CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

DEPARTAMENTO DE CONTROL AUTOMÁTICO

ESTABILIDAD INTERNA DE SISTEMAS CONMUTADOS CONTROLADOS POR TÉCNICAS DE CONTROL IMPLÍCITO

TESIS QUE PRESENTA:

Ing. Nohemi Alvarez Jarquin

PARA OBTENER EL GRADO DE:

Maestra en Ciencias

EN LA ESPECIALIDAD DE:

Control Automático

Director de tesis:

Dr. Moisés Bonilla Estrada

Mexico, D.F. *Abril 2011*

A Dios

por ser el motor que hace girar mi vida

Agradecimientos

A mis padres por todo su apoyo, por sus sabios consejos, por su cariño y comprensión. Agradezco a mis hermanos Mary, Pablo, Dany, Ceci, Vero, Elizabeth, Ramón, Jacob, Miriam, Isaac por que me han brindando su amor y amistad. A josé Luis E. por todo su amor y apoyo incondicional en todo momento.

A mi asesor el Dr. Moisés Bonilla Estrada por su paciencia, por confiar en mi, por compartir el conocimiento y por toda la ayuda brindada en el desarrollo de esta tesis, pero no sólo agradezco por eso, sino porque me enseñó a ser una mejor persona, GRACIAS.

A mis maestros, personal y compañeros del DCA.

Agradezco a los sinodales: Dr. Rogelio Lozano Leal, Dr. Basilio del Muro Cuellar, Dr. Juan Carlos Martínez García y Dr. Vadim Azhmyakov por la revisión de esta tesis.

Y por último agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por la beca que me permitió iniciar y concluir mis estudios de maestría.

Indice

Introducción

En este trabajo de tesis se trabaja con las llamadas descripciones implícitas (conocidas también como descripciones generalizadas o descriptoras ó singulares), $\sum(E,A,B,C)$:

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= Ax(t)+Bu(t) \\ y &= Cx(t) \end{aligned} \tag{0.1}$$

las cuales fueron introducidas por Rosenbrock [21, Ros70] como una extensión de las descripciones clásicas estrictamente propias:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax+Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{0.2}$$

Con estas descripciones implícitas se pueden describir una amplia gama de comportamientos externos. En 1991 Bonilla y Malabre muestran el uso de descripciones con mayor numero de ecuaciones que de variables de estado, también es posible describir los sistemas de estructura interna variable. De esta manera, estas descripciones poseen un grado de libertad interno que se puede utilizar, por ejemplo, para tener en cuenta de forma implícita una variación de estructura.

En efecto las *descripciones implícitas rectangulares* pueden ser utilizadas para modelar una clase muy amplia de sistemas lineales, incluyendo aquellos sistemas con interruptores internos. Para estos sistemas, las condiciones necesarias y suficientes (expresado en un sistema implícito global) garantizan la existencia de una ley de control que proporciona un comportamiento único en la salida, independientemente de las variaciones en la estructura interna.

En [7, BoMa08] se muestra que la teoría de *sistemas implícitos lineales invariantes en el tiempo* puede ser utilizada eficientemente para modelar y controlar una cierta clase de *sistemas conmutados autonomos variantes en el tiempo con conmutaciones internas*. Basada en los subespacios (E,A,B) invariantes contenidos en el $\ker C$, se propone una ley de control proporcional y derivativa que hace inobservable la variación de estructura. Para el sistema en lazo cerrado, únicamente se pudieron encontrar condiciones necesarias de estabilidad. El objetivo de este trabajo de tesis es encontrar condiciones suficientes de estabilidad para un sistema conmutado autónomo, representado a través de sistemas implícitos, controlado mediante una retroalimentación de estado proporcional y derivativa.

En la primera parte se muestra como modelar y controlar a una clase de sistemas conmutados autónomos, mediante la teoría de los sistemas implícitos lineales. En el capítulo 1 se abordan algunos conceptos básicos sobre sistemas conmutados y el tipo particular de *sistema conmutado autónomo dependiente del tiempo* considerado en este trabajo. Mediante un ejemplo ilustrativo se muestran algunas propiedades estructurales importantes. En el capítulo 2 se muestra como la teoría de sistemas implícitos lineales invariantes en el tiempo puede utilizarse eficazmente para modelar y controlar una cierta clase de sistemas autónomos dependientes del tiempo. En el capítulo 3 se propone una ley de control proporcional derivativa la cual hace inobservable la variación de estructura interna del sistema en lazo cerrado. Se obtienen condiciones necesarias de estabilidad.

En la segunda parte, se muestra como encontrar una función de Lyapunov común para garantizar la estabilidad del sistema conmutado en lazo cerrado; esto se hace mediante el ejemplo académico de la primera parte. Para ello, primero, en el capítulo 4 se estudia la estabilidad de los sistemas conmutados y en este se dan condiciones necesarias y suficientes que garantizan la estabilidad. En el capítulo 5, mediante el ejemplo ilustrativo, se encuentran condiciones suficientes para la existencia de una función de Lyapunov cuadrática común, garantizando estabilidad del sistema en lazo cerrado visto en el capítulo 3.

Posteriormente, en la tercera parte se extienden los resultados de la segunda parte al caso de los sistema escalera. En el capítulo 6 se introducen los sistemas escalera y se aplica una ley de control proporcional derivativa a un sistema escalera con factores irreducibles de primer orden, y se obtienen condiciones necesarias de estabilidad en lazo cerrado. En el capítulo 7 se encuentran condiciones suficientes para la existencia de una función de Lyapunov cuadrática común, garantizando estabilidad del sistema escalera en lazo cerrado.

Finalmente en la cuarta parte, se concluye.

Parte I

Sistemas conmutados: Representaciones y control

Capítulo 1

Sistemas conmutados, autónomos, variables en el tiempo

1.1 Introducción

En este capítulo se abordan algunos conceptos básicos como la clasificación de sistemas conmutados, de entre los cuales destacan los sistemas conmutados dependientes del estado, dependientes del tiempo, autónomos y controlables. El tipo particular de *sistema conmutado autónomo dependiente del tiempo* considerado, se adapta bien a la teoría implícita de los sistemas lineales. Se muestra un ejemplo y algunas propiedades estructurales importantes.

1.2 Clasificación de sistemas conmutados

Los sistemas conmutados se pueden clasificar en [16, Lib03]:

- Dependiente del estado *v.s.* dependiente del tiempo;
- Autónomo (No controlable) *v.s.* controlable.

Por supuesto, se pueden tener combinaciones de varios tipos de conmutación.

1.2.1 Conmutación dependiente del estado

Se supone que el espacio de estado continuo, $\mathbb{R}^n$, es particionado en un número finito o infinito de *regiones de operación* por medio de una familia de *superficies de conmutación*. En cada una de estas regiones, un sistema dinámico continuo en el tiempo (descrito por ecuaciones diferenciales con o sin control) es dado. Siempre que la trayectoria del sistema pasa por una superficie de conmutación, el estado continuo cambia instantáneamente a un nuevo valor, especificado por un mapa de restablecimiento. En el caso más simple, se trata de un mapa cuyo dominio es la unión de las superficies de conmutación y cuyo rango es todo el espacio de estado, posiblemente excluyendo las superficies de conmutación. En resumen, el sistema es especificado por:

- La familia de superficies de conmutación y las regiones de operación resultantes.
- La familia de subsistemas continuos en el tiempo, uno para cada región de operación.
- El mapa de restablecimiento.

En la figura 1.1 se muestran a las superficies de conmutación por medio de curvas gruesas, las curvas delgadas con flechas denotan las porciones continuas de la trayectoria y las lineas punteadas simbolizan los saltos.

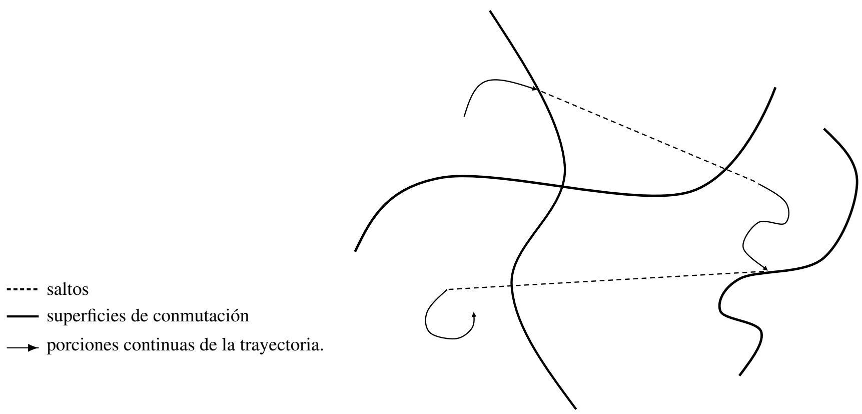

Figura 1.1 Conmutación dependiente del estado

1.2.2 Conmutación dependiente del tiempo

Se supone que se tiene una familia de funciones dadas, $\{f_\theta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : \ \theta \in \mathscr{I}\}$, donde $\mathscr{I}$ es algún conjunto de índices[1].

Esto da lugar a una familia de sistemas descritos por las representaciones de estado:

$$\dot{x} = f_\theta, \qquad \theta \in \mathscr{I} \tag{1.1}$$

Las funciones f_θ son suficientemente regulares (al menos localmente Lipschitz). El caso más sencillo es cuando se tiene una familia de sistemas lineales:

$$f_\theta = A_\theta x, \qquad A_\theta \in \mathbb{R}^{n\times n}, \ \theta \in \mathscr{I} \tag{1.2}$$

y la cardinalidad del conjunto de indices, $\mathscr{I}$, es finito, *e.g.* $\mathscr{I} = \{1, 2, \ldots, m\}$.

Para definir un sistema conmutado generado por la familia anterior, se necesita el concepto de *señal de conmutación*. Se trata de una función constante a pedazos $\sigma : [0, \infty) \to \mathscr{I}$. Tal función tiene un numero finito de

[1] Tipícamente $\mathscr{I}$ es un subconjunto de vectores de cardinalidad finita.

discontinuidades −a las que se llaman tiempos de conmutación− en cada intervalo de tiempo limitado y tiene un valor constante entre dos tiempos consecutivos de conmutación. El papel de σ es especificar cada instante del tiempo t. Asumiremos más concretamente que σ es continua por la derecha: $\sigma(t) = lim_{\tau \to t^+} \sigma(t)$ para cada $\tau \geq 0$. Un ejemplo de cada señal de conmutación para el caso, $\mathscr{I} = \{1,2\}$, es descrita en la figura 1.2.

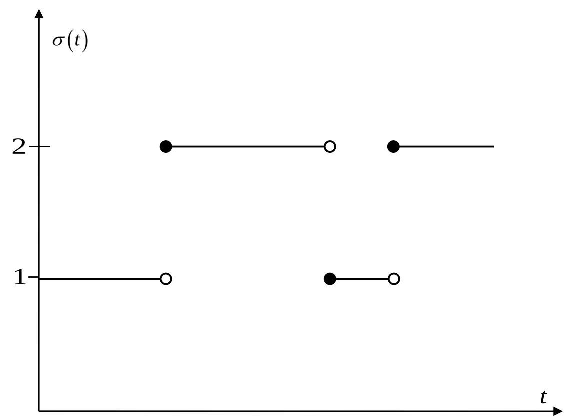

Figura 1.2 Señal de conmutación

Por lo tanto, un sistema con conmutación dependiente del tiempo, puede ser descrito por la siguiente ecuación:

$$\dot{x}(t) = f_{\sigma(t)}(x(t)). \tag{1.3}$$

Un caso particular es un *sistema conmutado lineal*,

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t), \tag{1.4}$$

que se presenta cuando todos los subsistemas individuales son lineales, como en (1.2). Para simplificar la notación a menudo se omiten los argumentos del tiempo y se escribe

$$\dot{x} = f_\sigma(x) \tag{1.5}$$

y

$$\dot{x} = A_\sigma x \tag{1.6}$$

respectivamente.

1.2.3 Conmutación autónoma

Por conmutación autónoma se refiere a una situación en la que no se tiene control directo sobre el mecanismo de cambio que desencadenan los eventos discretos. Esta categoría incluye sistemas conmutados dependientes del estado en el que la ubicación de las superficies de conmutación son predeterminadas, así como los sistemas conmutados dependientes del tiempo en los que la regla que define la conmutación es desconocida (o fue ignorada en la etapa del modelado). Por ejemplo, cambios bruscos en la dinámica del sistema pueden ser causados por factores imprevisibles o fallas de los componentes.

1.2.4 Conmutación controlada

En muchas situaciones la conmutación es en realidad impuesta por el diseñador con el fin de lograr un comportamiento deseado del sistema. En donde se tiene un control directo sobre el mecanismo de conmutación (que puede ser dependiente del estado o dependiente del tiempo) y puede ser modificado conforme el sistema evoluciona.

1.3 Una clase de estructura de sistemas conmutados

En esta sección se adopta la definición que le da Willems [23, Wil83] a un sistema dinámico con un enfoque comportamental (vease también la referencia de la síntesis de Polderman y Willems [20, PoW98]).

Se considera un sistema Σ_{sw} donde el comportamiento $\mathfrak{B}_{sw}$, conmuta de una manera *autónoma y variable en el tiempo* [16, Lib03], entre un numero finito n de comportamientos, $\mathfrak{B}_{i,\theta}$, $\theta \in \mathscr{I}$, y estan hubicados en los subintervalos de tiempo $\mathcal{I}_i \in \left\{[T_{i-1}, T_i) \,|\, T_0 = 0, T_{i-1} < T_i, i \in \mathbb{Z}^{*+}\right\} \subset \mathbb{R}^+$, es decir:

$$\begin{cases} \Sigma_{sw} = \left(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{m+p}, \mathfrak{B}_{sw}\right); \\ \mathfrak{B}_{sw} = \cup_{i=1}^{\infty} \overline{\mathfrak{B}}_i \subset \mathscr{L}_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{m+p}); \\ \overline{\mathfrak{B}}_i \in \left\{\mathfrak{B}_{i,\theta} \,|\, i \in \mathbb{Z}^{*+}, \theta \in \mathscr{I}\right\}, \mathrm{card}(\mathscr{I}) = n; \end{cases} \tag{1.7}$$

$$\mathfrak{B}_{i,\theta} = \left\{ (u,y) \in \mathcal{C}^\infty\left(\mathcal{I}_i, \mathbb{R}^{m+p}\right) \,\middle|\, \exists\, x \in \mathcal{C}^\infty\left(\mathcal{I}_i, \mathbb{R}^n\right), \text{ tal que } \begin{bmatrix} -B & (\mathrm{d/dt} - A_\theta) & 0 \\ 0 & -C_\theta & \mathrm{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ x \\ y \end{bmatrix} = 0 \right\}, \tag{1.8}$$

donde la *representación de espacio de estados*, $\Sigma^{ree}(A_\theta, B, C_\theta)$, es la siguiente:

$$\begin{aligned} \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bar{x} &= A_\theta \bar{x} + Bu \\ y &= C_\theta \bar{x} \end{aligned} \tag{1.9}$$

Las señales u y y son las variables de entrada y salida, respectivamente. $B \in \mathbb{R}^{\bar{n}\times m}$ es una matriz inyectiva y las matrices A_θ y C_θ son definidas de la siguiente forma:

$$A_\theta = \overline{A}_0 + \overline{A}_1 \overline{D}(\theta) \text{ and } C_\theta = \overline{C}_0 + \overline{C}_1 \overline{D}(\theta), \tag{1.10}$$

donde: $\overline{A}_0 \in \mathbb{R}^{\bar{n}\times\bar{n}}$ y $\overline{C}_0 \in \mathbb{R}^{p\times\bar{n}}$, $\overline{A}_1 \in \mathbb{R}^{\bar{n}\times q}$ es una matriz inyectiva, $\overline{C}_1 \in \mathbb{R}^{p\times q}$ y $\overline{D}(\theta) \in \mathbb{R}^{q\times\bar{n}}$ son matrices suprayectivas tal que $D(0) = 0$.

Cabe señalar que esta estructura de variación descrita por un conjunto finito de matrices A_θ es muy similar a la utilizada por Narendra y Balakrishnan [19, NaB94] y por Shorten y Narendra [22, ShN94]. Como se verá más adelante la adición del pequeño conjunto de matrices C_k permitirá jugar con sus espacios inobservables con la finalidad de tener en cuenta las variaciones de la estructura interna.

Con esta clase de *sistemas conmutados, autónomos, variables en el tiempo* es posible describir y controlar sistemas con estructura interna variable entre un conjunto común de sistemas lineales propios invariantes en el tiempo.

1.4 Ejemplo (parte 1)

Sea el sistema conmutado autónomo, variable en el tiempo con las siguientes matrices de comportamiento:

$$\begin{gathered} \overline{A}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \overline{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ \overline{C}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}, \overline{C}_1 = -1, \overline{D}(\theta) = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \end{bmatrix}, \\ \theta = (\alpha, \beta) \in \{(-1,-1), (-1,0), (-1,-5), (1,1)\}, \end{gathered} \tag{1.11}$$

es decir, (ver figura 1.1)

$$\begin{gathered} A_\theta = \begin{bmatrix} \alpha & (1+\beta) \\ (1+\alpha) & \beta \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C_\theta = \begin{bmatrix} -\alpha & -\beta \end{bmatrix}, \\ (\alpha, \beta) \in \big\{(-1,-1), (-1,0), (-1,-5), (1,1)\big\} \end{gathered} \tag{1.12}$$

Ahora se pondrán en evidencia algunas propiedades estructurales importantes para cada par de valores (α, β), dados:

1. **Función de transferencia.**

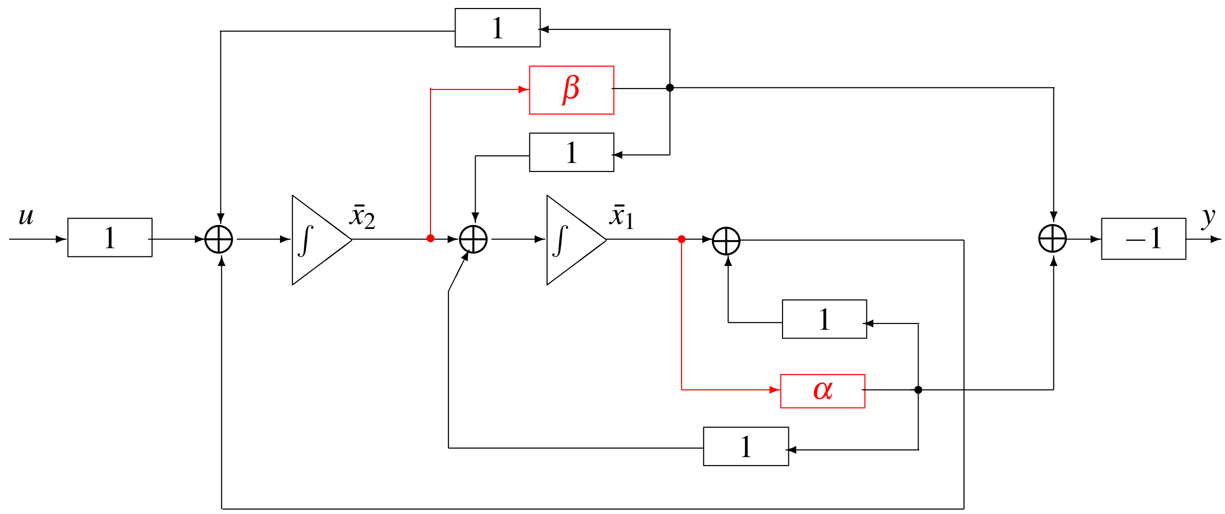

Figura 1.3 Esquema a bloques del sistema representado por (1.9) y (1.12)

$$F_\theta(s) = C_\theta(sI - A_\theta)^{-1}B = \frac{-(\beta s + \alpha)}{s^2 - (\alpha+\beta)s - (1+\alpha+\beta)} \tag{1.13}$$

2. **Espectro.** El polinomio característico es:

$$\pi_\theta(s) = det(sI - A_\theta) = (s+1)(s - (1+\alpha+\beta)) \tag{1.14}$$

Donde: $\Lambda(A_\theta) = \{-1, (1+\alpha+\beta)\}$.

3. **Controlabilidad.**

$$\mathcal{C}_\theta = \left[\begin{array}{c|c} 0 & (1+\beta) \\ 1 & \beta \end{array}\right] \tag{1.15}$$

como $\det \mathcal{C}_\theta = -1(1+\beta)$, se tiene entonces un modo no controlable $\overline{\mathcal{C}}$ cuando $\beta = -1$

4. **Observabilidad.** La matriz de observabilidad es:

$$\mathcal{O}_\theta = -\left[\begin{array}{c|c} \alpha & \beta \\ (\beta+\alpha\beta+\alpha^2) & (\alpha+\alpha\beta+\beta^2) \end{array}\right] \tag{1.16}$$

como $\det \mathcal{O}_\theta = -(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$, se tiene entonces un modo inobservable $\overline{\mathcal{O}}$ cuando $\beta = \alpha$ ó cuando $\beta = -\alpha$.

5. **Ceros invariantes.** La matriz sistema es:

$$P_\theta(s) = \left[\begin{array}{cc|c} (s-\alpha) & -(1+\beta) & 0 \\ -(1+\alpha) & (s-\beta) & 1 \\ \hline \alpha & \beta & 0 \end{array}\right] \tag{1.17}$$

como $\det P_\theta(s) = -(\beta s + \alpha)$, se tiene entonces un cero invariante $z = -\alpha/\beta$, cuando $\beta \neq 0$.

6. **Ganancia y grado relativo.** Los dos primeros parámetros de Markov son:

$$H_\theta = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \mathcal{O}_\theta B = \begin{bmatrix} -\beta \\ (-\alpha - \alpha\beta - \beta^2) \end{bmatrix} \tag{1.18}$$

Entonces, la ganancia K y el grado relativo dr es:

$$\begin{aligned} K &= -\beta \ \text{ y } \ dr = 1 \ \text{ donde } \ \beta \neq 0 \\ K &= -\alpha \ \text{ y } \ dr = 2 \ \text{ donde } \ \beta = 0 \end{aligned} \tag{1.19}$$

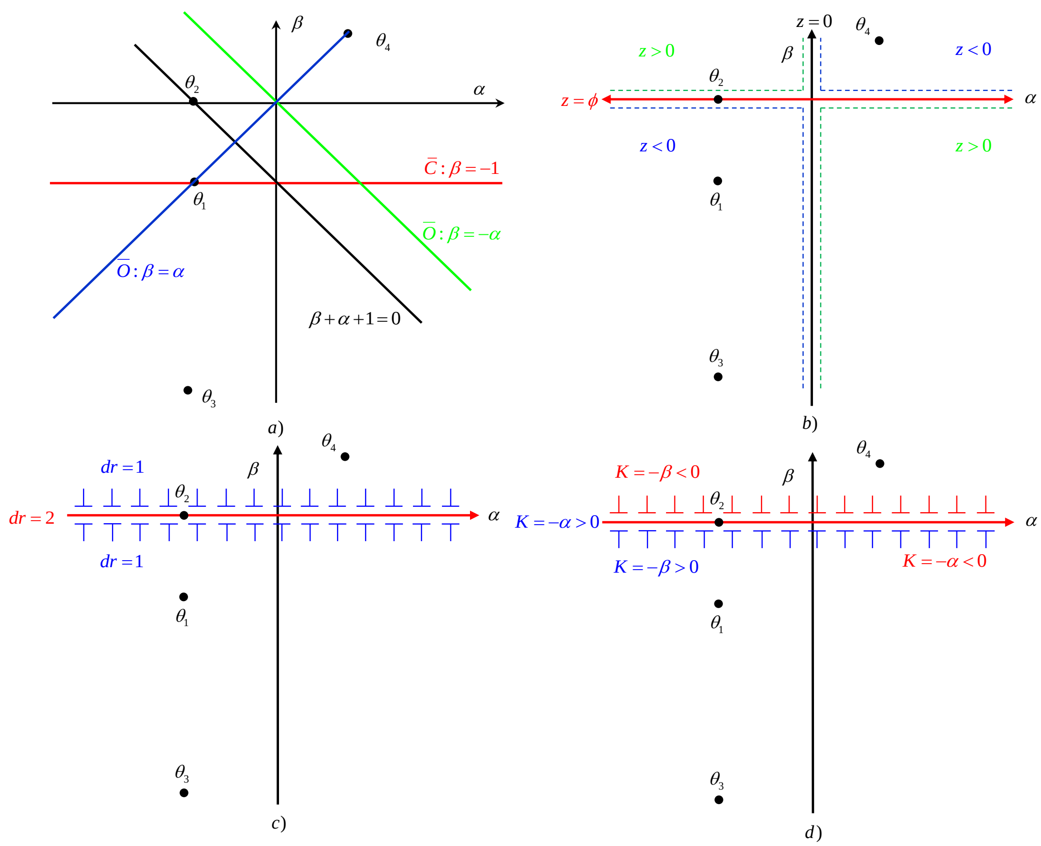

Figura 1.4 Propiedades estructurales del sistema representado por (1.9) y (1.12) $\theta \in \{(-1,-1),(-1,0),(-1,-5),(1,1)\}$, $k \in \{1,2,3,4\}$. (ver (1.13)–(1.19). (a) Modos no controlables $\overline{\mathcal{C}}$, y modos no observables $\overline{\mathcal{O}}$; regiones de estabilidad interna. (b) Existencia y polaridad de los ceros invariantes, z. (c) Grado relativo, dr. (d) Ganancia, K.

Después de estas consideraciones, se tienen 5 clases diferentes de ecuaciones que describen el comportamiento, es decir:

1. Para $\beta = \alpha$ es: $\beta u(t) + \left(\frac{d}{dt} - (1+2\beta)\right) y(t) = 0$,

2. Para $\beta = -\alpha$ es: $\beta u(t) + \left(\frac{d}{dt}+1\right)y(t) = 0$,
3. Para $\beta = -1$ y $\alpha \neq -1$ es: $(\frac{d}{dt}-\alpha)\left(\beta u(t) + (\frac{d}{dt}+1)y(t)\right) = 0$,
4. Para $\beta = 0$ y $\alpha \neq 0$ es: $\alpha u(t) + (\frac{d}{dt}+1)\left(\frac{d}{dt}-(1+\alpha)\right)y(t) = 0$,
5. Para $\beta \notin \{\alpha, -\alpha, -1, 0\}$ es: $(\beta\frac{d}{dt}+\alpha)u(t) + (\frac{d}{dt}+1)\left(\frac{d}{dt}-(1+\alpha+\beta)\right)y(t) = 0$

Y por lo tanto, para las 4 posibles selecciones de θ, se tienen los siguientes comportamientos:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{B}_{i,k} = \left\{(u,y) \in \mathcal{C}^\infty\left(\mathcal{I}_i, \mathbb{R}^2\right) \,\middle|\, R_k(d/dt)\begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix} = 0\right\},\ k \in \{1,2,3,4\},\ \mathcal{I}_i = [\overline{T}_{i-1},\ \overline{T}_i), \\
&\hspace{25em} i \in \mathbb{Z}^+ \\
&R_1(d/dt) = \begin{bmatrix} -1 & (d/dt+1) \end{bmatrix},\ \text{para: } (\alpha,\beta) = (-1,-1) \\
&R_2(d/dt) = \begin{bmatrix} -1 & (d/dt+1)(d/dt) \end{bmatrix},\ \text{para: } (\alpha,\beta) = (-1,0) \\
&R_3(d/dt) = \begin{bmatrix} -(5d/dt+1) & (d/dt+1)(d/dt+5) \end{bmatrix},\ \text{para: } (\alpha,\beta) = (-1,-5) \\
&R_4(d/dt) = \begin{bmatrix} 1 & (d/dt-3) \end{bmatrix},\ \text{para: } (\alpha,\beta) = (1,1)
\end{aligned} \tag{1.20}$$

Se puede notar que la idea principal para modelar un sistema lineal cuya estructura interna es variable, por medio de una representación de estados, $\sum^{re}(A_\theta, B, C_\theta)$ es manejar cuidadosamente el subespacio no observable (ver figura 1.4).

1.5 Conclusión

En este capítulo se abordaron algunos conceptos básicos de la teoría de los sistemas conmutados y se dio el tipo particular de sistema conmutado a estudiar, en donde a través de un ejemplo ilustrativo se mostraron algunas propiedades estructurales importantes.

Capítulo 2

Representación implícita de sistemas conmutados

2.1 Introdución

En este capítulo se muestra como modelar los sistemas conmutados autónomos variables en el tiempo (1.8), que son representados por (1.9) y (1.10), utilizando la teoría de sistemas lineales implícitos rectangulares.

2.2 Sistemas implícitos

Las representaciones implícitas fueron introducidas por Rosenbrock [21, Ros70] como una generalización de sistemas lineales propios. Esta novedad consiste en la introducción del término Edx/dt en la ecuación de estado $dx/dt = Ax + Bu$; es decir, $Edx/dt = Ax + Bu$. Gracias a esta introducción ha sido posible considerar las acciones puramente diferenciales y las restricciones algebraicas, propias de la teoría de circuitos. Esta nueva clase de sistemas recibió varias denominaciones por sus particulares propiedades estructurales:

1) ***Sistemas generalizados o descriptores***

   Para el caso donde las transformaciones lineales E y A son cuadradas y $det(\lambda E - A)$ no es el polinomio cero, se dice que son sistemas *generalizados o descriptores*.

2) ***Sistema singulares***

   Para el caso donde las transformaciones lineales E y A son cuadradas y $det(\lambda E - A)$ puede ser el polinomio cero, se dice que son sistemas *singulares*.

3) ***Sistemas implícitos***

   Para el caso donde las transformaciones lineales E y A no son necesariamente cuadradas se dice que son sistemas *implícitos*.

Ver también el trabajo de síntesis de Lewis [15, Lew92]. En este capítulo se adoptaran las definiciones siguientes que conducen a diseñar formalmente los sistemas implícitos.

Definición 2.1. (Representación implícita) Una representación implícita $\sum^{imp}(E,A,B,C)$, son un *conjunto de ecuaciones diferenciales y algebraicas* que tienen la siguiente forma:

$$\begin{aligned} E\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x &= Ax+Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde $E : \mathscr{X}_d \to \underline{\mathscr{X}}_{eq}$, $A : \mathscr{X}_d \to \underline{\mathscr{X}}_{eq}$, $B : \mathscr{U} \to \underline{\mathscr{X}}_{eq}$, $C : \mathscr{X}_d \to \mathscr{Y}$, son transformaciones lineales. El modelo es válido para $t \geq 0$, es decir, las condiciones iniciales son consistentes, dicho de otra manera deben satisfacer (2.1), esto significa que no existen interruptores internos que introducen las condiciones iniciales y la única manera de tener las condiciones iniciales es a través de las acciones integrales. Los espacios de dimensión finita $\mathscr{X}_d$, $\underline{\mathscr{X}}_{eq}$, $\mathscr{U}$ y $\mathscr{Y}$ son los espacios de la variable de descripción, de ecuaciones, de la entrada y de la salida, respectivamente. En esta sección se supone que: $\ker B = \{0\}$, Im $\begin{bmatrix} E & A & B \end{bmatrix} = \underline{\mathscr{X}}_{eq}$ e Im $C = \mathscr{Y}$. Es natural añadir un término directo a la salida, es decir $y = Cx + Du$ (Ver por ejemplo [11, Kui92]). Pero dado que:

1. La acción de tal término directo puede tenerse en cuenta de una manera implícita, es decir, $\begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{d}{dt}x = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ -I \end{bmatrix} u$, $y = \begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} x$
2. El estudio de la expresión directa del término directo es engorrosa desde el punto de vista geométrico, por ello se trabajara con la consideración implícita de tales términos directos. Como en [8, BCP89], denotamos a *CEDA* como los *conjuntos de ecuaciones diferenciales y algebraicas* .

En caso de que haya funciones temporales $u(.)$ y $y(.)$ que satisfacen a los *CEDA* de (2.1), nos limitaremos a que han satisfecho $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+, \mathscr{U})$ y $x(.) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+, \mathscr{X})$.

Definición 2.2. (Representación implícita soluble [3, BoM90]) La representación implícita (2.1) es soluble, si para cada $u(.) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+, \mathscr{U})$, existe al menos una trayectoria $x(.) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+, \mathscr{X}_d)$ solución de los *CEDA* $[Edx/dt - A]x(t) = Bu(t)$, para todo $t \geq 0$.

Lema 2.1. (Existencia de solución de representaciones implícitas [14, Lew86], [12, Leb91] y [3, BoM90]) *La representación implícita (2.1) admite al menos una solución si y solamente si*

$$\text{rango } \begin{bmatrix} \lambda E - A & B \end{bmatrix} = \text{rango } \begin{bmatrix} \lambda E - A \end{bmatrix}, \textit{ para casi toda } \lambda \in \mathbb{C} \tag{2.2}$$

es decir,

$$\text{Im}\, B \subset \text{Im}\, (\lambda E - A), \textit{ para casi toda } \lambda \in \mathbb{C} \tag{2.3}$$

o,

$$\text{Im}\, B \subset (Ed/dt - A)\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+, \mathscr{X}_d) \tag{2.4}$$

Lema 2.2. (Existencia y unicidad de solución de representaciones implícitas) *La representación implícita (2.1) admite al menos una solución* $(u,y) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+, \mathscr{U} \times \mathscr{Y})$ *si y solamente si (2.3) se satisface. Además, la solución es única si y solamente si:*

$$\ker(\lambda E - A) \subset \ker C, \; para\ toda\, \lambda \in \mathbb{C} \tag{2.5}$$

De acuerdo a [11, Kui92] y [20, PoW98], adoptaremos las siguientes definiciónes:

Definición 2.3. (Sistema implícito) Cuando se tiene una representación implícita soluble, $\sum^{imp}(E,A,B,C)$, se dice que se tiene un sistema implícito, $\sum^{imp} = (\mathbb{R}^+, \mathscr{U} \times \mathscr{Y}, \mathfrak{B}_{imp})$, donde el comportamiento es:

$$\mathfrak{B}_{imp} = \Big\{ (u,y) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+, \mathscr{U} \times \mathscr{Y}) \,|\, \exists x \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+, \mathscr{X}_d)\ tal\ que \\ E\tfrac{dx}{dt} = Ax + Bu \quad \& \quad y = Cx \Big\} \tag{2.6}$$

Los dos siguientes conceptos permiten situar las *representaciones de estado* en las representaciones implícitas:

Definición 2.4. (Abánico $[\lambda E - A]$ regular [9, Gan77]) Un abánico $[\lambda E - A]$, con $\lambda \in \mathbb{C}$, se dice regular si es cuadrado y su determinante no es el polinomio cero. La representación implícita $\sum^{imp}(E,A,B,C)$ es regular si su abánico $[\lambda E - A]$ es regular.

Definición 2.5. (Representación implíta internamente propia [2, Ber82] y [1, Arm86]) La representación implícita, $\sum^{imp}(E,A,B,C)$, es internamente propia si su abánico $[\lambda E - A]$ es propio, es decir, si su abánico es regular y no tiene divisores elementales infinitos de orden más grande que uno. De lo contrario, la dinámica del sistema no incluye ninguna acción derivativa.

2.3 Forma normal de Kronecker

El poder de las representaciones implícitas, $\sum^{imp}(E,A,B,C)$, reside en su capacidad de modelar y analizar una amplia gama de fenomenos de la teoría de sistemas lineales: por ejemplo de sistemas propios, de sistemas no propios, de sistemas que incluyen restricciones algebraicas y de sistemas que son sometidos a variaciones en la estructura interna. En efecto, si uno mira la forma normal de Kronecker [9, Gan77] del abánico $[\lambda E - A]$, con $\lambda \in \mathbb{C}$ asociado a la representación implícita (2.1) nos damos cuenta que tiene 4 tipos diferentes de bloques:

1. Divisores elementales finitos (def), por ejemplo $\begin{bmatrix} (\lambda-\alpha) & 1 \\ 0 & (\lambda-\alpha) \end{bmatrix}$,
2. Divisores elementales infinitos (dei), por ejemplo $\begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,
3. Indices minimos por columnas (imc), por ejemplo $\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \end{bmatrix}$, y

4. Indices minimos por filas (imf), por ejemplo $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

El sistema asociado es descrito por:

$$\begin{bmatrix} \underbrace{\boxed{\mathrm{I}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - A_{1,1}}}_{def} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underbrace{\boxed{E_{2,2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - I}}_{dei} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underbrace{\boxed{E_{3,3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - A_{3,3}}}_{imc} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underbrace{\boxed{E_{4,4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - A_{4,4}}}_{imf} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_f \\ x_\infty \\ x_\ell \\ x_r \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} B_1^T & B_2^T & B_3^T & B_4^T \end{bmatrix}^T u$$

$$y = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_f^T & x_\infty^T & x_\ell^T & x_r^T \end{bmatrix}^T$$

1. $\mathscr{X}_d = \mathscr{X}_f \oplus \mathscr{X}_\infty \oplus \mathscr{X}_\ell \oplus \mathscr{X}_r$ et $\mathscr{Y} = \mathscr{Y}_f \oplus \mathscr{Y}_\infty \oplus \mathscr{Y}_\ell \oplus \mathscr{Y}_r$,
2. $E_{2,2}$ es nilpotente ($E_{2,2}^j \neq 0$ para $j \in \{0, \cdots, n_p - 1\}$ y $E_{2,2}^{n_p} = 0$),
3. Ker $E_{3,3}^T = \{0\}$ y Ker $E_{3,3} \cap$ Ker $A_{3,3} = \{0\}$, y
4. Ker $E_{4,4} = \{0\}$ y Ker $E_{4,4}^T \cap$ Ker $A_{4,4}^T = \{0\}$.

2.3.1 Divisores elementales finitos

Los divisores elementales finitos corresponden a las partes propias (las acciones integrales) del sistema. Bernhard [2, Ber82] caracterizó geométricamente los def. Encontraron que si λ es un cero finito del abánico $[\lambda E - A]$, existe un modo exponencial caracterizado por un vector $v \neq 0$ tal que $Av = \lambda Ev$. Esta parte de la representación esta asociada a bloques de tipo Jordan, que implica:

$$dx_f/dt = A_{1,1}x_f + B_1 u \quad \& \quad y_f = C_1 x_f$$

El comportamiento es así exponencial:

$$\begin{gathered} \mathfrak{B}_{exp} = \Big\{ (u, y_f) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathscr{U} \times \mathscr{Y}_f) \Big| \exists x_{f,0} \in \mathscr{X}_f, \\ y_f(t) = C_1 \Big(exp(A_{1,1}t)x_{f,0} + \int_0^t (A_{1,1}(t-\tau))B_1 u(\tau) d\tau \Big) \Big\} \end{gathered} \tag{2.7}$$

2.3.2 Divisores elementales infinitos

Los divisores elementales infinitos corresponden a partes no propias (las acciones derivativas) del sistema. Armentano [1, Arm86] caracterizó geométricamente los *dei*. Gantmacher [9, Gan77] muestra que si μ^{-1} es un cero infinito del abanico $[\mu^{-1}E-A]$, existe un modo polinomial caracterizado por un vector $x \neq 0$ tal que $0 = \mu A v = E v$. Cada parte de la representación esta asociada a bloques de tipo nilpotente, que implica:

$$E_{2,2}dx_\infty/dt = x_\infty + B_2 u \quad \& \quad y_\infty = C_2 x_\infty$$

El comportamiento del polinomio es:

$$\mathfrak{B}_{pol} = \left\{ (u, y_\infty) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+, \mathscr{U} \times \mathscr{Y}_\infty) \middle| y_\infty(t) = -C_2 \left(B_2 u(t) + \sum_{j=1}^{n_p-1} E_{2,2}^j B_2 d^j u(t)/dt^j \right) \right\} \tag{2.8}$$

2.3.3 Índices minimos por columna

Los índices minimos por columna corresponden a la existencia de un cierto grado de libertad (más incógnitas que ecuaciones). Armentano [1, Arm86] caracterizó geométricamente los *imc*. Cada parte de la representación está asociada a bloques donde las matrices $(E_{3,3}, A_{3,3}, C_3)$ son equivalentes a $\left(\begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \overline{A}_{3,3} & \widehat{A}_{3,3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \overline{C}_3 & \widehat{C}_3 \end{bmatrix} \right)$, con $\ker \widehat{A}_{3,3} = \{0\}$, que implica:

$$d\bar{x}_l/dt = \overline{A}_{3,3}\bar{x}_\ell + \widehat{A}_{3,3}\widehat{x}_\ell + B_3 u \quad \& \quad y_l = \overline{C}_3 \bar{x}_\ell + \widehat{C}_3 \widehat{x}_\ell$$

Esto significa que hay un término libre (un grado de libertad),

$$\tilde{x}_\ell = \varphi \overline{V} \bar{x}_\ell + (1-\varphi)\widehat{V}\hat{x}_\ell, \text{ con } \bar{x}_\ell \in \overline{\mathscr{X}}_\ell \text{ y } \hat{x}_\ell \in \widehat{\mathscr{X}_\ell},$$
$$\text{donde } \varphi \in [0\ 1] \text{ y } \overline{V} : \overline{\mathscr{X}}_\ell \to \mathscr{X}_\ell \text{ y } \widehat{V} : \widehat{\mathscr{X}_\ell} \to \mathscr{X}_\ell \text{ son inserciones.}$$

el grado de libertad, $\tilde{x}_\ell$, tiene la facultad de cambiar las trayectorias (u, y_ℓ) a voluntad. El comportamiento es así:

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_{libre} = \Bigg\{ & (u, y_\ell) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+, \mathscr{U} \times \mathscr{Y}_\ell) \Big| \ \exists\ \bar{x}_{\ell,0} \in \overline{\mathscr{X}}_\ell,\ \varphi \in [0,\ 1],\ \text{y } \tilde{x}_\ell \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+, \mathscr{X}_\ell) \text{ tal que:} \\ & (1-\varphi)\left(\bar{x}_\ell(t) - \exp\left(\overline{A}_{3,3}t\right)\bar{x}_{\ell,0} - \int_0^t \exp\left(\overline{A}_{3,3}(t-\tau)\right) B_3 u(\tau) \mathrm{d}\tau \right) = \int_0^t \exp\left(\overline{A}_{3,3}(t-\tau)\right) \widehat{A}_{3,3}\widehat{P}\tilde{x}_\ell(\tau)\mathrm{d}\tau, \\ & \varphi\left(\hat{x}_\ell(t) + \left(\widehat{A}_{3,3}^T\widehat{A}_{3,3}\right)^{-1}\widehat{A}_{3,3}^T \varphi B_3 u(t) \right) = \left(\widehat{A}_{3,3}^T\widehat{A}_{3,3}\right)^{-1}\widehat{A}_{3,3}^T \left((\overline{P}\mathrm{d}/\mathrm{dt} - \overline{A}_{3,3}^T\overline{P})\tilde{x}_\ell(t) \right), \text{y} \\ & y_\ell(t) = \overline{C}_3\left((1-\varphi)\bar{x}_\ell(t) + \overline{P}\tilde{x}_\ell(t) \right) + \widehat{C}_3\left(\varphi\hat{x}_\ell(t) + \widehat{P}\tilde{x}_\ell(t) \right) \Bigg\} \end{aligned} \tag{2.9}$$

Donde $\overline{P} : \mathscr{X}_{col} \to \overline{\mathscr{X}}_\ell$ y $\widehat{P} : \mathscr{X}_{col} \to \widehat{\mathscr{X}_\ell}$ son las proyecciones naturales tales que: $\overline{PV} = I$, $\widehat{PV} = I$, Ker $\overline{P} = \widehat{\mathscr{X}_\ell}$, y Ker $\widehat{P} = \overline{\mathscr{X}}_\ell$.

2.3.4 Índices mínimos por filas

Los índices mínimos por columna corresponden a las limitaciones en la señales externas (por ejemplo las entradas admisibles deben satisfacer las ecuaciones diferenciales especificadas con anterioridad). Armentano [1, Arm86] caracterizó geométricamente los imf. Esta parte de la representación está asociada a bloques donde sus matrices $(E_{4,4}, A_{4,4}, B_4)$ son equivalentes a $\left(\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \overline{A}_{4,4} \\ \widehat{A}_{4,4} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \overline{B}_4 \\ \widehat{B}_4 \end{bmatrix}\right)$ con $\ker \widehat{A}_{4,4}^T = \{0\}$, que implica:

$$d\bar{x}_r/dt = \overline{A}_{4,4}\bar{x}_r + \overline{B}_4 \quad y \quad 0 = \widehat{A}_{4,4}\bar{x}_r + \widehat{B}_4 u$$

Es decir,

$$\left[\widehat{A}_{4,4}^T\left(\widehat{A}_{4,4}\widehat{A}_{4,4}^T\right)^{-1}\widehat{B}_4 \mathrm{d/dt} + \left(\overline{B}_4 - \overline{A}_{4,4}\widehat{A}_{4,4}^T\left(\widehat{A}_{4,4}\widehat{A}_{4,4}^T\right)^{-1}\widehat{B}_4\right)\right]u = 0$$

Para más detalles de este tema vease [2, Ber82], [17, Loi85], [1, Arm86], [18, Mal89], [10, KaK89] y [13, LeL94]. Cabe señalar que:

1. La parte de la representación que es siempre soluble se encuentra en $\{def\} \cup \{dei\} \cup \{imc\}$.
2. La parte regular se encuentra en $\{def\} \cup \{dei\}$.
3. La parte estrictamente propia se encuentra en $\{def\}$.
4. Con los $\{imc\}$, podemos modelar las posibles variaciones de la estructura interna de un sistema. Estos cambios de la estructura interna nos conducen necesariamente a variaciones entre sistemas propios. Por ejemplo si el sistema es descrito por la siguiente representación:[1]

$$\left[\begin{array}{c|cc} \boxed{1}_{dei} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\boxed{\left[\mathrm{d/dt}\ 1\right]}_{imc}} \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_\infty \\ \hline x_\ell \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ \hline 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 2 & -1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_\infty \\ \hline x_\ell \end{bmatrix}$$

a. Si el grado de libertad es dado por $(\varphi = 1)$

$$\tilde{x}_\ell = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \bar{x}_\ell + 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \hat{x}_\ell = - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_\infty ,$$

entonces se tiene:

$$\bar{x}_\ell = -x_\infty = u \quad y \quad \hat{x}_\ell = -du/dt + u$$

es decir:

$$y(t) = du(t)/dt$$

[1] $\overline{A}_{3,3} = 0$, $\widehat{A}_{3,3} = -1$, $B_3 = 1$, $\overline{C}_3 = 2$, $\widehat{C}_3 = -1$, $\overline{V} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\widehat{V} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\overline{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ y $\widehat{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$

b. Si el grado de libertad es dado por $(\varphi = 1/2)$

$$\tilde{x}_\ell = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\bar{x}_\ell + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\hat{x}_\ell = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}x_\ell,$$

entonces se tiene:

$$\bar{x}_\ell = \hat{x}_\ell,\ x_\infty = -u\ y\ d\bar{x}_\ell/dt + \bar{x}_\ell = u,$$

es decir:

$$y(t) = e^{-t}\bar{x}_{\ell,0} + \int_0^t e^{-(t-\tau)}u(\tau)d\tau - u(t)$$

2.4 Propiedad interna de representaciones implícitas

En la sección 2.3 ponemos en evidencia que en los *imc* se encuentra el mayor grado de libertad. Cabe señalar que cada parte de la representación implícita satisface $\ker E_{3,3}^T = 0$, que implica:

$$Im\, A_{3,3} + Im\, B_3 \subset Im\, E_{3,3}$$

Definición 2.6. (Representación implícita rectangular) Una *representación implícita rectangular*, $\sum^{ir}(E,A,B,C)$, es una representación implícita (2.1) donde sus matrices E y A tienen más columnas que filas. Además se satisface que:

$$Im\, A + Im\, B \subset ImE \tag{2.10}$$

Cabe mencionar que la condición (2.10) implica que $\sum^{ir}(E,A,B,C)$ tiene solución. Por otro lado, el propósito de utilizar las representaciones implícitas rectangulares es para describir los sistemas lineales con una estructura interna variable, y no sólo el modelo sino también es indispensable señalar las propiedades estructurales que permiten controlarlos. Para ello habra que considerar las variaciones de estructura que satisfacen una ecuación lineal.

Definición 2.7. (Restricción algebraica) Una restricción algebraica es una representación implícita únicamente con ecuaciones algebraicas independientes de la variable de entrada, $\sum^{ralg}(0,D,0)$:

$$0 = Dx \tag{2.11}$$

donde: $D : \mathscr{X}_d \to \underline{\mathscr{X}}_{ralg}$ es una aplicación lineal y el espacio de dimensión finita, $\underline{\mathscr{X}}_{ralg}$, es el espacio de restricciones algebraicas.

Definición 2.8. (Representación implícita global) Si uno lleva la representación implicíta rectangular (2.1) a la restricción algebraica (2.11), que describe el grado de libertad, se obtiene la representación implícita global, $\Sigma^{ig}(\mathbb{E},\mathbb{A},\mathbb{B},C)$, siguiente:

$$\begin{gathered}\mathbb{E}\frac{d}{dt} = \mathbb{A}x + \mathbb{B}u \\ y = Cx \\ \mathbb{E} = \begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbb{A} = \begin{bmatrix} A \\ D \end{bmatrix}, \mathbb{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}\end{gathered} \tag{2.12}$$

El producto cartesiano, $\underline{\mathscr{X}}_g =: \underline{\mathscr{X}}_{eq} \times \underline{\mathscr{X}}_{ralg}$, es el espacio de ecuaciones globales. Se asume que:

$$\underline{\mathscr{X}}_g = Im\ E \oplus Im\ D \tag{2.13}$$

Las aplicaciones lineales de representaciones implícitas globales,[2] $\Sigma^{ig}(\mathbb{E},\mathbb{A},\mathbb{B})$, y rectangulares $\Sigma^{ir}(E,A,B)$ y las de restricciones algebraicas $\Sigma^{ralg}(0,D,0)$ son relacionadas con la siguiente forma (ver figura 2.1):

$$\begin{gathered}\underline{P}_{eq}\mathbb{E} = E,\ \underline{P}_{eq}\mathbb{A} = A,\ \underline{P}_{eq}\mathbb{B} = B, \\ \underline{P}_{ralg}\mathbb{E} = 0,\ \underline{P}_{ralg}\mathbb{A} = D,\ \underline{P}_{ralg}\mathbb{B} = 0,\end{gathered} \tag{2.14}$$

Donde:

$$\begin{gathered}\underline{P}_{eq} : \underline{\mathscr{X}}_g \to \underline{\mathscr{X}}_{eq},\ la\ proyeccion\ natural\ Im\ E\ paralelamente\ a\ Im\ D, \\ \underline{P}_{ralg} : \underline{\mathscr{X}}_g \to \mathscr{X}_{ralg},\ la\ proyeccion\ natural\ Im\ D\ paralelamente\ a\ Im\ E,\end{gathered} \tag{2.15}$$

$$\begin{tikzcd}
& \underline{\mathscr{X}}_{cal} = \mathrm{Im}\, D \\
\mathscr{X}_d \arrow[ur, "(0,D,0)"] \arrow[r, "(\mathbb{E},\mathbb{A},\mathbb{B})"] \arrow[dr, "(E,A,B)"'] & \underline{\mathscr{X}}_g =: \underline{\mathscr{X}}_{eq} \times \underline{\mathscr{X}}_{cal} \arrow[u, "\underline{P}_{cal}"'] \arrow[d, "\underline{P}_{eq}"'] \\
& \underline{\mathscr{X}}_{eq} = \mathrm{Im}\, E
\end{tikzcd}$$

Figura 2.1 Relación entre las transformaciones lineales de la *representación implícita global, $\Sigma^{ig}(\mathbb{E},\mathbb{A},\mathbb{B})$, de la representación implícita rectangular, $\Sigma^{ir}(E,A,B)$ y de la restricción algebraica $\Sigma^{ralg}(0,D,0)$.* $\underline{P}_{ralg}$ *y* $\underline{P}_{eq}$ son las proyecciones naturales.

Lema 2.3. (Representaciones implícita global internamente propia [5, BoM03]) *Sea la representación implícita global (2.12) tal que (2.10) y (2.13) se cumplen. Es entonces internamente propia si y solamente si:*

[2] Cuando uno está interesado en el comportamiento de la variable de descripción, x, la ecuación de salida, $y = Cx$, se omite y se escribe simplemente $\Sigma^{ig}(\mathbb{E},\mathbb{A},\mathbb{B})$ y $\Sigma^{ir}(E,A,B)$ en lugar de $\Sigma^{ig}(\mathbb{E},\mathbb{A},\mathbb{B},C)$ y $\Sigma^{ir}(E,A,B,C)$.

$$\ker D \oplus \ker E = \mathscr{X}_d \tag{2.16}$$

2.5 Localización de la representación implícita de estado resultante de una representación implícita global propia

Se tienen las siguientes dos definiciones:

Definición 2.9. (Representaciones externamente equivalentes [23, Wil83] y [20, PoW98]). Dos representaciones son llamadas externamente equivalentes si los conjuntos correspondientes de todas las trayectorias posibles de las variables externas, expresado en una partición entrada/salida (u,y) son las mismas.

Definición 2.10. (variable descriptora algebraicamente redundante) En la representación implícita (2.1). Una variable de descripción, $x_{dar} \in \mathscr{X}_d$, se llama algebraicamente redundante si ella es una combinación lineal algebraica de otras variables de descripción (para todo tiempo $t \geq 0$) y puede ser suprimida sin modificar el comportamiento externo de (2.1); es decir, el conjunto de todas las trayectorias posibles entrada-salida $(u,y) \in \mathfrak{B}_{imp}$, se mantiene sin cambios (ver [23, Wil83] y [20, PoW98]).

El resultado anterior marca la representación de estado resultante.

Lema 2.4. (Localización de la representación de estado resultante de una representación implícita global propia [BoM03]) *La representación implícita (2.12) global es satisfecha por (2.10), (2.13) y (2.16). La parte que es limitada a* $\ker D$ *en el dominio y a* $E\ker D$ *en el codominio, no contiene ninguna variable de descripción algebraicamente redundante. Por otra parte, la parte algebraicamente redundante es limitada a* $\ker E$ *en el dominio y a* $D\ker E$ *en el codominio. Ademas existen aplicaciones lineales unicas* $(\overline{E},\overline{A},\overline{B},\overline{C})$ *tales que:*

$$\mathbb{E}V = \underline{V}\overline{E},\ \mathbb{A}V = \underline{V}\overline{A},\ \mathbb{B} = \underline{V}\overline{B},\ y\ CV = \overline{C}, \tag{2.17}$$

donde:

$$V : \ker D \to \mathscr{X}_d\ y\ \underline{V} : Im\ E \to \underline{\mathscr{X}}_g\ son\ inseciones\ naturales, \tag{2.18}$$

Es decir, $(\widehat{E},\widehat{A},\widehat{B}) = (0,I,0)$ *son las únicas aplicaciones lineales que satisfacen:*

$$\underline{P}_{ralg}\mathbb{E} = P_{dar}\widehat{E},\ \underline{P}_{ralg}\mathbb{A} = P_{dar}\widehat{A},\ y\ \underline{P}_{ralg}\mathbb{B} = \widehat{B}, \tag{2.19}$$

$$\begin{array}{ll} P_{dar} : \mathscr{X}_d \to \ker E, & la\ proyección\ natural\ suryectiva\ \ker E\ paralelamente\ a\ \ker D \\ P_{cal} : \underline{\mathscr{X}}_g \to D\ker E, & la\ proyección\ natural\ suryectiva\ D\ker E\ paralelamente\ a\ E\ker D \end{array} \tag{2.20}$$

Finalmente (2.12) es externamente equivalente a la representación de estado, $\sum^{ve}(A_0,B_0,\overline{C})$*, siguiente:*

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt}\bar{x} &= A_0\bar{x} + B_0u, \\ y &= \overline{C}\bar{x}, \end{aligned} \tag{2.21}$$

donde:

$$
\begin{aligned}
A_0 = \overline{E}^{(-1)}\overline{A} \text{ y } B_0 = \overline{E}^{(-1)}\overline{B} \\
\overline{E} = \underline{P}_{eq}\mathbb{E}V = EV,\ \overline{A} = \underline{P}_{eq}\mathbb{A}V = AV,\ \overline{B} = \underline{P}_{eq}\mathbb{B} = B,\ \overline{C} = CV
\end{aligned}
\tag{2.22}
$$

Esto significa que para poner en evidencia a la representación de estado que es dada en la representación implícita global propia, $\sum^{ig}(\mathbb{E},\mathbb{A},\mathbb{B},C)$, se debe descomponer el espacio de variables de descripción como: $\mathscr{X}_d = \ker D \oplus \ker E$ y el espacio de ecuaciones globales como: $\underline{\mathscr{X}}_g = E\ker D \oplus D\ker E$ (ver figura 2.2).

2.6 Representaciones implícitas de sistemas conmutados, autonomos, variables en el tiempo

Despues del lema 2.4, el conjunto de representaciones de estado 2.3 y 2.4 puede tomar una *representación implicíta global*, que debe tener la forma siguiente (ver figura 2.2).

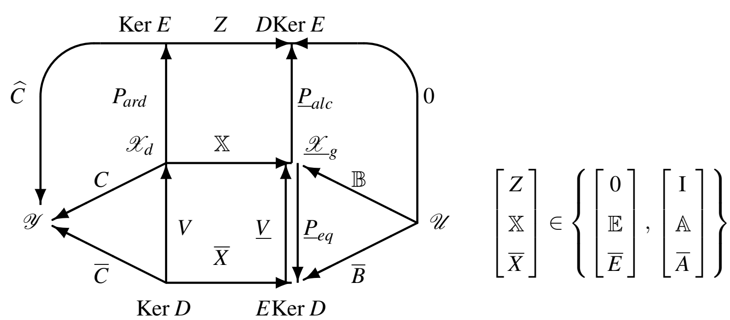

Figura 2.2 Diagrama conmutativo de la *representación implícita* (2.12) satisfaciendo (2.10), (2.13), y (2.16). $\mathscr{X}_d = \text{Ker}\, D \oplus \text{Ker}\, E$, $\underline{\mathscr{X}}_g =: \underline{\mathscr{X}}_{eq} \times \underline{\mathscr{X}}_{ralg}$, $\underline{\mathscr{X}}_{eq} = \text{Im}\, E = E\text{Ker}\, D$, $\underline{\mathscr{X}}_{ralg} = \text{Im}\, D = D\text{Ker}\, E$, y $\underline{P}_{eq}\underline{V} = \mathrm{I}$. Dado que: $\hat{x} \in \text{Ker}\, E$ se tiene que: $0 = \mathrm{I}\hat{x}$, la matriz $\widehat{C}$ puede ser cualquiera.

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \hat{x} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} (\overline{A}_0 + \overline{A}_1\overline{D}(\theta_k)) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ O \end{bmatrix} u \\
y &= \begin{bmatrix} (\overline{C}_0 + \overline{C}_1\overline{D}(\theta_k)) & -\overline{C}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \hat{x} \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{2.23}
$$

Para cada $k \in \{1,\ldots,n\}$. Para poner en evidencia la estructura fija en esta *representación implícita global*, multiplicamos por la izquierda al *CEAD* por $\begin{bmatrix} I & -\overline{A}_1 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ y definimos la variable de descripción $x = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \overline{D}(\theta_k) & I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \hat{x} \end{bmatrix}$, es decir, $\sum^{ig}(\mathbb{E},\mathbb{A}_k,\mathbb{B},C)$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbb{E}} \tfrac{d}{dt} = \underbrace{\begin{bmatrix} A \\ D_k \end{bmatrix}}_{\mathbb{A}_k} x + \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbb{B}} u \qquad (2.24)$$
$$y = Cx$$

donde las aplicaciones lineales $E : \mathscr{X}_d \to \underline{\mathscr{X}}_{eq}$, $A : \mathscr{X}_d \to \underline{\mathscr{X}}_{eq}$, $B : \mathscr{U} \to \underline{\mathscr{X}}_{eq}$, $D_k : \mathscr{X}_d \to \underline{\mathscr{X}}_{ralg}$, $C : \mathscr{X}_d \to \mathscr{Y}$, son iguales a:

$$E = \begin{bmatrix} I \; 0 \end{bmatrix}, \; A = \begin{bmatrix} \overline{A}_0 \; -\overline{A}_1 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} \overline{C}_0 \; -\overline{C}_1 \end{bmatrix}, \; D_k = \begin{bmatrix} \overline{D}(\theta_k) \; I \end{bmatrix}. \qquad (2.25)$$

Cabe señalar que:

1. La estructura fija de $\sum^{ig}(\mathbb{E}, \mathbb{A}_k, \mathbb{B}, C)$, que esta activa para un D_k particular, es descrita por la *representación implicíta rectangular*, $\sum^{ir}(E, A, B, C)$, siguiente:

$$E \tfrac{d}{dt} = Ax + Bu$$
$$y = Cx \qquad (2.26)$$

2. El grado de libertad se caracteriza por las restricciones algebraicas, $\sum^{ralg}(0, D_k, 0)$:

$$0 = D_k x \qquad (2.27)$$

3. $dim \underline{\mathscr{X}}_{eq} < dim \mathscr{X}_d$, existe un grado de libertad.
4. $Im\, A + Im\, B \subset Im\, E = \underline{\mathscr{X}}_{eq}$, la *representación implicíta rectangular* es soluble.
5. $Im\, D = \underline{\mathscr{X}}_{ralg}$ y $\underline{\mathscr{X}}_{eq} \times \underline{\mathscr{X}}_{ralg} \approx \mathscr{X}_d$ para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$, las *representaciones implicítas globales* tienen soluciones unicas para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$.
6. $\ker D_k \oplus \ker E = \mathscr{X}_d$ para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$, por lo tanto son *representaciones implicítas globales* propias.

2.7 Ejemplo (parte 2)

2.7.1 Representación implícita global

Sea el sistema autónomo, variable en el tiempo descrito por la ecuación de estado (1.9) cuyas matrices de comportamiento son (1.10) y (1.11). Este sistema es igualmente descrito por la representación implícita global $\sum^{ig}((\mathbb{E}, \mathbb{A}_k, \mathbb{B}, C))$ siguiente (ver la definición 2.8):

$$\begin{array}{rc} & \mathrm{Ker}\,E \\ \begin{array}{r} E\mathrm{Ker}\,D \\ \\ D\mathrm{Ker}\,E\end{array} & \left[\begin{array}{cc|c} 1&0&0\\0&1&0\\ \hline 0&0&0\end{array}\right]\end{array} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\begin{array}{c}\bar{x}\\ \hline \hat{x}\end{array}\right] = \begin{array}{c}\mathrm{Ker}\,D\\ \left[\begin{array}{cc|c}\alpha & (1+\beta) & 0\\ (1+\alpha) & \beta & 0\\ \hline 0&0&1\end{array}\right]\end{array} \left[\begin{array}{c}\bar{x}\\ \hline \hat{x}\end{array}\right] + \left[\begin{array}{c}0\\1\\ \hline 0\end{array}\right] u \tag{2.28}$$

$$y = \left[\begin{array}{cc|c} -\alpha & -\beta & 1\end{array}\right] \left[\begin{array}{c}\bar{x}\\ \hline \hat{x}\end{array}\right]$$

Cabe señalar que (*c.f* las definiciones 2.6, 2.7 y 2.9, los lemas 2.3 y 2.4):

1. Cuando $Im\ A + Im\ B \subset \mathrm{Im}\ \ E$, $\mathscr{X}_g = E\ker D \oplus D\ker E = \mathrm{Im}\ \ E \oplus \mathrm{Im}\, D$ y $\mathscr{X}_d = \ker D \oplus \ker E$, se trata de una representación implícita externamente propia.
2. La parte limitada a $\ker E$ en el dominio y a $D\ker E$ en el codominio es la parte algebraicamente redundante.
3. (2.28) es externamente equivalente a la representación de estado que es limitada a $\ker D$ en el dominio, y a $E\ker D$ en el codominio, donde sus matrices de comportamiento son las rodeadas por los rectangulos con lineas solidas. Por otra parte, esta parte es la mayor area del sistema sostenible.
4. La parte que está por encima de la linea del *CEAD* se trata de una representación implícita rectangular. Esta parte la engloba de una manera explícita, los cambios del comportamiento que son a causa de conmutaciones de los parámetros α y β.
5. La parte que está debajo de la linea del *CEAD* es una restricción algebraica. Esta parte la engloba los componentes de la variable de descripción que son siempre nulas.

2.8 Estructura fija de la representación implícita global

Con la finalidad de resaltar la estructura fija de (2.28), multiplicamos por la izquierda de *CEAD* por $\left[\begin{array}{cc|c} 1&0&-1\\0&1&-1\\ \hline 0&0&1\end{array}\right]$ y se define la variable de descripción $x = \left[\begin{array}{cc|c} 1&0&0\\0&1&0\\ \hline -\alpha&-\beta&1\end{array}\right] \left[\begin{array}{c}\bar{x}\\ \hline \hat{x}\end{array}\right]$. Haciendo esto, llegamos a la representación implícita global, $\sum^{ig}(\mathbb{E}, \mathbb{A}_k, \mathbb{B}, C)$ siguiente:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1\ 0\ 0 \\ 0\ 1\ 0 \\ \hline 0\ 0\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbb{E}} \frac{d}{dt}x = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ \hline \alpha & \beta & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbb{A}_k} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \hline 0 \end{bmatrix}}_{\mathbb{B}} u$$
$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 0\ 0\ 1 \end{bmatrix}}_{C} x \tag{2.29}$$

Por encima de la linea del *CEAD* de la representación implícita global (2.29) se encuentra la representación implícita rectangular, $\sum^{ir}(E,A,B,C)$ siguiente:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1\ 0\ 0 \\ 0\ 1\ 0 \end{bmatrix}}_{E} \frac{d}{dt}x = \underbrace{\begin{bmatrix} 0\ 1\ -1 \\ 1\ 0\ -1 \end{bmatrix}}_{A} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} u$$
$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 0\ 0\ 1 \end{bmatrix}}_{C} x \tag{2.30}$$

Por debajo de la linea del *CEAD* de la representación implícita global (2.29) se encuentra la restricción algebraica, $\sum^{ralg}(0,D,0)$ siguiente:

$$0 = \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha\ \beta\ 1 \end{bmatrix}}_{D_k} x \tag{2.31}$$

Forma normal de Kronecker

Representación implícita global: La forma normal de Kronecker del abánico $[\lambda\mathbb{E} - \mathbb{A}_k]$, asociada a (2.29) es la siguiente:

1. Si $\beta = -1$

$$G_{ig1}[\lambda\mathbb{E} - \mathbb{A}_k]D_{ig1} = \begin{bmatrix} \boxed{1}_{dei} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{(\lambda-\alpha)}_{def} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{(\lambda+1)}_{def} \end{bmatrix}$$
$$G_{ig1}\mathbb{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ CD_{ig1} = \begin{bmatrix} 1\ (1-\alpha)\ 1 \end{bmatrix} \tag{2.32}$$

Donde: $G_{ig1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ y $D_{ig1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & (1-\alpha) & 1 \end{bmatrix}$

2. Si $\beta \neq -1$ y $\alpha + \beta = -2$

$$G_{ig2}[\lambda \mathbb{E}-\mathbb{A}_k]D_{ig2}=\begin{bmatrix} \boxed{1}_{dei} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{(\lambda+1)}_{def} & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{(\lambda+1)}_{def} \end{bmatrix}$$
$$G_{ig2}\mathbb{B}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -(1+\beta) \end{bmatrix},\ CD_{ig2}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & \beta/(1+\beta) \end{bmatrix} \tag{2.33}$$

Donde: $G_{ig2}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ (1+\beta) & -(1+\beta) & 0 \end{bmatrix}$ y $D_{ig2}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/(1+\beta) \\ 1 & 2 & \beta/(1+\beta) \end{bmatrix}$

3. Si $\beta \neq -1$ y $\alpha+\beta \neq -2$

$$G_{ig3}[\lambda \mathbb{E}-\mathbb{A}_k]D_{ig3}=\begin{bmatrix} \boxed{1}_{dei} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{(\lambda-1-\alpha-\beta)}_{def} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{(\lambda+1)}_{def} \end{bmatrix}$$
$$G_{ig3}\mathbb{B}=\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1+\beta}{2+\alpha+\beta} \\ -(1+\beta) \end{bmatrix},\ CD_{ig3}=\begin{bmatrix} 1 & -(\alpha+\beta) & \left(\frac{\beta}{1+\beta}-\frac{\alpha+\beta}{2+\alpha+\beta}\right) \end{bmatrix} \tag{2.34}$$

Donde: $G_{ig3}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ \left(1-\frac{1+\beta}{2+\alpha+\beta}\right) & \frac{1+\beta}{2+\alpha+\beta} & 1 \\ (1+\beta) & -(1+\beta) & 0 \end{bmatrix}$ y $D_{ig3}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2+\alpha+\beta} \\ 0 & 1 & \left(\frac{1}{2+\alpha+\beta}-\frac{1}{1+\beta}\right) \\ 0 & -(\alpha+\beta) & \left(\frac{\beta}{1+\beta}-\frac{\alpha+\beta}{2+\alpha+\beta}\right) \end{bmatrix}$

Representación implícita rectangular: La forma normal de Kronecker del abánico, $[\lambda E-A]$ asociada a (2.30) es la siguiente:

$$G_{ir}[\lambda E-A]D_{ir}=\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{(\lambda+1)}_{def} \end{bmatrix}$$
$$G_{ir}B=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ CD_{ir}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.35}$$

Donde: $G_{ir}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ y $D_{ir}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Debemos remarcar lo siguiente:

1. Cuando separamos la representación implícita global (2.28), en (2.29) en la *representación implícita rectangular* (2.30) y en la *restricción algebraica* (2.31), el resultado es la estructura común de un sistema que es representado por (2.30).
2. Cuando la comparación de las formas normales de Kronecker de los abánicos asociados a (2.29) que se muestran en (2.32), (2.33) y (2.34) contra la forma normal de Kronecker del abánico asociado a (2.30) que se muestra en (2.35), nos damos cuenta que la **estructura interna variable** (2.29) es tomada en cuenta por el **bloque fijo** del índice minimo por columnas (2.30).

2.9 Conclusión

En este capítulo se mostró como modelar los sistemas conmutados autónomos variables en el tiempo utilizando la teoría de sistemas implícitos lineales.

Capítulo 3

Control implícito de sistemas conmutados: Ejemplo (parte 3)

3.1 Introducción

En este capítulo se aplica una ley de control proporcional derivativa a un sistema conmutado representado a través de sistemas implícitos, la cual hace inobservable la variación de estructura interna. Se obtiene condiciones necesarias del sistema en lazo cerrado; esto da pauta al estudio de la estabilidad del sistema, que se aborda en los capítulos posteriores.

3.2 Representación implícita de un sistema conmutado.

Considere la representación de estado (1.9). En el capítulo 2 se observa que esta representación puede llevarse a una representación implícita global descrita por la ecuación (2.24) y aplicándola a un sistema conmutado autónomo, variable en el tiempo, (ejemplo (parte 1)), ecuación (1.12), tenemos la siguiente representación implícita global:

$$\begin{aligned} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbb{E}} \frac{d}{dt}x &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ \hline \alpha & \beta & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbb{A}_k} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \hline 0 \end{bmatrix}}_{\mathbb{B}} u \\ y &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C} x \end{aligned} \tag{3.1}$$

Por encima de la linea de la representación implícita global (3.1) se encuentra la siguiente representación implícita rectangular $\sum^{ir}(E,A,B,C)$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{E} \tfrac{d}{dt}x = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{A} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} u$$
$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C} x \tag{3.2}$$

Por debajo de la linea de la representación implícita global (3.1) se encuentra la siguiente restricción algebraica $\Sigma^{ral}(0,D,0)$:

$$0 = \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha & \beta & 1 \end{bmatrix}}_{D_k} x \tag{3.3}$$

3.3 Ley de control proporcional derivativa

Aplicando la retroalimentación proporcional derivativa PD [5, BoM03]

$$u = \begin{bmatrix} -1 & 0 & (1-1/\tau) \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \frac{d}{dt}x + [1/\tau]R \tag{3.4}$$

al sistema descrito por (3.1), tenemos el sistema en lazo cerrado descrito por la siguiente representación implícita global:

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \tfrac{d}{dt}x = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{-1/\tau} \\ \hline \alpha & \beta & 1 \end{array}\right] x + \begin{bmatrix} 0 \\ \boxed{1/\tau} \\ 0 \end{bmatrix} R$$
$$y^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix} x \tag{3.5}$$

con el siguiente comportamiento externo

$$\mathscr{B}_{u^*} = \left\{ (R,y) \in \mathcal{C}^\infty\left(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^2\right) | \; (\tau d/dt + 1)y^* = R \right\} \tag{3.6}$$

De (3.5), se tiene en cuenta lo siguiente:

1. La variación de estructura interna que en las matrices de comportamiento son encerradas por lineas discontinuas, se han hecho no observables.
2. El comportamiento externo (3.6) es caracterizado por la representación de espacio de estado, que en las matrices de comportamiento son encerrados por lineas continuas.

3.4 Condición necesaria de estabilidad del sistema en lazo cerrado

Con respecto a la estabilidad interna de el sistema en lazo cerrado, descrito por la representación implícita global (3.5) tenemos el siguiente polinomio característico:

$$\phi^{*}_{(\alpha,\beta)}(\lambda) = det \left[\begin{array}{ccc} \lambda & -1 & 1 \\ 0 & 0 & (\lambda + 1/\tau) \\ \hline -\alpha & -\beta & -1 \end{array} \right] = (\beta\lambda + \alpha)(\lambda + 1/\tau) \tag{3.7}$$

Entonces, una condición necesaria de estabilidad es que los parámetros (α, β) tienen que permanecer en la siguiente región de estabilidad (ver figura (3.1)):

$$\mathfrak{B}^{St}_{PD} = \{(\alpha,\beta) | \alpha \cdot \beta > 0\} \cup \{(\alpha,\beta) | \beta = 0 \; y \; \alpha \neq 0\} \tag{3.8}$$

Sin embargo, (3.8) no es una condición suficiente para garantizar la estabilidad bajo conmutaciones arbitrarias.

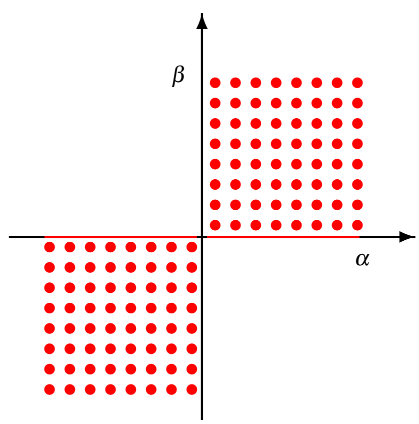

Figura 3.1 Regiones necesarias de estabilidad.

En efecto, en el siguiente capítulo se muestra que la condición de que el polinomio característico sea Hurwitz, es solamente necesaria. Esto es, se puede tener un sistema conmutado inestable a pesar de tener un polinomio característico Hurwitz.

3.5 Conclusión

En este capítulo se aplicó una ley de control proporcional derivativa a un ejemplo ilustrativo de un sistema conmutado estudiado con la teoría de los sistemas implícitos, esta ley permitió hacer inobservable la variación de estructura interna. Se obtuvieron condiciones necesarias de estabilidad para el sistema cerrado, sin embargo se pudo ver que aun cuando sus matrices son Hurwitz, el sistema no siempre es estable, esto dio pauta al estudio de estabilidad del sistema, es decir, encontrar condiciones suficientes de estabilidad que se estudia en los capítulos posteriores.

Parte II

Análisis de estabilidad

Capítulo 4

Estabilidad de sistemas conmutados

4.1 Introducción

En este capítulo se estudia la estabilidad y se dan condiciones suficientes que garantizan que el sistema conmutado sea estable.

4.2 Estabilidad de sistemas conmutados.

El estudio de la estabilidad de los sistemas conmutados requiere especial cuidado. Puesto que, aunque se tenga una familia de sistemas lineales, el sistema resultante es en general no lineal y variante en el tiempo.

Se quiere analizar la estabilidad del siguiente sistema:

$$\dot{x} = A(t)x, \;\; A(t) \in \mathscr{A} \triangleq \{A_1, A_2, \ldots, A_M\} \tag{4.1}$$

donde las matrices A_i, $i \in \{1, 2, \ldots, M\}$, son matrices constantes en $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

Una condición necesaria para tener estabilidad bajo las señales de conmutación es que todos los subsistemas individuales sean asintóticamente estables. En efecto, si algunos de los subsistemas es inestable, entonces el sistema conmutado es inestable. Esta condición no es suficiente, puesto que se puede dar el caso de tener un sistema inestable, a pesar de que las matrices A_i sean Hurwitz. En efecto, considerese el siguiente ejemplo:

Ejemplo 4.1. Considere la familia de sistemas, $\Sigma_i(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^2, \mathfrak{B}_i)$, $i \in \{1, 2\}$, donde los comportamientos $\mathfrak{B}_i$ están descritos por las siguientes representaciones de estado:

$$\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = A_i x, \quad A_i \in \{A_1, A_2\} \tag{4.2}$$

donde $x^T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}$ y:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.1 & -1 \\ 2 & -0.1 \end{bmatrix} \;\; \text{y} \;\; A_2 = \begin{bmatrix} -0.1 & 2 \\ 1 & -0.1 \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

Note que estas dos representaciones de estado están relacionadas mediante las siguientes matrices de cambio de base (ver figura 4.1):

$$\begin{gathered} T_1^{-1} A_1 T_1 = T_2^{-1} A_1 T_2 = A_0 \\ T_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0.1 & 1 \end{bmatrix}, \;\; T_2 = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0.05 & 1 \end{bmatrix}, \;\; A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2.02 & -0.2 \end{bmatrix} \end{gathered} \tag{4.4}$$

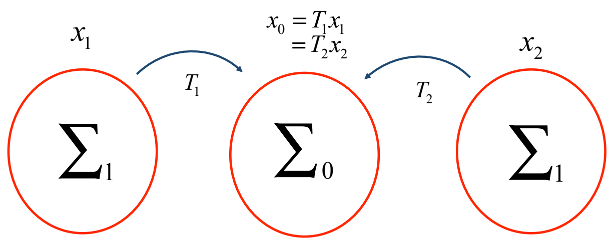

Figura 4.1 Sistemas Σ_1 y Σ_2 transformados.

De (4.4), se tiene que el polinomio característico de Σ_1 y Σ_2 es el siguiente polinomio Hurwitz:

$$\mathrm{s}^2 + 1/5\,\mathrm{s} + 101/50$$

Ahora bien, aunque los sistemas, Σ_1 y Σ_2, son Hurwitz estables (ver figuras 4.2(a) y 4.2(b)), se pueden tener conmutaciones entre ellos de tal manera que el sistema conmutado resultante es inestable en el sentido de Lyapunov. En efecto si se conmuta a Σ_1, cuando $x_1 x_2 > 0$, y se conmuta a Σ_2, cuando $x_1 x_2 < 0$, esto es: $A_i = A_1$ si $x_1 x_2 \geq 0$ y $A_i = A_2$ si $x_1 x_2 < 0$, se obtiene un sistema inestable, (ver figura 4.2(d)).

Por ello, es necesario obtener condiciones necesarias y suficientes que garanticen la estabilidad del sistema conmutado (4.1). Dado que el sistema lineal conmuta, se tiene en realidad un sistema no lineal variante en el tiempo, lo cual dificulta grandemente el análisis de la estabilidad.

Narendra [22, NarSh02] resuelve esta dificultad, para el caso de una familia de sistemas lineales Hurwitz estables, proponiendo una única función cuadrática de Lyapunov común a toda la familia, esto es:

$$V = x^T P x \tag{4.5}$$

donde P es una matriz constante positiva definida: $P = P^T > 0$, $P \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. La derivada a lo largo del tiempo en cualquier trayectoria del sistema es:

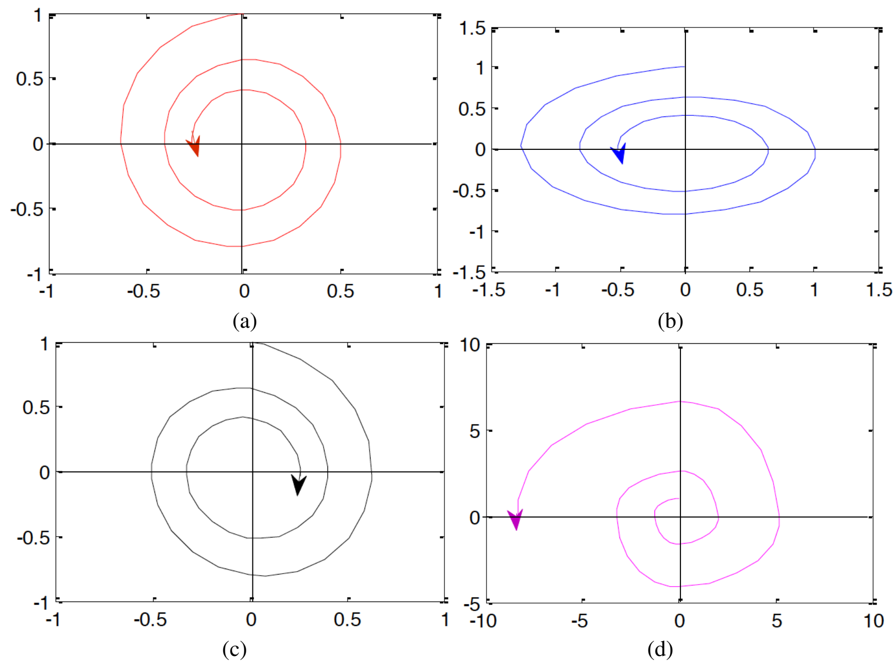

Figura 4.2 Sistemas Σ_1 y Σ_2 transformados. (a) Sistema Σ_1: x_2 *v.s.* x_1, (b) Sistema Σ_2: x_2 *v.s.* x_1, (c) Sistema Σ_0: x_2 *v.s.* x_1, (d) Conmutación entre los Sistemas Σ_1 (segundo y cuarto cuadrantes) y Σ_2 (primer y tercer cuadrantes): x_2 *v.s.* x_1,

$$\dot{V} = x^T \left(A^T(t)P + PA(t)\right)x \tag{4.6}$$

Entonces, sí para cada matriz Hurwitz dada, A_i, se satisface:

$$\dot{V}_i = -x^T (A_i P + A_i^T P)x, \;\; i \in \{1,2,\ldots,M\} \tag{4.7}$$

donde la matriz, $Q_i = -\left(A_i P + A_i^T P\right)$, es negativa semi definida, se tiene entonces:

$$\begin{gathered} x^T Q_i x \leq x^T x \overline{\lambda}(Q)_i \leq 0 \;\; \forall i \in \{1,2,\ldots,M\} \\ \Rightarrow \dot{V} \leq 0 \;\; \forall x \neq 0 \end{gathered} \tag{4.8}$$

Esto es, se tiene una función de Lyapunov, V, positiva no creciente, por lo que el sistema conmutado es estable en el sentido de Lyapunov. Así, la existencia de tal función de Lyapunov es suficiente para garantizar la estabilidad del sistema conmutado (4.1).

Una dificultad que surge con la metodología propuesta por Narendra, es que no siempre se puede encontrar una función de Lyapunov cuadrática común, para la entera familia de sistemas lineales Hurwitz estables (4.1). Considere el siguiente ejemplo:

Ejemplo 4.2. Sea el conjunto de índices $\mathscr{I} = \{1,2\}$, y sean las matrices Hurwitz:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & -10 \\ 0.1 & -1 \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

Acontinuación se muestra que estos dos subsistemas, $\dot{x} = A_1 x$ y $\dot{x} = A_2 x$, no comparten una funcion de Lyapunov cuadrática común de la forma (4.5):

1. Se busca una matriz P simétrica definida positiva de la forma:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & q \\ q & r \end{bmatrix},$$

con $r > q^2$.

2. De (4.7) se tiene:

$$Q_1 = -A_1^T P - PA_1 = \begin{bmatrix} 2-2q & 2q+1-r \\ 2q+1-r & 2q+2r \end{bmatrix}$$

esta matriz Q_1 será semi definida positiva *si y solamente si*

$$q^2 + \frac{(r-3)^2}{8} \leq 1 \tag{4.10}$$

Similarmente,

$$Q_2 = -A_2^T P - PA_2 = \begin{bmatrix} 2-\frac{q}{5} & 2q+10-\frac{r}{10} \\ 2q+10-\frac{r}{10} & 20q+2r \end{bmatrix}$$

y esta matriz Q_2 será semi definida positiva *si y solamente si*

$$q^2 + \frac{(r-300)^2}{800} \leq 100 \tag{4.11}$$

De la figura 4.3 se observa que las elipses, determinadas por (4.10) y (4.11), no se intersectan. Por lo que no existe una tal función de Lyapunov cuadrática común.

El tipo de sistemas considerados en este trabajo de tesis, tiene una estructura particular que evitan esta dificultad. Esto se logra gracias a la inclusión de las restricciones algebraicas propias de los sistemas implícitos (ver sección 2.6).

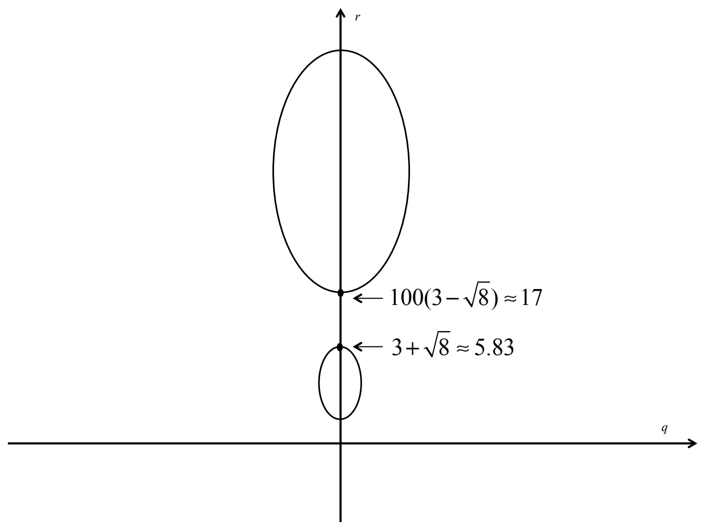

Figura 4.3 Elipses del contraejemplo

4.3 Conclusión

En este capítulo se estudió la estabilidad del sistema en lazo cerrado mediante la teoría expuesta por Narendra, en donde se propusó una función de Lyapunov cuadrática común, tal que su derivada a lo largo del tiempo es definida negativa.

Capítulo 5

Análisis de la estabilidad interna de sistemas conmutados: Ejemplo (parte 4)

En el capítulo 3 se mostró como diseñar un control implícito que hace inobservable la variación de estructura interna y se dieron condiciones necesarias de estabilidad. En este capítulo se encuentran condiciones suficientes de estabilidad para el sistema en lazo cerrado (3.5) y se concluye estabilidad utilizando la metodología de Narendra, vista en el capítulo 4, encontrando una función de Lyapunov cuadrática común.

5.1 Introducción

Para garantizar la estabilidad del sistema (3.5) se propone una función de Lypunov cuadrática común de la forma $V(x) = x^T Px$, tal que su derivada a lo largo del tiempo es definida negativa. La finalidad de esta sección es encontrar una matriz P definida positiva y constante; esto con el fin de que no exista ningún problema para obtener su derivada con respecto al tiempo t.

Para esto se procede de la siguiente forma

1. Primero se separa a la representación del sistema en lazo cerrado en dos subsistemas, uno que describe la dinámica fija y otro que describe la dinámica variable del sistema en lazo cerrado.
2. Después se encuentran representaciones de estado asociadas a estos subsistemas.
3. Finalmente se encuentran condiciones suficientes de estabilidad.

5.2 Separación de dinámicas

En esta sección se separa la representacion del sistema en lazo cerrado en dos subsistemas, a saber, un subsistema que caracteriza la parte fija de la dinámica del sistema en lazo cerrado y otro subsistema que caracteriza la parte variable de la dinámica del sistema en lazo cerrado. Para esto se procede de la siguiente manera:

1. La matriz sistema es expresada como la concatenación de dos subsistemas, uno que describe la parte fija y otro que describe la parte variable de la dinámica del sistema en lazo cerrado.
2. Se descompone a las matrices del sistema en lazo cerrado en sus partes fija y variable.
3. Finalmente se obtiene la descomposición del sistema en lazo cerrado en sus respectivos subsistemas.

5.2.1 Descomposición de la matriz sistema

Se considera la matriz sistema del sistema en lazo cerrado representado por (3.5) :

$$P(\lambda)=\left[\begin{array}{c|c}(\lambda E_{lc}-A_{lc}) & B_{lc}\\ \hline -C_{lc} & 0\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc|c}\lambda & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & (\lambda+1/\tau) & 1/\tau\\ -\alpha & -\beta & -1 & 0\\ \hline 0 & 0 & -1 & 0\end{array}\right] \tag{5.1}$$

donde $\lambda\in\mathbb{C}$. Dado que la variación de estructura se ha hecho inobservable, entonces para separar la parte del sistema que caracteriza a la variación de estructura, hay que encontrar la parte inobservable. Aplicando la siguiente matriz de operaciones elementales fila a (5.1),

$$T(\lambda)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & (\lambda+1/\tau)\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{5.2}$$

se obtiene (se realiza una inyección de salida):

$$\begin{aligned}P_1(\lambda)=T(\lambda)P(\lambda)&=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & (\lambda+1/\tau)\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\left[\begin{array}{ccc|c}\lambda & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & (\lambda+1/\tau) & 1/\tau\\ -\alpha & -\beta & -1 & 0\\ \hline 0 & 0 & -1 & 0\end{array}\right]\\ &=\left[\begin{array}{ccc|c}\lambda & -1 & 0 & 0\\ \alpha & \beta & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1/\tau\\ \hline 0 & 0 & -1 & 0\end{array}\right]\end{aligned} \tag{5.3}$$

De esta manera se ha puesto en evidencia el modo inobservable $(\lambda\beta+\alpha)$. La matriz sistema $P(\lambda)$ es entonces expresada como la concatenación de dos subsistemas que caracterizan la parte fija y variable de la dinámica del sistema en lazo cerrado, es decir:

$$P(\lambda) = \underbrace{\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -(\lambda+1/\tau) \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{T(\lambda)^{-1}} \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ \alpha & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\tau \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]}_{P_1(\lambda)} \tag{5.4}$$

5.2.2 Descomposición de las matrices del sistema

En base a la matriz inversa de separación de subsistemas (5.2), $T(\lambda)^{-1}$, se descomponen las matrices del sistema en lazo cerrado E_{lc}, A_{lc}, B_{lc} y C_{lc}, como sigue:

$$\begin{aligned} \lambda E_{lc} - A_{lc} &= \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 1 \\ 0 & 0 & (\lambda+1/\tau) \\ -\alpha & -\beta & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -(\lambda+1/\tau) \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ \alpha & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ -C_{lc} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ \alpha & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ B_{lc} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\tau \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -(\lambda+1/\tau) \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\tau \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{5.5}$$

5.2.3 Subsistemas de dinámica fija y variable

La representación (3.5), del sistema en lazo cerrado, se descompone de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -(d/dt+1/\tau) \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d/dt & -1 & 0 \\ \alpha & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\tau \\ 0 \end{bmatrix} r \\
&y = -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d/dt & -1 & 0 \\ \alpha & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Entonces, la respuesta homógenea del sistema en lazo cerrado es solución de la siguiente matriz diferencial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -(d/dt+1/\tau) \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d/dt & -1 & 0 \\ \alpha & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x = 0 \tag{5.7}$$

Es decir, la respuesta homógenea de la representación del sistema en lazo cerrado (3.5), puede ser expresada como la concatenación de las siguientes representaciones de las dinámicas fija y variable:

$$\begin{bmatrix} d/dt & -1 & 0 \\ \alpha & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x = z \tag{5.8}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -(d/dt+1/\tau) \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} z = 0 \tag{5.9}$$

A fín de obtener las representaciones de estado de ambas dinámicas, se simplifican (5.8) y (5.9):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 - x_2 = z_1 \\ \alpha x_1 + \beta x_2 = z_2 \\ 0 = z_3 \\ -x_3 = z_4 \end{cases} ; \quad \begin{cases} z_1 - z_4 = 0 \\ z_3 - (\dot{z}_4 + (1/\tau) z_4) = 0 \\ -z_2 + z_4 = 0 \end{cases} \tag{5.10}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} z_3 = 0 \\ z_4 = -x_3 \\ z_1 = z_2 = z_4 = -x_3 \end{cases} ; \quad \begin{cases} \dot{x}_3 + (1/\tau) x_3 = 0 \\ \dot{x}_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ \alpha x_1 + \beta x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \tag{5.11}$$

En el caso que $\beta \neq 0$, se tiene la ecuación diferencial:

$$dx_1/dt + (\alpha/\beta)x_1 = -(1 + 1/\beta)x_3 \tag{5.12}$$

En el caso que $\beta = 0$ y $\alpha \neq 0$, se tiene la ecuación algebraica (ver Figura 5.1):

$$x_2 = dx_1/dt + x_3 \quad y \quad x_1 = -(1/\alpha)x_3 \tag{5.13}$$

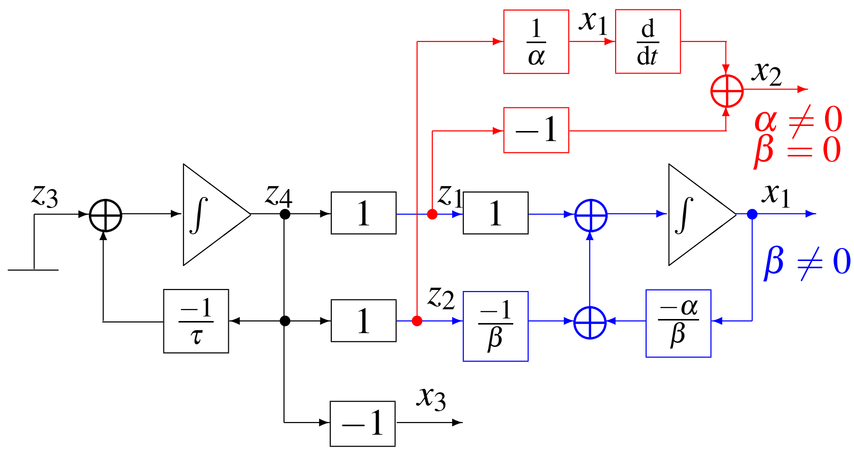

Figura 5.1 Diagrama de bloques del sistema en lazo cerrado representado por (5.8) y (5.9).

5.3 Representaciones de estado

En esta sección se obtienen dos representaciones de estado para los dos casos mostrados en la figura 5.1, la cual representa a las dinámicas fija y variable presentes en la representación del sistema en lazo cerrado (3.5).

Caso $\beta \neq 0$: Primero se considera el caso: $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, con (recordar condición necesaria (3.6)): $\gamma = \alpha/\beta \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$, es decir, (ver Figura 5.1):

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \dot{z}_4 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} -1/\tau & 0 & 0 \\ (1+1/\beta) & -\gamma & 0 \\ \hline -1/\beta & \gamma & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} z_4 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{5.14}$$

Note que la representación (5.14) es equivalente a la siguiente representación de estado:

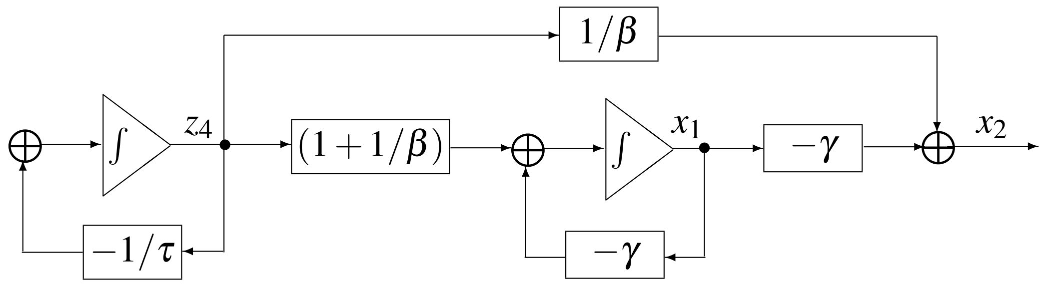

Figura 5.2 Diagrama del sistema representado por 5.14

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\dot z_4\\ \dot x_1\end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix}-1/\tau & 0\\ (1+1/\beta) & -\gamma\end{bmatrix}}_{\overline{A}_1}\begin{bmatrix}z_4\\ x_1\end{bmatrix}\\ x_2 &= \underbrace{\begin{bmatrix}1/\beta & -\gamma\end{bmatrix}}_{\overline{C}_1}\begin{bmatrix}z_4\\ x_1\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{5.15}$$

Caso $\beta = 0$ and $\alpha \neq 0$: En seguida se considera el caso: $\beta = 0$ y $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, es decir, (ver Figura 5.1):

$$\left[\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ \hline 0 & 1 & 0\end{array}\right]\begin{bmatrix}\dot z_4\\ \dot x_1\\ \dot x_2\end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c}-1/\tau & 0 & 0\\ -1/\alpha & 1 & 0\\ \hline 1 & 0 & 1\end{array}\right]\begin{bmatrix}z_4\\ x_1\\ x_2\end{bmatrix} \tag{5.16}$$

El correspondiente diagrama de bloques de la representación (5.16) , se muestra en la figura 5.3.

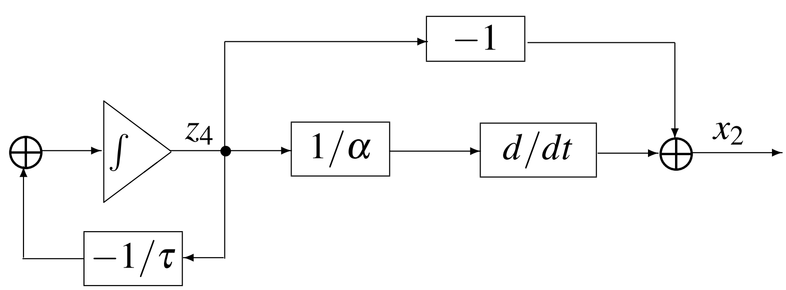

Figura 5.3 Diagrama del sistema en lazo cerrado representado por 5.16

Note que la representación (5.16) es equivalente a la siguiente representación de estado:[1]

[1] Se derivo la segunda fila de (5.16) de tal manera que compartan una función de Lyapunov común ambos casos.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{z}_4 \\ \dot{x}_1 \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} -1/\tau & 0 \\ -(1/\alpha\tau) & 0 \end{bmatrix}}_{\overline{A}_2} \begin{bmatrix} z_4 \\ x_1 \end{bmatrix} \\
x_2 &= \underbrace{\begin{bmatrix} -(1/\alpha\tau+1) & 0 \end{bmatrix}}_{\overline{C}_2} \begin{bmatrix} z_4 \\ x_1 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{5.17}$$

con la restricción algebraica:

$$x_1 = (1/\alpha)z_4 \tag{5.18}$$

5.4 Análisis de la estabilidad

Sea el conjunto de indices $\mathscr{I} = \{1,2\}$ y sean las siguientes matrices estables de las representaciones de estado (5.15) y (5.17):

$$\overline{A}_1 = \begin{bmatrix} -1/\tau & 0 \\ (1+1/\beta) & -\gamma \end{bmatrix}, \quad \overline{A}_2 = \begin{bmatrix} -1/\tau & 0 \\ -(1/\alpha\tau) & 0 \end{bmatrix} \tag{5.19}$$

Para analizar la estabilidad de las representaciones de estado, (5.15) y (5.17), (con la restricción algebraica (5.18)) se propone la siguiente función de Lyapunov cuadrática común ($x = \begin{bmatrix} z_4 & x_1 \end{bmatrix}^T$):

$$V = x^T P x \tag{5.20}$$

donde P es una matriz simetrica, $P = P^T \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, la cual debería ser definida positiva.

La derivada de la función de Lyapunov es entonces:

$$\mathrm{d}V/\mathrm{d}t = \begin{cases} \varphi_1 = -x^T Q_1 x, \text{ Caso } \beta \neq 0 \\ \varphi_2 = -x^T Q_2 x, \text{ Caso } \beta = 0 \ \& \ \alpha \neq 0 \end{cases}, \tag{5.21}$$

donde:

$$Q_i = -(\overline{A}_i^T P + P\overline{A}_i), \ \ i \in \mathscr{I} \tag{5.22}$$

Para encontrar condiciones suficientes de estabilidad, se siguen los siguientes pasos:

1. Primero se encuentran condiciones sobre la matriz P, para garantizar que sea definida positiva.
2. Posteriormente se obtienen las matrices Q_1 y Q_2.
3. Finalmente se encuentran condiciones sobre las matrices Q_1 y Q_2, para garatizar la negatividad de $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t$.

5.4.1 Matriz P

Sea la siguiente matriz simétrica:

$$P = \begin{bmatrix} k & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.23}$$

Esta matriz será definida positiva solo si:

$$k > 1 \tag{5.24}$$

5.4.2 Obtención de las matrices Q_1 y Q_2

De (5.22), (5.23) y (5.19), se obtiene la matriz Q_1:

$$Q_1 = -(\overline{A_1}^T P + P\overline{A_1}) = \begin{bmatrix} 2\frac{k\beta-\tau\beta-\tau}{\tau\beta} & \frac{\gamma\tau\beta+\beta-\tau\beta-\tau}{\tau\beta} \\ \frac{\gamma\tau\beta+\beta-\tau\beta-\tau}{\tau\beta} & 2\gamma \end{bmatrix} \tag{5.25}$$

Similarmente, se obtiene la matriz Q_2:

$$Q_2 = -(\overline{A_2}^T P + P\overline{A_2}) = \begin{bmatrix} 2\frac{k\alpha+1}{\alpha\tau} & \frac{\alpha+1}{\alpha\tau} \\ \frac{\alpha+1}{\alpha\tau} & 0 \end{bmatrix} \tag{5.26}$$

Note que: $\det(Q_2) = -((\alpha+1)/(\alpha\tau))^2 < 0$, esto es, se tiene un valor propio positivo y otro negativo. Por lo que aparentemente no podría concluirse estabilidad mediante esta función de Lyapunov. Pero como se verá a continuación, la restricción algebraica (5.18), nos resuelve este inconveniente.

5.4.3 Condiciones de negatividad sobre la derivada de la función de Lyapunov

En esta sección se dan las condiciones que garantizan que la derivada de la función de Lyapunov es no positiva.

- De (5.25), la matriz Q_1 será semidefinida positiva sólo si:

$$\begin{cases} \gamma > 0 \\ k > \tau\left(1+\frac{1}{\beta}\right) \\ k > \frac{\tau}{4\gamma}\left(2\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\left(\gamma-\frac{1}{\tau}\right)+\left(\gamma+\frac{1}{\tau}\right)^2+\left(1+\frac{1}{\beta}\right)^2\right) \end{cases} \tag{5.27}$$

  Note que la primera desigualdad corresponde a la condición necesaria de estabilidad (3.8).

- Dado que $\det(Q_2) < 0$, la matriz Q_2 ¡jamás será semidefinida positiva! Ahora bien, gracias a la restricción algebraica (5.18), se podrán encontrar las condiciones para asegurar la negatividad de la función cuadrática, φ_2.

En efecto, de (5.21) y (5.26), se tiene:

$$\varphi_2 = -\left[z_4\ x_1\right]\begin{bmatrix} 2\frac{k\alpha+1}{\alpha\tau} & \frac{\alpha+1}{\alpha\tau} \\ \frac{\alpha+1}{\alpha\tau} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_4 \\ x_1 \end{bmatrix} = -\left[2\frac{k\alpha+1}{\alpha\tau}z_4^2 + 2\frac{\alpha+1}{\alpha\tau}z_4 x_1\right] \tag{5.28}$$

Sustituyendo la condición algebraica (5.18) en (5.28), se tiene:

$$\varphi_2 = -\left[2\frac{k\alpha+1}{\alpha\tau} + 2\frac{\alpha+1}{\alpha^2\tau}\right]z_4^2 = -\frac{2}{\tau}\left[k + \frac{2}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}\right]z_4^2 \tag{5.29}$$

Por lo que la función cuadrática, φ_2, será semidefinida negativa sólo si:

$$k > -\frac{2\alpha+1}{\alpha^2} \tag{5.30}$$

Entonces de (5.27) y (5.30), la funciones cuadráticas, φ_1 y φ_2, serán semidefinidas negativas sólo si las siguientes desigualdades son satisfechas:

$$\begin{cases} \alpha/\beta > 0,\, \beta \neq 0 \\ k > \tau(1+1/\beta),\, \beta \neq 0 \\ k > f(\gamma,\tau,\beta),\, \beta \neq 0 \\ k > -(2/\alpha + 1/\alpha^2),\, \alpha \neq 0 \end{cases} \tag{5.31}$$

donde:

$$\begin{aligned} f(\gamma,\tau,\beta) &= \tfrac{1}{4\gamma}\left[2(1+1/\beta)(\gamma-1/\tau) + (\gamma+1/\tau)^2 + (1+1/\beta)^2\right] \\ &= \tfrac{1}{4\gamma}\left[(\gamma-1/\tau+1+1/\beta)^2 - (\gamma-1/\tau)^2\right] \end{aligned} \tag{5.32}$$

De la primera desigualdad se infiere que el par ordenado de parámetros, (α,β), debe esta en el primer y tercer cuadrante de $\mathbb{R}^2$ (*c.f.* ecuación (3.8) y figura 5.4). Para resolver las otras desigualdades (5.31), se supondrá que el par de parámetros, (α,β), se encuentran en una región acotada del primer y tercer cuadrante de $\mathbb{R}^2$, es decir:

$$\begin{cases} (\alpha,\beta) \in \mathbf{A}\cup\mathbf{B}\cup\mathbf{C}\cup\mathbf{D} \\ \mathbf{A} = \left\{(\alpha,\beta)\middle|\ \underline{\alpha} \leq \alpha \leq \overline{\alpha}\ \&\ \underline{\beta} \leq \beta \leq \overline{\beta}\right\} \\ \mathbf{B} = \left\{(\alpha,\beta)\middle|\ -\overline{\alpha} \leq \alpha \leq -\underline{\alpha}\ \&\ -\overline{\beta} \leq \beta \leq -\underline{\beta}\right\} \\ \mathbf{C} = \left\{(\alpha,\beta)\middle|\ \underline{\alpha} \leq \alpha \leq \overline{\alpha}\ \&\ \beta = 0\right\} \\ \mathbf{D} = \left\{(\alpha,\beta)\middle|\ -\overline{\alpha} \leq \alpha \leq -\underline{\alpha}\ \&\ \beta = 0\right\} \end{cases} \tag{5.33}$$

donde, $\underline{\alpha}$, $\overline{\alpha}$, $\underline{\beta}$ y $\overline{\beta}$, son constantes conocidas tales que: $0 < \underline{\alpha} < \underline{\beta}$ y $0 < \underline{\beta} < \overline{\beta}$ (ver figura 5.4).

1. Con respecto a la segunda desigualdad de (5.31), el par de parámetros, (α,β), se encuentra en la region $\mathbf{A}\cup\mathbf{B}$. Entonces la condición es:

$$k > \tau(1+1/\underline{\beta}) \geq \tau(1+1/\beta) \tag{5.34}$$

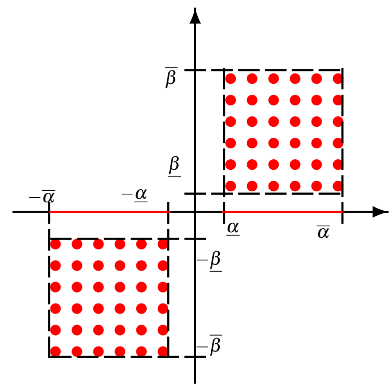

Figura 5.4 Regiones sufficientes de estabilidad

2. Con respecto a la tercera desigualdad de (5.31), el par de parámetros, (α, β), se encuentra en la region $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$. Entonces la condición es:
$$4\frac{\overline{\beta}}{\underline{\alpha}}\left(1+\frac{\overline{\alpha}}{\underline{\beta}}+\frac{1}{\underline{\beta}}\right)^2 \geq f(\gamma,\tau,\beta) \tag{5.35}$$
esto es,
$$k > 4\frac{\overline{\beta}}{\underline{\alpha}}\left(1+\frac{\overline{\alpha}}{\underline{\beta}}+\frac{1}{\underline{\beta}}\right)^2 \geq f(\gamma,\tau,\beta)\ \forall \alpha,\beta \in \mathbf{A} \cup \mathbf{B} \tag{5.36}$$
3. Con respecto a la cuarta desigualdad de (5.31), el par de parámetros, (α, β), se encuentra en la region $\mathbf{C} \cup \mathbf{D}$. Entonces la condición es:
$$k > -\frac{2}{\underline{\alpha}} \tag{5.37}$$

Así si el parámetro k es seleccionado de tal manera que:
$$k > \max\left\{1,\ \tau\left(1+\frac{1}{\underline{\beta}}\right), 4\frac{\overline{\beta}}{\underline{\alpha}}\left(1+\frac{\overline{\alpha}}{\underline{\beta}}+\frac{1}{\underline{\beta}}\right)^2, -\frac{2}{\underline{\alpha}}\right\}, \tag{5.38}$$
entonces la matriz P será definida positiva, y las funciones φ_i, $i \in \overline{\mathscr{I}}$, serán no positivas. Es decir, la función de Lyapunov, V, es una función cuadrática positiva y su derivada con respecto al tiempo, $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t$, es no positiva dado cualquier $\theta \in \mathscr{I}$, esto es, el sistema en lazo cerrado (3.5) es estable.

5.5 Conclusión

En este capítulo se encontraron condiciones suficientes de estabilidad del sistema en lazo cerrado. Para ello, se realizó el estudio a la matriz sistema del sistema en lazo cerrado y se logró expresar como la concatenación de dos subsistemas que caracterizan la dinámica fija y variable; esto permitió obtener dos casos, de los cuales se realizó el análisis de la estabilidad. Para ello primero se encontró una matriz P definida positiva y constante; esto con el fin de que no exista ningún problema para obtener su derivada con respecto al tiempo t. Posteriormente se obtuvieron las matrices Q_i, $i = 1, 2$, y finalmente se obtuvieron condiciones sobre estas matrices, para garantizar la negatividad de la función de Lyapunov propuesta. Para este ejemplo ilustrativo, se encontró que los parámetros del sistema deben permanecer dentro de una región de estabilidad, esto es su estabilidad depende de que sus parámetros se encuentren dentro de una región acotada.

Parte III

Sistemas escalera

Capítulo 6

Sistemas escalera

6.1 Introducción

En este capítulo se introducen los sistemas escalera, en los cuales, su comportamiento entrada–salida puede variar desde un sistema de primer orden hasta un sistema de n-ésimo orden (dependiendo de la posición de los interruptores internos). Se aplica una ley de control proporcional derivativa a un sistema escalera con factores irreducibles de primer orden y se obtienen condiciones necesarias de estabilidad en lazo cerrado.

6.2 Sistemas escalera

Bonilla y Malabre [4, BoM00] introdujeron los *sistemas escalera* como una herramienta para modelar sistemas lineales con estructura interna variable, por medio de representaciones de estado teniendo un conjunto finito de matrices, A_θ y C_θ descritas en (1.10). Para esto, los autores primero consideran un sistema donde el comportamiento, $\mathfrak{B}_{sw}$, conmuta entre un conjunto finito de comportamientos dados,

$$\mathfrak{B}_{i,\theta} = \left\{ (u,y) \in \mathcal{C}^{\infty}\big(\mathcal{I}_i, \mathbb{R}^2\big) \,\middle|\, \begin{bmatrix} -Q_\theta(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}) & P_\theta(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix} = 0 \right\}, \quad \theta \in \mathscr{I}, \tag{6.1}$$

donde $\mathscr{I}$ es el conjunto de numeros binarios: $\big\{(\theta_0 \cdots \theta_\eta) \,|\, \theta_j \in \{0,1\},\, j \in \{0,\ldots,\eta\}\big\}$.
Se tienen los siguientes tres casos (ver [5]):

1. Factores irreducibles de primer orden $\mathbb{R}$.
2. Factores irreducibles de segundo orden $\mathbb{R}$.
3. Red de compensación adelanto-atraso.

En este capítulo unicamente se considera el primer caso.

6.2.1 Factores irreducibles de primer orden

Para este caso, los operadores, $P_\theta(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t})$ y $Q_\theta(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t})$, toman la siguiente forma:

$$P_\theta(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}) = (\mathrm{d/dt}+a_1)\prod_{i=0}^{\eta}\Big(\bar{\theta}_i\big(\mathrm{d/dt}+a_{\eta+2-i}\big)+\theta_i\Big) \text{ y } Q_\theta(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}) = a_1\prod_{i=0}^{\eta}\big(\bar{\theta}_i a_{\eta+2-i}+\theta_i\big), \tag{6.2}$$

donde: $\bar{\theta}_i = 1-\theta_i$. Las matrices (1.10) de la representación de estado (1.9) de el sistema, Σ_{sw}, descrito por (6.1) y (6.2) son:

$$\overline{A}_0 = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 \\ 0 & -a_3 & 1 \\ 0 & 0 & -a_2 \end{bmatrix}$$

$$\overline{A}_1 = \begin{bmatrix} (1-a_1) & 1 & 0 \\ 0 & (1-a_3) & 1 \\ 0 & 0 & (1-a_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/\hat{a}_3 & 0 \\ 1 & -1/\hat{a}_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(1-a_1)/\hat{a}_3+1 & -1/\hat{a}_2 \\ (1-a_3) & -(1-a_3)/\hat{a}_2+1 \\ 0 & (1-a_2) \end{bmatrix} \tag{6.3}$$

$$\overline{D}(\theta) = -\begin{bmatrix} 1 & -\theta_0/\hat{a}_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & \theta_0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\theta_0 & -\frac{\theta_0\theta_1}{\hat{a}_2} \\ 0 & 0 & -\theta_1 \end{bmatrix}$$

$$C_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ C_1 = \begin{bmatrix} -1/\hat{a}_3 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \prod_{i=1}^{3}\hat{a}_i \end{bmatrix}^T$$

Si $a_i \neq 0$ entonces $\hat{a}_i = |a_i|$, de lo contrario $\hat{a}_i = 1$, $i \in \{1,\ldots,\eta+2\}$. Es decir,

$$A_\theta = \begin{bmatrix} -a_1 & -\frac{\theta_0(-1+a_1+\hat{a}_3)}{\hat{a}_3}+1 & -\frac{\theta_1(-1+a_1+\hat{a}_3)\theta_0}{\hat{a}_3\hat{a}_2}+\frac{\theta_1}{\hat{a}_2} \\ 0 & \theta_0 a_3-\theta_0-a_3 & -\frac{(-\theta_1 a_3+\theta_1)\theta_0}{\hat{a}_2}-\frac{-\hat{a}_2+\theta_1 a_3+\theta_1\hat{a}_2-\theta_1}{\hat{a}_2} \\ 0 & 0 & a_2\theta_1-\theta_1-a_2 \end{bmatrix} \tag{6.4}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \prod_{i=1}^{3}\hat{a}_i \end{bmatrix}^T \quad C_\theta = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\theta_0}{\hat{a}_3} & \frac{\theta_0\theta_1}{\hat{a}_3\hat{a}_2} \end{bmatrix}$$

1. **Espectro.** El polinomio característico es:

$$\begin{aligned} &\det\big(\mathrm{s}I-(\overline{A}_0+\overline{A}_1\overline{D}(\theta_k))\big) = \\ &\det\begin{bmatrix} (\mathrm{s}+a_1) & \frac{\theta_0(a_1-1)-\bar{\theta}_0\hat{a}_3}{\hat{a}_3} & \frac{\theta_1(\theta_0(a_1-1)+\hat{a}_3\theta_0)-\hat{a}_3\theta_1}{\hat{a}_3\hat{a}_2} \\ 0 & (\mathrm{s}+\theta_0+\bar{\theta}_0 a_3) & \frac{\theta_1(1-a_3)\theta_0+\theta(a_3-1)-\hat{a}_2\overline{\theta}_1}{\hat{a}_2} \\ 0 & 0 & (\mathrm{s}+\theta_1+\bar{\theta}_1 a_2) \end{bmatrix} \\ &= (\mathrm{s}+a_1)\prod_{i=0}^{1}(\mathrm{s}+\theta_i+\bar{\theta}_i a_{3-i}) \end{aligned} \tag{6.5}$$

2. **Ceros invariantes.** El determinante de la matriz sistema es:

$$
\det\begin{bmatrix} \mathrm{s}I-(\overline{A}_0+\overline{A}_1\overline{D}(\theta_k)) & B \\ -(\overline{C}_0+\overline{C}_1\overline{D}(\theta_k)) & 0 \end{bmatrix} =
$$

$$
\det\left(\left[\begin{array}{c|ccc} \mathrm{s}+a_1 & -\frac{\theta_0(\mathrm{s}+1)+\bar{\theta}_0\hat{a}_3}{\hat{a}_3} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{s}+\theta_0+\bar{\theta}_0 a_3 & -\frac{\theta_1(\mathrm{s}+1)+\bar{\theta}_1\hat{a}_2}{\hat{a}_2} & 0 \\ 0 & 0 & (\mathrm{s}+\theta_1+\bar{\theta}_1 a_2) & \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]\begin{bmatrix} 1 & -\frac{\theta_0}{\hat{a}_3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{\theta_1}{\hat{a}_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\right) \tag{6.6}
$$

$$
= \hat{a}_1\prod_{i=0}^{1}\left(\theta_i(\mathrm{s}+1)+\bar{\theta}_i\hat{a}_{3-i}\right)
$$

3. **Función de transferencia**

$$
F_k(\mathrm{s}) = \frac{\hat{a}_1\prod_{i=0}^{1}\left(\theta_i(\mathrm{s}+1)+\bar{\theta}_i\hat{a}_{3-i}\right)}{(\mathrm{s}+a_1)\prod_{i=0}^{1}(\mathrm{s}+\theta_i+\bar{\theta}_i a_{3-i})} \tag{6.7}
$$

En la tabla 6.1 se muestran algunas propiedades estructurales importantes.

(θ_0,θ_1)	$F_k(s)$	$\Lambda(A_k)$	rg $\mathcal{C}_k$	rg $\mathcal{O}_k$	$\{z\}$
$(1,1)$	$\frac{\hat{a}_1}{\mathrm{s}+a_1}$	$\{-a_1,-1,-1\}$	2	1	$\{-1,-1\}$
$(1,0)$	$\prod_{i\in\{1,2\}}\frac{\hat{a}_i}{(\mathrm{s}+a_i)}$	$\{-a_1,-a_2,-1\}$	3	2	$\{-1\}$
$(0,1)$	$\prod_{i\in\{1,3\}}\frac{\hat{a}_i}{(\mathrm{s}+a_i)}$	$\{-a_1,-a_3,-1\}$	3	2	$\{-1\}$
$(0,0)$	$\prod_{i\in\{1,2,3\}}\frac{\hat{a}_i}{(\mathrm{s}+a_i)}$	$\{-a_1,-a_3,-a_2\}$	3	3	$\emptyset$

Tabla 6.1 Propiedades estructurales del sistema representado por (1.9), (1.10) y (6.3). $F_k(\mathrm{s})$: función de transferencia, $\Lambda(A_k)$: espectro, rg $\mathcal{C}_k$: rango de las matrices de controlabilidad, rg $\mathcal{O}_k$: rango de las matrices de observabilidad, $\{z\}$: ceros invariantes.

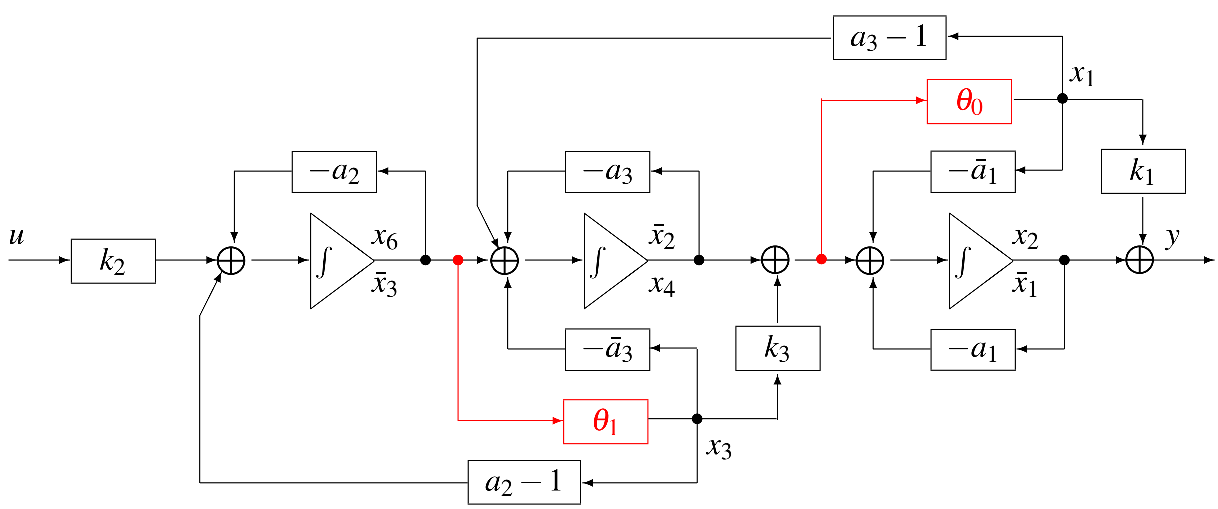

Figura 6.1 Diagrama a bloques del sistema representado por (1.9), (1.10) y (6.3). $\bar{a}_i = k_i(a_i-1)+1$, $i\in\{1,3\}$, $k_2=\hat{a}_3\hat{a}_2\hat{a}_1$, $(k_1,\ k_3) = (1/\hat{a}_2,\ 1/\hat{a}_3)$. Si $a_i\neq 0$ entonces $\hat{a}_i=|a_i|$, de otro modo $\hat{a}_i=1$, $i\in\{1,2,3\}$. $(\theta_0,\theta_1)\in\{(1,1),(0,1),(1,0),(0,0)\}$.

6.3 Representación implícita de un sistema escalera.

En el capítulo 2 se mostró que la representación de estado (1.9) puede llevarse a la representación implícita global (2.24). Para el sistema escalera descrito por (1.9), (1.10) y (6.3), se tiene la siguiente representación implícita global (*c.f. (3.1)*):

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c} 1\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,1\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,1\,0\,0 \\ \hline 0\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,0 \end{array}\right]}_{\mathbb{E}} \frac{d}{dt}x = \underbrace{\left[\begin{array}{ccccc} -a_1 & 1 & 0 & \frac{1-a_1}{\hat{a}_3}-1 & 1/\hat{a}_2 \\ 0 & -a_3 & 1 & -1+a_3 & -1+\frac{1-a_3}{\hat{a}_2} \\ 0 & 0 & -a_2 & 0 & -1+a_2 \\ \hline 0 & -\theta_0-\frac{\theta_0\theta_1}{\hat{a}_2} & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & -\theta_1 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{\mathbb{A}_k} x + \underbrace{\left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \hat{a}_1\,\hat{a}_2\,\hat{a}_3 \\ \hline 0 \\ 0 \end{array}\right]}_{\mathbb{B}} u \tag{6.8}$$

$$y = \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} 1\;0\;0\;1/\hat{a}_3 & 0 \end{array}\right]}_{C} x$$

Donde $b_0 = \hat{a}_1\hat{a}_2\hat{a}_3$. Por encima de la línea del *CEAD* de la representación implícita global (6.8) se encuentra la representación implícita rectangular, $\sum^{rec}(E,A,B,C)$ siguiente (*c.f. (3.2)*):

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,1\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,1\,0\,0 \end{bmatrix}}_{E} \frac{d}{dt}x = \underbrace{\begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \frac{1-a_1}{\hat{a}_3}-1 & 1/\hat{a}_2 \\ 0 & -a_3 & 1 & -1+a_3 & -1+\frac{1-a_3}{\hat{a}_2} \\ 0 & 0 & -a_2 & 0 & -1+a_2 \end{bmatrix}}_{A} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix}}_{B} u \tag{6.9}$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1\;0\;0\;1/\hat{a}_3\;0 \end{bmatrix}}_{C} x$$

Por debajo de la línea del *CEAD* de la representación implícita global (6.8) se encuentra la restricción algebraica, $\sum^{ral}(0,D,0)$ siguiente (*c.f. (3.3)*):

$$0 = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\theta_0 - \frac{\theta_0\theta_1}{\hat{a}_2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\theta_1 & 0\;1 \end{bmatrix}}_{D_k} x \tag{6.10}$$

6.4 Ley de control proporcional derivativa

Sea la siguiente ley de control proporcional derivativa PD [5, BoM03] (*c.f. (3.4)*):

$$u = \begin{bmatrix} \frac{-\hat{a}_3}{b_0} & 0 & \frac{1}{b_0} & -\frac{1}{b_0} & 0 \end{bmatrix} \frac{d}{dt}x + \begin{bmatrix} -\frac{\hat{a}_3}{b_0\tau} & 0 & \frac{a_2}{b_0} & -\frac{1}{b_0\tau} & \frac{1-a_2}{b_0} \end{bmatrix} x + R \tag{6.11}$$

Aplicando la ley de control (6.11) al sistema representado por (6.8) y haciendo el cambio de variable $x = R\xi$ donde $R = \begin{bmatrix} 1 & 0\,0\,0\,0 \\ 0 & 1\,0\,0\,0 \\ 0 & 0\,1\,0\,0 \\ -\hat{a}_3 & 0\,0\,1\,0 \\ 0 & 0\,0\,0\,1 \end{bmatrix}$, se tiene el sistema en lazo cerrado descrito por la siguiente representación implícita global (*c.f. (3.5)*):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{d}{dt}\xi = \left[\begin{array}{ccccc} -1+\hat{a}_3 & 1 & 0 & -\frac{-1+a_1+\hat{a}_3}{\hat{a}_3} & 1/\hat{a}_2 \\ (1-a_3)\,\hat{a}_3 & -a_3 & 1 & -1+a_3 & -\frac{\hat{a}_2-1+a_3}{\hat{a}_2} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-1/\tau} & 0 \\ \hline \hat{a}_3 & -\theta_0 & -\frac{\theta_0\,\theta_1}{\hat{a}_2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\theta_1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xi + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \boxed{b_0} \\ \hline 0 \\ 0 \end{bmatrix} R \tag{6.12}$$

$$y^* = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & \boxed{1/\hat{a}_3} & 0 \end{array}\right] \xi$$

con el siguiente comportamiento externo

$$\mathscr{B}_{u^*} = \left\{ (R,y) \in \mathcal{C}^\infty\big(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^2\big) \mid (d/dt + 1/\tau)y^* = \hat{a}_3 R \right\} \tag{6.13}$$

De (6.12), se observa lo siguiente:

1. La variación de estructura interna, que en las matrices de comportamiento son encerradas por líneas discontinuas, se ha hecho no observable.
2. El comportamiento externo (6.13) es caracterizado por la representación de espacio de estado, cuyas matrices de comportamiento estan encerradas por líneas continuas.

6.5 Condición necesaria de estabilidad del sistema en lazo cerrado

Con respecto a la estabilidad interna de el sistema en lazo cerrado, descrito por la representación implícita global (6.12), tenemos el siguiente polinomio característico:

$$\phi^*_{(\alpha,\beta)}(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \lambda+1-\hat{a}_3 & -1 & 0 & \frac{-1+a_1+\hat{a}_3}{\hat{a}_3} & -1/\hat{a}_2 \\ (-1+a_3)\,\hat{a}_3 & \lambda+a_3 & -1 & 1-a_3 & \frac{\hat{a}_2-1+a_3}{\hat{a}_2} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda+1/\tau & 0 \\ \hat{a}_3 & \theta_0 & \frac{\theta_0\,\theta_1}{\hat{a}_2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{6.14}$$

$$= \frac{(\lambda\tau+1)\big(\theta_1(\lambda+1)+\hat{a}_2\bar{\theta}_1\big)\big(\theta_0(\lambda+1)+\hat{a}_3\bar{\theta}_0\big))}{\hat{a}_2\,\tau}$$

Dado que $\hat{a}_i = |a_i|$ o $\hat{a}_i = 0$, se tiene que el polinomio característico, ϕ, es siempre Hurwitz. Como se vio en el capítulo 4, esto no garantiza la estabilidad bajo conmutaciones arbitrarias. Esto es, se puede tener un sistema conmutado inestable a pesar de tener un polinomio característico Hurwitz.

6.6 Conclusión

En este capítulo se introdujo la teoría de los sistemas escalera y se dieron propiedades estructurales importantes. Se aplicó una ley de control proporcional derivativa a un sistema escalera con factores irreducibles de primer orden y se obtuvieron condiciones necesarias de estabilidad en lazo cerrado.

Capítulo 7

Análisis de la estabilidad interna de sistemas escalera

En el capítulo 6 se mostró como diseñar un control implícito que hace inobservable la variación de estructura interna y se mostró que el polinomio característico del sistema escalera en lazo cerrado es Hurwitz. En este capítulo se encuentran condiciones suficientes de estabilidad para el sistema en lazo cerrado (6.12) y se concluye estabilidad utilizando la metodología de Narendra, vista en el capítulo 4, encontrando una función de Lyapunov cuadrática común.

7.1 Introducción

Para garantizar la estabilidad del sistema escalera en lazo cerrado (6.12) se propone una función de Lyapunov cuadrática común de la forma $V(x) = x^T Px$, tal que su derivada a lo largo del tiempo es definida negativa. La finalidad de esta sección es encontrar una matriz P definida positiva y constante; esto con el fin de que no exista ningún problema para obtener su derivada con respecto al tiempo t.

Para esto se procede de la siguiente forma

1. Primero se separa a la representación del sistema en lazo cerrado en dos subsistemas, uno que describe la dinámica fija y otro que describe la dinámica variable del sistema en lazo cerrado.
2. Después se encuentran representaciones de estado asociadas a estos subsistemas.
3. Finalmente se encuentran condiciones suficientes de estabilidad.

7.2 Separación de dinámicas

En esta sección se separa la representacion del sistema en lazo cerrado en dos subsistemas, a saber, un subsistema que caracteriza la parte fija de la dinámica del sistema en lazo cerrado y otro subsistema que caracteriza la parte variable de la dinámica del sistema en lazo cerrado. Para esto se procede de la siguiente manera:

1. La matriz sistema es expresada como la concatenación de dos subsistemas, uno que describe la parte fija y otro que describe la parte variable de la dinámica del sistema en lazo cerrado.
2. Se descompone a las matrices del sistema en lazo cerrado en sus partes fija y variable.
3. Finalmente se obtiene la descomposición del sistema en lazo cerrado en sus respectivos subsistemas.

7.2.1 Descomposición de la matriz sistema

Se considera la matriz sistema del sistema en lazo cerrado representado por (6.12) :

$$P(\lambda)=\left[\begin{array}{c|c}(\lambda E_{lc}-A_{lc}) & B_{lc}\\ \hline -C_{lc} & 0\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccccc|c}\lambda+1-\hat{a}_3 & -1 & 0 & \frac{-1+a_1+\hat{a}_3}{\hat{a}_3} & -1/\hat{a}_2 & 0\\ \hat{a}_3\,(-1+a_3) & \lambda+a_3 & -1 & 1-a_3 & \frac{\hat{a}_2-1+a_3}{\hat{a}_2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda+1/\tau & 0 & b_0\\ \hat{a}_3 & \theta_0 & \frac{\theta_0\,\theta_1}{\hat{a}_2} & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \theta_1 & 0 & -1 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & -1/\hat{a}_3 & 0 & 0\end{array}\right] \tag{7.1}$$

donde $\lambda\in\mathbb{C}$. Para separar la parte del sistema que caracteriza a la variación de estructura, hay que encontrar la parte inobservable. Aplicando la siguiente matriz de operaciones elementales fila $T(\lambda)$ y la siguiente matriz de operaciones elementales columna R a (7.1),

$$T(\lambda)=\left[\begin{array}{cccccc}1\;0\;0\;0 & -1/\hat{a}_2 & -1+a_1+\hat{a}_3\\ 0\;1\;0\;0 & \frac{\hat{a}_2-1+a_3}{\hat{a}_2} & -(-1+a_3)\,\hat{a}_3\\ 0\;0\;1\;0 & 0 & \frac{\hat{a}_3\,(\lambda\tau+1)}{\tau}\\ 0\;0\;0\;1 & 0 & 0\\ 0\;0\;0\;0 & 1 & 0\\ \hline 0\;0\;0\;0 & 0 & 1\end{array}\right]\;;\quad R=\left[\begin{array}{cccccc}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -\hat{a}_3 & 1 & -\frac{\theta_1}{\hat{a}_2} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ -\hat{a}_3\,(\theta_0-1) & \theta_0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \theta_1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \tag{7.2}$$

se obtiene (*c.f* (5.3)),

$$P_1(\lambda)=T(\lambda)P(\lambda)R=T(\lambda)\left[\begin{array}{ccccc|c}\lambda+1-\hat{a}_3 & -1 & 0 & \frac{-1+a_1+\hat{a}_3}{\hat{a}_3} & -1/\hat{a}_2 & 0\\ \hat{a}_3\,(-1+a_3) & \lambda+a_3 & -1 & 1-a_3 & \frac{\hat{a}_2-1+a_3}{\hat{a}_2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda+1/\tau & 0 & b_0\\ \hat{a}_3 & \theta_0 & \frac{\theta_0\,\theta_1}{\hat{a}_2} & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \theta_1 & 0 & -1 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & -1/\hat{a}_3 & 0 & 0\end{array}\right]R$$

$$= \left[\begin{array}{ccccc|c} \lambda+1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\hat{a}_3\,(\lambda+1) & \lambda+a_3 & -\frac{\theta_1\lambda+\hat{a}_2-\theta_1\hat{a}_2+\theta_1}{\hat{a}_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline -1+\theta_0 & -\frac{\theta_0}{\hat{a}_3} & 0 & -1/\hat{a}_3 & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{7.3}$$

La matriz sistema $P(\lambda)$ es entonces expresada como la concatenación de dos subsistemas que caracterizan la parte fija y variable de la dinámica del sistema en lazo cerrado, es decir (*c.f.* (5.4)):

$$\begin{aligned} &\underbrace{\left[\begin{array}{ccccc|c} \lambda+1-\hat{a}_3 & -1 & 0 & \frac{-1+a_1+\hat{a}_3}{\hat{a}_3} & -1/\hat{a}_2 & 0 \\ \hat{a}_3\,(-1+a_3) & \lambda+a_3 & -1 & 1-a_3 & \frac{\hat{a}_2-1+a_3}{\hat{a}_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda+1/\tau & 0 & b_0 \\ \hat{a}_3 & \theta_0 & \frac{\theta_0\,\theta_1}{\hat{a}_2} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_1 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1/\hat{a}_3 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{P(\lambda)} = \\ &\underbrace{\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/\hat{a}_2 & 1-a_1-\hat{a}_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{\hat{a}_2-1+a_3}{\hat{a}_2} & (-1+a_3)\,\hat{a}_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{(\lambda\tau+1)\hat{a}_3}{\tau} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{T(\lambda)^{-1}} \\ &\underbrace{\left[\begin{array}{ccccc|c} \lambda+1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\hat{a}_3\,(\lambda+1) & \lambda+a_3 & -\frac{\theta_1\lambda+\hat{a}_2-\theta_1\hat{a}_2+\theta_1}{\hat{a}_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline -1+\theta_0 & -\frac{\theta_0}{\hat{a}_3} & 0 & -1/\hat{a}_3 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{P_1(\lambda)} \\ &\underbrace{\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hat{a}_3 & 1 & \frac{\theta_1}{\hat{a}_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\hat{a}_3 & -\theta_0 & -\frac{\theta_0\,\theta_1}{\hat{a}_2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\theta_1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{R^{-1}} \end{aligned} \tag{7.4}$$

7.2.2 Descomposición de las matrices del sistema

En base a las matrices inversas de separación de subsistemas (7.2), $T(\lambda)^{-1}$ y R^{-1}, se descomponen las matrices del sistema en lazo cerrado E_{lc}, A_{lc}, B_{lc} y C_{lc}, como sigue (*c.f* (5.5)):

$$
\begin{aligned}
\lambda E_{lc} - A_{lc} &= \begin{bmatrix} \lambda+1-\hat{a}_3 & -1 & 0 & \frac{-1+a_1+\hat{a}_3}{\hat{a}_3} & -1/\hat{a}_2 \\ \hat{a}_3\,(-1+a_3) & \lambda+a_3 & -1 & 1-a_3 & \frac{\hat{a}_2-1+a_3}{\hat{a}_2} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda+1/\tau & 0 \\ \hat{a}_3 & \theta_0 & \frac{\theta_0\,\theta_1}{\hat{a}_2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\
&= \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & & 1/\hat{a}_2 & 1-a_1-\hat{a}_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & - & \frac{\hat{a}_2-1+a_3}{\hat{a}_2} & (-1+a_3)\,\hat{a}_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & 0 & -\frac{(\lambda\tau+1)\hat{a}_3}{\tau} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccccc|c} \lambda+1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\hat{a}_3\,(\lambda+1) & \lambda+a_3 & -\frac{\theta_1\lambda+\hat{a}_2-\theta_1\hat{a}_2+\theta_1}{\hat{a}_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline -1+\theta_0 & -\frac{\theta_0}{\hat{a}_3} & 0 & -1/\hat{a}_3 & 0 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hat{a}_3 & 1 & \frac{\theta_1}{\hat{a}_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\hat{a}_3 & -\theta_0 & -\frac{\theta_0\,\theta_1}{\hat{a}_2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\theta_1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \\
-C_{lc} &= \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & -1/\hat{a}_3 & 0 & 0 \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccccc|c} \lambda+1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\hat{a}_3\,(\lambda+1) & \lambda+a_3 & -\frac{\theta_1\lambda+\hat{a}_2-\theta_1\hat{a}_2+\theta_1}{\hat{a}_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline -1+\theta_0 & -\frac{\theta_0}{\hat{a}_3} & 0 & -1/\hat{a}_3 & 0 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hat{a}_3 & 1 & \frac{\theta_1}{\hat{a}_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\hat{a}_3 & -\theta_0 & -\frac{\theta_0\,\theta_1}{\hat{a}_2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\theta_1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \\
B_{lc} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & & 1/\hat{a}_2 & 1-a_1-\hat{a}_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & - & \frac{\hat{a}_2-1+a_3}{\hat{a}_2} & (-1+a_3)\,\hat{a}_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & 0 & -\frac{(\lambda\tau+1)\hat{a}_3}{\tau} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccccc|c} \lambda+1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\hat{a}_3\,(\lambda+1) & \lambda+a_3 & -\frac{\theta_1\lambda+\hat{a}_2-\theta_1\hat{a}_2+\theta_1}{\hat{a}_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline -1+\theta_0 & -\frac{\theta_0}{\hat{a}_3} & 0 & -1/\hat{a}_3 & 0 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 1 \end{array}\right]
\end{aligned}
\tag{7.5}
$$

7.2.3 Subsistemas de dinámica fija y variable

La respuesta homogenea de la representación del sistema en lazo cerrado (7.1), puede ser expresada como la concatenación de las siguientes representaciones:

$$
(\lambda E_{lc} - A_{lc}) = \begin{bmatrix} \lambda+1-\hat{a}_3 & -1 & 0 & \frac{-1+a_1+\hat{a}_3}{\hat{a}_3} & -1/\hat{a}_2 \\ \hat{a}_3\,(-1+a_3) & \lambda+a_3 & -1 & 1-a_3 & \frac{\hat{a}_2-1+a_3}{\hat{a}_2} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda+1/\tau & 0 \\ \hat{a}_3 & \theta_0 & \frac{\theta_0\,\theta_1}{\hat{a}_2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_1 & 0 & -1 \end{bmatrix} =
$$

$$
\underbrace{\left[\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&0 & \hat{a}_2^{-1} & 1-a_1-\hat{a}_3 \\ 0&1&0&0 & -\frac{\hat{a}_2-1+a_3}{\hat{a}_2} & (-1+a_3)\,\hat{a}_3 \\ 0&0&1&0 & 0 & -\frac{(\lambda\tau+1)\hat{a}_3}{\tau} \\ 0&0&0&1 & 0 & 0 \\ 0&0&0&0 & 1 & 0 \end{array}\right]}_{[M_1(\lambda)]}
$$

$$
\underbrace{\left[\begin{array}{ccccc|c} \lambda+1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\hat{a}_3\,(\lambda+1) & \lambda+a_3 & -\frac{\theta_1\lambda+\hat{a}_2-\theta_1\,\hat{a}_2+\theta_1}{\hat{a}_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline -1+\theta_0 & -\frac{\theta_0}{\hat{a}_3} & 0 & -\hat{a}_3^{-1} & 0 & 0 \end{array}\right]}_{[M_2(\lambda)]} \tag{7.6}
$$

$$
\underbrace{\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hat{a}_3 & 1 & \frac{\theta_1}{\hat{a}_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\hat{a}_3 & -\theta_0 & -\frac{\theta_0\,\theta_1}{\hat{a}_2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\theta_1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{[M_3(\lambda)]}
$$

es decir,

$$
\left[M_1\left(\frac{d}{dt}\right)\right] z = 0,\ \left[M_2\left(\frac{d}{dt}\right)\right] w = z,\ \left[M_3\left(\frac{d}{dt}\right)\right] x = w \tag{7.7}
$$

esto es,

$$
\left[\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&0 & 1/\hat{a}_2 & 1-a_1-\hat{a}_3 \\ 0&1&0&0 & -\frac{\hat{a}_2-1+a_3}{\hat{a}_2} & (-1+a_3)\,\hat{a}_3 \\ 0&0&1&0 & 0 & -\frac{\left(\frac{d}{dt}\tau+1\right)\hat{a}_3}{\tau} \\ 0&0&0&1 & 0 & 0 \\ 0&0&0&0 & 1 & 0 \end{array}\right] z = 0 \tag{7.8}
$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\hat{a}_3\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+1\right) & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+a_3 & -\frac{\theta_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+\hat{a}_2-\theta_1\hat{a}_2+\theta_1}{\hat{a}_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline -1+\theta_0 & -\frac{\theta_0}{\hat{a}_3} & 0 & -1/\hat{a}_3 & 0 & 0 \end{array}\right] w = z \tag{7.9}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hat{a}_3 & 1 & \frac{\theta_1}{\hat{a}_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\hat{a}_3 & -\theta_0 & -\frac{\theta_0\theta_1}{\hat{a}_2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\theta_1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] x = w \tag{7.10}$$

A fín de obtener las representaciones de estado de ambas dinámicas, se simplifican (7.8), (7.9) y (7.10). De (7.8) se obtiene: $z_5 = 0$ y $z_4 = 0$, es decir: $w_5 = 0$ y $w_4 = 0$. De (7.9) se obtiene: $w_6 = 0$. Finalmente de (7.10) se obtiene: $z_3 = 0$.

$$\begin{cases} \left(\tau\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+1\right) z_6 = 0 \\ z_1 = (a_1+\hat{a}_3-1) z_6 = \tilde{a} z_6 \\ z_2 = (1-a_3)\,\hat{a}_3 z_6 = \tilde{b} z_6 \end{cases} \tag{7.11}$$

Entonces de (7.9) y (7.11) se obtiene:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+1 & -1 & 0 \\ -\hat{a}_3\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+1\right) & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+a_3 & -\frac{\theta_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+\hat{a}_2-\theta_1\hat{a}_2+\theta_1}{\hat{a}_2} \\ -1+\theta_0 & -\frac{\theta_0}{\hat{a}_3} & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbb{B}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t})} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{a} \\ \tilde{b} \\ 1 \end{bmatrix} z_6 \tag{7.12}$$

En el apendice A.1 se muestra que (7.12) es equivalente a (*c.f* (5.11)):

$$\begin{cases} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{\tau}\right) z_6 = 0 \\ \theta_0\left(\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+1\right)w_1+(1-a_1)z_6\right)+\bar{\theta}_0\hat{a}_3\left(w_1-z_6\right) = 0 \\ \theta_0\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+1\right)\left(w_2+\hat{a}_3 z_6\right)+\bar{\theta}_0\hat{a}_3\left(w_2+\left(a_1+\hat{a}_3-\frac{1}{\tau}\right)z_6\right) = 0 \\ \theta_0\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+1\right)\left(\left(\theta_1\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+1\right)+\bar{\theta}_1\hat{a}_2\right)w_3+\left(a_1-\frac{1}{\tau}\right)\hat{a}_3\hat{a}_2 z_6\right)+ \\ \bar{\theta}_0\hat{a}_3\left(\left(\theta_1\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+1\right)+\bar{\theta}_1\hat{a}_2\right)w_3+\left(a_3-\frac{1}{\tau}\right)\left(a_1-\frac{1}{\tau}\right)\hat{a}_2 z_6\right) = 0 \end{cases} \tag{7.13}$$

7.3 Representaciones de estado

De (7.13) se obtienen cuatro representaciones de estado que se muestran en la siguiente tabla:

(θ_1, θ_0)	
$(1, 1)$	$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{\tau}\right)z_6=0$ $(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+1)w_1+(1-a_1)z_6=0$ $(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+1)\,(w_2+\hat{a}_3z_6)=0$ $(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+1)\left((\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+1)w_3+\left(a_1-\frac{1}{\tau}\right)\hat{a}_3\hat{a}_2z_6\right)=0$
$(0, 1)$	$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{\tau}\right)z_6=0$ $(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+1)w_1+(1-a_1)z_6=0$ $(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+1)\,(w_2+\hat{a}_3z_6)=0$ $(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+1)\left(w_3+\left(a_1-\frac{1}{\tau}\right)\hat{a}_3z_6\right)=0$
$(1, 0)$	$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{\tau}\right)z_6=0$ $w_1-z_6=0$ $w_2+(a_1+\hat{a}_3-\frac{1}{\tau})z_6=0$ $(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+1)w_3+(a_3-\frac{1}{\tau})(a_1-\frac{1}{\tau})\hat{a}_2z_6=0$
$(0, 0)$	$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{\tau}\right)z_6=0$ $w_1-z_6=0$ $w_2+(a_1+\hat{a}_3-\frac{1}{\tau})z_6=0$ $w_3+(a_3-\frac{1}{\tau})(a_1-\frac{1}{\tau})z_6=0$

Tabla 7.1 Casos dados para el sistema en lazo cerrado de los factores irreducibles de primer orden (ver (7.13)).

En seguida, se abordan los 4 casos mostrados en la tabla (7.1)

Caso 1 Primero se considera el caso: $(\theta_1, \theta_0) = (1, 1)$

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_6 \\ \dot{\bar{w}}_1 \\ \dot{\bar{w}}_2 \\ \dot{\bar{w}}_{31} \\ \dot{\bar{w}}_{32} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1/\tau & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 - 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ (1/\tau - a_1)\hat{a}_2\hat{a}_3 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}}_{A_{11}} \begin{bmatrix} z_6 \\ \bar{w}_1 \\ \bar{w}_2 \\ \bar{w}_{31} \\ \bar{w}_{32} \end{bmatrix} \tag{7.14}$$

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1\,0\,0\,0 \\ -\hat{a}_3 & 0\,1\,0\,0 \\ 0 & 0\,0\,0\,1 \end{bmatrix}}_{C_{11}} \begin{bmatrix} z_6 \\ \bar{w}_1 \\ \bar{w}_2 \\ \bar{w}_{31} \\ \bar{w}_{32} \end{bmatrix} \tag{7.15}$$

El correspondiente diagrama de bloques de la representación (7.14) y (7.15) , se muestra en la figura 7.1.

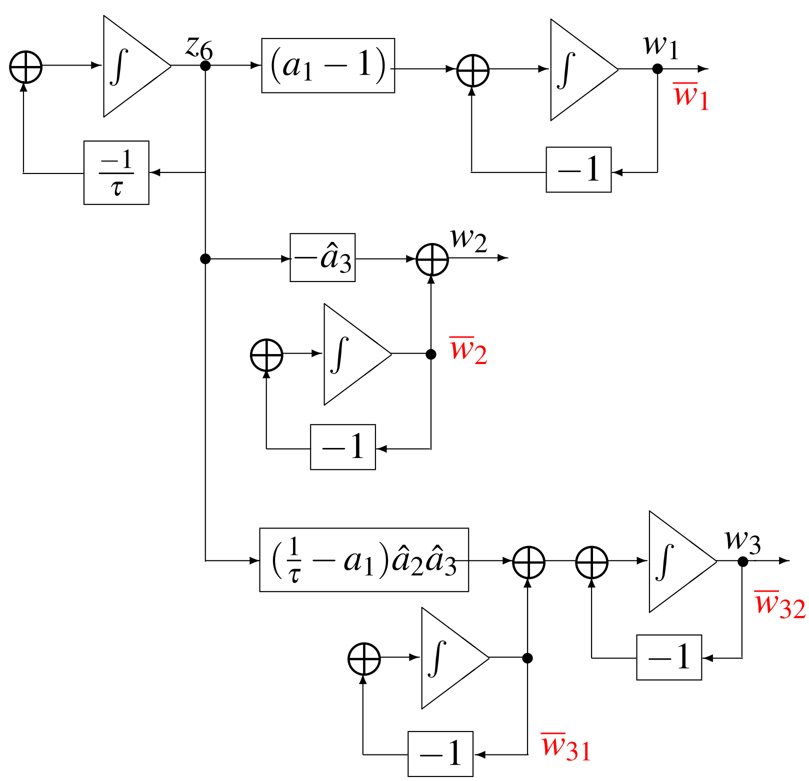

Figura 7.1 Diagrama del sistema representado por (7.14) y (7.15).

Caso 2 Ahora se considera el caso: $(\theta_1, \theta_0) = (0, 1)$

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_6 \\ \dot{\bar{w}}_1 \\ \dot{\bar{w}}_2 \\ \dot{\bar{w}}_{31} \\ \dot{\bar{w}}_{32} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{\tau} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 - 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ (a_I - 1/\tau)\,\hat{a}_3 \frac{1}{\tau} & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{A_{01}} \begin{bmatrix} z_6 \\ \bar{w}_1 \\ \bar{w}_2 \\ \bar{w}_{31} \\ \bar{w}_{32} \end{bmatrix} \tag{7.16}$$

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1\;0\;0\;0 \\ -\hat{a}_3 & 0\;1\;0\;0 \\ (\frac{1}{\tau} - a_1)\hat{a}_3 & 0\;0\;1\;0 \end{bmatrix}}_{C_{01}} \begin{bmatrix} z_6 \\ \bar{w}_1 \\ \bar{w}_2 \\ \bar{w}_{31} \\ \bar{w}_{32} \end{bmatrix} \tag{7.17}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} (\frac{1}{\tau} + a_1)\hat{a}_3 \; 0 \; 0 \; 1 \; -1 \end{bmatrix}}_{D_{01}} \begin{bmatrix} z_6 \\ \bar{w}_1 \\ \bar{w}_2 \\ \bar{w}_{31} \\ \bar{w}_{32} \end{bmatrix} \tag{7.18}$$

El correspondiente diagrama de bloques de la representación (7.16), (7.17) y (7.18), se muestra en la figura 7.2.

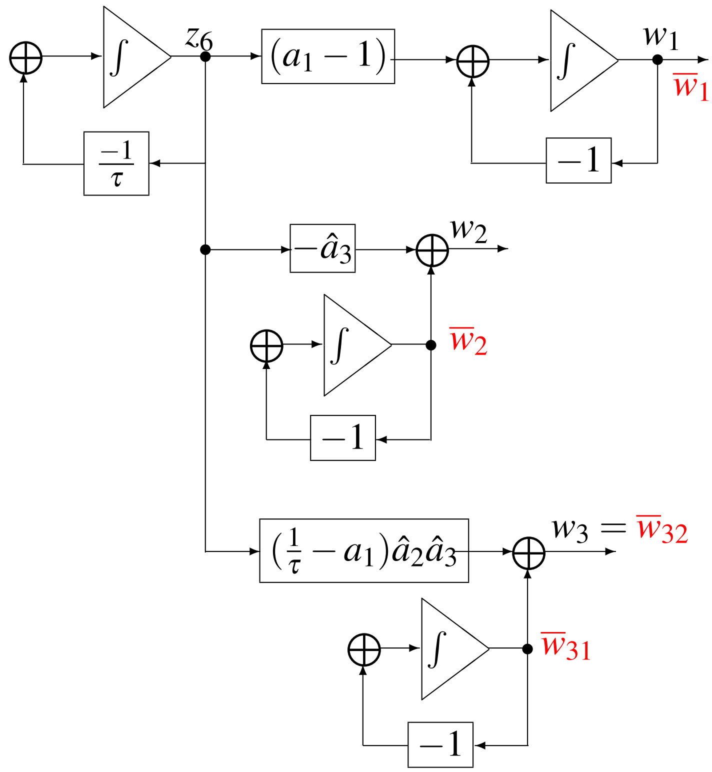

Figura 7.2 Diagrama del sistema representado por (7.16), (7.17) y (7.18).

Caso 3 Ahora se considera el caso: $(\theta_1, \theta_0) = (1, 0)$

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_6 \\ \dot{\bar{w}}_1 \\ \dot{\bar{w}}_2 \\ \dot{\bar{w}}_{31} \\ \dot{\bar{w}}_{32} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1/\tau & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/\tau & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (\frac{1}{\tau}-a_1)(a_3-\frac{1}{\tau})\hat{a}_2 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{A_{10}} \begin{bmatrix} z_6 \\ \bar{w}_1 \\ \bar{w}_2 \\ \bar{w}_{31} \\ \bar{w}_{32} \end{bmatrix} \tag{7.19}$$

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ (\frac{1}{\tau}-a_1-\hat{a}_3) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C_{10}} \begin{bmatrix} z_6 \\ \bar{w}_1 \\ \bar{w}_2 \\ \bar{w}_{31} \\ \bar{w}_{32} \end{bmatrix} \tag{7.20}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{D_{10}} \begin{bmatrix} z_6 \\ \bar{w}_1 \\ \bar{w}_2 \\ \bar{w}_{31} \\ \bar{w}_{32} \end{bmatrix} \tag{7.21}$$

El correspondiente diagrama de bloques de la representación (7.19), (7.20) y (7.21) se muestra en la figura 7.3.

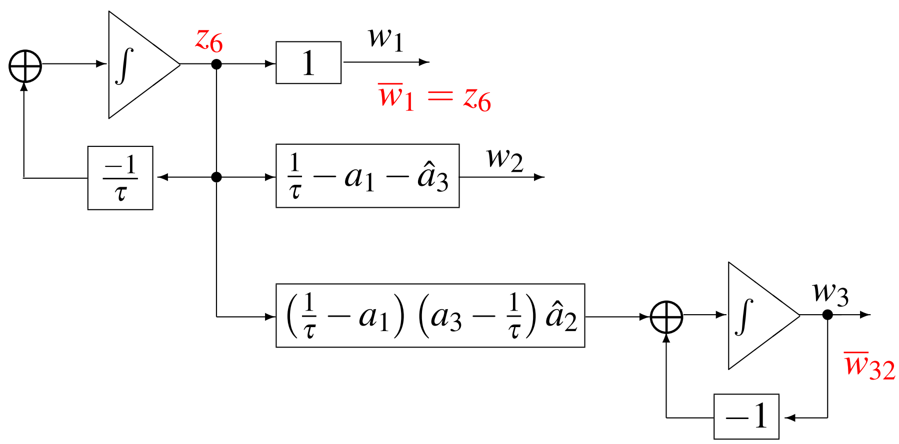

Figura 7.3 Diagrama del sistema representado por (7.19), (7.20) y (7.21).

Caso 4 Ahora se considera el caso: $(\theta_1, \theta_0) = (0, 0)$

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_6 \\ \dot{\bar{w}}_1 \\ \dot{\bar{w}}_2 \\ \dot{\bar{w}}_{31} \\ \dot{\bar{w}}_{32} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1/\tau & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/\tau & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(1/\tau - a_1)(a_3 - 1/\tau)\frac{1}{\tau} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A_{00}} \begin{bmatrix} z_6 \\ \bar{w}_1 \\ \bar{w}_2 \\ \bar{w}_{31} \\ \bar{w}_{32} \end{bmatrix} \tag{7.22}$$

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (\frac{1}{\tau} - a_1 - \hat{a}_3) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (\frac{1}{\tau} - a_1)(a_3 - \frac{1}{\tau}) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{C_{00}} \begin{bmatrix} z_6 \\ \bar{w}_1 \\ \bar{w}_2 \\ \bar{w}_{31} \\ \bar{w}_{32} \end{bmatrix} \tag{7.23}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ (\frac{1}{\tau} - a_1)(a_3 - \frac{1}{\tau}) & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{D_{00}} \begin{bmatrix} z_6 \\ \bar{w}_1 \\ \bar{w}_2 \\ \bar{w}_{31} \\ \bar{w}_{32} \end{bmatrix} \tag{7.24}$$

El correspondiente diagrama de bloques de la representación (7.22), (7.23) y (7.24) se muestra en la figura 7.4.

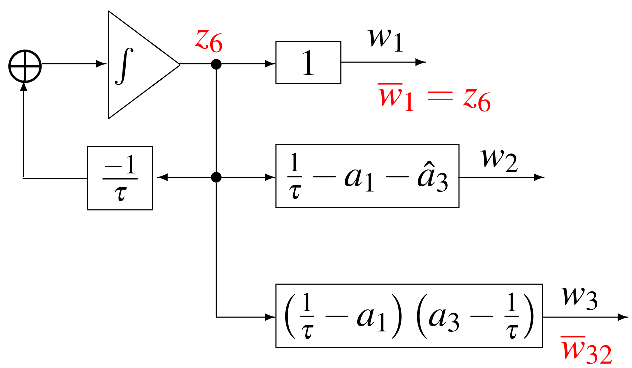

Figura 7.4 Diagrama del sistema representado por (7.22), (7.23) y (7.24).

7.4 Análisis de estabilidad

Sea el conjunto de indices $\mathscr{I} = \{(0,0),(0,1),(1,0),(0,0)\}$ y sean las siguientes matrices estables de las representaciones de estado (7.14), (7.16), (7.19) y (7.22) (*c.f* (5.19)):

$$\overline{A}_{11}=\begin{bmatrix}-1/\tau & 0 & 0 & 0 & 0\\ a_1-1 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0\\ (1/\tau-a_1)\hat{a}_2\hat{a}_3 & 0 & 0 & 1 & -1\end{bmatrix},\quad \overline{A}_{01}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\tau} & 0 & 0 & 0 & 0\\ a_1-1 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0\\ (a_1-1/\tau)\hat{a}_3\frac{1}{\tau} & 0 & 0 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

$$\overline{A}_{10}=\begin{bmatrix}-1/\tau & 0\,0\,0 & 0\\ -1/\tau & 0\,0\,0 & 0\\ 0 & 0\,0\,0 & 0\\ 0 & 0\,0\,0 & 0\\ (\frac{1}{\tau}-a_1)(a_3-\frac{1}{\tau})\hat{a}_2 & 0\,0\,0 & -1\end{bmatrix};\quad \overline{A}_{00}=\begin{bmatrix}-1/\tau & 0\,0\,0\,0\\ -1/\tau & 0\,0\,0\,0\\ 0 & 0\,0\,0\,0\\ 0 & 0\,0\,0\,0\\ -(1/\tau-a_1)(a_3-1/\tau)\frac{1}{\tau} & 0\,0\,0\,0\end{bmatrix} \tag{7.25}$$

Para analizar la estabilidad de las representaciones de estado, (7.14), (7.16), (7.19) y (7.22), se propone la siguiente función de Lyapunov cuadrática común ($x=\begin{bmatrix} z_6 \ \overline{w}_1 \ \overline{w}_2 \ \overline{w}_{31} \ \overline{w}_{32}\end{bmatrix}^T$):

$$V=x^TPx \tag{7.26}$$

donde P es una matriz simetrica, $P=P^T\in\mathbb{R}^{2\times 2}$, la cual debería ser definida positiva.

La derivada de la función de Lyapunov es entonces:

$$\mathrm{d}V/\mathrm{d}t=\begin{cases}\varphi_1=-x^TQ_{11}x,\ \text{Caso } (\theta_0,\theta_1)=(1,1)\\ \varphi_2=-x^TQ_{01}x,\ \text{Caso } (\theta_0,\theta_1)=(0,1)\\ \varphi_3=-x^TQ_{10}x,\ \text{Caso } (\theta_0,\theta_1)=(1,0)\\ \varphi_4=-x^TQ_{00}x,\ \text{Caso } (\theta_0,\theta_1)=(0,0)\end{cases}, \tag{7.27}$$

donde:

$$Q_i=-(\overline{A}_i^TP+P\overline{A}_i),\ \ i\in\mathscr{I} \tag{7.28}$$

Para encontrar condiciones suficientes de estabilidad, se siguen los siguientes pasos:

1. Primero se encuentran condiciones sobre la matriz P, para garantizar que sea definida positiva.
2. Posteriormente se obtienen las matrices Q_{11}, Q_{01}, Q_{10} y Q_{00}.
3. Finalmente se encuentran condiciones sobre las matrices Q_{11}, Q_{01}, Q_{10} y Q_{00}, para garantizar la negatividad de $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t$.

7.4.1 Matriz P

En base a la matriz $-(A_{11}^{-1}+A_{11}^{-T}) = \begin{bmatrix} k+\tau & (a_1-1)\,\tau & 0 & 0 & -(-1+a_1\,\tau)\,\hat{a}_2\,\hat{a}_3 \\ (a_1-1)\,\tau & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -(-1+a_1\,\tau)\,\hat{a}_2\,\hat{a}_3 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, se propone la siguiente matriz simétrica ($c.f$ (5.23)):

$$P = \begin{bmatrix} k+\tau & (a_1-1)\,\tau & 0 & 0 & -1/2\,(-1+a_1\,\tau)\,\hat{a}_2\,\hat{a}_3 \\ (a_1-1)\,\tau & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ -1/2\,(-1+a_1\,\tau)\,\hat{a}_2\,\hat{a}_3 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \tag{7.29}$$

Esta matriz será definida positiva solo si (ver apéndice A.2 y $c.f$ (5.24)):

$$\begin{cases} k > -\tau \\ k > -\tau + \tau^2({a_1}^2 - 2a_1 + 1) \\ k > -\tau + \tau^2({a_1}^2 - 2a_1 + 1) \\ k > -\tau + \tau^2({a_1}^2 - 2a_1 + 1) \\ k > -\tau + \tau^2({a_1}^2 - 2a_1 + 1) + \hat{a}_2^2\hat{a}_3^2(a_1^2\tau^2 - 2a_1\tau + 1) \end{cases} \tag{7.30}$$

7.4.2 Obtención de las matrices Q_{11}, Q_{01}, Q_{10} y Q_{00}

De (7.28), (7.29) y (7.25), se obtienen los siguientes cuatro casos:

1. Caso 1: $(\theta_0,\theta_1) = (0,0)$. La matriz Q_{11} es:

$$Q_{11} = -(\overline{A}_{11}^T P + P\overline{A}_{11}) = \begin{bmatrix} \bar{k}_1 & (a_1-1)\,\tau & 0 & 1/2\,\frac{(-1+a_1\,\tau)\hat{a}_2\,\hat{a}_3\,(\tau+1)}{\tau} & -1/2\,(-1+a_1\,\tau)\,\hat{a}_2\,\hat{a}_3 \\ (a_1-1)\,\tau & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1/2\,\frac{(-1+a_1\,\tau)\hat{a}_2\,\hat{a}_3\,(\tau+1)}{\tau} & 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ -1/2\,(-1+a_1\,\tau)\,\hat{a}_2\,\hat{a}_3 & 0 & 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \tag{7.31}$$

Donde:

$$\bar{k}_1 = 2\,\frac{k}{\tau} - \left(-2 - 2a_1\hat{a}_2^2\hat{a}_3^2 - (4a_1 - 2a_1^2 - 2 - a_1^2\hat{a}_2^2\hat{a}_3^2)\tau + \frac{\hat{a}_2^2\hat{a}_3^2}{\tau}\right)$$

2. Caso 2: $(\theta_0, \theta_1) = (0, 1)$. Para este caso, hay que notar de (7.18) que la componente $\bar{w}_{32}$ es una combinación lineal de las otras componentes. Por lo que no es necesaria incluirla en la derivada de la función de Lyapunov. En efecto con la ayuda de la restricción algebraica (7.18), se define la siguiente matriz de cambio de base:

$$T_{01} = \begin{bmatrix} 1 & 0\,0\,0 & 0 \\ 0 & 1\,0\,0 & 0 \\ 0 & 0\,1\,0 & 0 \\ 0 & 0\,0\,1 & 0 \\ (1/\tau - a_1)\hat{a}_3 & 0\,0\,1 & -1 \end{bmatrix} \tag{7.32}$$

obteniendose de esta manera:

$$T_{01}x = \begin{bmatrix} z_6 \\ \bar{w}_1 \\ \bar{w}_2 \\ \bar{w}_{31} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7.33}$$

Esto es:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{01} &= x^T(A_{01}^T P + PA_{01})x = (T_{01}x)^T T_{01}^{-T}(A_{01}^T P + PA_{01})T_{01}^{-1}(T_{01}x) \\ &= \begin{bmatrix} z_6 \; \bar{w}_1 \; \bar{w}_2 \; \bar{w}_{31} \; 0 \end{bmatrix} \left((A_{01}T_{01}^{-1})^T P T_{01}^{-1} + T_{01}^{-T} P (A_{01}T_{01}^{-1})\right) \begin{bmatrix} z_6 \\ \bar{w}_1 \\ \bar{w}_2 \\ \bar{w}_{31} \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} z_6 \; \bar{w}_1 \; \bar{w}_2 \; \bar{w}_{31} \end{bmatrix}}_{x_{01}^T} \underbrace{X_{01}^T\left((A_{01}T_{01}^{-1})^T P T_{01}^{-1} + T_{01}^{-T} P (A_{01}T_{01}^{-1})\right)X_{01}}_{-\bar{Q}_{01}} \begin{bmatrix} z_6 \\ \bar{w}_1 \\ \bar{w}_2 \\ \bar{w}_{31} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{7.34}$$

Donde:

$$X_{01} = \begin{bmatrix} 1\,0\,0\,0 \\ 0\,1\,0\,0 \\ 0\,0\,1\,0 \\ 0\,0\,0\,1 \\ 0\,0\,0\,0 \end{bmatrix} \tag{7.35}$$

Por lo que:

$$\dot{V}_{01} = -x_{01}^T \bar{Q}_{01} x_{01} \tag{7.36}$$

Donde finalmente se obtiene:

$$
\begin{aligned}
&\bar{Q}_{01} = -\left((A_{01}T_{01}^{-1}X_{01})^T P T_{01}^{-1}X_{01} + (T_{01}^{-1}X_{01})^T P (A_{01}T_{01}^{-1}X_{01})\right)\\
&\begin{bmatrix}
\bar{k}_2 & \tau\,(a_1-1) & 0 & -\frac{(-1+a_1\,\tau)\hat{a}_3\left(\hat{a}_2\,\tau^2+2\,\tau+2+\hat{a}_2\,\tau\right)}{2\tau^2}\\
(a_1-1)\,\tau & 2 & 0 & 0\\
0 & 0 & 2 & 0\\
-1/2\,\frac{(-1+a_1\,\tau)\hat{a}_3\left(\hat{a}_2\,\tau^2+2\,\tau+2+\hat{a}_2\,\tau\right)}{\tau^2} & 0 & 0 & 5
\end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{7.37}
$$

Donde:

$$
\bar{k}_2 = 2\,\frac{k}{\tau} - \left(-2\tau(2a_1-a_1^2-1) - 2(1+\hat{a}_3^2\hat{a}_2a_1^2) - (\hat{a}_3^2a_1(4\hat{a}_2+a_1)) - \frac{2(\hat{a}_3^2(\hat{a}_2-a_1))}{\tau^2} + \frac{\hat{a}_3^2}{\tau^3}\right)
$$

3. Caso 3: $(\theta_0,\theta_1)=(1,0)$

   Para este caso, hay que notar de (7.21) que las componentes $\bar{w}_1 = z_6$, $\bar{w}_2 = 0$ y $\bar{w}_{31} = 0$. Por lo que no es necesario incluirlas en la derivada de la función de Lyapunov. En efecto con la ayuda de las restricciones algebraicas de (7.21), se define la siguiente matriz de cambio de base:

$$
T_{10} = \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & -1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\tag{7.38}
$$

   obteniendose de esta manera:

$$
T_{10}x = \begin{bmatrix}
z_6\\
0\\
0\\
0\\
\bar{w}_{32}
\end{bmatrix}
\tag{7.39}
$$

   Esto es:

$$\begin{aligned}\dot{V}_{10} &= x^T(A_{10}^T P + PA_{10})x = (T_{10}x)^T T_{10}^{-T}(A_{10}^T P + PA_{10})T_{10}^{-1}(T_{10}x)\\ &= \begin{bmatrix} z_6 & 0 & 0 & 0 & \bar{w}_{32}\end{bmatrix}\left((A_{01}T_{10}^{-1})^T PT_{10}^{-1} + T_{10}^{-T}P(A_{01}T_{10}^{-1})\right)\begin{bmatrix} z_6\\ 0\\ 0\\ 0\\ \bar{w}_{32}\end{bmatrix}\\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} z_6 & \bar{w}_{32}\end{bmatrix}}_{x_{10}^T}\underbrace{X_{10}^T\left((A_{10}T_{10}^{-1})^T PT_{10}^{-1} + T_{10}^{-T}P(A_{10}T_{10}^{-1})\right)X_{10}}_{-\bar{Q}_{10}}\begin{bmatrix} z_6\\ \bar{w}_{32}\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{7.40}$$

Donde:

$$X_{10} = \begin{bmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \tag{7.41}$$

Por lo que:

$$\dot{V}_{10} = -x_{10}^T\bar{Q}_{10}x_{10} \tag{7.42}$$

Donde finalmente se obtiene:

$$\begin{aligned}\bar{Q}_{10} &= -\left((A_{10}T_{10}^{-1}X_{10})^T PT_{10}^{-1}X_{10} + (T_{10}^{-1}X_{10})^T P(A_{10}T_{10}^{-1}X_{10})\right)\\ &= \begin{bmatrix} \bar{k}_3 & -1/2\,\frac{(-1+a_1\tau)\hat{a}_2\left(\hat{a}_3\tau^2+\hat{a}_3\tau-a_3\tau+1\right)}{\tau^2}\\ -1/2\,\frac{(-1+a_1\tau)\hat{a}_2\left(\hat{a}_3\tau^2+\hat{a}_3\tau-a_3\tau+1\right)}{\tau^2} & 1\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{7.43}$$

Donde:

$$\bar{k}_3 = 2\,\frac{k}{\tau} - \left(\tau(\hat{a}_2^2\hat{a}_3a_1^2a_3) - (4a_1 - 2 + \hat{a}_2^2\hat{a}_3(a_1^2 + 2a_1a_3)) - \frac{(-\hat{a}_2^2\hat{a}_3(a_3 + 2a_1) + 2)}{\tau} - \frac{\hat{a}_2^2\hat{a}_3}{\tau^2}\right)$$

4. Caso 3: $(\theta_0, \theta_1) = (0,0)$ Para este caso, hay que notar de (7.24) que las componentes $\bar{w}_1 = z_6$, $\bar{w}_2 = 0$, $\bar{w}_{31} = 0$, $\bar{w}_{32} = (1/\tau - a_1)(a_3 - 1/\tau)z_6$. Por lo que no es necesario incluirlas en la derivada de la función de Lyapunov. En efecto con la ayuda de las restricciones algebraicas de (7.24), se define la siguiente matriz de cambio de base:

$$T_{00} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ (\frac{1}{\tau} - a_1)(a_3 - \frac{1}{\tau}) & 0 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix} \tag{7.44}$$

obteniendose de esta manera:

$$T_{00}x = \begin{bmatrix} z_6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7.45}$$

Esto es:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{00} &= x^T(A_{00}^T P + PA_{00})x = (T_{00}x)^T T_{00}^{-T}(A_{00}^T P + PA_{00})T_{00}^{-1}(T_{00}x) \\ &= \begin{bmatrix} z_6 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \end{bmatrix} \left((A_{00}T_{00}^{-1})^T PT_{00}^{-1} + T_{00}^{-T}P(A_{00}T_{00}^{-1})\right) \begin{bmatrix} z_6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} z_6 \end{bmatrix}}_{x_{00}^T} \underbrace{X_{00}^T\left((A_{10}T_{00}^{-1})^T PT_{00}^{-1} + T_{00}^{-T}P(A_{00}T_{00}^{-1})\right)X_{00}}_{-\bar{Q}_{00}} \begin{bmatrix} z_6 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{7.46}$$

Donde:

$$X_{00} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7.47}$$

Por lo que:

$$\dot{V}_{00} = -x_{00}^T \bar{Q}_{00} x_{00} \tag{7.48}$$

Donde finalmente se obtiene:

$$\bar{Q}_{00} = -\left((A_{00}T_{00}^{-1}X_{00})^T PT_{00}^{-1}X_{00} + (T_{00}^{-1}X_{00})^T P(A_{00}T_{00}^{-1}X_{00})\right) = \left[2\,\frac{k}{\tau} - f_{0,00}(\tau)\right] \tag{7.49}$$

Donde:

$$\begin{aligned} f_{0,00}(\tau) = -2\,\hat{a}_2\,\hat{a}_3\,a_1{}^2 a_3 - 4\,a_1 + 2 - \tfrac{a_1{}^2 a_3{}^2 - 2\hat{a}_2\,\hat{a}_3\,a_1{}^2 - 4\hat{a}_2\,\hat{a}_3\,a_1\,a_3 + 2}{\tau} \\ - \tfrac{4\hat{a}_2\,\hat{a}_3\,a_1 - 2\,a_1{}^2 a_3 + 2\hat{a}_2\,\hat{a}_3\,a_3 - 2\,a_1\,a_3{}^2}{t^2} - \tfrac{4\,a_1\,a_3 + a_3{}^2 + a_1{}^2 - 2\hat{a}_2\,\hat{a}_3}{\tau^3} - \tfrac{-2\,a_1 - 2\,a_3}{\tau^4} + \tfrac{1}{\tau^5} \end{aligned} \tag{7.50}$$

7.4.3 Condiciones de negatividad sobre la derivada de la función de Lyapunov

En esta sección se dan las condiciones que garantizan que la derivada de la función de Lyapunov (7.27)-(7.28) es no positiva.

7.4.3.1 Caso 1: $(\theta_0, \theta_1) = (1, 1)$

De (7.31), la matriz $\bar{Q}_{11}$ será semidefinida positiva solo si (ver sección A.3.1):

$$\begin{cases} k > \frac{\tau}{2} f_{0,11}(\tau) & = g_{0,11} \\ k > \frac{\tau}{4}\left(2f_{0,11}(\tau) + f_{1,11}(\tau)\right) & = g_{1,11} \\ k > \frac{\tau}{8}\left(4f_{0,11}(\tau) + f_{2,11}(\tau)\right) & = g_{2,11} \\ k > \frac{\tau}{8}\left(4f_{0,11}(\tau) + f_{3,11}(\tau)\right) & = g_{3,11} \\ k > \frac{\tau}{6}\left(3f_{0,11}(\tau) + f_{2,11}(\tau)\right) & = g_{4,11} \end{cases} \tag{7.51}$$

Donde:

$$\begin{aligned} f_{0,11}(\tau) &= \left(-2 - 2a_1\hat{a}_2^2\hat{a}_3^2 - (4a_1 - 2a_1^2 - 2 - a_1^2\hat{a}_2^2\hat{a}_3^2)\tau + \frac{\hat{a}_2^2\hat{a}_3^2}{\tau}\right) \\ f_{1,11}(\tau) &= (a_1^2 - a_1 + 1)\tau^2 \\ f_{2,11}(\tau) &= 2(a_1^2 - 2a_1 + 1)\tau^2 \\ f_{3,11}(\tau) &= \left(\hat{a}_3^2 a_1{}^2\hat{a}_2^2 + 2a_1{}^2 - 4a_1 + 2\right)\tau^2 + \left(2\hat{a}_3^2\hat{a}_2^2(a_1^2 - a_1)\right)\tau + \hat{a}_3^2\hat{a}_2^2(a_1^2 - 4a_1 + 1) + \frac{-2a_1\hat{a}_2^2\hat{a}_3^2 + 2\hat{a}_2^2\hat{a}_3^2}{\tau} + \frac{\hat{a}_2^2\hat{a}_3^2}{\tau^2} \\ f_{4,11}(\tau) &= \left(3\hat{a}_3^2 a_1{}^2\hat{a}_2^2 + 3/2\,a_1{}^2 - 3a_1 + 3/2\right)\tau^2 + \left(3\hat{a}_2^2\hat{a}_3^2(a_1^2 - 3a_1)\right)\tau + \hat{a}_3^2\hat{a}_2^2(a_1^2 - 6a_1 + 3) + \frac{3\hat{a}_2^2\hat{a}_3^2 - 2a_1\hat{a}_2^2\hat{a}_3^2}{\tau} + \frac{\hat{a}_2^2\hat{a}_3^2}{\tau^2} \end{aligned} \tag{7.52}$$

Entonces la condición para este caso es:

$$k > \max\{g_{0,11}, g_{1,11}, g_{2,11}, g_{3,11}, g_{4,11}\} \tag{7.53}$$

7.4.3.2 Caso 2: $(\theta_0, \theta_1) = (0, 1)$

De (7.37), la matriz $\bar{Q}_{01}$ será semidefinida positiva solo si (ver sección A.3.2):

$$\begin{cases} k > \frac{\tau}{2} f_{0,01}(\tau) & = g_{0,01} \\ k > \frac{\tau}{4}\left(2f_{0,01}(\tau) + f_{1,01}(\tau)\right) & = g_{1,01} \\ k > \frac{\tau}{8}\left(4f_{0,01}(\tau) + f_{2,01}(\tau)\right) & = g_{2,01} \\ k > \frac{\tau}{40}\left(20f_{0,01}(\tau) + f_{3,01}(\tau)\right) & = g_{3,01} \end{cases} \tag{7.54}$$

Donde:

$$\begin{aligned}
f_{0,01}(\tau) &= \left(-2\tau(2a_1 - a_1^2 - 1) - 2(1 + \hat{a}_3^2\hat{a}_2 a_1^2) - (\hat{a}_3^2 a_1(4\hat{a}_2 + a_1)) - \tfrac{2(\hat{a}_3^2(\hat{a}_2 - a_1))}{\tau^2} + \tfrac{\hat{a}_3^2}{\tau^3}\right) \\
f_{1,01}(\tau) &= \tau^2(a_1^2 - 2a_1 + 1) \\
f_{2,01}(\tau) &= 2\tau^2(a_1^2 - 2a_1 + 1) \\
f_{3,01}(\tau) &= \left(10{a_1}^2 + 10 - 20a_1 + \hat{a}_2^2{a_1}^2\hat{a}_2^2\right)\tau^2 + \left(2\hat{a}_2^2{a_1}^2\hat{a}_2^2 - 2a_1\hat{a}_2^2\hat{a}_2^2 + 4\hat{a}_2^2\hat{a}_2{a_1}^2\right)\tau \\
&\quad + \hat{a}_2^2{a_1}^2\hat{a}_2^2 + 4\hat{a}_2^2{a_1}^2 - 4a_1\hat{a}_2^2\hat{a}_2^2 + \hat{a}_2^2\hat{a}_2^2 - 8\hat{a}_2^2\hat{a}_2 a_1 + 8\hat{a}_2^2\hat{a}_2{a_1}^2 \\
&\quad + \tfrac{-16\hat{a}_2^2\hat{a}_2 a_1 - 2a_1\hat{a}_2^2\hat{a}_2^2 + 2\hat{a}_2^2\hat{a}_2^2 + 4\hat{a}_2^2\hat{a}_2{a_1}^2 + 8\hat{a}_2^2{a_1}^2 + 4\hat{a}_2^2\hat{a}_2 - 8\hat{a}_2^2 a_1}{\tau} \\
&\quad + \tfrac{4\hat{a}_2^2 - 8\hat{a}_2^2\hat{a}_2 a_1 + \hat{a}_2^2\hat{a}_2^2 + 4\hat{a}_2^2{a_1}^2 - 16\hat{a}_2^2 a_1 + 8\hat{a}_2^2\hat{a}_2}{\tau^2} + \tfrac{8\hat{a}_2^2 + 4\hat{a}_2^2\hat{a}_2 - 8\hat{a}_2^2 a_1}{\tau^3} + 4\tfrac{\hat{a}_2^2}{\tau^4}
\end{aligned} \tag{7.55}$$

Entonces la condición para este caso es:

$$k > \max\{g_{0,01} g_{1,01}, g_{2,01}, g_{3,01}\} \tag{7.56}$$

7.4.3.3 Caso 3: $(\theta_0, \theta_1) = (1,0)$

De (7.43), la matriz $\bar{Q}_{10}$ será semidefinida positiva solo si (ver sección A.3.3):

$$\begin{cases} k > \frac{\tau}{2} f_{0,10}(\tau) & = g_{0,10} \\ k > \frac{\tau}{2}\left(f_{0,10}(\tau) + f_{1,10}(\tau)\right) & = g_{1,10} \end{cases} \tag{7.57}$$

Donde:

$$\begin{aligned}
f_{0,10}(\tau) &= \left(\tau(\hat{a}_2^2\hat{a}_3 a_1^2 a_3) - (4a_1 - 2 + \hat{a}_2^2\hat{a}_3(a_1^2 + 2a_1a_3)) - \tfrac{(-\hat{a}_2^2\hat{a}_3(a_3 + 2a_1) + 2)}{\tau} - \tfrac{\hat{a}_2^2\hat{a}_3}{\tau^2}\right) \\
f_{1,10}(\tau) &= 1/4\,\hat{a}_2^2\hat{a}_3^2{a_1}^2\tau^2 + \left(-1/2\,\hat{a}_2^2\hat{a}_3^2 a_1 + 1/2\,\hat{a}_2^2\hat{a}_3^2{a_1}^2 - 1/2\,\hat{a}_2^2{a_1}^2\hat{a}_3 a_3\right)\tau + 1/2\,\hat{a}_2^2{a_1}^2\hat{a}_3 \\
&\quad + \hat{a}_2^2 a_1\hat{a}_3 a_3 - 1/2\,\hat{a}_2^2{a_1}^2\hat{a}_3 a_3 + 1/4\,\hat{a}_2^2\hat{a}_3^2{a_1}^2 + 1/4\,\hat{a}_2^2{a_1}^2{a_3}^2 - \hat{a}_2^2\hat{a}_3^2 a_1 + 1/4\,\hat{a}_2^2\hat{a}_3^2 \\
&\quad + \tfrac{-1/2\,\hat{a}_2^2\hat{a}_3 a_3 + \hat{a}_2^2 a_1\hat{a}_3 a_3 - \hat{a}_2^2 a_1\hat{a}_3 - 1/2\,\hat{a}_2^2 a_1{a_3}^2 - 1/2\,\hat{a}_2^2\hat{a}_3^2 a_1 - 1/2\,\hat{a}_2^2{a_1}^2 a_3 + 1/2\,\hat{a}_2^2\hat{a}_3^2 + 1/2\,\hat{a}_2^2{a_1}^2\hat{a}_3}{\tau} \\
&\quad + \tfrac{1/4\,\hat{a}_2^2{a_3}^2 + 1/4\,\hat{a}_2^2\hat{a}_3^2 - \hat{a}_2^2 a_1\hat{a}_3 - 1/2\,\hat{a}_2^2\hat{a}_3 a_3 + 1/4\,\hat{a}_2^2{a_1}^2 + \hat{a}_2^2 a_1 a_3 + 1/2\,\hat{a}_2^2\hat{a}_3}{\tau^2} + \tfrac{-1/2\,\hat{a}_2^2 a_1 - 1/2\,\hat{a}_2^2 a_3 + 1/2\,\hat{a}_2^2\hat{a}_3}{\tau^3} \\
&\quad + 1/4\,\tfrac{\hat{a}_2^2}{\tau^4}
\end{aligned} \tag{7.58}$$

Entonces la condición para este caso es:

$$k > \max\{g_{0,10}, g_{1,10}\} \tag{7.59}$$

7.4.3.4 Caso 4: $(\theta_0, \theta_1) = (0,0)$

De (7.49) la matriz $\bar{Q}_{00}$ será semidefinida positiva solo si (ver sección A.3.4):

$$k > \frac{\tau}{2} f_{0,00}(\tau) = g_{0,00} \tag{7.60}$$

Donde:

$$\begin{aligned}
f_{0,00}(\tau) &= -2\hat{a}_2\hat{a}_3{a_1}^2 a_3 - 4a_1 + 2 - \tfrac{{a_1}^2{a_3}^2 - 2\hat{a}_2\hat{a}_3{a_1}^2 - 4\hat{a}_2\hat{a}_3 a_1 a_3 + 2}{\tau} \\
&\quad - \tfrac{4\hat{a}_2\hat{a}_3 a_1 - 2{a_1}^2 a_3 + 2\hat{a}_2\hat{a}_3 a_3 - 2a_1{a_3}^2}{t^2} - \tfrac{4a_1a_3 + {a_3}^2 + {a_1}^2 - 2\hat{a}_2\hat{a}_3}{\tau^3} - \tfrac{-2a_1 - 2a_3}{\tau^4} + \tfrac{1}{\tau^5}
\end{aligned} \tag{7.61}$$

Entonces la condición para este caso es:

$$k > \max\{g_{0,00}\} \tag{7.62}$$

7.4.3.5 Condiciones necesarias de estabilidad

De las secciones 7.4.3.1, 7.4.3.2, 7.4.3.3 y 7.4.3.4 se concluye que la constante k de la matriz P, (7.29) debe satisfacer (ver (7.53), (7.56), (7.59) y (7.62)):

$$k > \max\{g_{0,11}, g_{1,11}, g_{2,11}, g_{3,11}, g_{4,11}, g_{0,01} g_{1,01}, g_{2,01}, g_{3,01}, g_{0,10}, g_{1,10}, g_{0,00}\} \tag{7.63}$$

Por lo que existe una k suficientemente grande tal que se garantiza la negatividad de la derivada de la función de Lyapunov (7.27)-(7.28). Esto es, para el sistema escalera (6.3), retroalimentado por la ley de control (6.11), se obtiene una estabilidad independiente de los parámetros del sistema (*c.f* (5.28)). Esta independencia se debe a la estructura particular de los sistemas escalera, el cual no fue el caso del ejemplo ilustrativo de los capítulos 3 y 5.

7.5 Conclusión

En este capítulo se encontraron condiciones suficientes de estabilidad para el sistema escalera en lazo cerrado visto en el capítulo anterior, utilizando la misma metodología vista en el capítulo 5.

Parte IV

Conclusiones y perspectivas

Conclusión

En este trabajo se encontraron condiciones suficientes de estabilidad para un sistema conmutado autónomo, representado a través de sistemas implícitos, controlado mediante una retroalimentación de estado proporcional y derivativa.

En la primera parte, se mostró como modelar y controlar a una clase de sistemas conmutados autónomos, mediante la teoría de los sistemas implícitos lineales. Para ello primero se aplicó una ley de control proporcional derivativa a un ejemplo ilustrativo de un sistema conmutado estudiado con la teoría de los sistemas implícitos, esta ley de control permitió hacer inobservable la variación de estructura interna. En esta parte se obtuvieron condiciones necesarias de estabilidad para el sistema en lazo cerrado, sin embargo se pudo ver que aun cuando sus matrices son Hurwitz, el sistema no siempre es estable, esto dio pauta al estudio de estabilidad del sistema, es decir, encontrar condiciones suficientes de estabilidad.

En la segunda parte, se mostró como encontrar una función de Lyapunov común para garantizar la estabilidad del sistema conmutado en lazo cerrado; esto se hizo mediante el ejemplo académico de la primera parte. Para encontrar las condiciones suficientes de estabilidad del sistema en lazo cerrado, se partió de la teoría expuesta por Narendra, en donde se propone una función de Lyapunov cuadratica común de la forma $V = x^T Px$, tal que su derivada a lo largo del tiempo es definida negativa. Se realizó el estudio a la matriz sistema del sistema en lazo cerrado y se logró expresar como la concatenación de dos subsistemas que caracterizan la dinámica fija y variable; esto permitió obtener dos casos, de los cuales se realizó el análisis de la estabilidad. Para ello primero se encontró una matriz P definida positiva y constante; esto con el fin de que no exista ningún problema para obtener su derivada con respecto al tiempo t. Posteriormente se obtuvieron las matrices Q_i, $i = 1, 2$, y finalmente se obtuvieron condiciones sobre estas matrices, para garantizar la negatividad de la función de Lyapunov propuesta. Para este ejemplo ilustrativo, se encontró que los parámetros del sistema deben permanecer dentro de una región de estabilidad, esto es su estabilidad depende de que sus parámetros se encuentren dentro de una región acotada.

Finalmente, en la tercera parte se extendieron los resultados de la segunda parte al caso de los sistema escalera. Para los sistemas escalera se obtuvo una estabilidad independiente de los parámetros del sistema. Esta independencia se debe a la estructura particular de este tipo de sistemas.

El resultado de este trabajo de tesis fue sometido al 50th CDC (Conference on Decision and Control) a realizarse en Orlando Florida de este año.

Perspectivas

Las perspectivas de este trabajo de tesis, son las siguientes:

1. Realizar el estudio de la segunda parte, para cuando se retroalimenta al ejemplo ilustrativo con la aproximación propia, de la retroalimentación proporcional derivativa, propuesta en [6].
2. Generalizar la metodología de la segunda parte al caso general.
3. Extender el estudio de la tercera parte a los sistemas escalera en general.

Publicación sometida

Apendice A

Estabilidad de sistemas escalera

A.1 Subsistemas de dinámica fija y variable

En esta sección se muestra la equivalencia entre (7.12) y (7.13). Para obtener (7.13), diagonalizaremos el operador $\mathbb{B}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t})$ de (7.12). Para esto, con el auxilio de la matriz adjunta de $\mathbb{B}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t})$,

$$
\begin{aligned}
Adj(\mathbb{B}(\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t})) &= \begin{bmatrix} -\frac{\left(\theta_1(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+1)+\bar{\theta}_1\hat{a}_2\right)\theta_0}{\hat{a}_3\,\hat{a}_2} & 0 & \frac{\theta_1(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+1)+\bar{\theta}_1\hat{a}_2}{\hat{a}_2} \\ \frac{\bar{\theta}_0\left(\theta_1(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+1)+\bar{\theta}_1\hat{a}_2\right)}{\hat{a}_2} & 0 & \frac{\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+1\right)\left(\theta_1(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+1)+\bar{\theta}_1\hat{a}_2\right)}{\hat{a}_2} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+\theta_0+\bar{\theta}_0 a_3 & \frac{\theta_0(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+1)+\bar{\theta}_0\hat{a}_3}{\hat{a}_3} & \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+1\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+a_3-\hat{a}_3\right) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\left(\theta_1(\frac{d}{dt}+1)+\bar{\theta}_1\hat{a}_2\right)}{\hat{a}_2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\left(\theta_1(\frac{d}{dt}+1)+\bar{\theta}_1\hat{a}_2\right)}{\hat{a}_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\theta_0}{\hat{a}_3} & 0 & 1 \\ \bar{\theta}_0 & 0 & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+1 \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+\theta_0+\bar{\theta}_0 a_3 & \frac{\theta_0(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+1)+\bar{\theta}_0\hat{a}_3}{\hat{a}_3} & \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+1\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+a_3-\hat{a}_3\right) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{A.1}
$$

se propone el siguiente operador:

$$
\mathbb{M}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}) = \begin{bmatrix} -\frac{\theta_0}{\hat{a}_3} & 0 & 1 \\ 1-\theta_0 & 0 & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+1 \\ \theta_0+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+a_3-a_3\theta_0 & \frac{\theta_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+\theta_0+\hat{a}_3-\theta_0\,\hat{a}_3}{\hat{a}_3} & \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+1\right)\left(-\hat{a}_3+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+a_3\right) \end{bmatrix} \tag{A.2}
$$

Aplicando por la izquierda el operador $\mathbb{M}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t})$ a (7.12), se obtiene:

$$
\underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{\theta_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \theta_0 + \hat{a}_3 - \theta_0 \hat{a}_3}{\hat{a}_3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\theta_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \theta_0 + \hat{a}_3 - \theta_0 \hat{a}_3}{\hat{a}_3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\left(\theta_1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \hat{a}_2 - \theta_1 \hat{a}_2 + \theta_1\right)\left(\theta_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \theta_0 + \hat{a}_3 - \theta_0 \hat{a}_3\right)}{\hat{a}_3 \hat{a}_2} \end{bmatrix}}_{\mathbb{M}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t})\mathbb{B}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t})} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} =
$$

$$
\underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{\theta_0}{\hat{a}_3} & 0 & 1 \\ 1-\theta_0 & 0 & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+1 \\ \theta_0 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + a_3 - a_3\,\theta_0 & \frac{\theta_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \theta_0 + \hat{a}_3 - \theta_0 \hat{a}_3}{\hat{a}_3} & \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+1\right)\left(-\hat{a}_3 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + a_3\right) \end{bmatrix}}_{\mathbb{M}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t})} \begin{bmatrix} \tilde{a} \\ \tilde{b} \\ 1 \end{bmatrix} z_6 \tag{A.3}
$$

Simplificando (A.3) y considerando a (7.11), se llega a (7.13).

A.2 Cofactores de la matriz P

$$
\begin{aligned}
\det\begin{bmatrix} p_{11} \end{bmatrix} &= k+\tau \\
\det\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} &= k+\tau-\tau^2({a_1}^2-2a_1+1) \\
\det\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} &= k+\tau-\tau^2({a_1}^2-2a_1+1) \\
\det\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{bmatrix} &= k+\tau-\tau^2({a_1}^2-2a_1+1) \\
\det\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} & p_{15} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} & p_{25} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} & p_{35} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} & p_{45} \\ p_{51} & p_{52} & p_{53} & p_{54} & p_{55} \end{bmatrix} &= k+\tau-\tau^2({a_1}^2-2a_1+1)-\hat{a}_2^2\hat{a}_3^2(a_1^2\tau^2-2a_1\tau+1)
\end{aligned} \tag{A.4}
$$

A.3 Cofactores de las matrices $\bar{Q}_{11}$, $\bar{Q}_{01}$, $\bar{Q}_{10}$ y $\bar{Q}_{00}$

A.3.1 Matriz $\bar{Q}_{11}$

$$
\begin{aligned}
\det\begin{bmatrix} q_{11} \end{bmatrix} &= \bar{k}_1 \\
\det\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix} &= 2\bar{k}_1 - f_{1,11}(\tau) \\
\det\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix} &= 4\bar{k}_1 - f_{2,11}(\tau) \\
\det\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & q_{24} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} & q_{34} \\ q_{41} & q_{42} & q_{43} & q_{44} \end{bmatrix} &= 4\bar{k}_1 - f_{3,11}(\tau) \\
\det\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} & q_{15} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & q_{24} & q_{25} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} & q_{34} & q_{35} \\ q_{41} & q_{42} & q_{43} & q_{44} & q_{45} \\ q_{51} & q_{52} & q_{53} & q_{54} & q_{55} \end{bmatrix} &= 3\bar{k}_1 - f_{4,11}(\tau)
\end{aligned}
\tag{A.5}
$$

donde las $f_{i,11}$, $i \in \{1, \cdots, 4\}$, estan definidas en (7.52).

A.3.2 Matriz $\bar{Q}_{01}$

$$
\begin{aligned}
\det\begin{bmatrix} q_{11} \end{bmatrix} &= \bar{k}_2 \\
\det\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix} &= 2\bar{k}_2 - f_{1,01}(\tau) \\
\det\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix} &= 4\bar{k}_2 - f_{2,01}(\tau) \\
\det\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & q_{24} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} & q_{34} \\ q_{41} & q_{42} & q_{43} & q_{44} \end{bmatrix} &= 20\bar{k}_2 - f_{3,01}(\tau)
\end{aligned}
\tag{A.6}
$$

donde las $f_{i,11}$, $i \in \{1, \cdots, 4\}$, estan definidas en (7.55).

A.3.3 Matriz $\bar{Q}_{10}$

$$
\begin{aligned}
\det \begin{bmatrix} q_{11} \end{bmatrix} &= \bar{k}_3 \\
\det \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix} &= 2\,\bar{k}_3 - f_{1,10}(\tau)
\end{aligned}
\tag{A.7}
$$

donde las $f_{i,11}$, $i \in \{1, \cdots, 4\}$, estan definidas en (7.58).

A.3.4 Matriz $\bar{Q}_{00}$

$$
\begin{aligned}
\det \begin{bmatrix} q_{11} \end{bmatrix} = {} & 2\,\frac{k}{\tau} - (-2\,\hat{a}_2\,\hat{a}_3\,a_1{}^2 a_3 - 4\,a_1 + 2 - \frac{a_1{}^2 a_3{}^2 - 2\,\hat{a}_2\,\hat{a}_3\,a_1{}^2 - 4\,\hat{a}_2\,\hat{a}_3\,a_1\,a_3 + 2}{\tau} \\
& - \frac{4\,\hat{a}_2\,\hat{a}_3\,a_1 - 2\,a_1{}^2 a_3 + 2\,\hat{a}_2\,\hat{a}_3\,a_3 - 2\,a_1\,a_3{}^2}{t^2} - \frac{4\,a_1\,a_3 + a_3{}^2 + a_1{}^2 - 2\,\hat{a}_2\,\hat{a}_3}{\tau^3} - \frac{-2\,a_1 - 2\,a_3}{\tau^4} + \frac{1}{\tau^5})
\end{aligned}
\tag{A.8}
$$

Referencias

1. **Armentano V.A. (1986).** The pencil $(sE-A)$ and controllability-observability for generalized linear systems: a geometric approach. *SIAM Journal on Control and Optimization* **24(4)**, 616–638.
2. **Bernhard P. (1982).** On singular implicit dynamical systems. *SIAM J* **20(5)**, 612–633.
3. **Bonilla, M. and M. Malabre (1990)**. One side invertibility for implicit descriptions. In: *29th Conference on Decision and Control*, 3601–3602.
4. **Bonilla M. and M. Malabre (2000)** More about non square implicit descriptions for modelling and control. *39th IEEE−CDC,* 3642-3647
5. **Bonilla M. and M. Malabre (2003)** On the control of linear systems having internal variations. *Automatica* Vol. 39, pp. 1989–1996
6. **Bonilla M., J. Pacheco and M. Malabre (2003).** Almost Rejection of Internal Structural Variations in Linear Systems *42nd IEEE–CDC*, 116–121.
7. **Bonilla M. and M. Malabre (2008).** Switching Systems: an Implicit Point of View. *8th Portuguese Conference on Automatic Control*, 637–642.
8. **Brenan, K.E., S.L. Campbell et L.R. Petzold, (1996)** Numerical Solution of Initial Value Problems in Differential Algebraic Equations. North Holland. Republished by SIAM, 1996
9. **Gantmacher, F.R. (1977). The Theory of Matrices**. Vol. II, *New York: Chelsea*.
10. **Karkanias, N. and G. Kalogeropoulus(1989).** Geometric theory and feedback invariants of generalized linear systems: a matrix pencil approach. *Circuits, Systems and Signal Processing*, **3**, 375–397.
11. **Kuijper, M., (1992)** First-order Representations of Linear Systems, *System and Control: Foundations and Applications.*
12. **Lebret, G. (1991)** Contribution à l'étude des systémes linéaires généralisés: approches géométrique et structurelle. *Thèse de Doctorat*, Université de Nantes, France, le 26 septembre 1991.
13. **Lebret, G. and J.J. Loiseau(1994).** Proportional and Proportional-derivative Canonical Forms for Descriptor Systems with Outputs. *Automatica*, **30(5)**, 847–864.
14. **Lewis, F.L. (1986)** A Survey of Linear Singular Systems, Circuits, Sysmtems and Signal Process, *Vol. 5, No. 1, pp 3-36*
15. **Lewis, F.L. (1992)** A tutorial on the geometric analysis of linear time-invariant implicit systems, *Automatica*
16. **Liberzon D. (2003)** Switching in Systems and Control. *Boston, MA: Birkhauser, series Systems and Control: Found. and App.*
17. **Loiseau, J.J. (1985).** Some geometric considerations about the Kronecker normal form. International Journal of Control **42(6)**, 1411–1431.
18. **Malabre M. (1989).** Generalized linear systems, geometric and structural approaches. Linear Algebra and its Applications **122/123/124**, 591–621.

19. **Narendra, K.S. and J. Balakrishnan (1994)** A Common Lyapunov Function for Stable LTI Systems with Commuting A-Matrices. *IEEE−TAC,* 39 , 2469 − 2471.

20. **Polderman, J.W., and J.C. Willems (1998)** Introduction to Mathematical Systems Theory: A Behavioral Approach. *New York: Springer−Verlag.*

21. **Rosenbrock,H.H., (1970)** State Space and Multivariable Theory, *ed. Wiley, New York*

22. **Shorten R.N. and K.S. Narendra (2002)** Necessary and sufficient conditions for the existence of a common quadratic Lyapunov function for a finite number of stable second order linear time-invariant systems. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing,* 16, 709-728

23. **Willems,J.C., (1983)** Input-output and state space representations of finite-dimensional linear time-invariant systems. *Linear Algebra and its Applications*