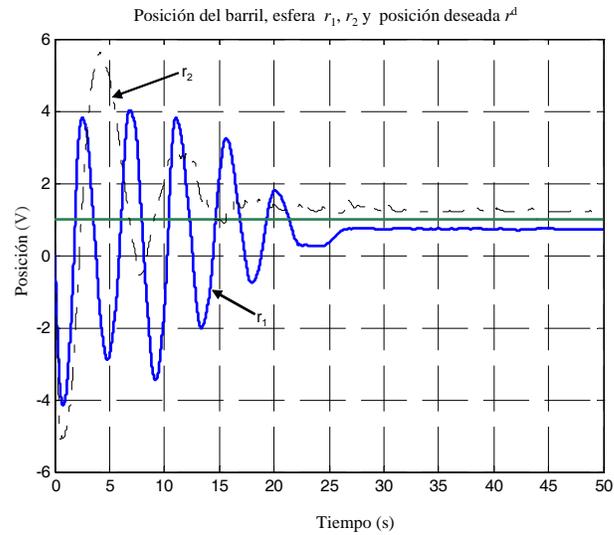


Figura 4.1: Salidas de los sistemas BE en tiempo real: r_1 , r_2 y salida deseada r^d . Sin sincronización

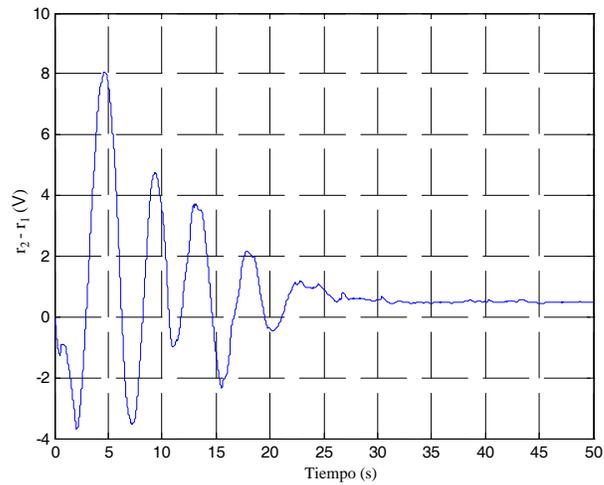


Figura 4.2: Diferencia entre la salida del sistema BE_2 y el sistema BE_1 : $r_2 - r_1$

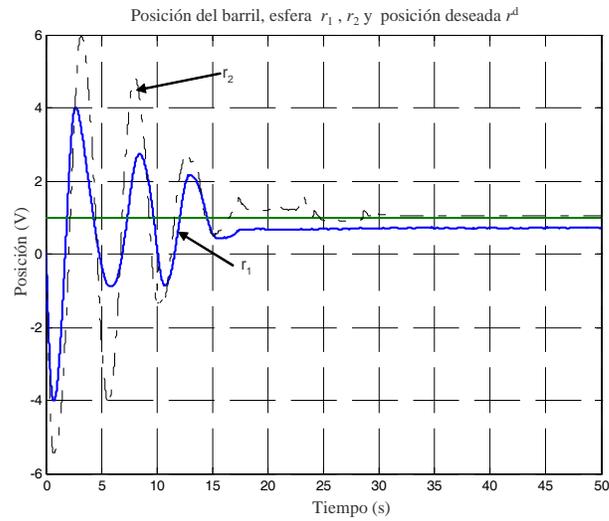


Figura 4.3: Salidas de los sistemas BE en tiempo real: r_1 , r_2 y salida deseada r^d . Controlador neuronal para sincronización, $\beta = 0,5$

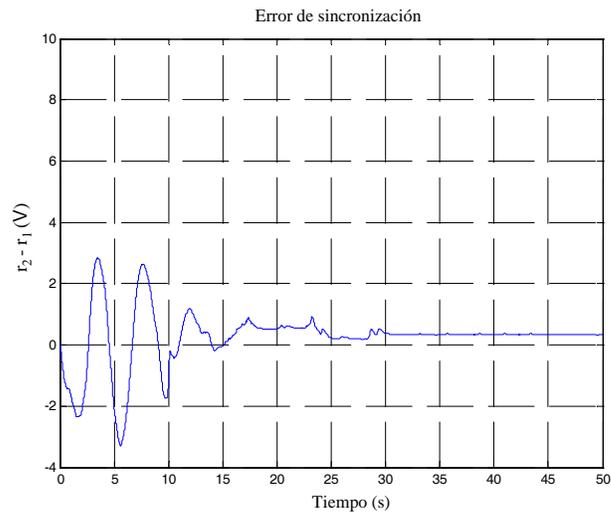


Figura 4.4: Error de sincronización: $r_2 - r_1$. Controlador neuronal para sincronización, $\beta = 0,5$

en el que cada sistema independientemente sigue a la señal de referencia y en el cual la diferencia entre las salidas de los dos sistemas $r_2 - r_1$ depende de las constantes de control para cada uno de los sistemas. En el caso de emplear un controlador para sincronización si la salida de un sistema r_i está lejos de la señal de referencia entonces el otro sistema trata de seguir a la salida de ese sistema, como consecuencia el error de sincronización se reduce y llega a un mínimo más rápido comparado con el caso de no utilizar un controlador para sincronización figuras (4.1), (4.2).

Cabe mencionar que los dos sistemas BE son diferentes (Apéndice A) y se tiene que el sistema BE₂ tiene una respuesta más rápida en el sentido de que para variaciones pequeñas en el ángulo de la barra, la esfera se desplaza con una velocidad mayor sobre la barra que en el caso del sistema BE₁ que tiene una respuesta más lenta y algunos problemas de transmisión mecánica del movimiento del motor hacia la barra sobre la cual se desliza el barril, además de los problemas inherentes debidos al ruido en las mediciones en ambos sistemas. La fuerza de fricción estática f_k también es un factor que influye en la respuesta transitoria y asintótica de los dos sistemas BE ya que si la fuerza aplicada sobre la esfera o barril se encuentra dentro de los límites de la fuerza de fricción estática $[-f_{k\text{máx}}, f_{k\text{mín}}]$ la esfera o el barril se mantienen con una velocidad cero y no se mueven sobre la barra.

Capítulo 5

Conclusiones

- Se propone un controlador para la sincronización de la variable no actuada de dos sistemas barra esfera, para el caso de regulación, en el esquema de sincronización interna, es decir, los dos sistemas barra esfera tienen la misma jerarquía. Los sistemas barra esfera no necesariamente tienen que ser iguales.
- Se propone un controlador PD más un acoplamiento cruzado y compensación neuronal basada en redes neuronales de una capa y de dos capas para la sincronización de los dos sistemas barra esfera.
- Se analiza la estabilidad del sistema compuesto por los dos sistemas barra esfera y el error de sincronización, utilizando los modelos lineales y los modelos no lineales de los sistemas barra esfera, por medio de funciones de transferencia para el primer análisis y con el método de Lyapunov para el segundo análisis.
- Se proponen leyes de aprendizaje para el compensador neuronal de una capa y de dos capas que garantizan que los pesos permanecen acotados.
- Se implementa el controlador para la sincronización de dos prototipos de sistemas barra esfera: un sistema barra esfera y un sistema barra barril del laboratorio de estudios experimentales del Departamento de Control Automático para comprobar los resultados teóricos obtenidos, observando que el error de sincronización se reduce considerablemente.

5.1. Perspectivas de trabajo futuro

- Investigar la sincronización de la variable no actuada de otros sistemas mecánicos subactuados ya sea para el caso de regulación o de seguimiento de trayectorias.
- Utilizar un controlador neurodifuso para la sincronización de sistemas mecánicos subactuados.
- Aplicar el enfoque de acoplamiento cruzado y el uso de redes neuronales para la sincronización de robots manipuladores subactuados.
- Emplear redes neuronales para reducir el error de sincronización por medio de un controlador externo o compensador externo, sin la necesidad de tener acceso al controlador instalado en fabrica de robots manipuladores, para la sincronización considerando el caso de tolerancia a fallas.

Apéndice A

Sistemas barra-esfera

Los dos sistemas empleados en la aplicación en tiempo real del controlador para sincronización se muestran en la figuras (A.1) y (A.2). El primer sistema BE_1 figura (A.1) es un sistema barra barril (Balance Control Work Bench) [5] y el segundo sistema BE_2 figura (A.2) es un sistema barra esfera (Quanser) [13], [37]. Los dos sistemas barra esfera tienen un funcionamiento similar. El sistema barra esfera consta de dos vigas paralelas de metal unidas en el extremo izquierdo por un pivote fijo y en el extremo derecho (visto de frente) unidos con una barra metálica la cual se encuentra unida al motor de corriente directa, por lo tanto la viga puede modificar su ángulo. La esfera se desplaza por el riel formado por las vigas paralelas metálicas que en conjunto forman un potenciómetro variable que nos permite conocer la posición de la esfera sobre la barra, para la medición del ángulo de la barra el cual está directamente relacionado con el ángulo del motor, el sistema utiliza un potenciómetro [13], [37]. El sistema barra barril tiene un funcionamiento similar al sistema barra esfera la diferencia radica en que el eje de rotación de la barra está en el centro de está, la transmisión de movimiento del motor hacia la barra sobre la cual se desliza un barril es por medio de un cordón, la medición de la posición del barril es similar a la medición de la posición de la esfera en el sistema barra esfera, la medición del ángulo del motor se realiza por medio de un encoder. Los modelos matemáticos de estos sistemas barra esfera se definieron previamente en el Capítulo 2.1.

Los datos generados por la posición de los motores, de la esfera y el barril se transmiten a la tarjeta de adquisición de datos a través de sus canales de entrada, lo cual

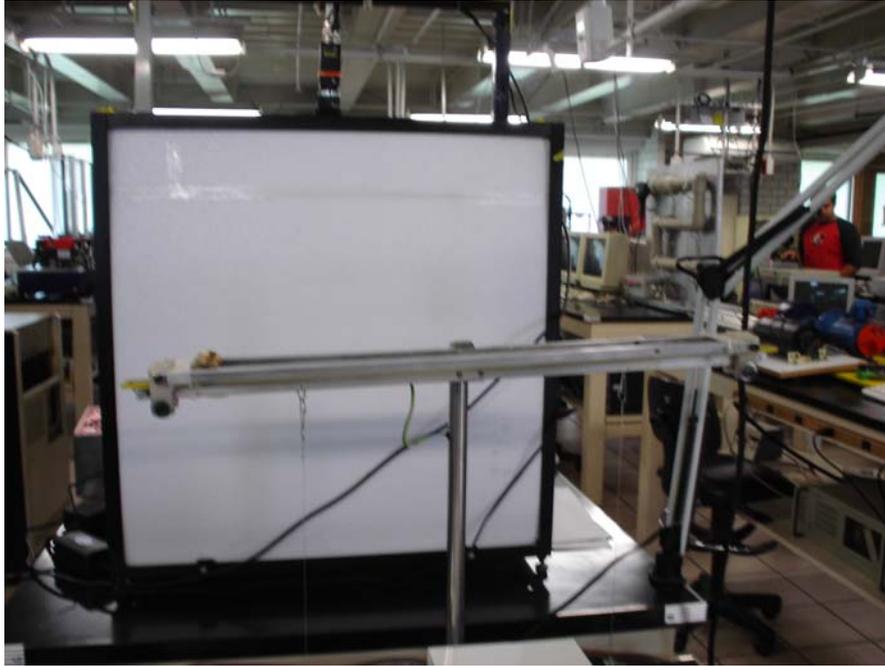


Figura A.1: Prototipo de laboratorio *Balance Control Work Bench*: Sistema barra barril

permite diseñar una ley de control en base a estas mediciones de tal forma que se pueda controlar la posición de la esfera y el barril en alguna posición deseada. Los prototipos barra esfera y barra barril se encuentran en el laboratorio de estudios experimentales del departamento de Control Automático, donde se encuentran debidamente instalados y conectados.

A.1. Tarjeta de adquisición de datos A/D-D/A (Analógico/Digital - Digital/Analógico)

La tarjeta es compatible con el software RT-CON en tiempo real, la tarjeta contiene multiplexores de entrada analógicos conectadas a 16 canales de entrada analógicos, el rango de voltajes es bipolar ± 10 [41], [42].

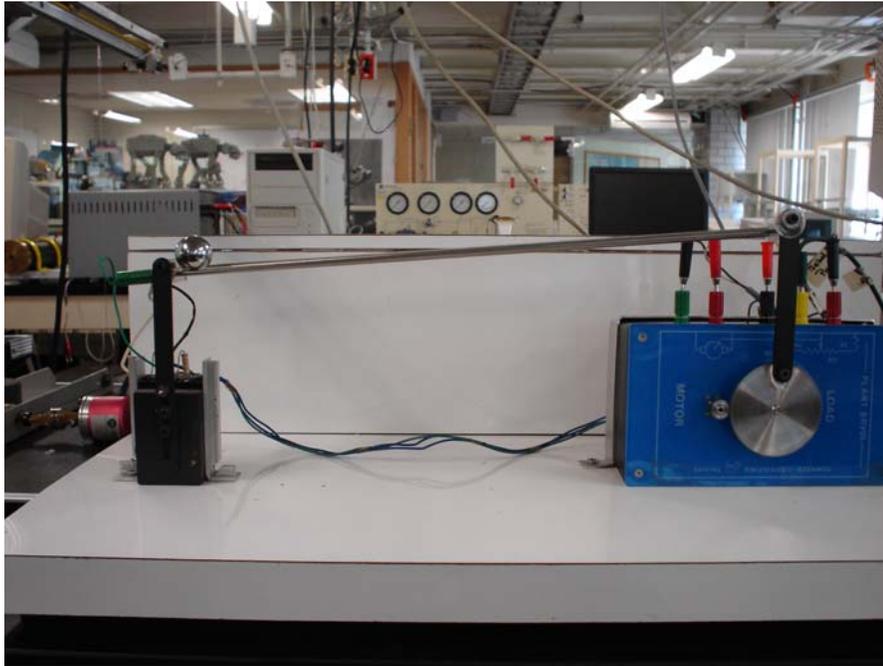


Figura A.2: Prototipo de laboratorio *Quanser*: Sistema barra esfera

A.2. *Software*

Para poder desarrollar los proyectos y ejecutar programas en tiempo real es necesario el siguiente software instalado en una computadora:

- MATLAB versión 5x o 6 con Simulink para desarrollar proyectos y monitorear procesos de la librería RTW DLL.

- *Real Time-Workshop* (RTW) y *Real Time Connection* (RT-CON) Professional para generar el código y que se pueda comunicar con el programa ejecutable que se encuentre en uso

- Dispositivos controladores que permitan la comunicación con la tarjeta de adquisición de datos de I/O RT-CON.

- Una variedad de dispositivos controladores profesionales las cuáles incluyen el controlador para el PCL-812 y la tarjeta RT-DACx multi-propósito de I/O.

- Compilador Watcom C/C++, versión 10,6, 11,0 o MS Visual C++ que puede ser utilizado para compilar el código generado.

- RT-CON versión para MATLAB 6.1 con el protocolo de comunicación TCP/IP.

A.2.1. *Real Time Connection (RT-CON)*

El software *Real Time Connection* (RT-CON) de arquitectura abierta está relacionado con el RTW, este software extiende las características del RTW para la implementación automática de modelos en simulink en tiempo real, este tipo de solución es de bajo costo pues permite utilizar solo una computadora para desarrollar este tipo de plataforma, el RT-CON fue diseñado para el control y monitoreo en tiempo real bajo ambiente *Windows*, una de las principales características de este software es que permite asegurar el tiempo en que son leídos los datos de un proceso externo o transmisión de datos a un hardware externo y nunca perder los datos.

Para el software RT-CON Professional la frecuencia de muestreo es de $1ms$ a $32,768s$ [41]. La frecuencia mínima de muestreo depende también de la velocidad de ejecución de la PC, la cual varía de acuerdo al tipo del procesador y la frecuencia del reloj, del modelo de I/O de la tarjeta y el convertidor de la tarjeta RT-DAC utilizado en implementaciones rápidas en tiempo real, de la ejecución en tiempo real del código del modelo el cuál se puede incrementar sí el modelo es complejo y del número de señales almacenadas en el buffer de adquisición de datos.

A.2.2. *Real Time Workshop (RTW)*

Con el *Real Time Workshop* RTW se puede generar rápidamente código para sistemas en tiempo discreto, tiempo continuo y sistemas híbridos, RTW construye programas que pueden ayudar a la velocidad en las simulaciones, provee protección de propiedad intelectual y corre en una amplia variedad de prototipos de tiempo real, al ejecutar un modelo simulink en modo externo trabaja como un monitor de las señales además de proveer una sintonización de parámetros. RTW acelera el ciclo de desarrollo produciendo resultados de alta calidad en un tiempo relativamente corto.

El *Real Time Workshop* (RTW) provee un medio de desarrollo en tiempo real, una ruta directa del diseño del sistema a la implementación en hardware, se pueden reducir los ciclos de desarrollo y reducir los costos con el RTW al probar las iteraciones de diseño con el hardware en tiempo real. El RTW soporta la ejecución de modelos de

sistemas dinámicos en hardware al convertir automáticamente los modelos en código y proveer soporte al depurar los modelos base, esto proporciona una aceleración en las simulaciones, prototipos rápidos y soluciones sencillas. En resumen el RTW traduce los bloques de simulink a código C para poder ser ejecutados, el compilador C genera el ejecutable para correrlo en tiempo real.

Diseño del *software* con RTW

El ciclo típico de un producto utilizando las herramientas de MathWorks, inicia con un modelo en simulink seguido de un análisis de la simulación en Matlab. Durante el proceso de simulación se utilizan las características de simulación rápida del RTW, para aumentar la velocidad de las simulaciones, después de que los resultados de las simulaciones son satisfactorias, se utiliza el RTW junto con la tarjeta prototipo tal como la tarjeta xPC, el prototipo de la tarjeta es conectada con el sistema físico, se prueba y se observa el sistema utilizando el modelo en simulink como la interfaz con la tarjeta física, si la simulación funciona de manera adecuada se utiliza el RTW para transformar este modelo en código C, se hace un proceso extensible y se descarga el procedimiento creando un ejecutable del modelo en la tarjeta, finalmente se utiliza el modelo externo en el cuál se puede monitorear y sintonizar los parámetros en tiempo real con el modelo ejecutándose en el medio ambiente de la tarjeta [29].

A.2.3. *Real Time Windows Target (RTWT)*

El *Real Time Windows Target* (RTWT) es utilizado para crear sistemas de control en tiempo real, este software requiere de algunos productos como Matlab que es la interfaz entre la línea de comandos y el RTWT. Simulink es el medio ambiente donde se modela y controla el sistema físico utilizando diagramas a bloques, *Real Time Workshop* (RTW) convierte bloques de simulink y el código del diagrama de flujo en código C y un compilador de C, que convierte el código C del RTW en un código ejecutable. El RTWT es un sistema en una tarjeta donde el huésped y el sistema maestro se encuentran en la misma computadora.

El RTWT es una solución para computadora de prototipos y pruebas de sistemas en tiempo real. Algunas de sus características es que presenta un kernel en tiempo real, una aplicación en tiempo real, adquisición y análisis de señales y sintonización de

parámetros, después de crear un modelo y una simulación en simulink en modo normal, se puede generar el código ejecutable con el RTW y el compilador de C, entonces se puede correr la aplicación en tiempo real con simulink en modo externo, la integración entre el modo externo de simulink y el RTWT permite utilizar el modelo de simulink como una interfaz gráfica de usuario para visualizar las señales y sintonizar parámetros. Se pueden adquirir las señales y datos generados por el modelo del sistema mediante la simulación y guardarlos en algún archivo [44].

Apéndice B

Prueba de que las matrices M , B son definidas positivas en los teoremas 2.1, 3.1 y 3.2

De teoría de matrices se tiene que sea P una matriz simétrica, P es definida positiva si y solamente si todos sus valores propios son positivos lo cual es cierto si y solamente si todos los menores principales de P son positivos [15].

Condición B.1 *Las matrices M_i , B_i del teorema 2.1, 3.1, 3.2 son definidas positivas*

Demostración. De la ecuación (2.26), $M_i(x)$ está dada por

$$M_i(x) = \begin{bmatrix} k_{1i} + m_i r_i^2 & -k_{2i} a_{3i} & 0 \\ -k_{2i} a_{3i} & k_{4i} + 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz $M_i(x)$ es simétrica, los menores principales de $M_i(x)$ son:

$$\det(m_1) = \det(k_{1i} + m_i r_i^2) = k_{1i} + m_i r_i^2 > 0. \quad \text{Dado que } k_{1i} > 0, m_i > 0.$$

$$\det(m_2) = \det \begin{bmatrix} k_1 + m r^2 & -k_2 a_3 \\ -k_2 a_3 & k_4 + 1 \end{bmatrix} = (k_1 + m r^2)(k_4 + 1) - k_2^2 a_3^2$$

58 Prueba de que las matrices M , B son definidas positivas en los teoremas 2.1, 3.1 y 3.2

$$\det(m_3) = \det \begin{bmatrix} k_{1i} + m_i r_i^2 & -k_{2i} a_{3i} & 0 \\ -k_{2i} a_{3i} & k_{4i} + 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = (k_{1i} + m_i r_i^2) k_{4i} - k_{2i}^2 a_{3i}^2$$

Si se cumple la condición $k_{1i} k_{4i} > k_{2i}^2 a_{3i}^2$ se obtiene que $\det(m_2) > 0$ y $\det(m_3) > 0$, así se tiene que los menores principales de $M_i(x)$ son positivos \Rightarrow la matriz $M_i(x)$ es definida positiva [15]. De la ecuación (2.26) B_i está dada por

$$B_i = \begin{bmatrix} k_{2i} a_{4i} & -k_{2i} a_{1i} & -k_{2i} a_{6i} \\ -k_{2i} a_{1i} & 2 & -1 \\ -k_{2i} a_{6i} & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz B_i es simétrica, los menores principales de B_i son:

$$\det(m_1) = \det(k_{2i} a_{4i}) = k_{2i} a_{4i} > 0. \quad \text{Dado que } k_{2i} > 0, a_{4i} > 0.$$

$$\det(m_2) = \det \begin{bmatrix} k_{2i} a_{4i} & -k_{2i} a_{1i} \\ -k_{2i} a_{1i} & 2 \end{bmatrix} = 2k_{2i} a_{4i} - k_{2i}^2 a_{1i}^2$$

Si se satisface la condición $a_{4i} > k_{2i} a_{1i}^2$, de la ecuación anterior resulta que $\det(m_2) > 0$.

$$\det(m_3) = \det \begin{bmatrix} k_{2i} a_{4i} & -k_{2i} a_{1i} & -k_{2i} a_{6i} \\ -k_{2i} a_{1i} & 2 & -1 \\ -k_{2i} a_{6i} & -1 & 1 \end{bmatrix} = k_{2i} a_{4i} - k_{2i}^2 a_{1i}^2 - 2k_{2i}^2 a_{6i}^2 - 2k_{2i}^2 a_{1i} a_{6i}$$

Si se cumple la siguiente desigualdad $a_{4i} > a_{1i}^2 k_{2i} + 2a_{6i}^2 k_{2i} + 2k_{2i} a_{1i} a_{6i}$ tenemos que $\det(m_3) > 0$. Por lo tanto los menores principales de B_i son positivos \Rightarrow la matriz B_i es definida positiva [15]. ■

Bibliografía

- [1] A.Farinelli, L.Iocchi, D.Nardi, “Multirobot Systems: A classification focused on coordination”, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics—Part b: Cybernetics*, vol. 34, No. 5, 2015-2018, 2004
- [2] A.Ishiguro, T. Furuhashi, S. Okuma, “A neural compensator for uncertainties of robotics manipulators, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*”, vol. 39, No. 6, 565-569, 1992
- [3] A. M. Bloch, D.E. Chang, N. E. Leonard, and J. E. Marsden, “Controlled Lagrangians and the stabilization of mechanical systems II: Potential shaping”, *IEEE Trans. Aut. Contr.*, vol 46, No. 10, 1556-1 571, 2001
- [4] A.Rodriguez-Angeles, H.Nijmeijer, “Mutual synchronization of robots via estimated state feedback: A Cooperative Approach”, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 12, No. 4, 542-554, 2004
- [5] A.R. Carvallo, E. Gortcheva, R.Garrido, Control visual de un sistema barra-barril, CINVESTAV-IPN, México 1998
- [6] C.Y. Chen, L.Q. Liu, C.C. cheng, G. Chiu, “Fuzzy controller design for synchronous motion in a dual-cilinder electro-hidraulic system”, *Control Engineering Practice*, pp.1-16, 2007
- [7] D.Sun,J.K.Mills, “Adaptive synchronized control for coordination of multirobot assembly tasks”, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 18, No. 4, 498-510, 2002

- [8] E.D.Sontag and Y.Wang, “On characterization of the input-to-state stability property”, *System and Control Letters*, Vol.24, 351-359, 1995
- [9] E. Lefeber, J. Tchori, H. Nijmeijer, “Observer based kinematic tracking controllers for unicycle mobile robots”, *Proceedings of the 2001 IEEE International conference on robotics and automation*, pp. 2084-2089
- [10] E. Wu, J Hwang, and J. Chladek, “Fault tolerant joint development for the space shuttle remote manipulator system: Analysis and experiment”, *in Proc. 4th Int. Symp. Robot. Manufact.*, pp. 505–510, 1992
- [11] F.L. Lewis, K. Liu,A. Yesildirek, “Neural network robot controller with guaranteed tracking performance”, *IEEE Trans. Neural Networks*, Vol.6, No.3, 703-715, 1995
- [12] F.L. Lewis, K. Liu,A. Yesildirek, “Multilayer neural-net robot controller with guaranteed tracking performance”, *IEEE Trans. Neural Networks*, Vol.7, No.2, 388-398, 1996
- [13] F.Ortiz, W.Yu, “Modelado y control PD-difuso para el sistema barra esfera en tiempo real”, CINVESTAV-IPN, México 2004
- [14] F. Ortiz, W. Yu, “Stablility analysis of PD regulation for ball and beam system”, *Proc. IEEE Conf. on Control Applications, Toronto*, August 2005
- [15] F.R. Gantmacher, *Theory of matrices*, Chelsea Publ. Bronx, N.Y., 1959
- [16] G.Cybenko, “Approximation by superposition of sigmoidal activation function”, *Math.Control, Sig Syst*, Vol.2, 303-314, 1989
- [17] George W. Younkin, *Industrial servo control systems fundamentals and applications*, Edit. Marcel Dekker Inc. 2003. ISBN 0-8247-0836-9.
- [18] H. C. Lee, G.J. Leon, “A neuro controller for synchronization of two motion axes”, *Int. J. Intell, Syst.*, vol. 13, pp. 571-586, 1998
- [19] H.J.C. Huijberts, H. Nijmeijer R.M.A. Willems, “Regulation and controlled synchronization for complex dinamical systems”, *Int. J. of Robust and Nonlinear Control*, 363-377, 2000

- [20] H.Nijmeijer, I.M.Y. Mareels, “An observer looks at synchronization”, *IEEE Trans. Circuits and Systems*, vol. 44, pp. 882-890, 1997
- [21] A.Rodriguez, H. Nijmeijer, “Synchronization of mechanical systems, World Scientific Series on Nonlinear Science, 2003
- [22] I.Blekhman, A. Fradkov, H.Nijmeijer “On self-synchronization and controlled synchronization”, *Syst. Control Lett.* Vol. 31, pp. 299-305, 1997
- [23] I. Blekman, P. Landa, M. Rosenblum “Synchronization and chaotization in interacting dynamical systems”, *ASME Applied Mechanical Review*, vol. 48, pp.733-752, 1995
- [24] J.A. Heredia,W.Yu, A.S. Poznyak, “Control neuronal para un robot manipulador con compensación de dinámicas con modeladas”, CINVESTAV-IPN, México 1999
- [25] J.Hauser, S.Sastry, P. Kokotovic, “Nonlinear control via approximate input-output linearization: The ball and beam example”, *IEEE Trans. Automat. Contr*, vol. 37, pp. 392-398, 1992
- [26] Jose Ramón Hilera Gonzáles, *Redes neuronales Artificiales*.
- [27] J. Wang, J. Huang, “Neural network enhanced output regulation in nonlinear systems”, *Automatica*, Vol. 37, 1189-1200, 2001
- [28] K.Ogata, “Ingeniería de control moderna, Prentice Hall, 2003
- [29] Manual de Real Time Workshop de Simulink ver. 5.0 del Matlab 6.x.
- [30] M. Takegaki and S. Arimoto, “A new feedback method for dynamic control of manipulators”, *ASME J. Dyn. Syst., Meas. Contr.*, vol. 103, pp. 119–125, 1981
- [31] M. Tsai, B.H. Shen, “Synchronization control of parallel dual inverted pendulums driven by linear servomotors”, *IET Control Theory Appl.* Vol 1 No. 1, 2007
- [32] K.S. Narendra, A.M. Annaswamy, “A new adaptive law for robust adaptation without persistent excitation”, *IEEE Trans. Automat. Contr*, vol. AC-32, pp. 134-145, 1987

- [33] L.F. Yang, W.H. Chang, “Synchronization of twin-gyro precession under cross-coupled adaptive feedforward control”, *J. Guidance, Control and Dynamics*, vol. 19, pp. 534-539, 1996
- [34] L.X.Wang, “Stable and optimal fuzzy control of linear systems”, *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, Vol.6, No.1, 137 -143, 1998
- [35] M.Tomizuka, J.S. Hu, T.C.Chui, “Synchronization of two motion control axes under adaptive feedforward control”, *ASME J. Dynam Syst. Meas. Control*, vol. 114, pp. 196-203, 1992
- [36] P.H.Eaton, D.V.Prokhorov, D.C. Wunsch II, “Neurocontroller alternatives for “fuzzy” ball-and-beam systems with nonuniform nonlinear friction”, *IEEE Trans. Neural Networks*, Vol.11, No.2, 423-435, 2000
- [37] Ball and beam-experiment and solution, Quanser Consulting, 1991
- [38] R. M. Hirschorn, “Incremental sliding mode control of the ball and beam”, *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol.47, No.10, 1696-1700, 2002
- [39] R.M. Sanner, J. Jacques, E. Slotine, “Gaussian networks for direct adaptive control”, *IEEE Trans. Neural Networks*, Vol.3, No.6, 837-864, 1992
- [40] R.M. Sanner, J. Jacques, E. Slotine, “Stable adaptive control and recursive identification using radial gaussian networks”, *Proc. 1992 Automatic Control Conf. Chicago, IL*, June 1992
- [41] Manual del Real Time Connection Professional, Guia de referencia Ver. 4.2. Intelligent Technology for Control Ltd. Kraków 2002
- [42] Manual de Usuario RT-DAC4/PCI Multi I/O Board XILIN version, Kraków 2002
- [43] R. Ortega, M.W. Spong, F. Gómez-Estern, G. Blankenstein, “Stabilization of a class of underactuated mechanical systems via interconnection and damping assignment”, *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol.47, No.8, 1218 -1233, 2002
- [44] Manual del Real Time Windows Target para usarlo con RTW, Modelación, simulación e implementación. Guía de usuario Ver 2.2, the Mathworks.1999-2004

- [45] S. Haykin, *Neural Networks, a comprehensive foundation*, Prentice Hall, 1999
- [46] S.K. Tso, Y.H. Fung, N.L. Lin, “Analysis and real-time implementation of a radial-basis-function neural-network compensator for high-performance robot manipulators”, *Mechatronics*, vol. 10, 265-287, 2000
- [47] S.Nair, N.Ehrich, L.Moreau, “Coordinated control of networked mechanical systems with Unstable Dynamics”, *IEEE Conference on Decision and Control*, pp 550-555, 2003
- [48] S.S. Ge, C.C. Hang, L.C. Woon, “Adaptive neural network control of robot manipulators in task space”, *Transactions on Industrial Electronics*, vol. 44, No. 6, 746-752, 1992
- [49] S.S. Ge, T.H. Lee, C.J. Harris, “Adaptive neural network control of robot manipulators”, World Scientific, 1998
- [50] S.S. Ge, C.C. Hang, T.H. Lee, T. Zhang, “Stable adaptive neural network control”, Kluwer Academic, Publishers, 2002
- [51] T. Ozaki, T. Suzuki, T. Furuhashi, S. Okuma, Y. Uchikawa, “Trajectory control of robotic manipulators using neural networks”, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 38, No. 3, 195-202, 1991
- [52] T. Shi, J. S Dai, “Dynamic and coupling actuation of elastic underactuated manipulators”, *Journal of Robotic Systems*, Vol 20, No. 3 pp.135-146, 2003
- [53] W. Wang, J.Yi, D. Zhao, D. Liu, “Design of stable sliding-mode controller for a class of second-order underactuated systems”, *IEE Proc. Control Theory Appl.*, Vol 151, No.6, pp. 683-690, 2004
- [54] Y.C.Chu, J.Huang, “A neural-network method for the nonlinear servomechanism problem”, *IEEE Trans. Neural Networks*, Vol.10, No.6, 1412-1423, 1999
- [55] Y-H. Liu, Y.Xu, “Cooperation Control of multiple manipulators with passive joints”, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol 15, No 2, pp. 258-267, 1999

- [56] Y. Li S. Qiang, X. Zhuang, O. Kaynak, “Robust and adaptive backstepping control for nonlinear system using RBF neural networks”, *IEEE Trans. on Neural networks*, vol. 15, pp. 693-701, 2004
- [57] Y. Zhang, J. Wang, “Recurrent neural networks for nonlinear output regulation”, *Automatica*, Vol. 37, pp. 1161-1173, 2001
- [58] Z. S. Yu, T.C. Chen, “Robust neural network controller design for a biaxial servo system”, *IEEE Conference on Cybernetics and Intelligent Systems*, pp. 735-740, 2004