



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL INSTITUTO
POLITÉCNICO NACIONAL

DEPARTAMENTO DE CONTROL AUTOMÁTICO

MÉTODO DE INVERSIÓN POR LA DERECHA APLICADO A UN HELICÓPTERO

TESIS QUE PRESENTA:

Ing. Héctor Jonatan Hernández Marín

PARA OBTENER EL GRADO DE:

Maestría en Ciencias

EN LA ESPECIALIDAD DE:

Control Automático

Director de tesis:

Dr. Moisés Bonilla Estrada

A mi Dios

Por dar la fuerza y vigor a su pueblo. Bendito sea el Señor Dios de Israel.

Bendito sea el Dios y Padre de nuestro Señor Jesucristo.

Resumen

En esta tesis se muestra la viabilidad y eficacia del esquema de control, basado en el sistema inverso por la derecha, el cual asigna tanto el estado final como la salida del control final. Esto es útil cuando se desea llegar a una posición determinada con una fuerza final nula. Esta metodología propuesta se aplicó a un prototipo de laboratorio que consiste en un helicóptero de tres grados de libertad.

Abstract

This thesis shows the viability and the efficacy of the control scheme, based on the right inverse system, which assigns the final state, as well as the final control output. This is useful when one wants to reach a certain position with a null ending force. This methodology is applied to a laboratory prototype consisting of a helicopter of one degree of freedom.

Agradecimientos

A mi hermosa esposa Teresita de Jesús, por todo el apoyo incondicional que siempre me brinda día con día, y por sus sabios consejos, gracias por ser mi compañera ya que cordón de tres dobleces no se rompe pronto.

A mis hijos Gabriel Isaac, Maria Teresa, Miriam Esther y Santiago Salomón, por su motivación y por ser esa hermosa herencia que mi Dios nos ha dado en nuestro matrimonio.

A mi asesor el Dr. Moisés Bonilla Estrada, por su paciencia y dedicación.

A mis sinodales Dr. Rubén Alejandro Garrido Moctezuma y Dr. Sergio Salazar Cruz, por la revisión de esta tesis.

A mis maestros, compañeros y personal del laboratorio del DCA como el Dr. Rubén Garrido, Dr. Alberto Soria, Ing. José de Jesús Meza, Ing. Gerardo Castro y Ing. Roberto Lagunes.

Y por último agradezco a CONACyT, por la beca otorgada para realizar mis estudios de maestría.

Indice

1	Introducción	1
Parte I Preliminares teóricos		
2	Sistemas dinámicos	5
2.1	Introducción	5
2.2	Modelo matemático	5
2.2.1	Comportamiento	6
2.2.2	Ecuaciones comportamentales	6
2.2.3	Variables manifiestas y latentes	6
2.3	Sistemas dinámicos	7
2.4	Comportamiento definido por una ecuación diferencial	7
2.5	Representación estado/entrada	9
2.5.1	Propiedad de estado	9
2.5.2	Comportamiento de estado	10
2.6	Conclusiones	11
3	Controlabilidad del comportamiento	13
3.1	Introducción	13
3.2	Alcanzabilidad del estado	13
3.3	Forma canónica de Brunovsky	14
3.4	Caracterización comportamental	15
3.5	Problema de alcanzabilidad comportamental	15
3.6	Solución al Problema 3.1	16
3.7	Ejemplo ilustrativo	18
3.8	Conclusiones	21

4	Control implícito singularmente perturbado	25
4.1	Introducción	25
4.2	Definición de sistema y representaciones	25
4.3	Esquema de control singular implícito	26
4.4	Conclusiones	29
Parte II Modelado y control de un helicóptero de un grado de libertad		
5	Prototipo de laboratorio de un helicóptero de un grado de libertad	33
5.1	Introducción	33
5.2	Descripción del prototipo	33
5.3	Modelo del helicóptero	35
5.3.1	Geometría del diagrama esquemático	35
5.3.2	Modelo usando la técnica de Euler - Lagrange	37
5.4	Experimentos de laboratorio	38
5.5	Conclusiones	40
6	Linealización estática por retroalimentación de salida	41
6.1	Introducción	41
6.2	Linealización estática por retroalimentación de salida	41
6.3	Identificación de parámetros	43
6.3.1	Puntos de funcionamiento	44
6.3.2	Diagramas de Bode	44
6.3.3	Parámetros k , ω_n y ρ	46
6.3.4	Parámetros a_1 , a_2 y b	46
6.4	Refinación de la linealización por retroalimentación de salida	47
6.4.1	Diagramas de Bode	50
6.4.2	Modelos de los rangos de operación	52
6.5	Conclusiones	56
7	Linealización dinámica mediante el control implícito singularmente perturbado	57
7.1	Introducción	57
7.2	Control implícito singularmente perturbado para el helicóptero	57
7.3	Resultados experimentales	58
7.3.1	Puntos de funcionamiento	58
7.3.2	Diagramas de Bode	60

Indice	xi
7.4 Modelos de los rangos de operación	60
7.5 Conclusiones	62
8 Controlabilidad del comportamiento utilizando el modelo del prototipo de laboratorio	63
8.1 Introducción	63
8.2 Seguimiento del comportamiento, (u, x) , del helicóptero	63
8.2.1 Simulación de los modelos incrementales	64
8.2.2 Problema de Control	64
8.2.3 Ley de Control	64
8.2.4 Referencias	67
8.3 Resultados de la Simulación Matlab Simulink [®]	69
8.3.1 Simulación con velocidad y aceleración de referencia final nulas	70
8.3.2 Simulación con aceleración de referencia final nula	71
8.3.3 Simulación con velocidad y aceleración de referencia final no nulas	71
8.3.4 Comparación de resultados	72
8.4 Problemas de Implementación Numérica	74
8.5 Conclusiones	75
9 Conclusión	77
A Derivación de señales ruidosas	79
A.1 Introducción	79
A.2 Filtro de Gauss	80
A.3 Causalidad del filtro de Gauss	81
A.4 Aproximación práctica del filtro de Gauss	81
A.5 Programa que calcula los coeficientes del filtro de Gauss	82
A.6 Filtro causal de quinto orden	83
A.6.1 Resultados experimentales	84
Referencias	87

Capítulo 1

Introducción

El objetivo de esta tesis es probar la viabilidad y eficacia del esquema de control, basado en el sistema inverso por la derecha, recientemente desarrollado en [1, 2]. El objetivo de este esquema de control es el de asignar tanto el estado final, como la salida de control final. Esto es útil cuando se desea llegar a una posición determinada con una fuerza final nula.

Para esto, se seleccionó un prototipo de laboratorio que consiste en un helicóptero de 3 grados de libertad, en el cual solamente se ocupó un grado de libertad. Con este prototipo se buscó seguir una referencia, en un tiempo finito, y con una aceleración final nula, es decir, que el helicóptero aterrice suavemente.

La tesis se divide en dos partes, la primera parte, compuesta por los capítulos 2, 3 y 4, muestra los preliminares teóricos, y la segunda parte, compuesta por los capítulos 5, 6, 7 y 8, muestra el modelado y control de un prototipo experimental de un helicóptero de un grado de libertad.

La parte I comienza con el capítulo 2, donde se dan definiciones matemáticas de los sistemas dinámicos, introducidas por Willems [16] (véase también la referencia de síntesis de Polderman y Willems [14]), tales como: el *comportamiento*, *ecuaciones comportamentales*, *sistemas dinámicos* y *comportamiento definido por una ecuación diferencial*. Con respecto al *comportamiento definido por una ecuación diferencial*, se recuerdan algunas propiedades importantes, como son: las soluciones fuertes y débiles, la representación de un sistema estado/entrada y su comportamiento basado en el estado.

El capítulo 3 muestra el concepto de alcanzabilidad de estado; también se recuerdan las caracterizaciones y representaciones de Kalman [6, 7], Wonham [17] y de Brunovsky [3]. Para esta última, se muestra una representación de estado alcanzable como la forma canónica de Brunovsky, en la cual se introducen los índices de controlabilidad. Se recuerda la definición de la alcanzabilidad comportamental introducida por Willems [16]. También se establece el problema de alcanzabilidad comportamental que se desea resolver; el cual consiste en encontrar una ley de control que lleve al sistema (en este caso al prototipo experimental helicóptero) de un ángulo inicial, hasta una

referencia, ángulo final, en un tiempo finito, con una aceleración final igual a cero. En la sección 3.7 se muestra con un ejemplo ilustrativo.

La parte I termina con el capítulo 4, donde se describe un control implícito singularmente perturbado, para sistemas lineales variantes en el tiempo con una entrada y una salida (SISO), desarrollado por Puga y Bonilla [15], cuyo objetivo es el de obtener un sistema en lazo cerrado que se aproxime a un sistema lineal invariante en el tiempo. Este esquema de control está compuesto por un controlador singularmente perturbado y un filtro ecualizador. El sistema en lazo cerrado resultante es un sistema lineal singularmente perturbado con un comportamiento asintóticamente estable.

La parte II comienza con el capítulo 5, en el cual se obtiene el modelo matemático no lineal, del prototipo de laboratorio utilizado en esta tesis.

En el capítulo 6, se muestra una linealización estática por retroalimentación de salida, con la cual se compensa, en estado permanente, la componente no lineal obtenida del modelo del helicóptero, descrito en el capítulo 5.

En el capítulo 7 se obtiene un comportamiento, cercano a un sistema lineal invariante en el tiempo. Para esto, se aplica el esquema de control implícito singularmente perturbado, descrito en el capítulo 4.

Una vez obtenido los modelos lineal invariante en el tiempo, en el capítulo 8 se aplica, al modelo del helicóptero, el esquema de control basado en el sistema inverso por la derecha, descrito en la sección 3.7. El objetivo de este esquema de control es que el helicóptero llegue a una referencia, ángulo final, en un tiempo finito, con una aceleración nula. Esto es, se desea aterrizar al helicóptero suavemente.

Finalmente, en el capítulo 9 se concluye.

Parte I

Preliminares teóricos

Capítulo 2

Sistemas dinámicos

2.1 Introducción

En este capítulo se muestran algunas definiciones de algunos elementos teóricos a utilizar, como el modelo matemático en el cual se integran las ecuaciones comportamentales, el comportamiento, variables manifiestas y variables latentes. Y de esto se parte para definir un sistema dinámico según Polderman y Willems [14] y por ende el comportamiento definido por una ecuación diferencial. Y concluimos con una definición de la representación estado/entrada mencionando algunas propiedades y su comportamiento de estado.

En esta tesis adoptaremos la definición que le da Willems [16] a un sistema dinámico con un enfoque comportamental, véase también la referencia de síntesis de Polderman y Willems [14].

2.2 Modelo matemático

Intuitivamente un modelo matemático, selecciona un cierto subconjunto de un universo de posibilidades. Este subconjunto consiste de ocurrencias (eventos) que el modelo permite, en otras palabras se llama el comportamiento del modelo matemático.

Una estructura esencial del modelo es:

- Comportamiento.
- Ecuaciones comportamentales.
- Variables manifiestas y latentes.

2.2.1 *Comportamiento*

Un modelo matemático, puede verse como un subconjunto \mathbb{B} , llamado el comportamiento, de un universo \mathbb{U} :

Definición 2.1. [14] Un modelo matemático es un par (\mathbb{U}, \mathbb{B}) siendo \mathbb{U} un conjunto llamado el universo - y sus elementos son llamados eventos - y \mathbb{B} es un subconjunto de \mathbb{U} , llamado el comportamiento.

2.2.2 *Ecuaciones comportamentales*

Las ecuaciones del comportamiento sirven para especificar a \mathbb{B} , como el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones:

Definición 2.2. [14] Sea \mathbb{U} un universo, \mathbb{E} un conjunto, y un par de funciones, $f_1 : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{E}$ y $f_2 : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{E}$. El modelo matemático (\mathbb{U}, \mathbb{B}) con:

$$\mathbb{B} = \{u \in \mathbb{U} \mid f_1(u) = f_2(u)\}$$

Se dice que es descrito por ecuaciones comportamentales y es denotado por $(\mathbb{U}, \mathbb{B}, f_1, f_2)$. El conjunto \mathbb{E} es llamado espacio de ecuaciones. También a $(\mathbb{U}, \mathbb{B}, f_1, f_2)$ se le llama una representación en ecuaciones comportamentales del modelo de (\mathbb{U}, \mathbb{B}) .

2.2.3 *Variables manifiestas y latentes*

Las variables manifiestas son aquellas que describen al modelo del comportamiento. Las variables latentes son variables auxiliares introducidas en el proceso de modelado. Los primeros modelos suelen ser dados por ecuaciones que involucran tanto variables manifiestas como latentes. A estas ecuaciones se les llama comportamiento completo:

Definición 2.3. [14] Un modelo matemático con variables latentes está definido por la tripleta:

$$(\mathbb{U}, \mathbb{U}_\ell, \mathbb{B}_f)$$

Con:

\mathbb{U} : Universo de variables manifiestas.

\mathbb{U}_ℓ : Universo de variables latentes.

$\mathbb{B}_f \subseteq \mathbb{U} \times \mathbb{U}_\ell$: El comportamiento completo.

Se define el modelo matemático manifiesto (\mathbb{U}, \mathbb{B}) con:

$$\mathbb{B} := \{u \in \mathbb{U} \mid \exists \ell \in \mathbb{U}_\ell \text{ t.q. } (u, \ell) \in \mathbb{B}_f\}$$

A \mathbb{B} se le llama el comportamiento manifiesto (ó comportamiento externo) ó simplemente el comportamiento. A $(\mathbb{U}, \mathbb{U}_\ell, \mathbb{B}_f)$ se le llama una representación latente de (\mathbb{U}, \mathbb{B}) .

2.3 Sistemas dinámicos

Un sistema dinámico es un modelo matemático de un fenómeno el cual se desarrolla en el tiempo. Un sistema dinámico está definido para tres conjuntos: El eje de tiempo \mathbb{T} , un subconjunto de \mathbb{R} formado por los instantes de tiempo relevantes; el espacio señal \mathbb{W} , un conjunto donde las trayectorias tiempo toman sus valores; y el comportamiento \mathbb{B} , un subconjunto de¹ $\mathbb{W}^{\mathbb{T}}$, el cual consiste de todas las trayectorias $\mathbb{W} : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{W}$, que de acuerdo con el modelo pueden ocurrir. Así un sistema dinámico se define como una tripleta $\Sigma = (\mathbb{T}, \mathbb{W}, \mathbb{B})$:

Definición 2.4. [14]

Un sistema dinámico Σ está definido por la tripleta:

$$\Sigma = (\mathbb{T}, \mathbb{W}, \mathbb{B})$$

Con:

$\mathbb{T} \subseteq \mathbb{R}$: Llamado eje del tiempo.

\mathbb{W} : Un conjunto llamado espacio señal.

$\mathbb{B} \subseteq \mathbb{W}^{\mathbb{T}}$: Llamado comportamiento.

Típicamente \mathbb{T} especifica al conjunto de tiempos relevantes del problema. Usualmente \mathbb{T} es igual a \mathbb{R} ó \mathbb{R}^+ , o más general, igual a un intervalo en \mathbb{R} .

2.4 Comportamiento definido por una ecuación diferencial

Para definir el comportamiento mediante la ecuación diferencial,

$$R(d/dt)\omega = 0, \quad R(\xi) \in \mathbb{R}^{g \times q}[\xi] \quad (2.1)$$

se necesita definir lo que se entiende por una solución fuerte y una solución débil:

¹ $\mathbb{W}^{\mathbb{T}}$ es una notación matemática estándar de la colección de todos los mapas de \mathbb{T} a \mathbb{W} .

Definición 2.5. [14] (Solución fuerte). Una función $\omega : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^q$ es llamada una solución fuerte de (2.1), si las componentes de ω son tantas veces diferenciables como sea requerido por (2.1) y es una solución en el sentido ordinario, esto es si:

$$(R(d/dt)\omega)(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Definición 2.6. [14] (Solución débil). Considere (2.1). Defina el operador integral actuado en $L_1^{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^q)$ por:

$$\left(\int \omega\right)(t) := \int_0^t \omega(\tau) d\tau, \quad \left(\int^{k+1} \omega\right)(t) := \int_0^t \left(\int^k \omega\right)(\tau) d\tau, \quad k \geq 1$$

Para $R(\xi)$ asociamos la matriz polinomial $R^*(\xi)$ definida como sigue. Sea L la matriz potencial de ξ que aparece en $R(\xi)$:

$$R(\xi) = R_0 + R_1\xi + \dots + R_L\xi^L, \quad R_L \neq 0 \quad (2.2)$$

Defina

$$R^*(\xi) := \xi^L R\left(\frac{1}{\xi}\right) = R_L + R_{L-1}\xi + \dots + R_1\xi^{L-1} + R_0\xi^L$$

Ahora considere la ecuación integral

$$\left((R_0\left(\int\right)^L + R_1\left(\int\right)^{L-1} + \dots + R_{L-1}\int + R_L)\omega\right)(t) = c_0 + c_1t + \dots + c_{L-1}t^{L-1},$$

con $c_i \in \mathbb{R}$, ó, en notación compacta.

$$\left(R^*\left(\int\right)\omega\right)(t) = c_0 + c_1t + \dots + c_{L-1}t^{L-1}, \quad c_i \in \mathbb{R}^g \quad (2.3)$$

Se dice que $\omega \in L_1^{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^q)$ es una solución débil de (2.1) si existen vectores constantes $c_i \in \mathbb{R}^g$ tal que (2.3) es satisfecha para casi todo $t \in \mathbb{R}$.

Cada solución fuerte es una solución débil, y cada solución débil que sea lo suficientemente suave es una solución fuerte:

Teorema 2.1. [14] Considere el comportamiento definido por (2.1), entonces:

1. Cada solución fuerte de (2.1) es también solución débil.
2. Cada solución débil que es suficientemente suave (en la notación de (2.2) L veces diferenciable) es una solución fuerte.

Cada solución débil puede ser aproximada por una secuencia infinitamente diferenciable. En otras palabras, la parte C^∞ del comportamiento es densa en el comportamiento:

Corolario 2.1. [14] Sea $R(\xi) \in \mathbb{R}^{g1 \times q}[\xi]$ y sea \mathbb{B} el comportamiento definido por $R(d/dt)\omega = 0$. Para cada $\omega \in \mathbb{B}$ existe una secuencia $\omega_k \in \mathbb{B} \cap C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^q)$ tal que ω_k converge a ω en $L_1^{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^q)$.

Definición 2.7. [14] La ecuación diferencial (2.1) define el sistema dinámico como:

$$\mathbb{B} := \left\{ \omega \in L_1^{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^q) \mid \omega \text{ es una solución débil de } R \left(\frac{d}{dt} \right) \omega = 0 \right\} \quad (2.4)$$

2.5 Representación estado/entrada

En el caso de haber hecho una separación de variables manifiestas, w , y variables latentes, ℓ , (ver sección 2.2.3), se tienen los siguientes comportamientos:

Definición 2.8. El comportamiento completo \mathbb{B}_f y el comportamiento manifiesto \mathbb{B} representado por la ecuación:

$$R \left(\frac{d}{dt} \right) \omega = M \left(\frac{d}{dt} \right) \ell, \quad (2.5)$$

son definidos como:

$$\begin{aligned} \mathbb{B}_f &= \{ (\omega, \ell) \in L_1^{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^d) \mid (\omega, \ell) \text{ satisface (2.5) débilmente} \} \\ \mathbb{B} &= \{ \omega \in L_1^{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^q) \mid \exists \ell \in L_1^{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d) \text{ tal que } (\omega, \ell) \in \mathbb{B}_f \} \end{aligned} \quad (2.6)$$

2.5.1 Propiedad de estado

Una clase especial de modelos de variables latentes son las de primer - orden en las variables latentes y orden - cero en las variables manifiestas. Estos modelos tienen la propiedad de estado:

Definición 2.9. [14] (Propiedad de estado). Considere las variables latentes del sistema definido por (2.6). Sea $(\omega_1, \ell_1), (\omega_2, \ell_2) \in \mathbb{B}_f$ y $t_0 \in \mathbb{R}$ y suponga que ℓ_1, ℓ_2 son continuos. Defina la concatenación de (ω_1, ℓ_1) y (ω_2, ℓ_2) en t_0 por (ω, ℓ) , con:

$$\omega(t) = \begin{cases} \omega_1(t) & t < t_0, \\ \omega_2(t) & t \geq t_0, \end{cases} \quad \text{y} \quad \ell(t) = \begin{cases} \ell_1(t) & t < t_0, \\ \ell_2(t) & t \geq t_0. \end{cases} \quad (2.7)$$

Entonces \mathbb{B}_f es llamado un modelo de espacio de estado, y la variable latente ℓ es llamada el estado, si: $\ell_1(t_0) = \ell_2(t_0)$ implica: $(\omega, \ell) \in \mathbb{B}_f$

Dicho en otras palabras, *el posible futuro de una trayectoria es completamente determinada por el valor de las variables de estado en el momento presente y no depende del pasado de la trayectoria.*

Una importante clase de modelos de espacio de estado es la formada por modelos *entrada/estado (e/es)* invariantes en el tiempo, $\Sigma^{ees}(A, B)$, de la forma:

$$\frac{d}{dt}x = Ax + Bu \quad (2.8)$$

Donde:

- $u \in L_1^{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ es la entrada.
- $x \in L_1^{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ es el estado.

Por lo tanto, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Usualmente se asume que $\ker B = 0$.

El comportamiento completo definido por (2.8) es:

$$\mathbb{B}_{e/es} = \left\{ (u, x) \in L_1^{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n) \mid (2.8) \text{ se cumple débilmente} \right\} \quad (2.9)$$

Teorema 2.2. [14] *La representación (2.8) es una representación de espacio de estado.*

La propiedad de estado es la propiedad fundamental de x , puesto que mediante $x(t_0)$ divide el pasado y el futuro del comportamiento. En efecto, si se toman dos trayectorias $(u_1, x_1), (u_2, x_2) \in \mathbb{B}_{e/es}$, se restringe la primera trayectoria $(-\infty, t_0)$, el pasado de (u_1, x_1) , y se le llama (u_1^-, x_1^-) , y análogamente se denota a la restricción de (u_2, x_2) en el intervalo $[t_0, \infty)$, el futuro de (u_2, x_2) , por (u_2^+, x_2^+) , entonces el pasado de (u_1, x_1) y el futuro de (u_2, x_2) se pueden unir (esto es, concatenarse) en el tiempo t_0 , para formar una trayectoria en el comportamiento, cuando $x_1(t_0)$ y $x_2(t_0)$ son iguales. Esto significa que el estado en un tiempo t_0 contiene toda la información acerca del pasado que se necesita para decidir cuando es posible la unión de las trayectorias. Dicho de otra manera, dado $x(t_0)$, en lo que concierne al futuro, se puede olvidar todo lo acontecido antes de t_0 , ya que esta información se encuentra memorizada en $x(t_0)$.

2.5.2 Comportamiento de estado

Dado que:

Corolario 2.2. [14] *Las trayectorias $(u, x) \in \mathbb{B}_{e/es}$ son de la forma*

$$x(t) = e^{At}c + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau, \quad c \in \mathbb{R}^n. \quad (2.10)$$

Entonces el comportamiento (2.9) se expresa explícitamente de la siguiente manera:

$$\mathbb{B}_{e/es} = \left\{ (u, x) \in L_1^{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n) \mid \exists c \in \mathbb{R}^n, x(t) = e^{At}c + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \right\} \quad (2.11)$$

Propiedad 2.1. [14] *Considere el sistema entrada - estado definido por (2.8)*

Entonces:

1. x tiene la propiedad de estado.
2. El sistema tiene la propiedad del determinismo. Esto es definido como sigue. Sea $(u_1, x_1), (u_2, x_2) \in \mathbb{B}_{e/es}$ y suponga que para algún $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_1(t_0) = x_2(t_0)$, y $u_1(t) = u_2(t)$ para $t \geq t_0$. Entonces $x_1(t) = x_2(t)$ para $t \geq t_0$.

Observación 2.1. La propiedad del determinismo expresa que el estado al tiempo t_0 y la entrada a partir de t_0 determina unívocamente la salida desde t_0 . Esto muestra el papel crucial de la entrada, o bien la variable externa que maneja al sistema.

Teorema 2.3. [14] *Considere el comportamiento $\mathbb{B} \in L_1^{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$, no necesariamente lineal ó invariante en el tiempo, consistiendo de las trayectorias (u, x) . Asuma que u es libre en $L_1^{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$; esto es, para todo $u \in L_1^{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ existe una trayectoria x tal que $(u, x) \in \mathbb{B}$. Suponga que x no anticipa a u estrictamente y que la propiedad del determinismo es satisfecha. Entonces x satisface la propiedad de estado.*

2.6 Conclusiones

Este capítulo sirve de base para definir algunos conceptos que se utilizarán en el capítulo posterior, como la controlabilidad del comportamiento el cual es un factor importante. Además de recordar que: (i) *cada solución fuerte es una solución débil*, (ii) *cualquiera solución débil suficientemente suave es una solución fuerte* y (iii) *cada solución débil puede ser aproximada por una secuencia infinitamente diferenciables* (Teorema 2.1 [14]). Una importante propiedad de los sistemas dinámicos es lo invariante en el tiempo. En un sistema dinámico invariante en el tiempo las leyes no dependen explícitamente del tiempo, el comportamiento es el cambio - invariante. Los sistemas dinámicos son descritos por ecuaciones comportamentales que son ecuaciones diferenciales. El comportamiento consiste de la solución de estas ecuaciones.

Capítulo 3

Controlabilidad del comportamiento

3.1 Introducción

En este capítulo se recuerda el concepto de alcanzabilidad de estado; también se recuerdan las caracterizaciones y representaciones de Kalman [6, 7], Wonham [17] y de Brunovsky [3]. Para esta última, se muestra una representación de estado alcanzable como la forma canónica de Brunovsky, en la cual se introducen los índices de controlabilidad. Se recuerda la definición de la alcanzabilidad comportamental introducida por Willems [16]. También se establece el problema de alcanzabilidad comportamental que se desea resolver; el cual consiste en encontrar una ley de control que lleve al sistema (en este caso al prototipo experimental helicóptero) de un ángulo $\theta(0)$ inicial, hasta una referencia $\theta(t_f)$, en un tiempo finito t_f , con una aceleración final, $d^2\theta(t_f)/dt^2 = 0$.

3.2 Alcanzabilidad del estado

Uno de los conceptos más estudiados en la teoría de sistemas es la alcanzabilidad:

Definición 3.1. (Alcanzabilidad del estado) Un sistema descrito por la representación de espacio de estado, $\Sigma^{ees}(A, B)$,

$$\frac{d}{dt}x = Ax + Bu, \quad (3.1)$$

se dice alcanzable, si para un par de puntos, $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$, y un tiempo finito, $t_1 \in \mathbb{R}^+$, dados, existe una trayectoria, $(u, x) \in C^\infty([0, t_1], \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$, solución de (3.1), tal que $x(0) = x_0$ y $x(t_1) = x_1$.

Este concepto está normalmente asociado con “el conjunto de vectores que pueden alcanzarse desde el origen, en tiempo finito, siguiendo trayectorias solución del sistema, generadas por una entrada”.

Kalman [6, 7] introdujo su famosa matriz de controlabilidad:

$$C_{[A,B]} = [B|AB|\dots|A^{n-1}B].$$

Demostó que existe una ley de control, $u(\cdot) \in C^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^m)$, que genera una trayectoria, $x(\cdot) \in C^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n)$, solución de (3.1), con condición inicial $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ y alcanza un determinado vector de estado, $x(t_1) = x_1 \in \mathbb{R}^n$, en un tiempo finito, $t_1 \in \mathbb{R}^+$, si y solo si,

$$\text{rango}(C_{[A,B]}) = n. \quad (3.2)$$

En este caso, la representación (3.1) es llamada alcanzable, y se dice que el par (A,B) es controlable. Este concepto es conocido como *alcanzabilidad del estado*.¹

Wonham [17] mostró que cuando el par (A,B) es controlable, entonces el Gramiano de controlabilidad,

$$W_t = \int_0^t e^{\tau A} B B^T e^{\tau A^T} d\tau, \quad \text{con } t \in (0, t_1], \quad (3.3)$$

es no singular. Por lo que con la ley de control:

$$u(t) = B^T e^{(t_1-t)A^T} W_{t_1}^{-1} (x_1 - e^{t_1 A} x_0), \quad (3.4)$$

se obtiene una trayectoria, $x(\cdot) \in C^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n)$, solución de (3.1), tal que: $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $x(t_1) = x_1 \in \mathbb{R}^n$.

3.3 Forma canónica de Brunovsky

Brunovsky [3] mostró que dada una representación de estado alcanzable, (3.1), existen una retroalimentación de estado, $F_B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ y dos isomorfismos, $T_B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $G_B : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, tales que el par $(T_B^{-1}(A + BF_B)T_B, T_B^{-1}BG_B)$ es expresada en la forma canónica de Brunovsky, (A_B, B_B) :²

$$A_B = MDB\{A_{B,1}, \dots, A_{B,m}\}, \quad B_B = MDB\{b_{B,1}, \dots, b_{B,m}\}, \quad i \in \{1, \dots, m\}.$$

$$A_{B,i} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & 0 \end{bmatrix}_{k_i \times k_i}, \quad b_{B,i} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{k_i \times 1} \quad (3.5)$$

¹ En varios libros de texto, esta propiedad es llamada *controlabilidad del estado*. Hay que notar que la *controlabilidad* únicamente caracteriza la propiedad del sistema de alcanzar al origen, $x_1 = 0$, desde cualquier estado, $x_0 \neq 0$, en tiempo finito, t_1 . Puesto que para el caso de los sistemas lineales continuos invariantes en el tiempo, estas dos propiedades están mutuamente implicadas, frecuentemente son tratadas indistinguiblemente.

² Donde *MDB* y *MD* significan *matriz diagonal por bloques* y *matriz diagonal*, respectivamente.

Al conjunto:

$$S_K = \left\{ \{k_1, k_2, \dots, k_m\} \subset \mathbb{Z} \mid k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_m = 1 \text{ \& } \sum_{i=1}^m k_i = n \right\} \quad (3.6)$$

se le conoce como *índices de controlabilidad*.

3.4 Caracterización comportamental

En este capítulo solamente se consideran señales infinitamente diferenciables, por lo que el comportamiento (2.11), puede también expresarse como sigue (ver Teorema 2.1 y Corolario 2.1):

$$\mathbb{B}_{e/es} = \left\{ (u, x) \in C^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n) \mid \left[\left(I \frac{d}{dt} - A \right) - B \right] \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} = 0 \right\} \quad (3.7)$$

Willems [16] define la alcanzabilidad del comportamiento de la siguiente manera:

Definición 3.2 (Alcanzabilidad del comportamiento [14]). El sistema, $\Sigma = (\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n, \mathbb{B}_{e/es})$, es llamado alcanzable si para dos pares de puntos ordenados, $(u_0, x_0), (u_1, x_1) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, y un tiempo finito, $t_1 > 0$, es posible encontrar una trayectoria, $(u, x) \in \mathbb{B}_{e/es}$, tal que: $(u(0), x(0)) = (u_0, x_0)$ y $(u(t_1), x(t_1)) = (u_1, x_1)$.

En este trabajo de tesis a este concepto de alcanzabilidad se le llama *alcanzabilidad del comportamiento*.

En [14], se muestra que para un sistema representado en espacio de estado, $\Sigma^{ees}(A, B)$, la *alcanzabilidad de estado* es equivalente a la *alcanzabilidad del comportamiento*:

Teorema 3.1 ([14]). *Considere el sistema representado por (3.1). Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. El sistema (3.1) es alcanzable en el comportamiento.
2. $\text{rango}[\lambda I - AB] = n$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$.
3. $\text{rango} \begin{bmatrix} B \\ AB \\ \dots \\ A^{n-1}B \end{bmatrix} = n$.
4. El sistema (3.1) es alcanzable en el estado.

3.5 Problema de alcanzabilidad comportamental

De la misma manera que Wonham [17] proporcionó la ley de control explícita, (3.3) y (3.4), la cual permite ir de un estado inicial, x_0 , a un estado final, x_1 , en un tiempo finito, $t_1 \geq 0$, en esta sección estamos interesados en encontrar una ley de control que nos permita ir de (u_0, x_0) a (u_1, x_1) , en un tiempo finito t_1 ; más precisamente:

Problema 3.1 ([2, 1]). Sea el sistema $\Sigma^{ees} = (\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n, \mathbb{B}_{e/es})$, cuyo comportamiento, $\mathbb{B}_{e/es}$, está definido por (3.7). Supóngase que la matriz B es inyectiva: $\ker\{B\} = 0$, que la condición de controlabilidad del estado (3.2) es

satisfecha, con los índices de controlabilidad (3.6). Dado dos pares ordenados de vectores $(u_0, x_0), (u_1, x_1) \in (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$ y dado un número real positivo $t_1 > 0$, encuentre una trayectoria $(u, x) \in \mathbb{B}_{e/es}$, tal que: $(u(0), x(0)) = (u_0, x_0)$ y $(u(t_1), x(t_1)) = (u_1, x_1)$.

Por el Teorema 3.1, se tiene que la condición (3.2) garantiza la solución del Problema 3.1.

Podría pensarse que la ley de control, (3.3) y (3.4), soluciona el Problema 3.1; pero esta proposición solo garantiza la alcanzabilidad de las variables de estado, $x(0) = x_0$ y $x(t_1) = x_1$, y no garantiza nada sobre la variable de entrada, u , la cual se deja completamente libre en los puntos $u(0)$ y $u(t_1)$.

3.6 Solución al Problema 3.1

Una solución condicionada del Problema 3.1 está dada por el siguiente Lema:

Lema 3.1 ([2, 1]). *Sea la representación de espacio de estados (3.1), controlable, con el conjunto de índices de controlabilidad (3.6). Sea la retroalimentación de estado, $F_B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ y los isomorfismos, $T_B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $G_B : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, tales que el par $(T_B^{-1}(A + BF_B)T_B, T_B^{-1}BG_B)$ está expresado en su forma canónica de Brunovsky (3.5).*

Sean las matrices de controlabilidad, $C_{[A_B, B_B]}$ y $C_{[A_{B_i}, b_{B_i}]}$ ($i \in \{1, \dots, m\}$), del par (A_B, B_B) y de los pares (A_{B_i}, b_{B_i}) , respectivamente, definidas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} C_{[A_B, B_B]} &= MDB \left\{ C_{[A_{B_1}, b_{B_1}]}, \dots, C_{[A_{B_m}, b_{B_m}]} \right\} \\ C_{[A_{B_i}, b_{B_i}]} &= \begin{bmatrix} b_{B,i} & A_{B,i} b_{B,i} & \dots & A_{B,i}^{k_i-1} b_{B,i} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Supongamos que se han encontrado matrices T_B, F_B, G_B y trayectorias $f_i \in C^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^1)$, tales que:

$$\bar{w}(t_j) = C_{[A_B, B_B]}^{-1} T_B^{-1} x_j, \quad D(d/dt)f(t_j) = G_B^{-1}(u_j - F_B x_j), \quad (3.9)$$

$$\bar{w}(t) = \begin{bmatrix} \bar{w}_1(t) \\ \vdots \\ \bar{w}_m(t) \end{bmatrix}, \quad \bar{w}_i(t) = \begin{bmatrix} d^{k_i-1} f_i(t) / dt^{k_i-1} \\ \vdots \\ f_i(t) \end{bmatrix}, \quad D\left(\frac{d}{dt}\right) = MD \left[\frac{d^{k_1}}{dt^{k_1}}, \dots, \frac{d^{k_m}}{dt^{k_m}} \right], \quad f(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_m(t) \end{bmatrix}, \quad (3.10)$$

donde: $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{0, 1\}$ y $t_0 = 0$.

Entonces, si se aplica la siguiente ley de control,

$$u(t) = F_B x(t) + G_B D(d/dt)f(t), \quad (3.11)$$

al sistema representado por (3.1), la trayectoria del sistema en lazo cerrado satisface:

$$x(t) = T_B C_{[A_B, B]} \bar{w}(t), \quad (3.12)$$

$$(u(0), x(0)) = (u_0, x_0) \quad y \quad (u(t_1), x(t_1)) = (u_1, x_1). \quad (3.13)$$

Para satisfacer la suposición (3.9) del Lema 3.1, se propone el siguiente conjunto de funciones ($i \in \{1, \dots, m\}$):³

$$\begin{aligned} f_i(t) &= [t^{2k_i+1} \ t^{2k_i} \ \dots \ t^{k_i+2} \ t^{k_i+1}] a_{i,1} + [t^{k_i} \ t^{k_i-1} \ \dots \ t \ 1] a_{i,0}, \\ a_{i,1} &= [a_{i,2k_i+1} \ a_{i,2k_i} \ \dots \ a_{i,k_i+2} \ a_{i,k_i+1}]^T \in \mathbb{R}^{k_i+1}, \\ a_{i,0} &= [a_{i,k_i} \ a_{i,k_i-1} \ \dots \ a_{i,1} \ a_{i,0}]^T \in \mathbb{R}^{k_i+1}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

y se definen las siguientes matrices auxiliares:

$$X_{i,0}(t) = \begin{bmatrix} \frac{k_i!}{0!} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{k_i!}{1!} t & \frac{(k_i-1)!}{0!} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \frac{k_i!}{(k_i-1)!} t^{k_i-1} & \frac{(k_i-1)!}{(k_i-2)!} t^{k_i-2} & \dots & \frac{1!}{0!} & 0 \\ \frac{k_i!}{k_i!} t^{k_i} & \frac{(k_i-1)!}{(k_i-1)!} t^{k_i-1} & \dots & \frac{1!}{1!} & \frac{0!}{0!} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

$$X_{i,1}(t) = \begin{bmatrix} \frac{(2k_i+1)!}{(k_i+1)!} t^{k_i+1} & \frac{(2k_i)!}{(k_i)!} t^{k_i} & \dots & \dots & \frac{(k_i+1)!}{1!} & t \\ \frac{(2k_i+1)!}{(k_i+2)!} t^{k_i+2} & \frac{(2k_i)!}{(k_i+1)!} t^{k_i+1} & \dots & \dots & \frac{(k_i+1)!}{2!} & t^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \frac{(2k_i+1)!}{2k_i!} t^{2k_i} & \frac{(2k_i)!}{2k_i-1!} t^{2k_i-1} & \dots & \dots & \frac{(k_i+1)!}{k_i!} & t^{k_i} \\ \frac{(2k_i+1)!}{(2k_i+1)!} t^{2k_i+1} & \frac{(2k_i)!}{(2k_i)!} t^{2k_i} & \dots & \dots & \frac{(k_i+1)!}{(k_i+1)!} & t^{k_i+1} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Lema 3.2 ([2, 1]). Para $i \in \{1, \dots, m\}$, los determinantes de las matrices (3.15) y (3.16) satisfacen:

$$\det(X_{(i,0)}(t)) = \prod_{\ell=0}^{k_i} \ell!; \quad y \quad \det(X_{(i,1)}(t)) = \left(\prod_{\ell=0}^{k_i} \ell! \right) t^{(k_i+1)^2} \quad (3.17)$$

Por otra parte, si se selecciona los vectores coeficiente, $a_{i,0}$ y $a_{i,1}$ como:

$$\begin{aligned} a_{i,0} &= X_{(i,0)}^{-1}(0) v_0, \quad a_{i,1} = X_{(i,1)}^{-1}(t_1) (v_1 - X_{(i,0)}(t_1) a_{i,0}) \\ v_j &= \left[\left(E_{(i,m)}^T G_B^{-1} (u_j - F_B x_j) \right)^T \quad \left(C_{[A_B, B]}^{-1} P_i T_B^{-1} x_j \right)^T \right]^T, \quad j \in \{0, 1\} \end{aligned} \quad (3.18)$$

donde:

$$P_i = \begin{bmatrix} E_{(\hat{n}_i+1;n)}^T \\ \vdots \\ E_{(\hat{n}_i+k_i;n)}^T \end{bmatrix}, \quad \hat{n}_i = \begin{cases} \sum_{j=1}^{i-1} k_j & , \text{ si } i \geq 2 \\ 0 & , \text{ si } i = 1 \end{cases}, \quad i \in \{1, \dots, m\} \quad (3.19)$$

³ En [1], Se hacen dos posibles proposiciones: La primera, basada en la serie de Taylor, y la segunda basada en series de Fourier. Lewis [9] realizó una proposición cuando introdujo una entrada “rápida” en las consideraciones de controlabilidad.

Por lo que la suposición (3.9) del Lema 3.1, se cumple.

Como consecuencia de los Lemas 3.1 y 3.2, se tiene que es posible hacer un seguimiento de una trayectoria dada, $(u_r, x_r) \in C^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{m+n})$, con un tiempo de retardo t_1 . En efecto, tan sólo hay que fijar un tiempo de muestreo, $t_1 \in \mathbb{R}^{+*}$ y aplicar interactivamente el lema 1 con los conjuntos: $(u_0, x_0) = (u(kt_1), x(kt_1))$ y $(u_1, x_1) = (u_r(kt_1), x_r(kt_1))$, donde:

$$t = kt_1 + \sigma, \quad k \in \mathbb{Z}^+, \quad \sigma \in [0, t_1) \cap \mathbb{R}^+. \quad (3.20)$$

Dicho de otra manera, en cada intervalo de muestreo, $[kt_1, (k+1)t_1)$, se puede encontrar una trayectoria, $(u, x) \in \mathbb{B}_{e/es} \cap C^\infty(\mathbb{R}^+ \cap [kt_1, (k+1)t_1), \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$, tal que: $(u(kt_1), x(kt_1)) = (u_0, x_0)$ y $\lim_{\sigma \rightarrow t_1} (u(kt_1 + \sigma), x(kt_1 + \sigma)) = (u_1, x_1)$. Es decir:

Teorema 3.2 ([2, 1]). Considerando un sistema entrada/ estado $\Sigma^{e.es} = (\mathbb{R}^+, \mathbb{U} \times \mathbb{X}, \mathbb{B}_{[A,B]})$, representado por (3.1). Si (3.2) es satisfecha, para cualquier trayectoria $(u_r, x_r) \in C^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{m+n})$, y para cualquier periodo de muestreo, $t_1 \in \mathbb{R}^{+*}$, existe una ley de control, $u \in C^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^m)$ tal que: $(u(\bar{k}t_1), x(\bar{k}t_1)) = (u_r((\bar{k}+1)t_1), x_r((\bar{k}+1)t_1))$, donde: $t = \bar{k}t_1 + \sigma$, $\bar{k} \in \mathbb{Z}^+$, $\sigma \in [0, t_1) \cap \mathbb{R}^+$.

3.7 Ejemplo ilustrativo

Consideremos un sistema de segundo orden con un coeficiente de amortiguamiento ρ , una frecuencia natural ω_n y una constante k , descrito por la siguiente ecuación diferencial:

$$\ddot{\theta} + 2\omega_n\rho\dot{\theta} + \omega_n^2\theta = k\omega_n^2u \quad (3.21)$$

Con las condiciones iniciales siguientes:

$$\theta(0) = 0, \quad d\theta(0)/dt = 0 \quad \text{y} \quad d^2\theta(0)/dt^2 = 0$$

Y con los parámetros: $k = 29.84$, $\omega_n = 0.4343$ [rad/seg] y $\rho = 0.1010$.

Representación de Espacio de Estado

La representación de espacio de estado, (3.1), de (3.21) es:

$$\frac{d}{dt}x = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\rho\omega_n \end{bmatrix}}_A x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ k\omega_n^2 \end{bmatrix}}_B u \quad (3.22)$$

Problema de Control

Queremos llevar al ángulo θ desde el origen, $\theta(0) = 0$, hasta la referencia, $\theta(t_f) = 1$, con $t_f = 160$ s, suavemente, es decir con una aceleración final, $d^2\theta(t_f)/dt^2 = 0$. Vamos a resolver este problema aplicando el Teorema 3.2 con un tiempo de muestreo: $t_1 = 10$ s.

Forma Canónica de Brunovsky

El sistema es controlable ya que la matriz de controlabilidad, $C_{[A,B]}$ es de rango pleno:

$$C_{[A,B]} = \begin{bmatrix} 0 & k\omega_n^2 \\ k\omega_n^2 & -2k\rho\omega_n^3 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rango}(C_{[A,B]}) = 2 \quad (3.23)$$

Dado que el sistema es controlable, se le puede llevar a su forma canónica de Brunovsky. En efecto con: $(F_B, T_B, G_B) = \left(\left[\begin{array}{cc} 1 & 2\rho \\ k & k\omega_n^2 \end{array} \right], I_2, 1/(k\omega_n^2) \right)$, esto es, con la ley de control:

$$u = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2\rho \\ k & k\omega_n^2 \end{bmatrix}}_{F_B} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ k\omega_n^2 \end{bmatrix}}_{G_B} \bar{u} \quad (3.24)$$

se obtiene:

$$\frac{d}{dt}x = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A_B} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B_B} \bar{u} \quad (3.25)$$

Referencias

Para cada periodo de muestreo, kt_1 , $k \in \mathbb{Z}^+$, se tienen los puntos extremos, (\bar{u}_0, x_0) y (\bar{u}_1, x_1) , siguientes:

$$\bar{u}_0 = \bar{u}(kt_1), \quad x_0 = x(kt_1), \quad \bar{u}_1 = \bar{u}_r(kt_1), \quad x_1 = x_{r_1}(kt_1), \quad (3.26)$$

donde k es un entero no negativo tal que: $t = kt_1 + \sigma$, siendo t_1 el tiempo fijo de muestreo y $0 \leq \sigma < t_1$. Las señales de referencia, \bar{u}_r y $\bar{x}_r = [\bar{x}_{r_1} \ \bar{x}_{r_2}]^T$, son seleccionados como sigue:

$$\bar{u}_r = 0, \quad \bar{x}_{r_1}(t) = \int_0^t \bar{x}_{r_2}(\tau) d\tau, \quad \bar{x}_{r_2}(\tau) = \begin{cases} t/50 & \text{si } 0 \leq t < 50 \\ 1 & \text{si } 50 \leq t < 100 \\ 1 - (t - 100)/50 & \text{si } 100 \leq t < 150 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (3.27)$$

Ley de Control

La ley de control, (3.11), (3.9), (3.10) y (3.18), es (recordar (3.24)):

$$u(t) = \left[\frac{1}{k} \frac{2\rho}{k\omega_n} \right] x(t) + \left[\frac{1}{k\omega_n^2} \right] d^2 f(t)/dt^2, \quad (3.28)$$

donde (ver (3.14), (3.20), (3.15), (3.16) y (3.18)):

$$d^2 f(t)/dt^2 = \left[\frac{5!}{3!} \bar{\sigma}^3 \quad \frac{4!}{2!} \bar{\sigma}^2 \quad \frac{3!}{1!} \bar{\sigma} \right] a_1 + \left[\frac{2!}{0!} \quad 0 \quad 0 \right] a_0 \quad (3.29)$$

$$\bar{\sigma} = \sigma/t_1 \quad (3.30)$$

$$a_0 = X_0^{-1}(0) \begin{bmatrix} \bar{u}_0 \\ x_0 \end{bmatrix}, \quad (3.31)$$

$$a_1 = X_1^{-1}(t_1) \left(\begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ x_1 \end{bmatrix} - X_0(t_1) a_0 \right),$$

$$X_0(t_1) = \begin{bmatrix} \frac{2!}{0!} & 0 & 0 \\ \frac{2!}{1!} t_1 & \frac{1!}{0!} & 0 \\ \frac{2!}{2!} t_1^2 & \frac{1!}{1!} t_1 & \frac{0!}{0!} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad X_1(t_1) = \begin{bmatrix} \frac{5!}{3!} t_1^3 & \frac{4!}{2!} t_1^2 & \frac{3!}{1!} t_1 \\ \frac{5!}{4!} t_1^4 & \frac{4!}{3!} t_1^3 & \frac{3!}{2!} t_1^2 \\ \frac{5!}{5!} t_1^5 & \frac{4!}{4!} t_1^4 & \frac{3!}{3!} t_1^3 \end{bmatrix}. \quad (3.32)$$

Resultados de la Simulación

En las figuras 3.2 y 3.3, se muestran los resultados los cuales se realizaron con el programa Matlab Simulink[®], el cual se muestra en digrama 3.1.

La configuración de Matlab Simulink[®] fue la siguiente:

Numero máximo del paso (Max step size): $1e-3$, la tolerancia relativa (Relative tolerance): $1e-5$, el método de integración fue ode 45 Dormand-Prince con variable-step Solver, tiempo de inicio: 0.0, y tiempo de paro: 2.5.

Si nos damos cuenta en la figura 3.2 observamos que las graficas tienen las salidas del sistema dependiendo si es θ , $\dot{\theta}$, $\ddot{\theta}$. Nos damos cuenta que si funciona el controlador de un paso de inversión por la derecha ya que θ , llegan a su referencia en tiempo t , con $\ddot{\theta} = 0$.

Las referencias se observan en la figura 3.3.

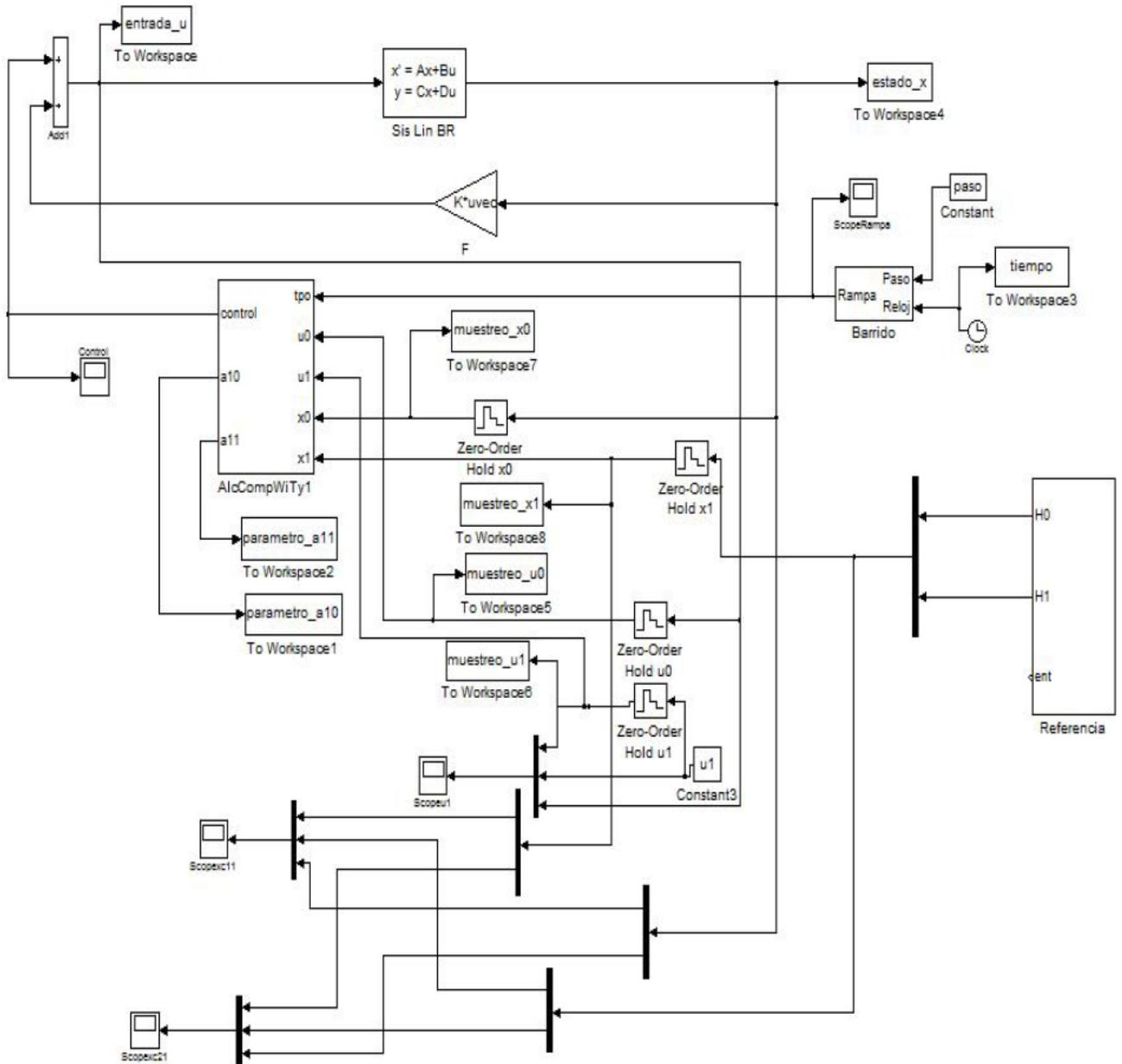


Figura 3.1 Diagrama en Matlab Simulink®.

3.8 Conclusiones

En este capítulo se mostró, que existe una ley de control, $u(\cdot) \in C^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^m)$, que genera una trayectoria, $x(\cdot) \in C^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n)$, solución de (3.1), con condición inicial $x(0) = x_o \in \mathbb{R}^n$ y alcanza un determinado vector de estado, $x(t_1) = x_1 \in \mathbb{R}^n$, en un tiempo finito, $t_1 \in \mathbb{R}^+$, si y solo si, el $\text{rango}(C_{[A,B]}) = n$. En los Lemas 3.1 y 3.2, desarrollados por M. Bonilla, M. Malabre y JJ. Loiseau [2], se muestra que es posible hacer un seguimiento de una trayectoria

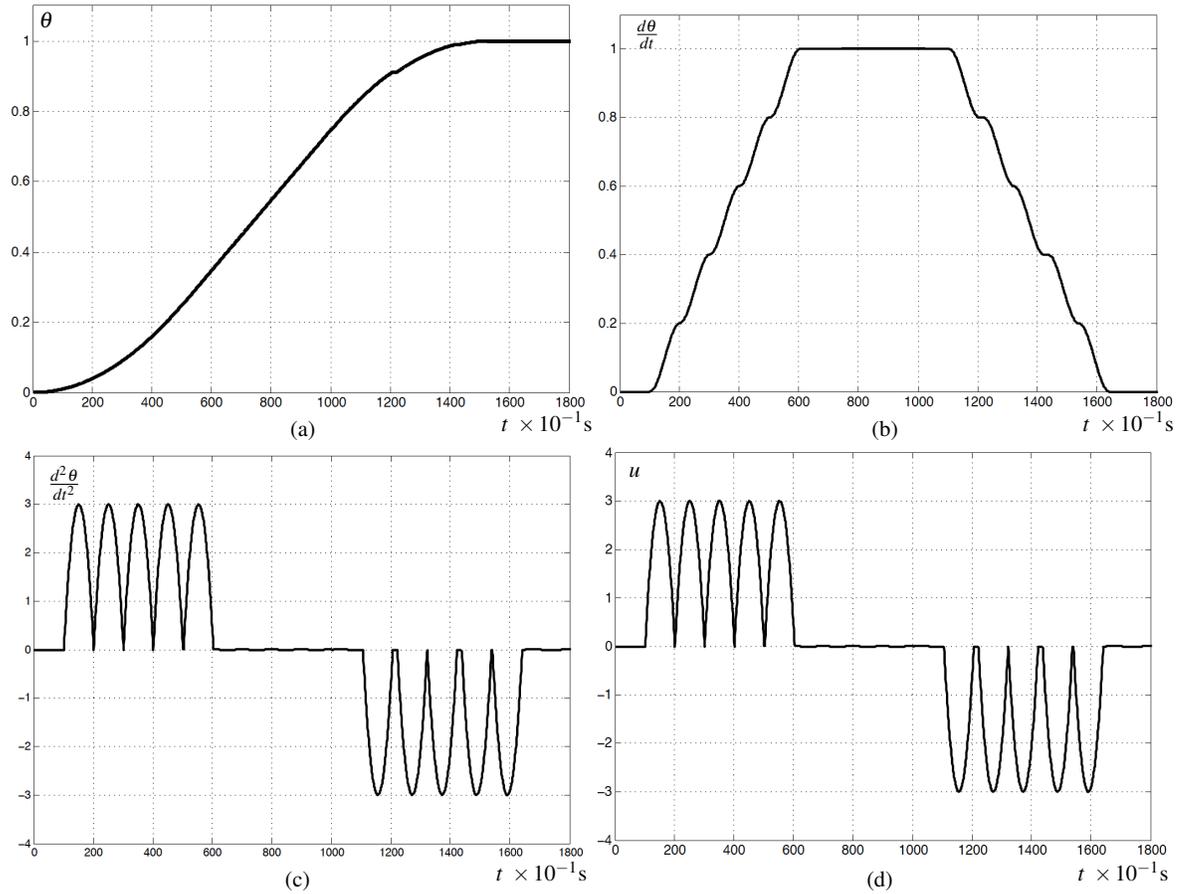


Figura 3.2 Gráfica que muestra: (a) la posición θ , (b) la velocidad $\dot{\theta}$, (c) la aceleración $\ddot{\theta}$, y (d) el control $[-, \ddot{\theta}]$.

dada, $(u_r, x_r) \in C^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{m+n})$; esto es ejemplificado mediante el ejemplo ilustrativo de la sección 3.7. Del ejemplo ilustrativo, se puede apreciar que el control sigue a la referencia $\theta(t_f)$, en un tiempo finito t_f , y con una aceleración final, $d^2\theta(t_f)/dt^2 = 0$ (ver figuras 3.2 y 3.3).

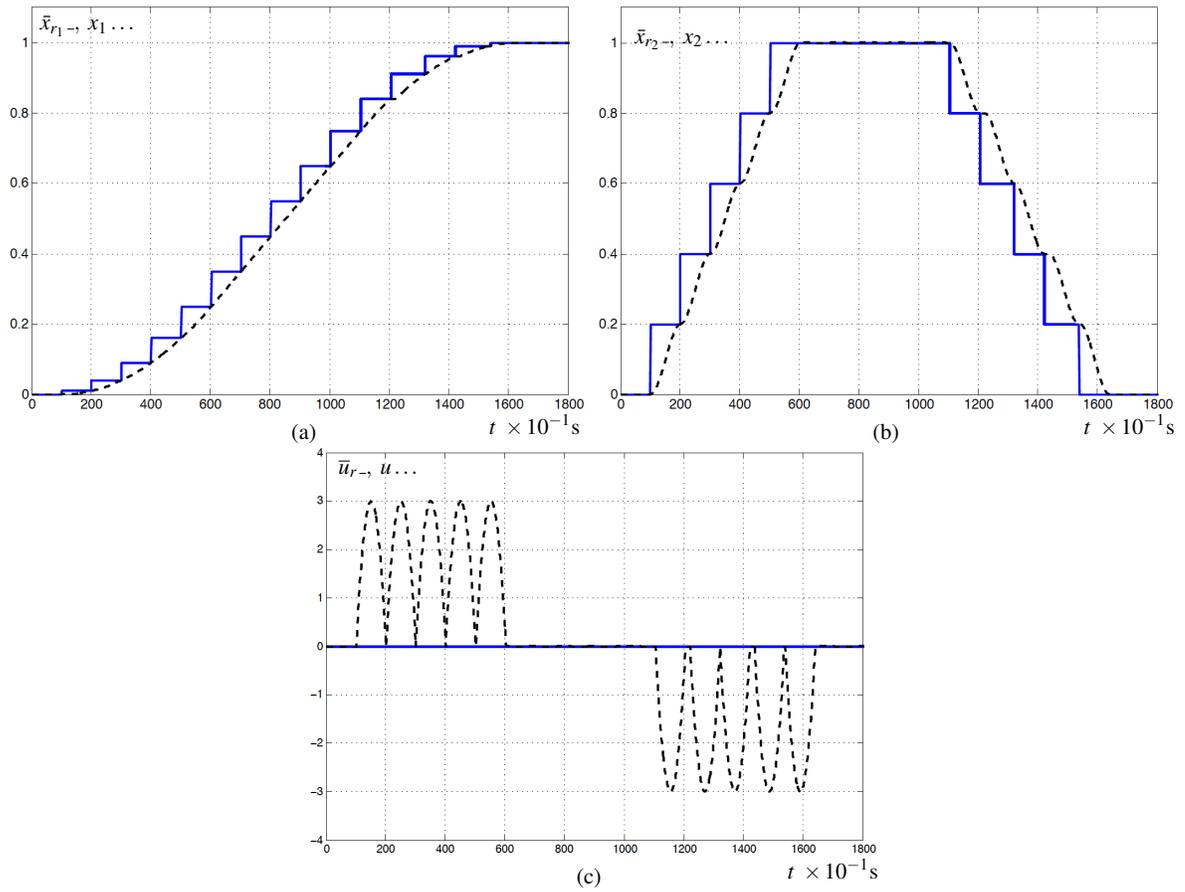


Figura 3.3 Gráfica que muestra: (a) la referencia \bar{x}_{r1} y x_1 , (b) la referencia \bar{x}_{r2} y x_2 , y (c) el control \bar{u}_r , \bar{u} . Las graficas muestran los resultados de la simulación de las variables (3.26), con las líneas discontinuas negras, y las señales de referencia con las líneas continuas azules.

Capítulo 4

Control implícito singularmente perturbado

4.1 Introducción

En este capítulo se muestra el esquema de control implícito, para sistemas lineales variantes en el tiempo con una entrada y una salida (SISO), desarrollado por Puga y Bonilla [15]. Este esquema de control está compuesto por un controlador singularmente perturbado y un filtro ecualizador. El sistema en lazo cerrado resultante es un sistema lineal singularmente perturbado con un comportamiento asintóticamente estable.

4.2 Definición de sistema y representaciones

Considere un sistema lineal variante en el tiempo, con la dinámica representada por la ecuación diferencial

$$\frac{d^n}{dt^n}y + a_n(t)\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y + \dots + a_2(t)\frac{d}{dt}y + a_1(t)y = b(t)u \quad (4.1)$$

definida para $t \geq 0$, con condiciones iniciales: $y(0)$, $\frac{d}{dt}y(0)$, \dots , $\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y(0)$, donde:

- $y \in \mathbb{R}$, es la variable de salida.
- $u \in \mathbb{R}$, es la variable de entrada.
- $t \in J = [0, \infty)$, es el tiempo.

Se asume que:

H1 Los coeficientes $a_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, son funciones reales continuas de clase C^1 , y acotadas, $\|a_i(t)\| \leq L_{0,a}$.

Las derivadas $\frac{d}{dt}a_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, también son acotadas, $\|\frac{d}{dt}a_i(t)\| \leq L_{1,a}$.

H2 El coeficiente $b(t)$ es una función real positiva continua de clase C^1 , y acotada, $0 < b_1 \leq b(t) \leq b_2$. La derivada $\frac{d}{dt}b(t)$ es también acotada, $\|\frac{d}{dt}b(t)\| \leq c$.

H3 Las cotas, $L_{0,a}$, $L_{1,a}$, b_2 y c son desconocidas. La cota b_1 es conocida.

Definiendo las variables de estado:

$$\xi = [\xi_1 \ \xi_2 \ \dots \ \xi_n]^T = \left[y \ \frac{d}{dt}y \ \dots \ \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y \right], \quad (4.2)$$

Se obtiene la siguiente representación en variables de estado:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\xi(t) &= A(t)\xi(t) + B(t)u(t) \quad y \quad y(t) = C\xi(t), \\ A(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \dots & 0 & 1 \\ -a_1(t) & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & -a_n(t) \end{bmatrix}, \quad B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}^T, \end{aligned} \quad (4.3)$$

donde las condiciones iniciales del estado son: $\xi(0) = \left[y(0) \ \frac{d}{dt}y(0) \ \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y(0) \right]^T$.

4.3 Esquema de control singular implícito

Puga y Bonilla [15] propusieron una ley de control implícita singularmente perturbada, cuyo objetivo es aproximar la ecuación de estado (4.3.a) a una representación de espacio de estados lineal invariante en el tiempo,

$$\frac{d}{dt}x_s(t) = A_0x_s(t) + B_1r(t), \quad (4.4)$$

Siendo $\det(\lambda I - A_0)$ un polinomio Hurwitz. El esquema de control está compuesto por un controlador singularmente perturbado y un filtro ecualizador.

Ley de control singularmente perturbada

$$\varepsilon u(t) = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & -1 \end{bmatrix} (\xi(t) + h(t)) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n(t) \\ x_{n+1}(t) \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Filtro ecualizador

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_n(t) \\ x_{n+1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\bar{a}_1 & \dots & -\bar{a}_{n-1} & -\bar{a}_n + (1 + \ell) \\ 0 & \dots & 0 & -(\beta - 1) \end{bmatrix} (\xi(t) + h(t)) + \begin{bmatrix} -(1 + \ell) & -\ell \\ (\beta - 1) & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n(t) \\ x_{n+1}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} r(t), \quad (4.6)$$

donde: β , τ y ε son parámetros positivos; $\ell = 1/\tau - \beta$ y $\bar{a}_1 \dots, \bar{a}_n$ son los coeficientes del polinomio Hurwitz:

$$p(\lambda) = \lambda^n + \bar{a}_n\lambda^{n-1} + \dots + \bar{a}_2\lambda + \bar{a}_1 \quad (4.7)$$

r es la referencia de la señal y h es una perturbación, tal que:¹

1. r es una función real continua acotada.
2. h es una función real continua acotada, con norma de orden ε .

Los objetivos del filtro ecualizador son:

1. Asignar la dinámica en lazo cerrado, mediante el polinomio característico Hurwitz, $p(\lambda)$.
2. Asignar una razón de convergencia exponencial a la dinámica en lazo cerrado hacia el sistema lineal invariante en el tiempo, Hurwitz estable, descrito por (4.11).

Los objetivos de la ley de control singularmente perturbada son:

1. Obtener un modelo singularmente perturbado.
2. Acercarse a la dinámica deseada con una precisión del orden ε .

Aplicando la ley de control (4.5) y (4.6) al sistema representado por (4.3), se obtiene el sistema en lazo cerrado, representado por el siguiente modelo singularmente perturbado:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= A_{11}x(t) + A_{12}z(t) + A_{13}h(t) + B_1r(t) \\ \varepsilon \frac{d}{dt}z(t) &= A_{21}(\varepsilon, t)x(t) + A_{22}(\varepsilon, t)z(t) + A_{23}(t)h(t) \end{aligned} \quad (4.8)$$

donde las matrices $A_{11} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$, $A_{12} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times 1}$, $A_{13} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times n}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{(n+1) \times 1}$, $A_{21}(\varepsilon, t) \in \mathbb{R}^{1 \times (n+1)}$, $A_{22}(\varepsilon, t) \in \mathbb{R}$ y $A_{23}(t) \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, son definidas como sigue:

$$A_{11} = \left[\begin{array}{cccc|cc} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hline -\bar{a}_1 & -\bar{a}_2 & -\bar{a}_3 & \dots & -\bar{a}_{n-1} & -(1+\ell) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \ell \end{array} \right], \quad A_{12} = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \hline -\bar{a}_n + (1+\ell) \\ -(\beta-1) \end{array} \right],$$

¹ Esta perturbación es introducida por los esquemas de observación de estado, y los procedimientos de aproximación de las acciones derivativas.

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A_{13} = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\bar{a}_1 & \cdots & -\bar{a}_{n-2} & -\bar{a}_{n-1} & -\bar{a}_n + (1 + \ell) \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -(\beta - 1) \end{array} \right]$$

$$A_{21}(\varepsilon, t) = \left[-\varepsilon a_1(t) \quad \cdots \quad -\varepsilon a_{n-1}(t) \mid b(t) \quad 0 \right]$$

$$A_{22}(\varepsilon, t) = \left[-\varepsilon a_n(t) \quad -b(t) \right], \quad A_{23}(t) = \left[0 \quad \cdots \quad 0 \mid b(t) \right]$$

Puga y Bonilla [15] demostraron los siguientes tres resultados:

Teorema 4.1 ([15]). *Sea la matriz A_0 definida de la siguiente manera:*

$$A_0 = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}(0, t)A_{21}(0, t) = \left[\begin{array}{cccc|cc} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \hline -\bar{a}_1 & -\bar{a}_2 & -\bar{a}_3 & \cdots & -\bar{a}_{n-1} & -\bar{a}_n \quad 1/\tau - \beta \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\beta \end{array} \right],$$

tal que: $\Re(\lambda(A_0)) \leq c_1 \leq 0$, esto es, existen, $\beta, K > 0$, tal que $\| \exp(A_0 \theta) \| \leq K e^{-\beta \theta} \forall \theta \geq 0$. Si $\bar{a}_n + \beta > 1$ y $\tau < 1/(\bar{a}_n + \beta - 1)$, entonces existe un $\varepsilon^* > 0$, tal que para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$ el sistema representado por (4.8) es uniforme asintóticamente estable. Además la matriz de transición de (4.8), $\phi(t, s)$, satisface $\| \phi(t, s) \| \leq K e^{-\alpha(t-s)}$ para todo $t \geq s \geq t_0$, donde $K > 0$ y $\alpha > 0$ son independientes de ε .

Lema 4.1 ([2, 1]). *Bajo las mismas condiciones del Teorema 4.1, el sistema representado por el modelo de perturbaciones singulares (4.8) es uniforme asintóticamente estable para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$, donde:*

$$\varepsilon_1^* = \frac{\beta b_1}{\beta M_2 + K M_1 M_3} \quad (4.9)$$

$$M_1 = \sqrt{1 + (\bar{a}_1 - 1/\tau)^2 + 2(1 - \beta)^2}, \quad M_2 = |\bar{a}_1 + \beta - 1/\tau - 1|, \quad M_3 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \bar{a}_i^2 + (\beta - 1/\tau)^2}$$

Teorema 4.2 ([15]). *Bajo las mismas condiciones del Teorema 4.1, y además $\|q\| = O(\varepsilon)$, entonces existe un $\varepsilon^* > 0$ tal que para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$ se satisface uniformemente, en $t \in [t_0, t_f]$,*

$$x(t) = x_s(t) + O(\varepsilon)$$

$$z(t) = -A_{22}^{-1}(t)A_{21}(t)x_s(t) + z_f\left(\frac{t-t_0}{\varepsilon}\right) + O(\varepsilon)$$

Donde x_s es solución del sistema lento,

$$\frac{d}{dt}x_s(t) = A_0x_s(t) + A_qh(t) + B_1r(t), \quad A_q = A_{13} - A_{12}A_{22}^{-1}(0,t)A_{23}(t),$$

y z_f es solución del sistema rápido,

$$\frac{d}{d\tau}z_f(\tau) = A_{22}(0,t_0)z_f(\tau) + A_{23}(t_0 + \varepsilon\tau)h(t_0 + \varepsilon\tau), \quad \tau = (t - t_0)/\varepsilon,$$

con condiciones iniciales, $x_s(0) = x(0)$ y $z_f(0) = A_{22}^{-1}(0,t_0)A_{21}(t_0)x_0 + z(0)$.

4.4 Conclusiones

En este capítulo se utilizó una ley de control implícita de perturbaciones singulares [15], para un sistema variante en el tiempo, representado por una ecuación diferencial de primer orden,

$$\frac{d}{dt}\xi = A(t)\xi + B(t)u(t). \quad (4.10)$$

El objetivo de la ley de control es aproximar (4.10) a una representación de espacio de estados lineal invariante en el tiempo (3.1),

$$\frac{d}{dt}x_s(t) = A_0x_s(t) + B_1r(t). \quad (4.11)$$

Esta aproximación se basa en las técnicas de perturbaciones singulares [8].

Los resultados de este capítulo, serán utilizados en el capítulo 7, para obtener un sistema lineal invariante en el tiempo.

Parte II

Modelado y control de un helicóptero de un grado de libertad

Capítulo 5

Prototipo de laboratorio de un helicóptero de un grado de libertad

5.1 Introducción

En este capítulo se obtiene el modelo matemático del prototipo de laboratorio utilizado en esta tesis.

El prototipo de laboratorio consiste en un helicóptero de 3 grados de libertad, en el que solamente ocupamos un grado de libertad. Este prototipo se utiliza para probar el control que resuelve el problema establecido en la sección 3.5. Se utilizó un grado de libertad, ya que se solamente se quiere seguir una referencia θ_f , en tiempo finito, y con una aceleración final nula, $\ddot{\theta} = 0$, es decir, se desea que el helicóptero aterrice suavemente (comparar con las figuras del ejemplo ilustrativo (3.7) del capítulo 3).

En este capítulo se describe al helicóptero, se modela, y se realizan experimentos que validan al modelo.

5.2 Descripción del prototipo

El prototipo que usamos en el laboratorio del DCA es un helicóptero experimental, el cual consiste de una base para montar la armadura del prototipo. La armadura consiste de un cuerpo que contiene un contrapeso de un lado y del otro lado dos propulsores (ventiladores). La armadura como lo habíamos mencionado tiene tres grados de libertad y cada uno de ellos tiene decodificadores los cuales están montados en los tres ejes correspondientes para poder medir el ángulo de desplazamiento. En esta tesis solamente se ocupó el grado de libertad de la elevación y los otros dos se bloquean mecánicamente. En la figura 5.1 se muestra el sistema del helicóptero experimental que se encuentra en el laboratorio.

Los programas que se ocuparon para hacer las pruebas fueron Matlab Simulink[®] y WinCon[®] los cuales son las herramienta para conectar los periféricos a la computadora.

En la figura 5.2 se muestran las conexiones de los diferentes dispositivos. Los algoritmos de control se realizan en *Matlab Simulink*[®]; los datos al exterior son manipulados mediante *WinCon*[®]. La PC se conecta al módulo de



Figura 5.1 Fotografía del helicóptero.

adquisición de datos, en donde entran las señales de los *decodificadores* (en esta tesis solo se ocupa el *decodificador* de elevación). Las señales que alimentan a los motores de los propulsores se conectan a través de un *aislador analógico*¹ El *aislador analógico* manda la señal de control a los dos *amplificadores*, los cuales se conectan a cada motor. También se cuenta con un *paro de emergencia* para proteger al equipo y al usuario.

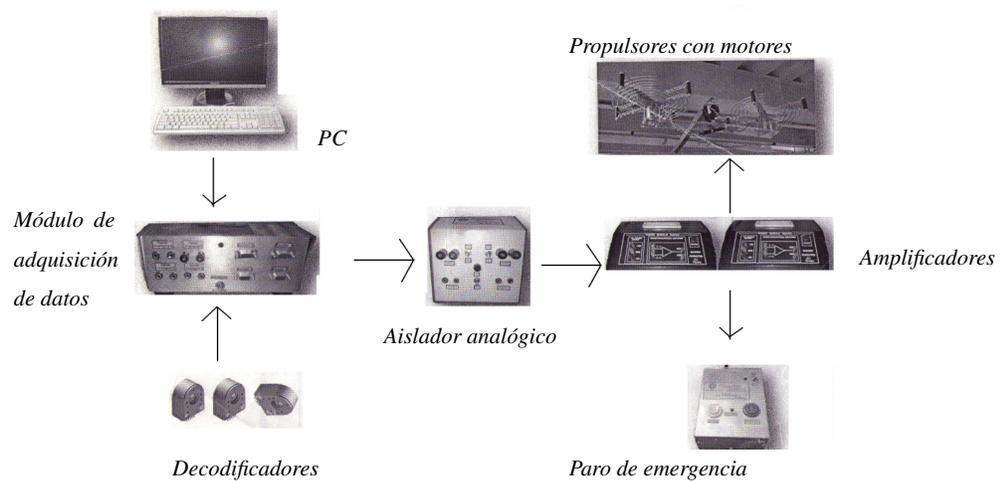


Figura 5.2 Interconexión de los diferentes dispositivos del helicóptero.

¹ Esto con el fin de no dañar el *modulo de adquisición de datos* de la computadora.

5.3 Modelo del helicóptero

El modelo matemático que describe el comportamiento del helicóptero es encontrado mediante las técnicas de Euler - Lagrange, bajo la suposición de que los pesos y fuerzas están concentrados en centros de inercia.

En la figura 5.3 se muestra un diagrama esquemático del helicóptero, en donde:

m_i = Representa las masas [$kg - masa$] con $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

w_i = Representa los pesos [$kg - fuerza$] con $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

F_v = Fuerza de los ventiladores [kgm/s].

l_i = Distancias de los centros de inercia al pivote [m] con $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

l_i^* = Longitudes de la estructura [m] con $i \in \{1, 2, 3\}$.

α_i , β_i y γ_i = Ángulos internos [rad].

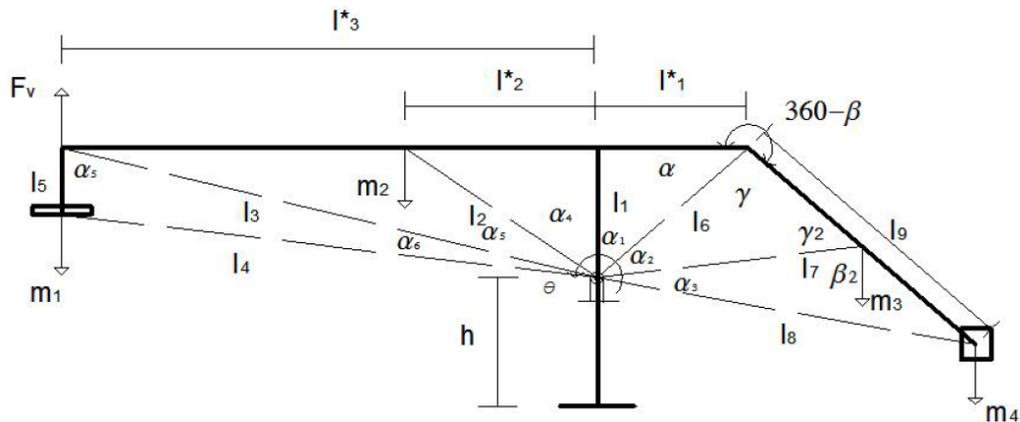


Figura 5.3 Diagrama esquemático del helicóptero.

5.3.1 Geometría del diagrama esquemático

De la figura 5.3 obtenemos:

$$l_2 = \sqrt{l_2^{*2} + l_1^2} \quad (5.1)$$

$$\ell_3 = \sqrt{\ell_3^{*2} + \ell_1^2} \quad (5.2)$$

$$\alpha = \cos^{-1} \left(\frac{\ell_1^*}{\sqrt{\ell_1^2 + \ell_1^{*2}}} \right) \quad (5.3)$$

De (5.3) obtenemos:

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha \quad (5.4)$$

$$\gamma = \beta - \alpha \quad (5.5)$$

$$\ell_6 = \sqrt{\ell_1^2 + \ell_1^{*2}} \quad (5.6)$$

Si usamos la ecuación (5.1) obtenemos α_4 :

$$\alpha_4 = \cos^{-1} \left(\frac{\ell_1}{\ell_2} \right) \quad (5.7)$$

Al igual que de (5.2) obtenemos α_5 :

$$\alpha_5 = \cos^{-1} \left(\frac{\ell_1}{\ell_3} \right) - \alpha_4 \quad (5.8)$$

Usando la ley de los cosenos, (Ver figura 5.3) tenemos:

$$\ell_7 = \sqrt{\ell_6^2 + \frac{\ell_9^2}{2} - \ell_6 \ell_9 \cos \gamma} \quad (5.9)$$

$$\gamma_2 = \cos^{-1} \left(\frac{\frac{\ell_9^2}{2} + \ell_7^2 - \ell_6^2}{\ell_7 \ell_9} \right) \quad (5.10)$$

Si usamos la ecuación (5.10) obtenemos β_2 y l_8 :

$$\beta_2 = \pi - \gamma_2 \quad (5.11)$$

$$\alpha_2 = \pi - \gamma - \gamma_2 \quad (5.12)$$

$$\ell_8 = \sqrt{\ell_7^2 + \frac{\ell_9^2}{2} - \ell_7 \ell_9 \cos \beta_2} \quad (5.13)$$

Usando la ley de cosenos y las ecuaciones (5.6), (5.9) y (5.13) obtenemos:

$$\alpha_3 = \cos^{-1} \left(\frac{\ell_7^2 + \ell_8^2 - \frac{\ell_9^2}{2}}{2\ell_7 \ell_8} \right) \quad (5.14)$$

Y también usando (5.2), (5.7) y (5.8) obtenemos ℓ_4 :

$$\ell_4^2 = \ell_5^2 + \ell_3^2 - \ell_5 \ell_3 \cos(\alpha_5 + \alpha_4) : \quad (5.15)$$

Por lo que:

$$\alpha_6 = \cos^{-1}\left(\frac{\ell_3^2 + \ell_4^2 - \ell_5^2}{2\ell_3\ell_4}\right) \quad (5.16)$$

5.3.2 Modelo usando la técnica de Euler - Lagrange

Para utilizar la técnica de Euler - Lagrange se hacen las siguientes hipótesis:

- H1 El marco de referencias es inercial (es valida la segunda ley de Newton), las masas constantes.
- H2 El trabajo neto, correspondiente a un desplazamiento infinitesimal, realizado por las fuerzas de restricción, es cero (Las masas y las fuerzas están concentradas en puntos específicos).

El modelo de Euler - Lagrange se denota por la siguiente ecuación:

$$\left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right]^T - \left[\frac{\partial L}{\partial q} \right]^T = Q_\tau \quad (5.17)$$

donde $L = K - P$ denota la función de Lagrange, q denota las variables de estado en este caso $[\theta, \dot{\theta}]$, y Q_τ representa las fuerzas externas. Cuando hay fuerzas de fricción presentes, la ecuación de Euler-Lagrange está dada por:

$$\left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right]^T - \left[\frac{\partial L}{\partial q} \right]^T + \left[\frac{\partial F_r}{\partial \dot{q}} \right] = Q_\tau \quad (5.18)$$

donde F_r corresponde a la fricción.

Los dos propulsores junto con sus motores se consideran en m_1 y la energía cinética esta dada por $T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 M_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2)$ en el presente caso es:

$$T = \frac{1}{2} I_m \dot{\theta}^2 \quad (5.19)$$

donde I_m es la inercia:

$$I_m = m_1 (\ell_4 \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha_6 - \alpha_5 - \alpha_4))^2 + m_2 (\ell_2 \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha_4))^2 + m_3 (\ell_7 \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha_1 - \alpha_2))^2 + m_4 (\ell_8 \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3))^2 \quad (5.20)$$

De la misma manera, la energía potencial con respecto al plano (x, y) está dada por:

$$P = (m_1 + m_2 + m_3 + m_4) g h + F_a \cos \theta \quad (5.21)$$

donde:

$$F_a = [-m_1 \ell_4 \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha_6 - \alpha_5 - \alpha_4) - m_2 \ell_2 \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha_4) + m_3 \ell_7 \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha_1 - \alpha_2) + m_4 \ell_8 \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)]g.$$

Se supone una fricción viscosa de constante, $\frac{1}{2}C_2$, esto es:

$$F_r = \frac{1}{2}(C_2 \dot{\theta}) \quad (5.22)$$

Finalmente, sustituyendo (5.19), (5.21) y (5.22) en (5.18), la ecuación del modelo es:

$$I_m \ddot{\theta} + C_2 \dot{\theta} - F_a \sin \theta = \ell_3^* F_v \quad (5.23)$$

A este modelo le agregaremos un defasamiento constante, C_5 , que tome en cuenta el estado de equilibrio de la estructura en ausencia de señales de control, esto es:²

$$C_1 \ddot{\theta} + C_2 \dot{\theta} - C_3 \sin(C_4 \theta + C_5) = C_6 v \quad (5.24)$$

5.4 Experimentos de laboratorio

Uno de los primeros experimentos fue la tarea de ver la relación que tiene la alimentación con los motores del helicóptero, ya que los motores tienen un rango de [-6.0, 6.0] voltios, pero también hay que ver las restricciones mecánicas, es por esta razón que se obtuvo primero una tabla de valores de voltaje v contra valores de salida θ . En la figura 5.4 se muestra el diagrama que se usó para esta prueba.

En la figura 5.4 podemos ver como se tienen dos salidas θ y ϕ , pero la única que se ocupa es θ ya que la otra va a un controlador PID la cual manda el ángulo ϕ a una referencia de cero grados. Por lo que solamente trabajamos con un grado de libertad que sería el de elevación como se apreció en la figura 5.3, si nos damos cuenta en la salida θ del modulo helicóptero tenemos la primera ganancia (Gain 1) la cual nos dice la resolución del decodificador ya que tenemos la relación de 45 grados con 512 pulsos. Por lo que se tienen una resolución de 1 revolución por 512 \times 4 [pulsos/rev]. Después de esto se hace una conversión de grados a radianes, ya que Matlab Simulink[®] trabaja en radianes, esto se realiza con la segunda ganancia (Gain 2).

En la Tabla 5.1 se muestran veinte ángulos obtenidos para diferentes voltajes, en estado estacionario.

Y en la figura 5.5 se grafican los valores obtenidos en la tabla 5.1. Aplicando la técnica de mínimos cuadrados se obtiene la siguiente aproximación del estado estacionario, a entrada escalón \bar{v} , del modelo (5.24):

$$\bar{v} = f(\bar{\theta}), \quad f(\theta) = -3.4155 \sin(0.8179\theta - 0.3001) \quad (5.25)$$

² Se asume que la fuerza de los ventiladores, F_v , es proporcional al voltaje de excitación v . C_1, \dots, C_6 son constantes a determinar experimentalmente.

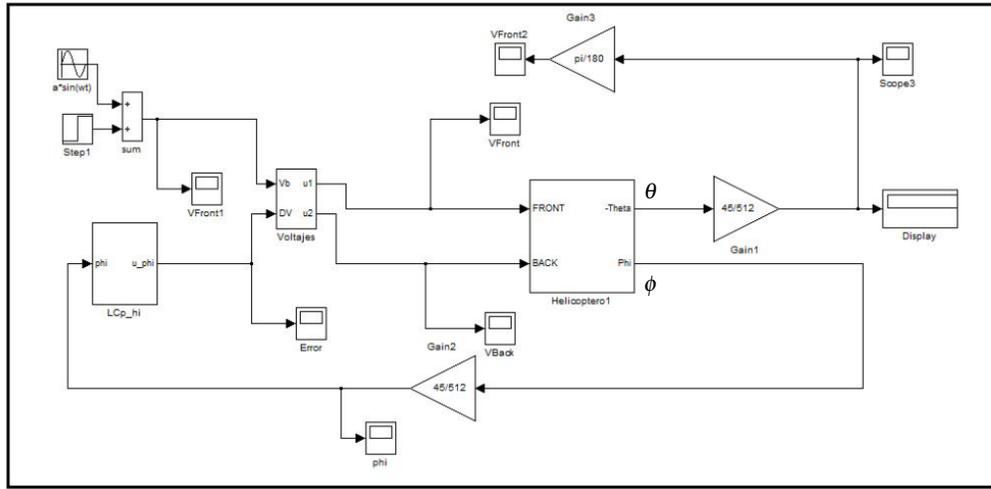


Figura 5.4 Figura que muestra el diagrama en Matlab Simulink[®] donde se conecta el voltaje de entrada v a los motores del helicóptero.

Por lo que el modelo (5.24) toma la siguiente forma:

$$I_m \ddot{\theta} + B \dot{\theta} + f(\theta) = v \tag{5.26}$$

donde I_m es el momento de inercia $[kg - m]$ y B es el coeficiente de amortiguamiento $[kg - m/seg]$.

Definiendo: $a_1 = B/I_m$ y $a_2 = b = 1/I_m$, también se tiene:

$$\ddot{\theta} + a_1 \dot{\theta} + a_2 \theta = q(\theta) + bv, \quad q(\theta) = a_2 \theta - bf(\theta) \tag{5.27}$$

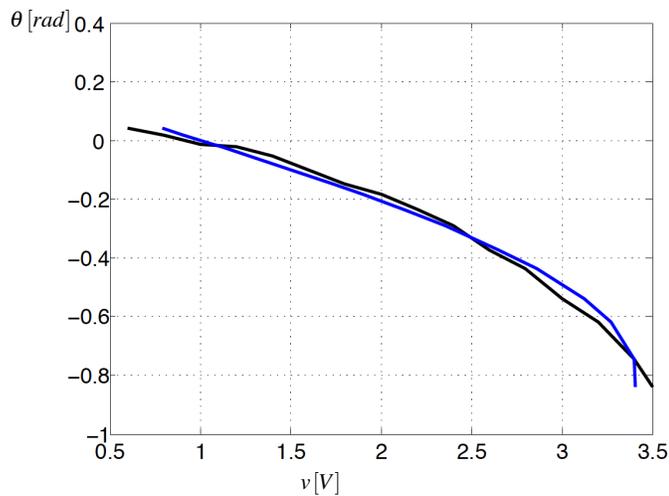


Figura 5.5 Gráfica que muestra la relación v v.s. θ (línea negra) y su interpolación sinusoidal (línea azul), obtenida mediante el algoritmo de mínimos cuadrados.

Num	Voltaje de entrada $v[V]$	Angulo de salida θ	
		$[^\circ]$	$[rad]$
1	-0.6	2.9740	0.0519
2	-0.4	2.2867	0.0399
3	0.0	2.7828	0.0486
4	0.4	2.1564	0.0376
5	0.6	2.3933	0.0418
6	0.8	1.0996	0.0192
7	1.0	-0.7326	-0.0128
8	1.2	-1.2160	-0.0212
9	1.4	-2.9644	-0.0517
10	1.6	-5.6668	-0.0989
11	1.8	-8.4292	-0.1471
12	2.0	-10.4619	-0.1826
13	2.2	-13.4758	-0.2352
14	2.4	-16.7029	-0.2915
15	2.6	-21.3163	-0.3720
16	2.8	-25.0597	-0.4374
17	3.0	-30.9149	-0.5396
18	3.2	-35.3755	-0.6174
19	3.4	-42.6482	-0.7444
20	3.5	-48.1974	-0.8412

Tabla 5.1 Ángulos, θ , obtenidos para diferentes voltajes (estado estacionario).

5.5 Conclusiones

En este capítulo se obtuvo el modelo matemático del helicóptero experimental usando la técnica de Euler - Lagrange, el cual resulto un modelo no lineal y se manifiesta en el comportamiento estacionario descrito por (5.25). En las pruebas experimentales se obtuvo una tabla 5.1 y su gráfica (ver figura 5.5), la cual muestra los datos de la relación de v v.s. θ en estado estacionario, esta prueba sirvió para tener una aproximación de la función no lineal, ya que en estado estacionario $\ddot{\theta} = \dot{\theta} = 0$, la función es: $v = f(\theta) = -3.4155 \sin(0.8179\theta - 0.3001)$, la cual sirve de base para la linealización del sistema, desarrollada en el siguiente capítulo. El término no lineal, $a_2\theta - bf(\theta)$, se considera en la ecuación (5.27) como la perturbación $q(\theta)$.

Capítulo 6

Linealización estática por retroalimentación de salida

6.1 Introducción

El modelo matemático del helicóptero (5.26), obtenido mediante la técnica de Euler - Lagrange, tiene un comportamiento no lineal el cuál se manifiesta claramente en el comportamiento estacionario descrito por (5.25) (ver también la tabla 5.1 y la figura 5.5). A fin de tener un modelo lineal, en este capítulo se compensa la componente no lineal, mediante una retroalimentación estática de la salida, obteniendo un sistema prototipo de segundo orden, con una función de transferencia en lazo cerrado de segundo orden, es decir:

$$T(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\rho\omega_n s + \omega_n^2} \quad (6.1)$$

6.2 Linealización estática por retroalimentación de salida

Aplicando a (5.27) la retroalimentación estática de salida,

$$v = u - (\theta - f(\theta)) \quad (6.2)$$

se obtiene:

$$\ddot{\theta} + a_1\dot{\theta} + a_2\theta = bu \quad (6.3)$$

Definiendo: $\zeta_1 = \theta$ y $\zeta_2 = d\theta/dt$, se tiene la siguiente realización de estado controlable:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} u, \quad (6.4)$$

En las figuras 6.1 y 6.2 se muestran los diagramas de simulación Matlab Simulink[®] del sistema (5.27) retroalimentado por (6.2).

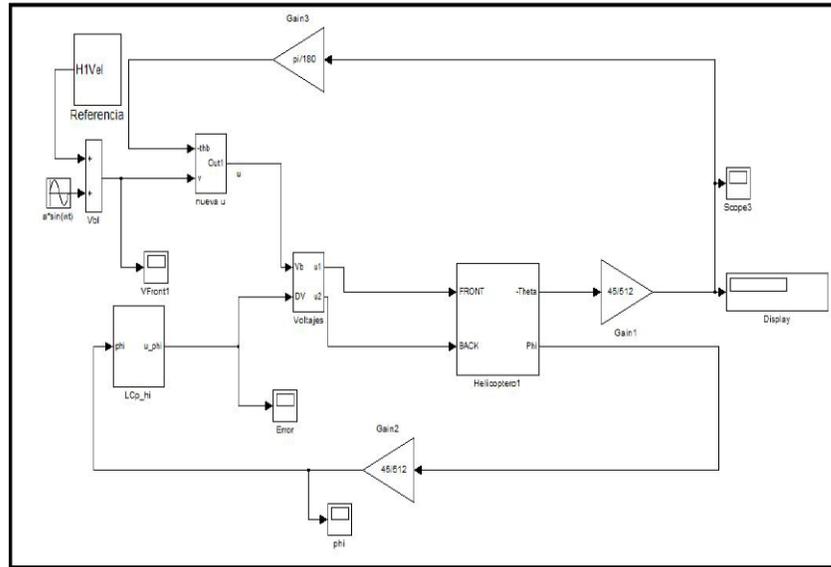


Figura 6.1 Figura que muestra el diagrama en Matlab Simulink® del lazo de retroalimentación de salida.

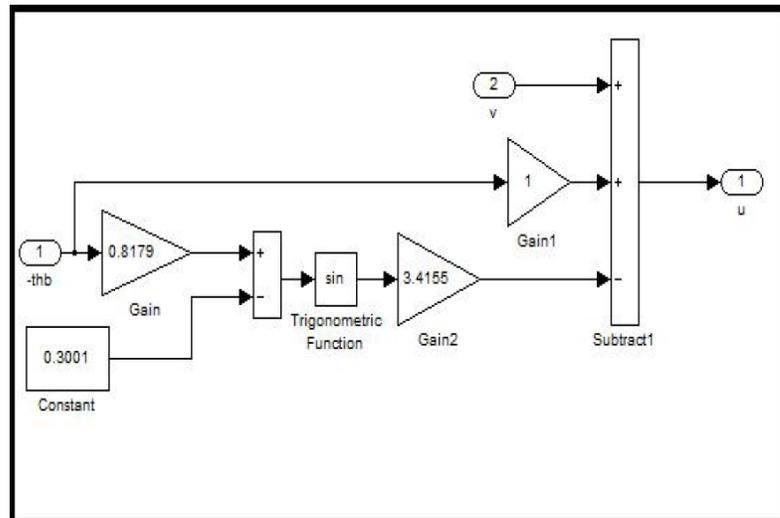


Figura 6.2 Figura que muestra el diagrama en Matlab Simulink® subbloque (nueva u) de la figura 6.1, la cual muestra el lazo de retroalimentación que se uso.

En la tabla 6.1 se muestra la relación v v.s. u , para diferentes ángulos θ , del sistema (5.26) retroalimentado por (6.2) en estado estacionario.

En la figura 6.3 se gráficán los valores obtenidos en la tabla 6.1. Aplicando la técnica de mínimos cuadrados se obtiene la siguiente aproximación del estado estacionario del sistema (5.26) retroalimentado por (6.2):

$$v = 4.2395(u + 0.0020) + 1.2945 \tag{6.5}$$

Num	u [V]	v [V]	θ [rad]
1	0.175	1.960	-0.1834
2	0.180	1.992	-0.1902
3	0.200	2.115	-0.2248
4	0.222	2.235	-0.2574
5	0.240	2.344	-0.2902
6	0.260	2.442	-0.3231
7	0.280	2.535	-0.3553
8	0.300	2.613	-0.3971
9	0.320	2.730	-0.4187
10	0.360	2.890	-0.4906
11	0.400	3.058	-0.5475
12	0.440	3.186	-0.6257
13	0.480	3.303	-0.7107
14	0.520	3.397	-0.8303

Tabla 6.1 Relación v v.s. u , para diferentes ángulos θ , del sistema (5.26) retroalimentado por (6.2) en estado estacionario.

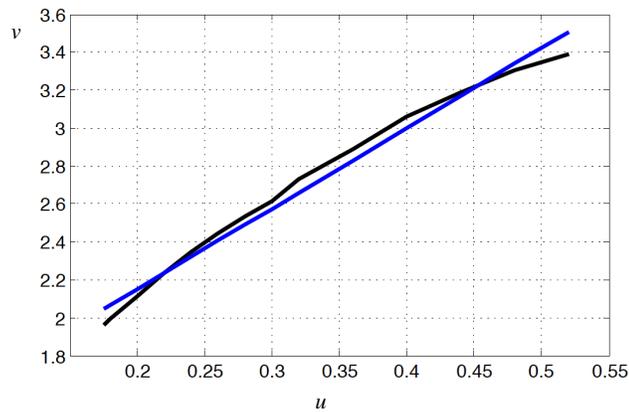


Figura 6.3 Gráfica que muestra la relación de v v.s. u (línea negra), obtenida a partir de la tabla 6.1, y su interpolación lineal (línea azul), $v = 4.2395(u + 0.0020) + 1.2945$, obtenida mediante el algoritmo de mínimos cuadrados.

6.3 Identificación de parámetros

Los parámetros de la función de transferencia (6.1), k , ω_n y ρ , se identifican utilizando diagramas de Bode para diferentes rangos de operación. Para esto se procedió de la siguiente manera:

1. Se exito al sistema con señales sinusoidales, de amplitud constante y a diferentes frecuencias de oscilación, en seis diferentes puntos de funcionamiento (regiones de “linealidad”).
2. Antes de registrar las mediciones, del ángulo θ y de la frecuencia de oscilación ω , se espera 120 segundos para permitir que el sistema entrara en su estado permanente.

- Con los datos registrados se obtienen diagramas de Bode correspondientes a los seis puntos de funcionamiento seleccionados.
- Para una primera estimación de los parámetros, ρ y ω_n , en cada punto de funcionamiento, se utilizan las siguientes relaciones [12]:

$$M_r = \frac{1}{2\rho\sqrt{1-\rho^2}} \quad \text{y} \quad \omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\rho^2}, \quad (6.6)$$

siendo ω_r la frecuencia de resonancia y M_r el valor pico de la resonancia (para obtener a k , se calcula la relación entre las amplitudes de entrada y salida).

- Utilizando las estimaciones anteriores como valores iniciales, se ejecuta el algoritmo de mínimos cuadrados, para obtener una mejor estimación de los parámetros, k , ω_n y ρ .

6.3.1 Puntos de funcionamiento

En base a la figura 6.3 se seleccionaron los rangos de funcionamiento mostrados en la tabla 6.2.

Punto de funcionamiento (i)	Rangos de v : [v_{m_i} v_{M_i}]	Punto medio de operación \bar{v}_i [V]	Rangos de u : [u_{m_i} u_{M_i}]	Punto medio de operación \bar{u}_i [V]
1	[2.2, 2.4)	2.3	[0.2116, 0.2588)	0.2352
2	[2.4, 2.6)	2.5	[0.2588, 0.3059)	0.2823
3	[2.6, 2.8)	2.7	[0.3059, 0.3531)	0.3295
4	[2.8, 3.0)	2.9	[0.3531, 0.4003)	0.3767
5	[3.0, 3.2)	3.1	[0.4003, 0.4475)	0.4239
6	[3.2, 3.4]	3.3	[0.4475, 0.4946]	0.4710

Tabla 6.2 Rangos de funcionamiento del sistema (5.26) retroalimentado por (6.2).

6.3.2 Diagramas de Bode

En las figuras 6.4, 6.5 y 6.6 se muestran diagramas de Bode para los seis rangos de operación de la tabla 6.2. Para esto, se procedió de la siguiente manera:

- Se excitó al sistema (5.26) retroalimentado por (6.2) con las señales:

$$u = \bar{u}_i + \frac{u_{M_i} - u_{m_i}}{2} \sin(\omega t), \quad i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad (6.7)$$

- Se trazó el diagrama obtenido directamente de las mediciones del laboratorio.

3. A partir de los diagramas obtenidos experimentalmente, se midieron M_r y ω_r , y mediante (6.6), se calcularon ρ y ω_n .
4. Utilizando los diagramas anteriores como valores iniciales, se ejecutó el algoritmo de mínimos cuadrados, para obtener una mejor estimación de los parámetros, ρ y ω_n .

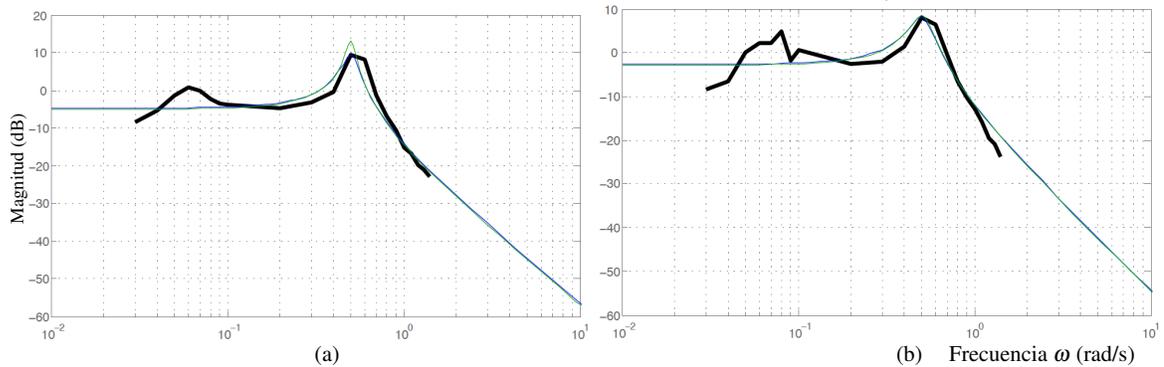


Figura 6.4 Diagramas de Bode de la relación $\theta(r\omega)/u(r\omega)$. La línea negra corresponde al diagrama obtenido directamente de las mediciones del laboratorio. La línea azul corresponde al diagrama trazado con los parámetros, ρ y ω_n , calculados mediante (6.6). La línea verde corresponde a una interpolación obtenida a partir del método de mínimos cuadrados. (a) Rango 1: $u \in [0.2116, 0.2588]$ y (b) Rango 2: $u \in [0.2588, 0.3059]$.

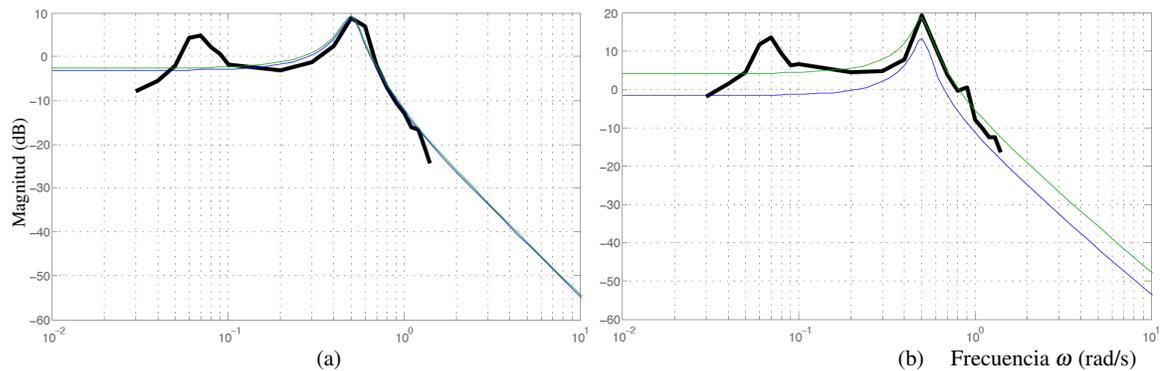


Figura 6.5 Diagramas de Bode de la relación $\theta(r\omega)/u(r\omega)$. La línea negra corresponde al diagrama obtenido directamente de las mediciones del laboratorio. La línea azul corresponde al diagrama trazado con los parámetros, ρ y ω_n , calculados mediante (6.6). La línea verde corresponde a una interpolación obtenida a partir del método de mínimos cuadrados. (a) Rango 3: $u \in [0.3059, 0.3531]$ y (b) Rango 4: $u \in [0.3531, 0.4003]$.

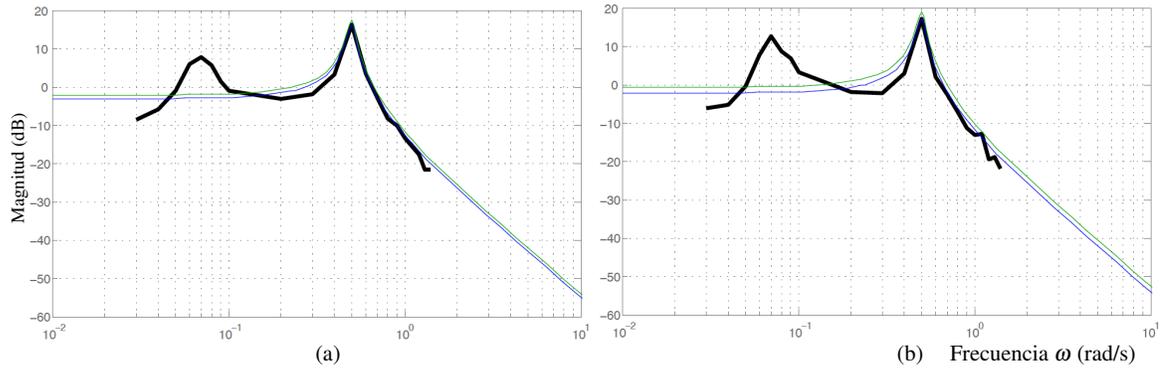


Figura 6.6 Diagramas de Bode de la relación $\theta(s)/u(s)$. La línea negra corresponde al diagrama obtenido directamente de las mediciones del laboratorio. La línea azul corresponde al diagrama trazado con los parámetros, ρ y ω_n , calculados mediante (6.6). La línea verde corresponde a una interpolación obtenida a partir del método de mínimos cuadrados. (a) Rango 5: $u \in [0.4003, 0.4475]$, y (b) Rango 6: $u \in [0.4475, 0.4946]$.

6.3.3 Parámetros k , ω_n y ρ

En la tabla 6.3 se muestran los parámetros, k , ω_n y ρ , correspondientes a los diagramas de Bode obtenidos mediante el algoritmo de mínimos cuadrados.

Punto de funcionamiento	ρ	ω_n	k
1	0.0552	0.5462	0.3296
2	0.0452	0.5124	0.4050
3	0.0522	0.5031	0.4702
4	0.0468	0.4816	0.5275
5	0.0602	0.4326	0.6826
6	0.3916	0.1251	0.8666

Tabla 6.3 Parámetros k , ω_n y ρ , correspondientes a los diagramas de Bode obtenidos mediante el algoritmo de mínimos cuadrados.

6.3.4 Parámetros a_1 , a_2 y b

Con respecto a los parámetros, $a_1 = 2\rho\omega_n$, $a_2 = \omega_n^2$ y $b = k\omega_n^2$, de la realización de estado (6.4). En las figuras 6.7, 6.8 y 6.9 se muestran sus variaciones a lo largo de los diferentes rangos de operación (obtenidas directamente a partir de la tabla 6.3); así como también, interpolaciones polinomiales obtenidas mediante el algoritmo de mínimos cuadrados. Las interpolaciones polinomiales obtenidas son:

$$\begin{aligned}
 \bar{a}_1(\bar{v}) &= 0.4545(\bar{v} - 2.7216)^4 + 0.0464 \\
 \bar{a}_2(\bar{v}) &= -0.1389(\bar{v} - 0.0048) + 0.6193 \\
 \bar{b}(\bar{v}) &= 0.0030(\bar{v} + 2.8412)^2 + 0.0214
 \end{aligned}
 \tag{6.8}$$

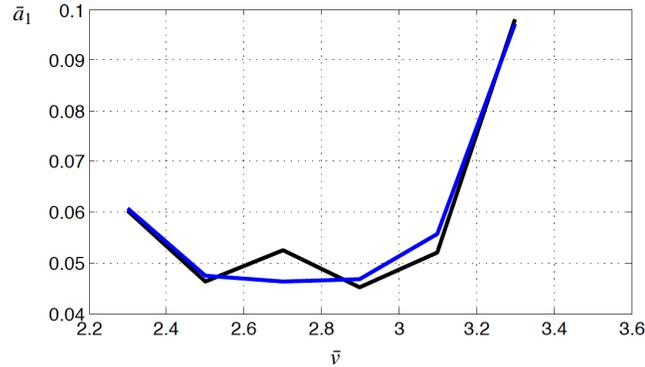


Figura 6.7 Relación \bar{a}_1 v.s. \bar{v}_i . La línea negra corresponde a los valores obtenidos a partir de tabla 6.3 (recordar (6.5) y tabla 6.2). La línea azul corresponde a la interpolación polinomial obtenida mediante el algoritmo de mínimos cuadrados: $\bar{a}_1(\bar{v}) = 0.4545(\bar{v} - 2.7216)^4 + 0.0464$.

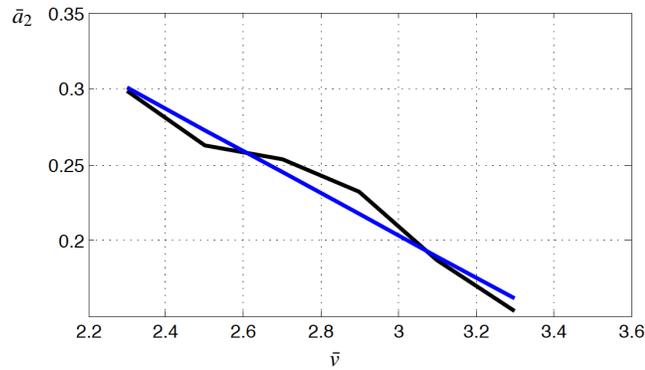


Figura 6.8 Relación \bar{a}_2 v.s. \bar{v}_i . La línea negra corresponde a los valores obtenidos a partir de tabla 6.3 (recordar (6.5) y tabla 6.2). La línea azul corresponde a la interpolación polinomial obtenida mediante el algoritmo de mínimos cuadrados: $\bar{a}_2(\bar{v}) = -0.1389(\bar{v} - 0.0048) + 0.6193$.

6.4 Refinación de la linealización por retroalimentación de salida

De las figuras 6.4, 6.5 y 6.6, notamos que hay un comportamiento extraño, a bajas frecuencias, en los diagramas de Bode del sistema retroalimentado, también se observa en las figuras 6.7, 6.8 y 6.9 que los parámetros del sistema no fueron correctamente compensados. Además, en el quinto y sexto puntos de funcionamiento, el helicóptero

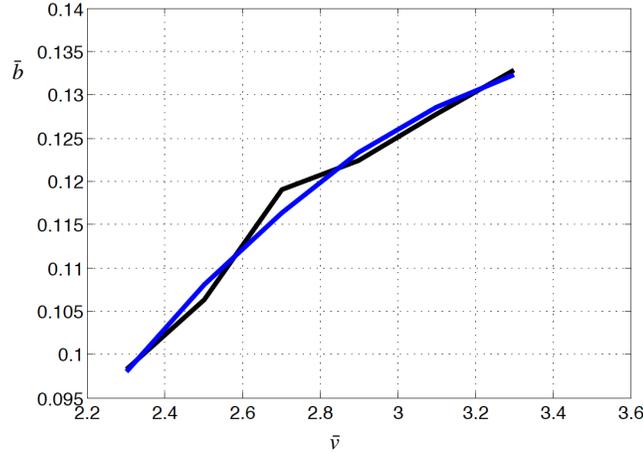


Figura 6.9 Relación \bar{b} v.s. \bar{v}_i . La línea negra corresponde a los valores obtenidos a partir de tabla 6.3 (recordar (6.5) y tabla 6.2). La línea azul corresponde a la interpolación polinomial obtenida mediante el algoritmo de mínimos cuadrados: $\bar{b}(\bar{v}) = 0.0030(\bar{v} + 2.8412)^2 + 0.0214$.

oscilaba mucho y no se podía abarcar todo el rango de funcionamiento. Por esta razón, en esta sección se propone una refinación de la linealización estática por retroalimentación de salida, la cual consiste en tomar en cuenta el comportamiento variable de los parámetros a_1 , a_2 y b , mostrado en (6.8).

La modificación propuesta de (6.2) es:

$$v = \frac{1}{\bar{b}(\bar{v})} \left(u_r - (\bar{a}_2(\bar{v})\bar{\theta} - \bar{b}(\bar{v})f(\bar{\theta})) \right) \quad (6.9)$$

$$q = \bar{a}_2(\bar{v})\bar{\theta} - \bar{b}(\bar{v})f(\bar{\theta}) \quad (6.10)$$

Aplicando a (5.27) la retroalimentación estática de salida refinada (6.9), se obtiene:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{b}{\bar{b}(\bar{v})} \end{bmatrix} u_r + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \hat{q}(\theta, \bar{\theta}, \bar{v}) \quad (6.11)$$

donde (recordar (5.25)):

$$\hat{q}(\theta, \bar{\theta}, \bar{v}) = q(\theta) - \frac{b}{\bar{b}(\bar{v})} (\bar{a}_2(\bar{v})\bar{\theta} - \bar{b}(\bar{v})f(\bar{\theta})) = \left(a_2\theta - \frac{b}{\bar{b}(\bar{v})}\bar{a}_2(\bar{v})\bar{\theta} \right) - b(f(\theta) - f(\bar{\theta})) \quad (6.12)$$

$$\bar{v} = f(\bar{\theta}) = -3.4155 \sin(0.8179\bar{\theta} - 0.3001) \quad (6.13)$$

Para obtener el valor promedio, $\bar{\theta}$, se utilizó el siguiente filtro de Buterworth de tercer orden:

$$T(s) = \frac{\varepsilon_f^3}{s^3 + \varepsilon_f s^2 + 2\beta_f \varepsilon_f^2 s + 2\beta_f \varepsilon_f + \varepsilon_f^2 + \varepsilon_f^3}, \quad \text{con } \varepsilon_f = 0.05 \text{ y } \beta_f = 0.7071. \quad (6.14)$$

En las figuras 6.10, 6.11, 6.12, 6.13 y 6.14 se muestran los diagramas de simulación Matlab Simulink[®] del sistema (5.27) retroalimentado por (6.9), (6.8), (6.13) y (6.14).

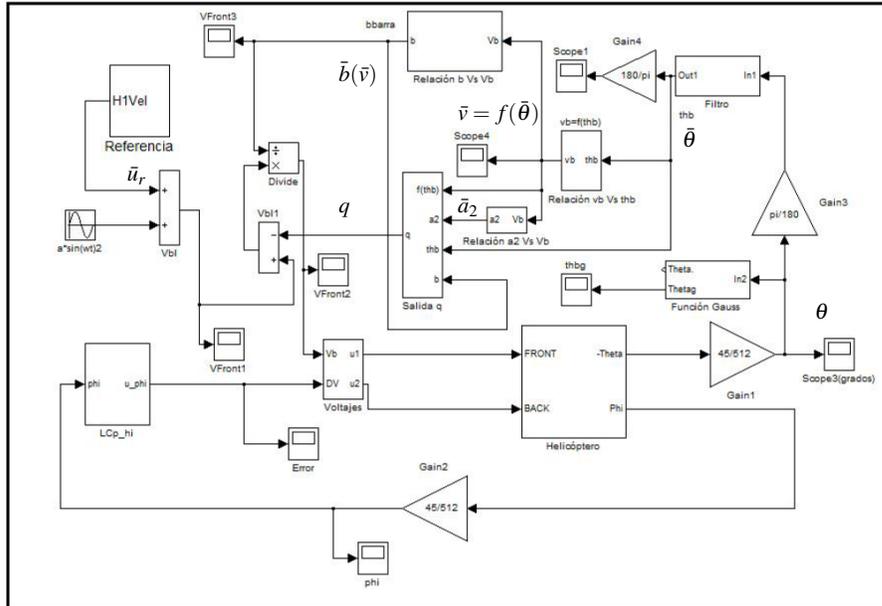


Figura 6.10 Figura que muestra el diagrama en Matlab Simulink[®] del lazo de la linealización de salida refinada, del sistema (5.27) retroalimentado por (6.9), (6.8), (6.13) y (6.14).

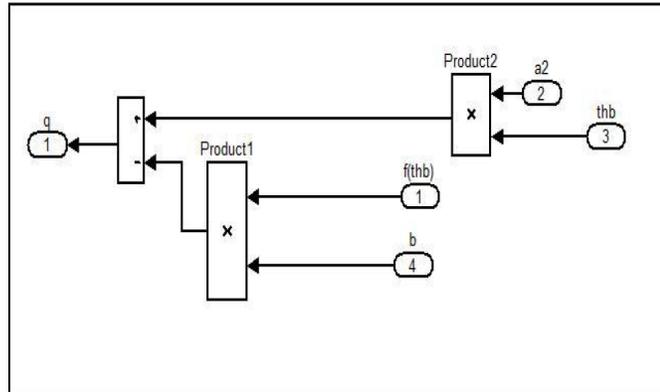


Figura 6.11 Figura que muestra el diagrama en Matlab Simulink[®] del subbloque (Salida q) de la figura 6.10, correspondiente a: $q = \bar{a}_2(\bar{v})\bar{\theta} - \bar{b}(\bar{v})f(\bar{\theta})$ (6.10).

En la tabla 6.4 se muestra la relación v v.s. u_r , del sistema (5.26) retroalimentado por (6.9), (6.8), (6.13) y (6.14), en estado estacionario, y en la figura 6.15 se gráficán los valores obtenidos de la tabla 6.4. Aplicando la técnica de mínimos cuadrados se obtiene la siguiente aproximación del estado estacionario del sistema retroalimentado:

$$v = 2.5559(u_r + 0.0010) + 1.6547 \quad (6.15)$$

De la figura 6.15, se tienen los rangos de funcionamiento mostrados en la tabla 6.5 (comparar con la tabla 6.2).

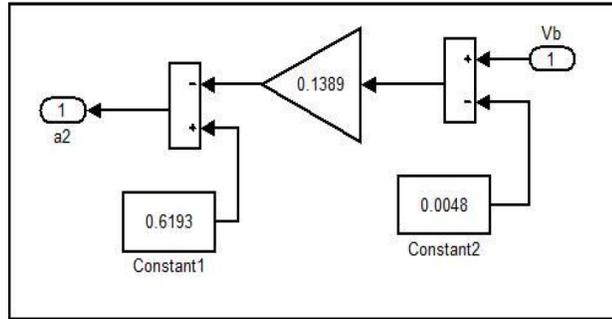


Figura 6.12 Figura que muestra el diagrama en Matlab Simulink[®] del subbloque (Relación a_2 v.s. Vb) de la figura 6.10, la cual es:
 $\bar{a}_2(\bar{v}) = -0.1389(\bar{v} - 0.0048) + 0.6193$ (6.8).

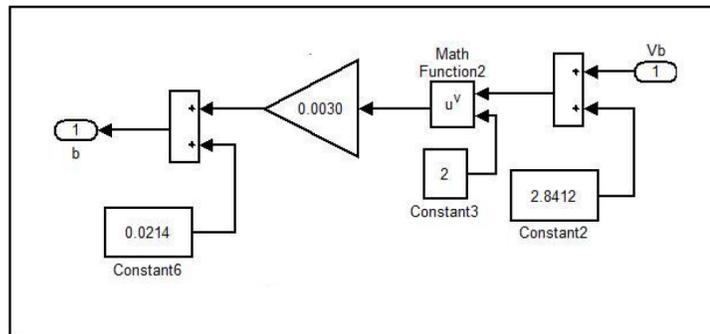


Figura 6.13 Figura que muestra el diagrama en Matlab Simulink[®] del subbloque (Relación b v.s. Vb) de la figura 6.10, la cual es:
 $\bar{b}(\bar{v}) = 0.0030(\bar{v} + 2.8412)^2 + 0.0214$ (6.8).

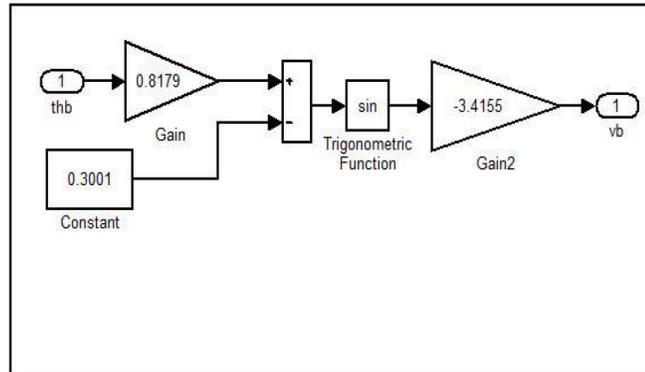


Figura 6.14 Figura que muestra el diagrama en Matlab Simulink[®] del subbloque (Relación Vb v.s. thb) de la figura 6.10, la cual es:
 $\bar{v} = f(\bar{\theta}) = -3.4155 \sin(0.8179\bar{\theta} - 0.3001)$ (5.25).

6.4.1 Diagramas de Bode

Siguiendo el mismo procedimiento de la sección 6.3.2, se obtienen los diagramas de Bode mostrados en las figuras 6.16, 6.17 y 6.18.

Num	u_r [V]	v [V]
1	0.166	1.989
2	0.200	2.144
3	0.220	2.217
4	0.280	2.387
5	0.300	2.440
6	0.320	2.503
7	0.360	2.628
8	0.380	2.682
9	0.420	2.751
10	0.460	2.835
11	0.480	2.887
12	0.500	2.906
13	0.520	2.938
14	0.540	2.959

Tabla 6.4 Relación v v.s. u_r del sistema (5.26) retroalimentado por (6.9), en estado estacionario.

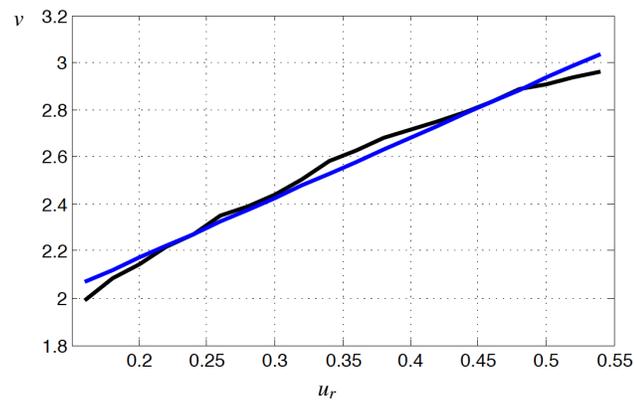


Figura 6.15 Gráfica que muestra la relación de v v.s. u_r (línea negra), obtenida a partir de la tabla 6.4, y su interpolación lineal (línea azul), $v = 2.5559(u_r + 0.0010) + 1.6547$, obtenida mediante el algoritmo de mínimos cuadrados.

Comparando las figuras 6.16, 6.17 y 6.18 con la figuras 6.4, 6.5 y 6.6, se observa una ampliación del rango de funcionamiento, y una mejora en los diagramas de Bode a bajas frecuencias.

De la tabla 6.5 y de los diagramas de Bode de las figuras 6.16, 6.17 y 6.18, se obtienen las relaciones de u_r v.s. θ , mostrados en la figura 6.19.

Punto de funcionamiento (i)	Rangos de v : [v_{m_i} v_{M_i}]	Punto medio de operación \bar{v}_i [V]	Rangos de u_r : [$u_{r_{m_i}}$ $u_{r_{M_i}}$]	Punto medio de operación \bar{u}_{ri} [V]
1	[2.03, 2.17]	2.1	[0.1458, 0.2006)	0.1732
2	[2.17, 2.31]	2.24	[0.2006, 0.2554)	0.2280
3	[2.31, 2.45]	2.38	[0.2554, 0.3102)	0.2828
4	[2.45, 2.59]	2.52	[0.3102, 0.3649)	0.3376
5	[2.59, 2.73]	2.66	[0.3649, 0.4197)	0.3923
6	[2.73, 2.87]	2.8	[0.4197, 0.4745]	0.4471

Tabla 6.5 Rangos de funcionamiento del sistema (5.27) retroalimentado por (6.9).

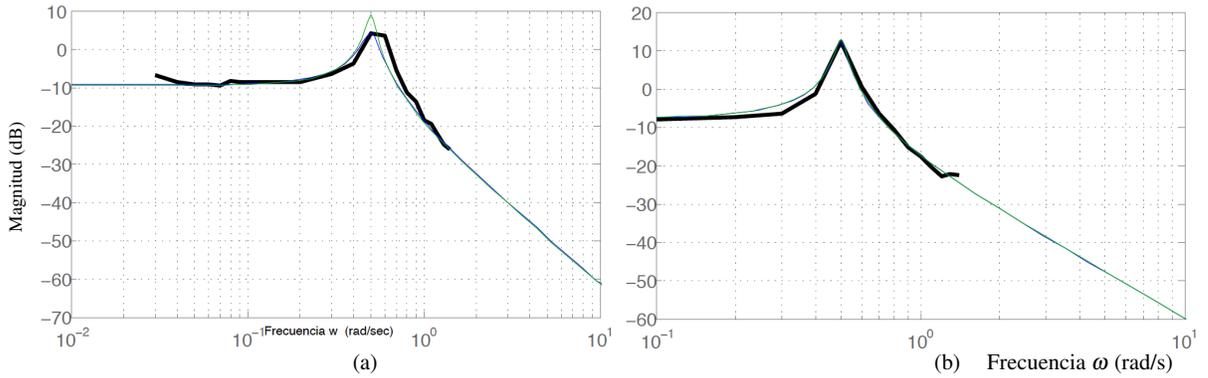


Figura 6.16 Diagramas de Bode de la relación $\theta(i\omega)/u_r(i\omega)$. La línea negra corresponde al diagrama obtenido directamente de las mediciones del laboratorio. La línea azul corresponde al diagrama trazado con los parámetros, ρ y ω_n , calculados mediante (6.6). La línea verde corresponde a una interpolación obtenida a partir del método de mínimos cuadrados. (a) Rango 1: $u_r \in [0.1458, 0.2006)$ y (b) Rango 2: $u_r \in [0.2006, 0.2554)$.

6.4.2 Modelos de los rangos de operación

Para los Rangos 1, 2, 3, 4, 5 y 6 se tiene los siguientes modelos, del sistema retroalimentado (6.11):

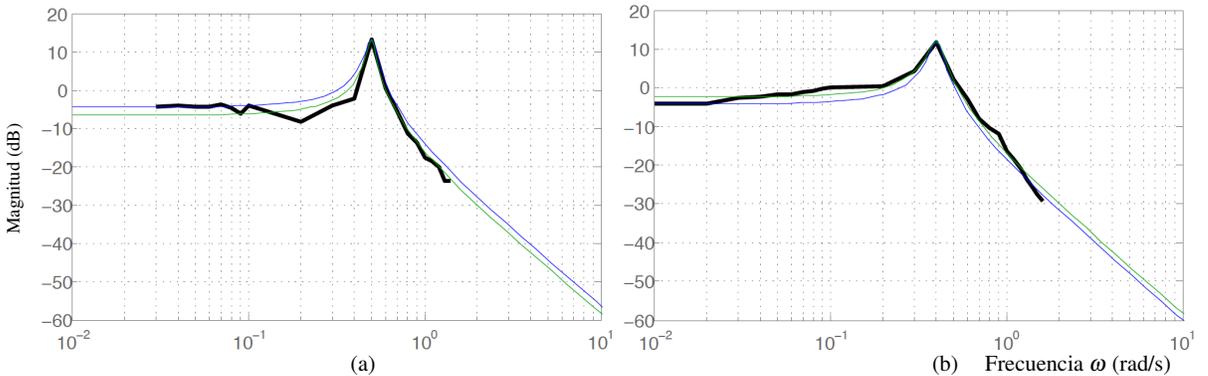


Figura 6.17 Diagramas de Bode de la relación $\theta(i\omega)/u_r(i\omega)$. La línea negra corresponde al diagrama obtenido directamente de las mediciones del laboratorio. La línea azul corresponde al diagrama trazado con los parámetros, ρ y ω_n , calculados mediante (6.6). La línea verde corresponde a una interpolación obtenida a partir del método de mínimos cuadrados. (a) Rango 3: $u_r \in [0.2554, 0.3102)$ y (b) Rango 4: $u_r \in [0.3102, 0.3649)$.

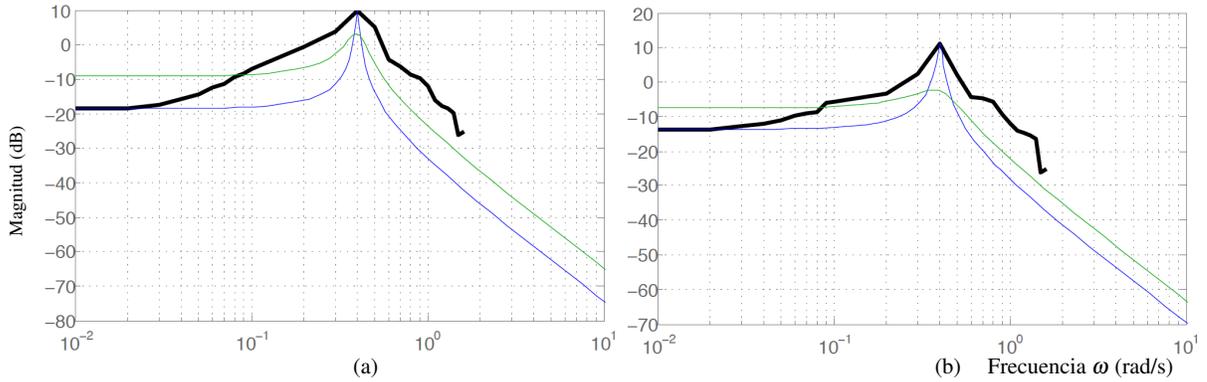


Figura 6.18 Diagramas de Bode de la relación $\theta(i\omega)/u_r(i\omega)$. La línea negra corresponde al diagrama obtenido directamente de las mediciones del laboratorio. La línea azul corresponde al diagrama trazado con los parámetros, ρ y ω_n , calculados mediante (6.6). La línea verde corresponde a una interpolación obtenida a partir del método de mínimos cuadrados. (a) Rango 5: $u_r \in [0.3649, 0.4197]$ y (b) Rango 6: $u_r \in [0.4197, 0.4745]$.

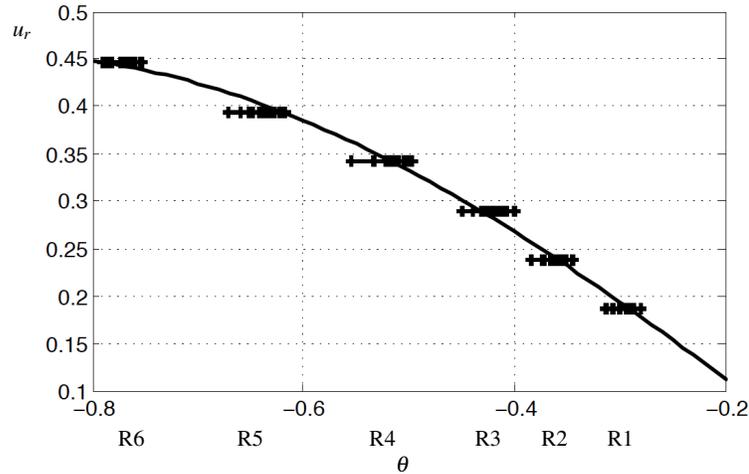


Figura 6.19 En esta gráfica se muestra la relación de u_r v.s. θ , donde R1,..., R6 son los rangos y la línea negra es la aproximación con mínimos cuadrados.

Rango 1

- Los parámetros correspondientes al diagrama de Bode, obtenidos a partir del método de mínimos cuadrados,

son:
$$\begin{bmatrix} \rho \\ \omega_n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0575 \\ 0.5376 \\ 0.5581 \end{bmatrix} .$$

- Los parámetros correspondientes al diagrama de Bode, calculados mediante (6.6), son:
$$\begin{bmatrix} \rho \\ \omega_n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0989 \\ 0.5050 \\ 0.5794 \end{bmatrix} .$$

- Por lo que el modelo aproximado del rango 1 es:

$$\ddot{\theta} + 6.1824 \times 10^{-2} \dot{\theta} + 0.2890\theta = 0.1613u_r \quad (6.16)$$

Rango 2

- Los parámetros correspondientes al diagrama de Bode, obtenidos a partir del método de mínimos cuadrados,

$$\text{son: } \begin{bmatrix} \rho \\ \omega_n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1339 \\ 0.5081 \\ 0.7176 \end{bmatrix} .$$

- Los parámetros correspondientes al diagrama de Bode, calculados mediante (6.6), son:

$$\begin{bmatrix} \rho \\ \omega_n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1474 \\ 0.5112 \\ 0.7365 \end{bmatrix} .$$

- Por lo que el modelo aproximado del rango 2 es:

$$\ddot{\theta} + 0.1361\dot{\theta} + 0.2581\theta = 0.3646u_r \quad (6.17)$$

Rango 3

- Los parámetros correspondientes al diagrama de Bode, obtenidos a partir del método de mínimos cuadrados,

$$\text{son: } \begin{bmatrix} \rho \\ \omega_n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1269 \\ 0.5035 \\ 0.7362 \end{bmatrix} .$$

- Los parámetros correspondientes al diagrama de Bode, calculados mediante (6.6), son:

$$\begin{bmatrix} \rho \\ \omega_n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1276 \\ 0.5083 \\ 0.6982 \end{bmatrix} .$$

- Por lo que el modelo aproximado del rango 3 es:

$$\ddot{\theta} + 0.1277\dot{\theta} + 0.2535\theta = 0.1866u_r \quad (6.18)$$

Rango 4

- Los parámetros correspondientes al diagrama de Bode, obtenidos a partir del método de mínimos cuadrados,

$$\text{son: } \begin{bmatrix} \rho \\ \omega_n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0943 \\ 0.4973 \\ 0.7971 \end{bmatrix} .$$

- Los parámetros correspondientes al diagrama de Bode, calculados mediante (6.6), son:
$$\begin{bmatrix} \rho \\ \omega_n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0899 \\ 0.5041 \\ 0.8159 \end{bmatrix}.$$
- Por lo que el modelo aproximado del rango 4 es:

$$\ddot{\theta} + 9.3791 \times 10^{-2} \dot{\theta} + 0.2473 \theta = 0.1726 u_r \quad (6.19)$$

Rango 5

- Los parámetros correspondientes al diagrama de Bode, obtenidos a partir del método de mínimos cuadrados, son:
$$\begin{bmatrix} \rho \\ \omega_n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0540 \\ 0.4859 \\ 0.7754 \end{bmatrix}.$$
- Los parámetros correspondientes al diagrama de Bode, calculados mediante (6.6), son:
$$\begin{bmatrix} \rho \\ \omega_n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0538 \\ 0.5015 \\ 0.6973 \end{bmatrix}.$$
- Por lo que el modelo aproximado del rango 5 es:

$$\ddot{\theta} + 5.2477 \times 10^{-2} \dot{\theta} + 0.2361 \theta = 0.1830 u_r \quad (6.20)$$

Rango 6

- Los parámetros correspondientes al diagrama de Bode, obtenidos a partir del método de mínimos cuadrados, son:
$$\begin{bmatrix} \rho \\ \omega_n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0545 \\ 0.4766 \\ 0.9234 \end{bmatrix}.$$
- Los parámetros correspondientes al diagrama de Bode, calculados mediante (6.6), son:
$$\begin{bmatrix} \rho \\ \omega_n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0541 \\ 0.5015 \\ 0.7732 \end{bmatrix}.$$
- Por lo que el modelo aproximado del rango 6 es:

$$\ddot{\theta} + 5.1949 \times 10^{-2} \dot{\theta} + 0.2271 \theta = 0.2097 u_r \quad (6.21)$$

6.5 Conclusiones

En este capítulo se realizó una linealización estática, mediante una retroalimentación estática de salida. Se identificaron los parámetros del sistema retroalimentado, utilizando técnicas frecuenciales (diagramas de Bode).

Dado que con la primera retroalimentación estática de salida, no se linealizó correctamente la respuesta del sistema, en estado permanente, se propuso una refinación de la linealización, la cual consistió en tomar en cuenta los parámetros del sistema de la primera linealización, obteniéndose así, una mejor compensación del factor no lineal, con un factor de error pequeño.

Por último se obtuvieron seis modelos que representan el funcionamiento del sistema en sus diferentes rangos de operación. Estos seis modelos se obtuvieron con la refinación de la linealización por retroalimentación de salida (6.16) - (6.21).

Dado que tenemos seis modelos diferentes que describen el comportamiento del sistema, en sus diferentes rangos de operación, se tiene entonces un sistema variante en el tiempo. En el siguiente capítulo se utiliza un control implícito singularmente perturbado para aproximarse a un sistema invariante en el tiempo.

Capítulo 7

Linealización dinámica mediante el control implícito singularmente perturbado

7.1 Introducción

Los seis modelos diferentes que describen al helicóptero, (6.16) - (6.21), en su conjunto describen el comportamiento de un sistema variante en el tiempo. A fin de obtener un comportamiento, cercano a un sistema lineal invariante en el tiempo, en este capítulo se aplica el esquema de control implícito singularmente perturbado, descrito en el capítulo 4.

7.2 Control implícito singularmente perturbado para el helicóptero

De los modelos (6.16)–(6.21), se tiene la siguiente variación de parámetros:

$$\begin{aligned} a_1(t) &= 2\omega_n\rho \in [0.0519, 0.1360] \\ a_2(t) &= \omega_n^2 \in [0.2271, 0.2890] \\ b(t) &= k\omega_n^2 \in [0.1613, 0.3646] \end{aligned} \quad (7.1)$$

Dado que: (i) no se dispone de ninguna medición y/o estimación de $\hat{q}(\theta, \bar{\theta}, \bar{v})$, y (ii) su magnitud es despreciable, se considera entonces $h(t) = \hat{q}(\theta, \bar{\theta}, \bar{v}) \approx 0$, por lo que el modelo (6.11) se reescribe de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{b}{b(\bar{v})} \end{bmatrix} u_r, \quad \theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \xi(t) \quad (7.2)$$

Para este caso, la *ley de control singularmente perturbada* (4.5), toma la siguiente forma:

$$\epsilon u_r(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} \xi(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \quad (7.3)$$

Y el *filtro ecualizador* (4.6) será:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\bar{a}_1 & -\bar{a}_2 + (1 + \ell) \\ 0 & -(\beta - 1) \end{bmatrix} \xi(t) + \begin{bmatrix} -(1 + \ell) & -\ell \\ (\beta - 1) & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} r(t) \quad (7.4)$$

En este capítulo, se propone el polinomio Hurwitz, $p(\lambda) = (\lambda + 1/2)^2$, esto es: $\bar{a}_1 = 0.25$ y $\bar{a}_2 = 1$; y el limite inferior, b_1 , de $b(t)$ es 0.1613. Es decir:

$$p(\lambda) = (\lambda + 1/2)^2, \bar{a}_1 = 0.25, \bar{a}_2 = 1, b_1 = 0.1613 \quad (7.5)$$

Hay que notar que la retroalimentación del estado, ξ_2 , corresponde a la velocidad angular, $d\theta/dt$. Ahora bien, dado que solamente se dispone de la medición de la posición angular, θ , es necesario estimar de alguna manera su derivada. Esta estimación se enfrenta a dos dificultades: (i) por un lado el sensor de posición angular es no derivable (decodificador digital), y (ii) por otro lado el sensor tiene un alto contenido de ruido. Estas dos dificultades se afrontaron utilizando el filtro de Gauss descrito en el Apéndice A.

Para satisfacer el Teorema (4.1), $\beta > 1$, $\tau < \frac{1}{\beta-1}$, $\varepsilon^* > 0$ y $\ell = 1/\tau - \beta$, se proponen:

$$\beta = 10, \tau = 0.1, K = 0.5 \quad (7.6)$$

Sustituyendo (7.5) y (7.6) en (7.4), se tiene:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.25 & 0 \\ 0 & -9 \end{bmatrix} \xi(t) + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 9 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} r(t) \quad (7.7)$$

La estimación (4.9) del Lema 4.1, será entonces:

$$\begin{aligned} M_1 = 16.024, M_2 = 9.75, M_3 = 1.0308 &\Rightarrow \varepsilon^* = 0.01524 \\ \Rightarrow \varepsilon \in (0, \varepsilon^*) &\Rightarrow \varepsilon = 0.01 \end{aligned} \quad (7.8)$$

7.3 Resultados experimentales

En las figuras 7.1 y 7.2 se muestran los diagramas de simulación Matlab Simulink[®] sistema (7.2) retroalimentado por el control implícito, (7.3), utilizando el filtro ecualizador, (7.4).

En la tabla 7.1 se muestra la relación, r v.s. θ , del sistema retroalimentado en estado estacionario.

7.3.1 Puntos de funcionamiento

En la tabla 7.2 se muestran los rangos de funcionamiento de r , del sistema retroalimentado, v.s. el ángulo θ , tomados en laboratorio.

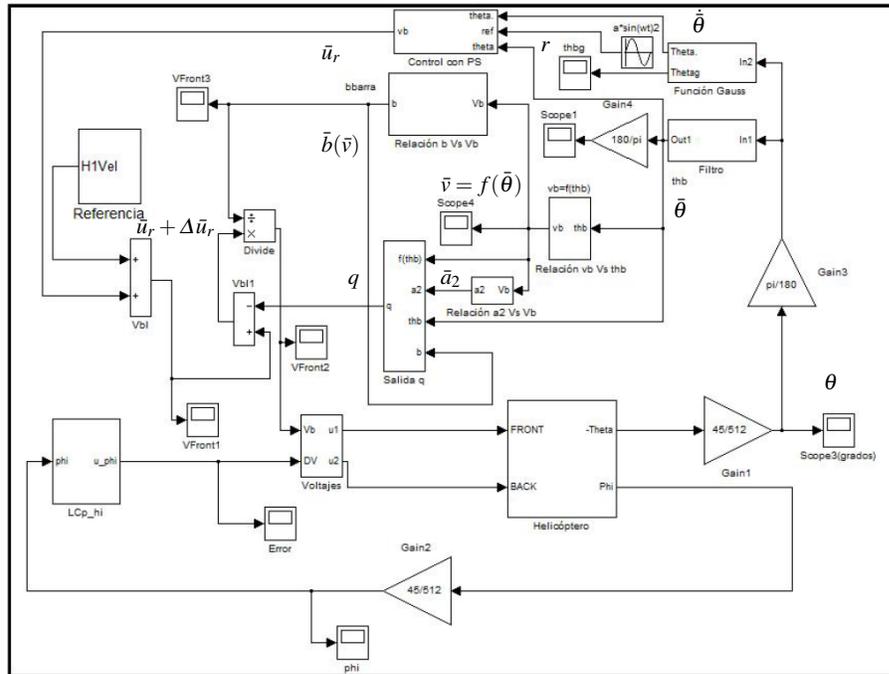


Figura 7.1 En esta figura podemos ver el diagrama en Matlab Simulink[®] del helicóptero con el control implícito, sistema (7.2) retroalimentado por (7.3), utilizando el filtro equalizador (7.4).

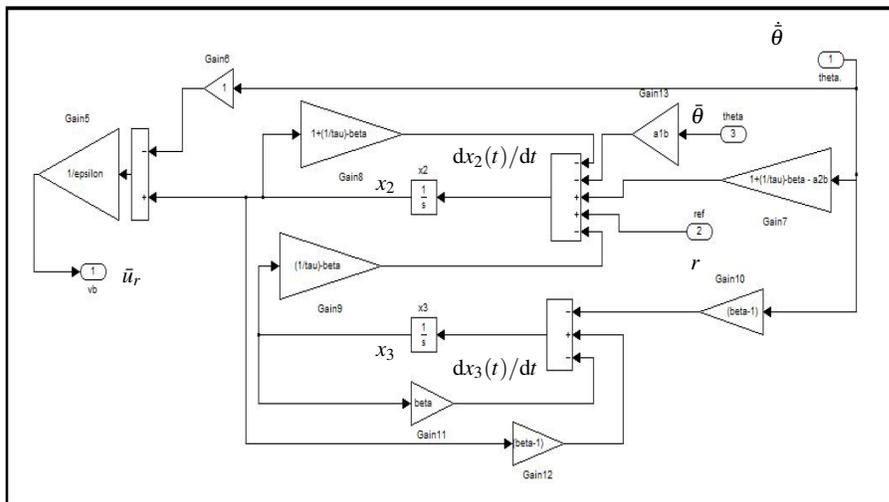


Figura 7.2 Figura que muestra el subbloque (Control con PS) de la figura 7.1.

En la figura 7.3 se muestran los rangos de funcionamiento, en estado estacionario, obtenidos para el sistema (7.2), retroalimentado por (7.3) y (7.4).

Num	r [V]	θ [rad]
1	0.100	0.1417
2	0.126	0.1786
3	0.146	0.2069
4	0.178	0.2523
5	0.190	0.2693
6	0.200	0.2806
7	0.211	0.2961
8	0.231	0.3241
9	0.261	0.3662
10	0.281	0.3942
11	0.300	0.4638
12	0.321	0.4963
13	0.341	0.5272
14	0.370	0.5720
15	0.388	0.5998
16	0.412	0.5801
17	0.432	0.6083
18	0.462	0.6505
19	0.482	0.6787
20	0.500	0.7040

Tabla 7.1 Relación r v.s. θ en estado estacionario, del sistema (7.2) retroalimentado por (7.3) y (7.4).

Punto de funcionamiento (i)	Rangos de r : $[r_{m_i}, r_{M_i})$	Punto medio de operación \bar{r}_i [V]	Rangos de θ : $[\theta_{m_i}, \theta_{M_i})$	Punto medio de operación $\bar{\theta}_i$ [rad]
1	[0.1, 0.2)	0.15	[-0.2835, -0.1417]	0.2126
2	[0.2, 0.3)	0.25	[-0.4210, -0.2806]	0.3508
3	[0.3, 0.4)	0.35	[-0.6184, -0.4638]	0.5411
4	[0.4, 0.5)	0.45	[-0.7040, -0.5632]	0.6336

Tabla 7.2 Rangos de funcionamiento en estado estacionario, del sistema (7.2) retroalimentado por (7.3) y (7.4).

7.3.2 Diagramas de Bode

Siguiendo el mismo procedimiento de la sección 6.3.2, se obtienen los diagramas de Bode mostrados en las figuras 7.4 y 7.5, con la diferencia que se tomaron los cuatro rangos de operación de la tabla 7.2.

7.4 Modelos de los rangos de operación

Los modelos obtenidos para los cuatro rangos de funcionamiento de la tabla 7.2, son los siguientes:

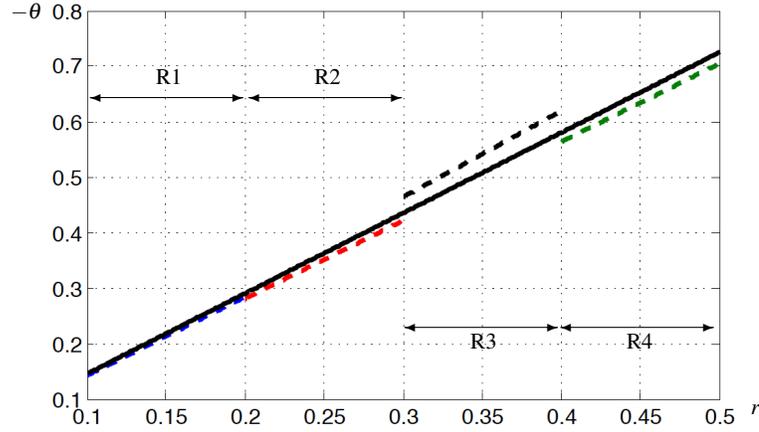


Figura 7.3 Figura que muestra la relación de la salida $-\bar{\theta}$ v.s. r (la entrada en estado permanente), la línea discontinua azul es el rango 1 donde $r \in [0.1, 0.2)$, la línea discontinua roja es el rango 2 donde $r \in [0.2, 0.3)$, la línea discontinua negra es el rango 3 donde $r \in [0.3, 0.4)$, la línea discontinua verde es el rango 4 donde $r \in [0.4, 0.5)$, la línea continua negra corresponde a la interpolación polinomial obtenida mediante el algoritmo de mínimos cuadrados abarcando todos los rangos.

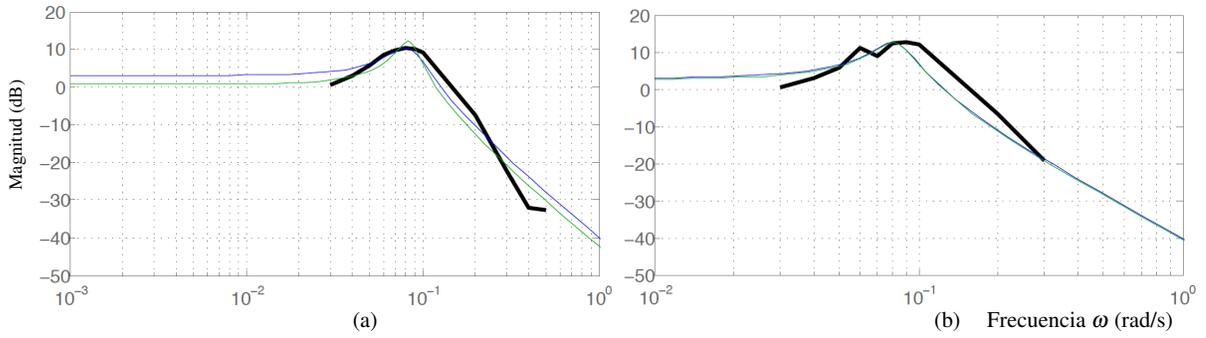


Figura 7.4 Diagramas de Bode de la relación $\bar{\theta}(\iota\omega)/r(\iota\omega)$ ($\bar{\theta}$ tomado del filtro de Gauss). La línea negra corresponde al diagrama obtenido directamente de las mediciones del laboratorio. La línea azul corresponde al diagrama trazado con los parámetros, ρ y ω_h , calculados mediante (6.6). La línea verde corresponde a una interpolación obtenida a partir del método de mínimos cuadrados. (a) Rango 1: $r \in [0.1, 0.2)$ y (b) Rango 2: $r \in [0.2, 0.3)$.

Rango 1: $r \in [0.1, 0.2)$, $\theta \in [-0.1431, -0.2806)$

$\xi_1 = \theta$ & $\xi_2 = \dot{\theta}$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.0259 & -0.0070 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.0100 \end{bmatrix} r \quad (7.9)$$

Rango 2: $r \in [0.2, 0.3)$, $\theta \in [-0.2806, -0.4638)$

$\xi_1 = \theta$ & $\xi_2 = \dot{\theta}$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.0274 & -0.0067 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.0095 \end{bmatrix} r \quad (7.10)$$

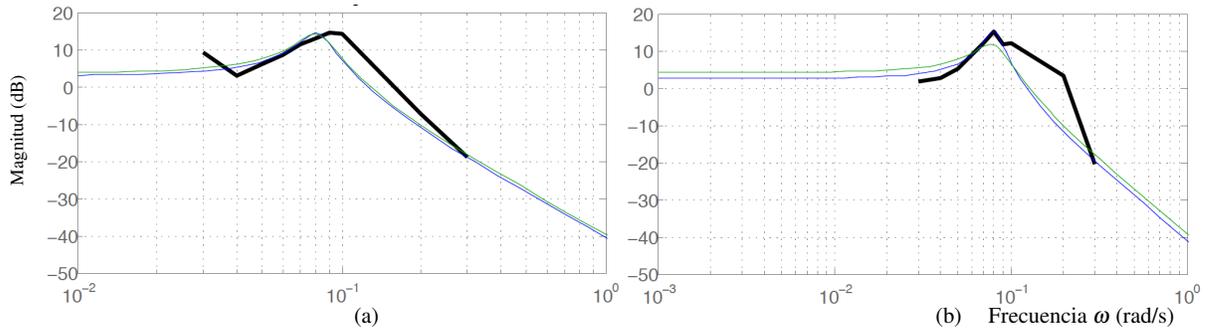


Figura 7.5 Diagramas de Bode de la relación $\bar{\theta}(i\omega)/r(i\omega)$ ($\bar{\theta}$ tomado del filtro de Gauss). La línea negra corresponde al diagrama obtenido directamente de las mediciones del laboratorio. La línea azul corresponde al diagrama trazado con los parámetros, ρ y ω_n , calculados mediante (6.6). La línea verde corresponde a una interpolación obtenida a partir del método de mínimos cuadrados. (a) Rango 3: $r \in [0.3, 0.4]$ y (b) Rango 4: $r \in [0.4, 0.5]$.

Rango 3: $r \in [0.3, 0.4]$, $\theta \in [-0.4638, -0.5632]$

$\xi_1 = \theta$ & $\xi_2 = \dot{\theta}$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.0243 & -0.0083 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.0129 \end{bmatrix} r \quad (7.11)$$

Rango 4: $r \in [0.4, 0.5]$, $\theta \in [-0.5632, -0.7041]$

$\xi_1 = \theta$ & $\xi_2 = \dot{\theta}$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.0219 & -0.0066 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.0093 \end{bmatrix} r \quad (7.12)$$

De los modelos (7.9)–(7.12), se observa que ahora se tiene una pequeña variación de los parámetros.

7.5 Conclusiones

En este capítulo se aplicó el esquema de control implícito singularmente perturbado, (7.3) - (7.4), con el fin de obtener un comportamiento descrito por un sistema lineal invariante en el tiempo.

Se obtuvieron cuatro modelos, (7.9) - (7.12), los cuales corresponden a los diferentes rangos de funcionamiento mostrados en la tabla 7.2. Como los parámetros de estos modelos, son aproximadamente iguales, se puede considerar un solo modelo, cuyos parámetros serán el promedio de los anteriores modelos.

Capítulo 8

Controlabilidad del comportamiento utilizando el modelo del prototipo de laboratorio

8.1 Introducción

En este capítulo, se aplica el control inverso por la derecha, obtenido en la sección 3.7, al modelo del helicóptero, representado por los modelos (7.9) a (7.12).

El objetivo de este control es que el helicóptero llegue a una referencia, θ_f , en un tiempo finito, t , con una aceleración nula ($\ddot{\theta} = 0$). Esto es, se desea aterrizar al helicóptero suavemente.

8.2 Seguimiento del comportamiento, (u, x) , del helicóptero

En esta sección se obtiene un control, que permita al helicóptero seguir una trayectoria comportamental, (u, x) , dada.

En la sección 7.4, se obtuvieron los cuatro modelos mostrados en las ecuaciones (7.9) a (7.12), los cuales corresponden a los diferentes rangos de funcionamiento de la tabla 7.2. De estos modelos, se puede observar que los valores de los parámetros son aproximadamente iguales; por lo que, para el diseño del control, se tomará un valor promedio de estos parámetros. Esto es, se considera el sistema representado por:

$$\ddot{\theta} + 2\omega_n\rho\dot{\theta} + \omega_n^2\theta = k\omega_n^2r \quad (8.1)$$

Con los valores promedios:

$$\begin{bmatrix} \rho \\ \omega_n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0227 \\ 0.1574 \\ 0.4221 \end{bmatrix} \quad (8.2)$$

Y con las condiciones iniciales:

$$\theta(0) = 0, \quad d\theta(0)/dt = 0 \quad \text{y} \quad d^2\theta(0)/dt^2 = 0$$

8.2.1 Simulación de los modelos incrementales

En la figura 8.1 se muestra el diagrama de simulación, Matlab Simulink[®], de los modelos obtenidos en la sección 7.4, para los cuatro rangos de funcionamiento de la tabla 7.2.

- En la figura 8.2, se muestra el subbloque de conmutación de la figura 8.1, que es el que hace la función de ver que bloque tiene que trabajar para cada uno de los diferentes rangos. En este bloque se compara el valor de θ y se activa el sistema que le corresponde (7.9) - (7.12).
- En las figuras 8.3, 8.4, 8.5, y 8.6, se muestran los cuatro subsistemas de la figura 8.1. En estos subsistemas se conectan las condiciones iniciales, ya que estas tienen que estar ligadas al sistema original (ver figura 8.1, conexiones CI).
- En la figura 8.7, se muestra el subbloque Sistema final de la figura 8.1, el cual se encarga de seleccionar la salida del sistema que esta trabajando, esto con la ayuda del subbloque de conmutación.

8.2.2 Problema de Control

Queremos llevar al ángulo θ desde el origen, $\theta(0) = 0$, hasta la referencia, $\theta(t_f) = 1$, con $t_f = 100$ s, suavemente, es decir con una aceleración final, $d^2\theta(t_f)/dt^2 = 0$. Vamos a resolver este problema aplicando el Teorema 3.2 con un tiempo de muestreo: $t_1 = 0.1$ s.

8.2.3 Ley de Control

De la sección 3.7, el control que resuelve este problema es el siguiente (ver (8.2), y (3.28)–(3.32)):

$$u(t) = \begin{bmatrix} 2.3691 & 0.6833 \end{bmatrix} x(t) + [95.6258] d^2f(t)/dt^2, \quad (8.3)$$

donde:

$$d^2f(t)/dt^2 = \begin{bmatrix} \frac{5!}{3!} \bar{\sigma}^3 & \frac{4!}{2!} \bar{\sigma}^2 & \frac{3!}{1!} \bar{\sigma} \end{bmatrix} \bar{a}_1 + \begin{bmatrix} \frac{2!}{0!} & 0 & 0 \end{bmatrix} a_0 \quad (8.4)$$

$$\bar{\sigma} = \sigma/t_1 \quad (8.5)$$

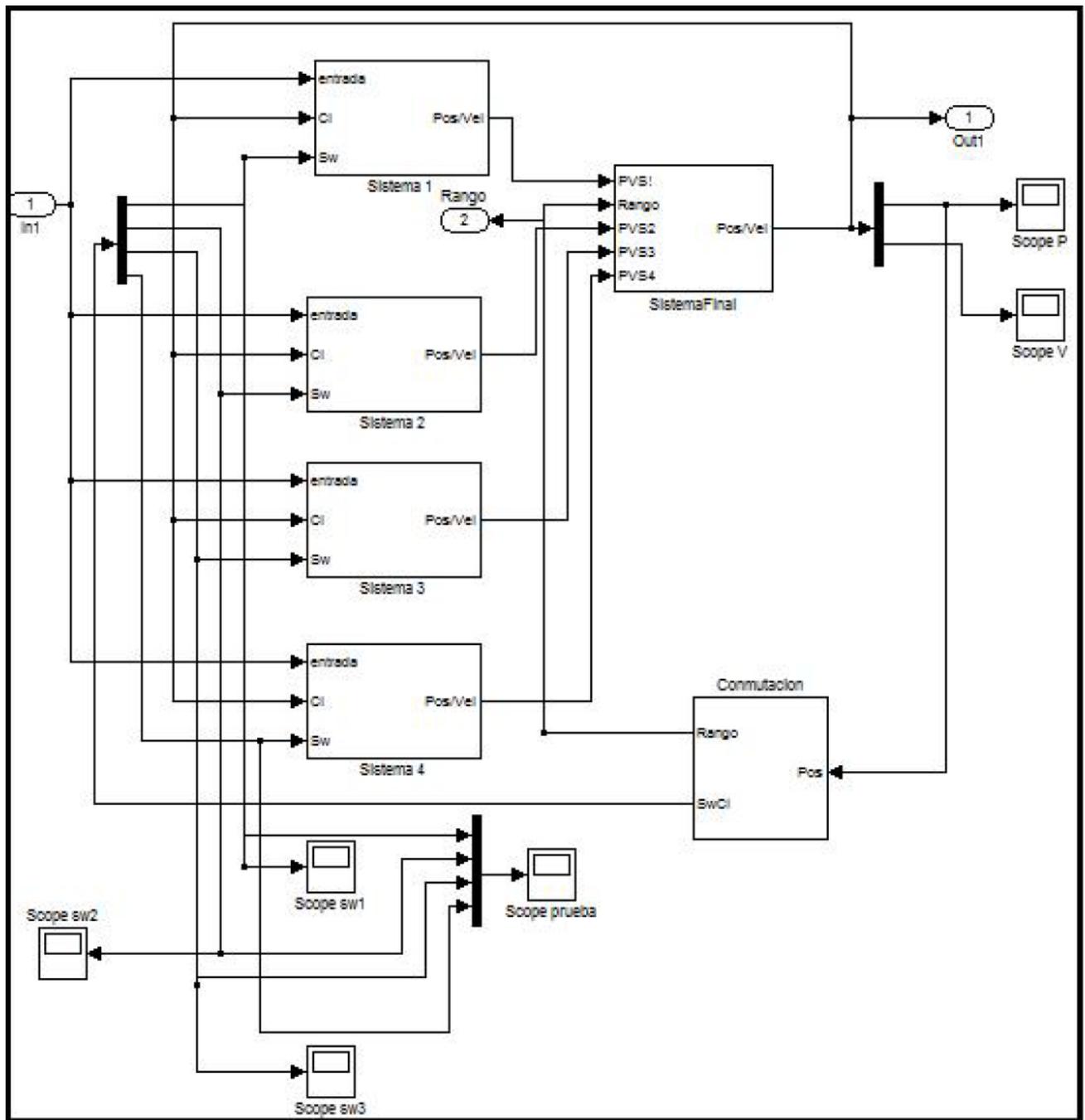


Figura 8.1 En esta figura se muestra la conexión de los cuatro sistemas (7.9 - 7.12), en Matlab Simulink®.

$$a_0 = X_0^{-1}(0) \begin{bmatrix} \bar{r}_0 \\ \xi_0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{a}_1 = X_1^{-1}(t_1) \left(\begin{bmatrix} \bar{r}_1 \\ \xi_1 \end{bmatrix} - X_0(t_1)a_0 \right),$$

(8.6)

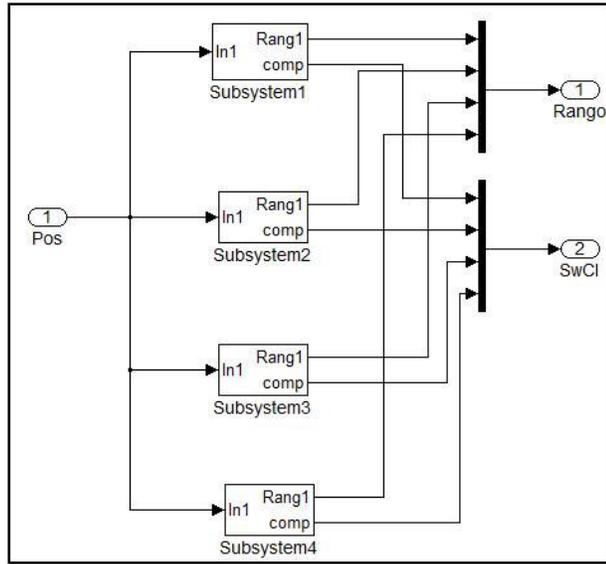


Figura 8.2 En esta figura se muestra el subbloque de conmutación de la figura 8.1, en Matlab Simulink®.

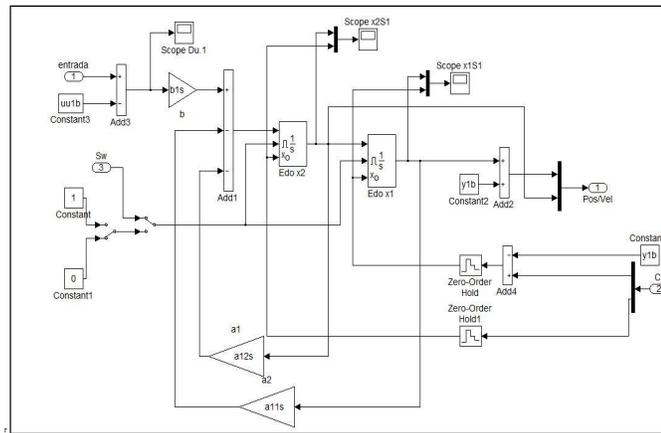


Figura 8.3 En esta figura se muestra el subbloque Sistema 1 de la figura 8.1, en Matlab Simulink®.

$$X_0(t_1) = \begin{bmatrix} \frac{2!}{0!} & 0 & 0 \\ \frac{2!}{1!}t_1 & \frac{1!}{0!} & 0 \\ \frac{2!}{2!}t_1^2 & \frac{1!}{1!}t_1 & \frac{0!}{0!} \end{bmatrix} \text{ y } X_1(t_1) = \begin{bmatrix} \frac{5!}{3!}t_1^3 & \frac{4!}{2!}t_1^2 & \frac{3!}{1!}t_1 \\ \frac{5!}{4!}t_1^4 & \frac{4!}{3!}t_1^3 & \frac{3!}{2!}t_1^2 \\ \frac{5!}{5!}t_1^5 & \frac{4!}{4!}t_1^4 & \frac{3!}{3!}t_1^3 \end{bmatrix}. \tag{8.7}$$

Ver figuras 8.8, 8.9 y 8.10.

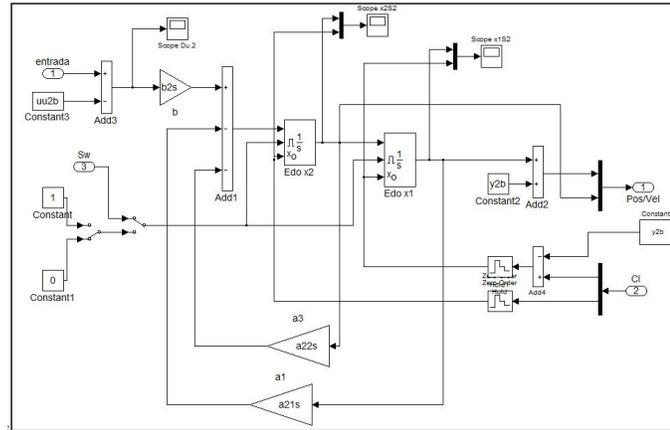


Figura 8.4 En esta figura se muestra el subbloque Sistema 2 de la figura 8.1, en Matlab Simulink®.

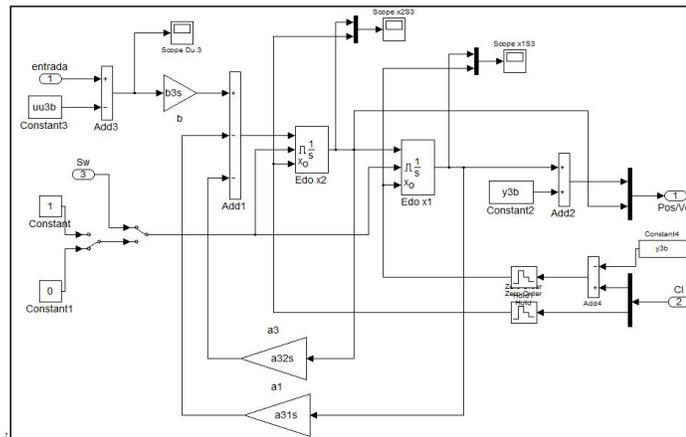


Figura 8.5 En esta figura se muestra el subbloque Sistema 3 de la figura 8.1, en Matlab Simulink®.

8.2.4 Referencias

Con respecto a las trayectorias a seguir, para cada periodo de muestreo, $\bar{k}t_1, \bar{k} \in \mathbb{Z}^+$, se tienen los siguientes puntos extremos, $(\bar{r}_0, \bar{\xi}_0)$ y $(\bar{r}_1, \bar{\xi}_1)$:

$$\bar{r}_0 = \bar{r}(\bar{k}t_1), \quad \bar{\xi}_0 = \bar{\xi}(\bar{k}t_1), \quad \bar{r}_1 = \bar{r}_r(\bar{k}t_1), \quad \bar{\xi}_1 = \bar{\xi}_{r_1}(\bar{k}t_1), \quad (8.8)$$

donde \bar{k} es un entero no negativo tal que: $t = \bar{k}t_1 + \sigma$, siendo t_1 el tiempo fijo de muestreo y $0 \leq \sigma < t_1$ (recordar Teorema 3.2). Las señales de referencia, \bar{r}_r y $\bar{\xi}_r = [\bar{\xi}_{r_1} \quad \bar{\xi}_{r_2}]^T$, se obtienen del filtro pasa bajas, mostrado en la figura 8.11. En el caso de, \bar{r}_r y $\bar{\xi}_{r_2}$, se da la opción de una selección igual a cero; es decir con velocidad y aceleración de cambio nulas. Cuando $\bar{r}_r \neq 0$, se propone (ver figura 8.12)):

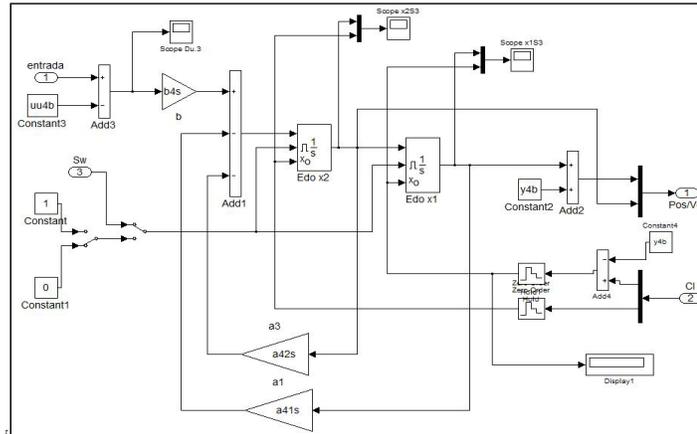


Figura 8.6 En esta figura se muestra el subbloque Sistema 1 de la figura 8.1, en Matlab Simulink®.

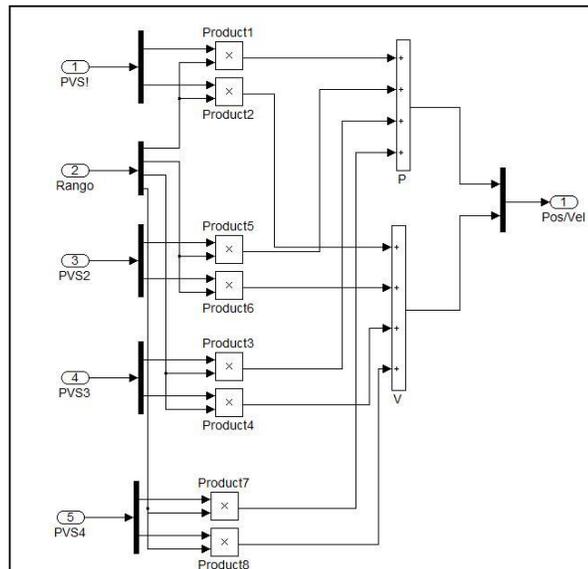


Figura 8.7 En esta figura se muestra el subbloque Sistema final de la figura 8.1, en Matlab Simulink®.

$$\bar{r}_r = \begin{cases} t/30 & \text{si } 0 \leq t < 30 \\ 1 & \text{si } 30 \leq t \end{cases}$$

Ver figuras 8.11 y 8.12.

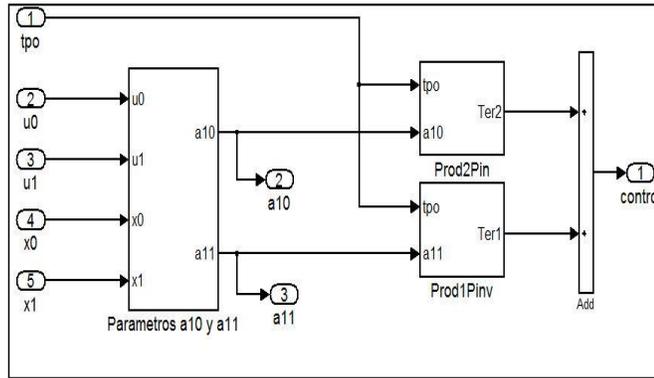


Figura 8.9 En esta figura se muestra el subbloque AlcCompWiTyIx de la figura 8.8, el cual muestra la Ley de control, en Matlab Simulink®.

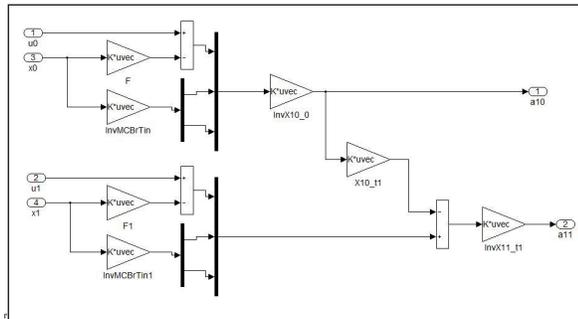


Figura 8.10 En esta figura se muestra el subbloque Parámetros a10 y a11 de la figura 8.9, el cual muestra la Ley de control, en Matlab Simulink®.

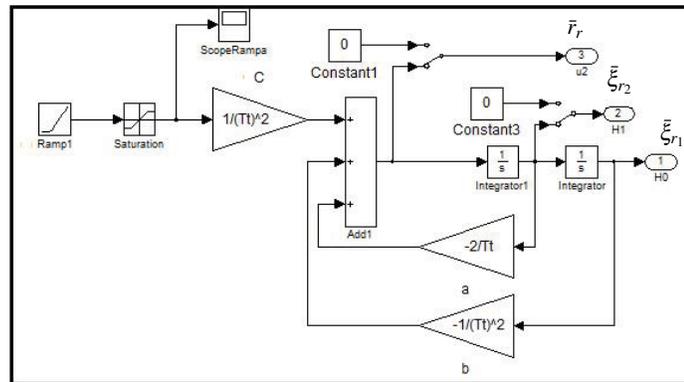


Figura 8.11 En esta figura se muestra el diagrama del subbloque referencia, de la figura 8.8, en Matlab Simulink®.

8.3.1 Simulación con velocidad y aceleración de referencia final nulas

En las figuras 8.13 y 8.14, se muestran los resultados de simulación, cuando se selecciona una referencia con velocidad y aceleración final nulas.

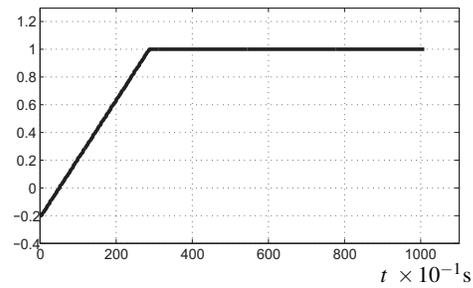


Figura 8.12 Gráfica que muestra la referencia de la figura 8.11.

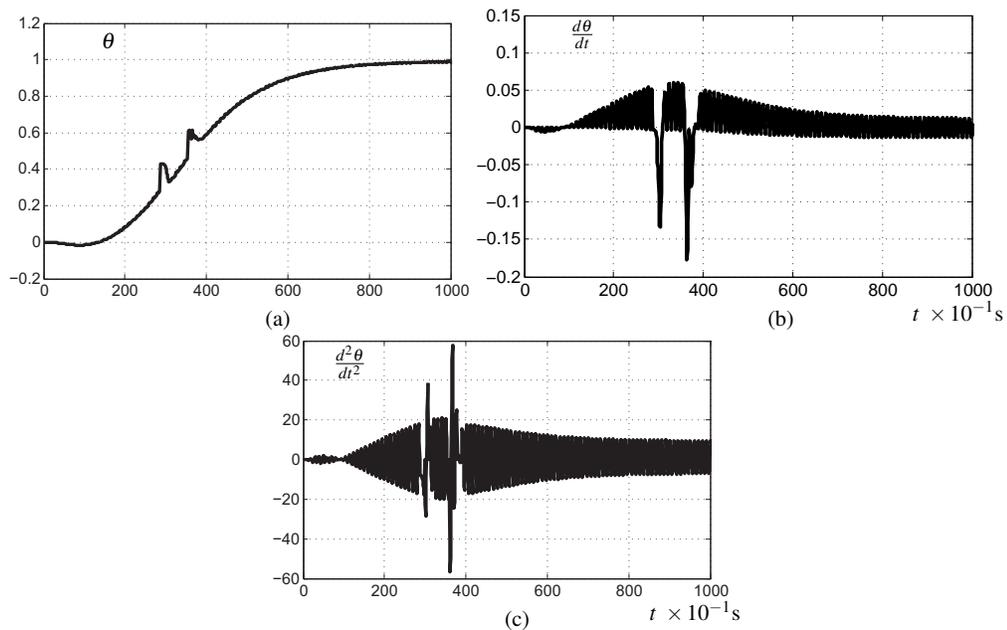


Figura 8.13 Gráfica que muestra: (a) la posición θ , (b) la velocidad $\dot{\theta}$ y (c) la aceleración $\ddot{\theta}$, cuando la referencia tiene una velocidad y aceleración final nulas.

8.3.2 Simulación con aceleración de referencia final nula

En las figuras 8.15 y 8.16, se muestran los resultados de simulación, cuando se selecciona una referencia con aceleración final nula.

8.3.3 Simulación con velocidad y aceleración de referencia final no nulas

En las figuras 8.17 y 8.18, se muestran los resultados de simulación, cuando se selecciona una referencia con velocidad y aceleración final no nulas.

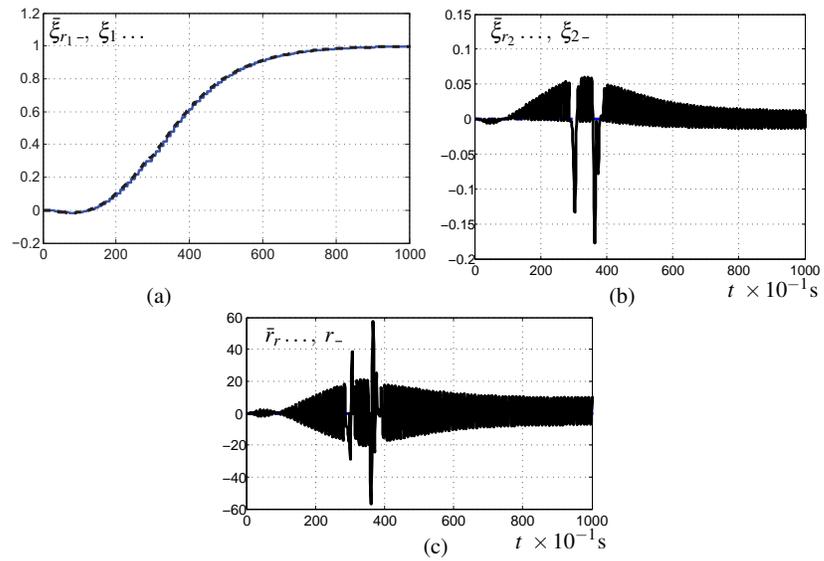


Figura 8.14 Gráfica que muestra: (a) la referencia $\bar{\xi}_{r1}$ y ξ_1 , (b) la referencia $\bar{\xi}_{r2}$ y ξ_2 , y (c) el control \bar{r}_r y \bar{r} , cuando la referencia tiene una velocidad y aceleración final nulas. Las graficas muestran los resultados de la simulación de las variables (8.8), con las líneas negras, y las señales de referencia con las líneas azules.

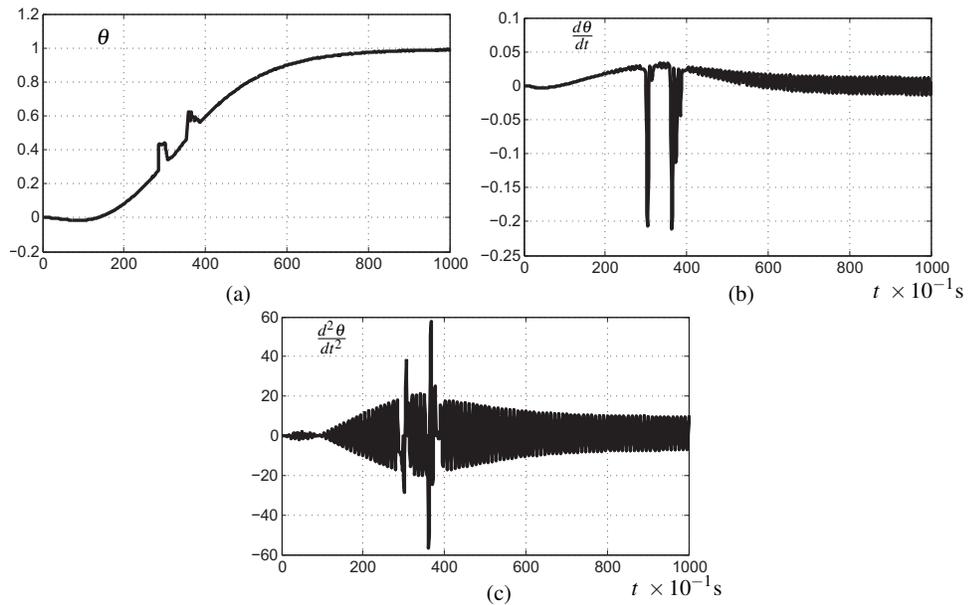


Figura 8.15 Gráfica que muestra: (a) la posición θ , (b) la velocidad $\dot{\theta}$ y (c) la aceleración $\ddot{\theta}$, cuando la referencia tiene una aceleración final nula.

8.3.4 Comparación de resultados

De las tres simulaciones anteriores, podemos notar que:

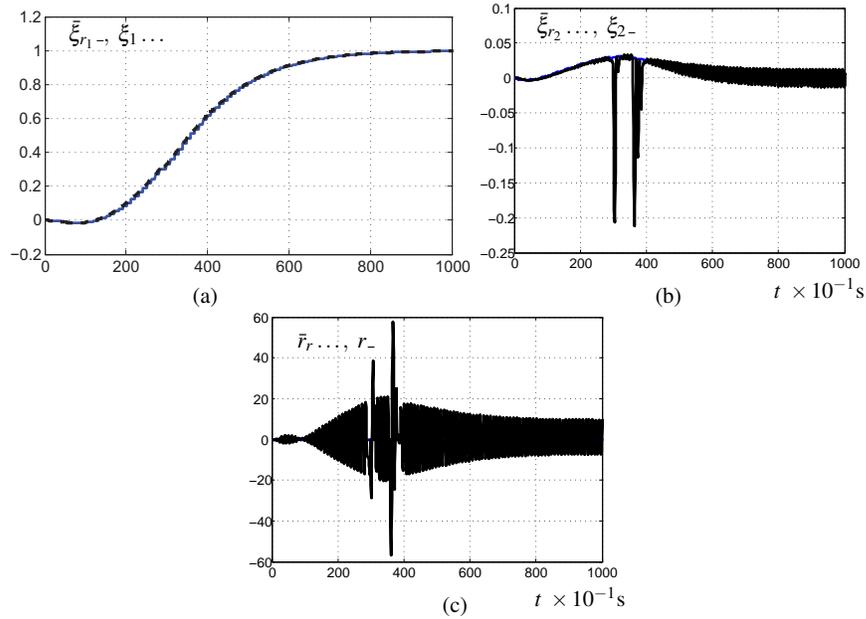


Figura 8.16 Gráfica que muestra: (a) la referencia $\bar{\xi}_{r_1}$ y ξ_1 , (b) la referencia $\bar{\xi}_{r_2}$ y ξ_2 , y (c) el control \bar{r}_r y \bar{r} , cuando la referencia tiene una aceleración final nula. Las graficas muestran los resultados de la simulación de las variables (8.8), con las líneas negras, y las señales de referencia con las líneas azules.

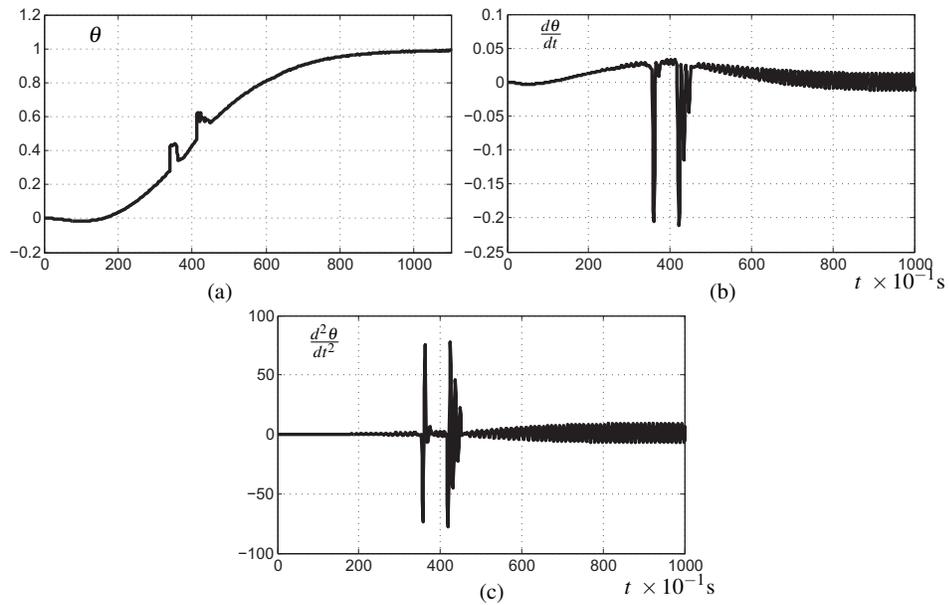


Figura 8.17 Gráfica que muestra: (a) la posición θ , (b) la velocidad $\dot{\theta}$ y (c) la aceleración $\ddot{\theta}$, cuando la referencia tiene una velocidad y aceleración final no nulas.

- Cuando el sistema pasa de los Rangos 1 ($\{\theta \in [0.1431, 0.2806]\}$) al 2 ($\{\theta \in [0.2806, 0.4638]\}$) y de los Rangos 2 al 3 ($\{\theta \in [0.4638, 0.5632]\}$) (ver figura 8.13 (a), 8.15 (a) y 8.17 (a)), se presentan perturbaciones en el sistema. Estas perturbaciones son bien compensadas por el control en aproximadamente tres segundos.

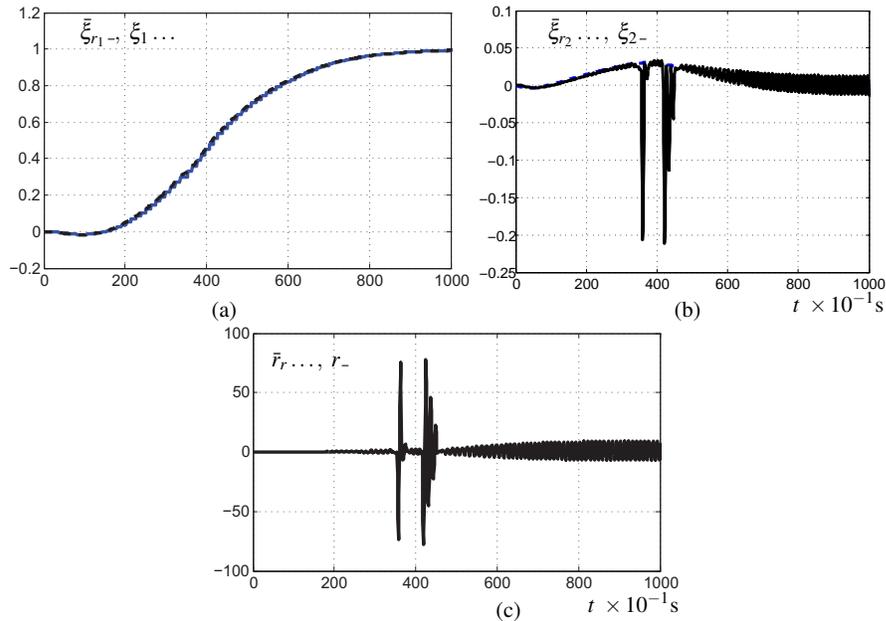


Figura 8.18 Gráfica que muestra: (a) la referencia $\bar{\xi}_{r1}$ y ξ_1 , (b) la referencia $\bar{\xi}_{r2}$ y ξ_2 , y (c) el control \bar{r}_r y r_r , cuando la referencia tiene una velocidad y aceleración final no nulas. Las gráficas muestran los resultados de la simulación de las variables (8.8), con las líneas negras, y las señales de referencia con las líneas azules.

- Cuando se está abajo del Rango 1, se utiliza el modelo del Rango 1, y cuando se está arriba del Rango 4 ($\{\theta \in [0.5632, 0.7041]\}$), se utiliza el modelo del Rango 4.
- De las figuras 8.13 - 8.18, notamos que el control funciona adecuadamente, ya que en las tres pruebas de las secciones, 8.3.1, 8.3.2 y 8.3.3, el sistema llega a la referencia $\theta(t_f)$ en un tiempo finito y con una aceleración promedio final igual a cero ($d^2\theta(t_f)/dt^2 = 0$).

8.4 Problemas de Implementación Numérica

Cuando se realizaron las pruebas de simulación Matlab Simulink[®], reportados en la sección 8.3, el programa Matlab Simulink[®], indicó errores de compilación, debido a lazos algebraicos. Para eliminar este error de compilación, se incorporaron retenedores de orden cero (bloques “Zero-Order Hold”, ver de la figura 8.3 a la figura 8.6), en los supuestos lazos algebraicos. Con esta acción, se pudo compilar, y se pudieron realizar las simulaciones reportadas; aunque en la compilación, ahora se marcaban señales de alerta (“warning”), el programa corrió correctamente.

Cuando se procedió a implementar la ley de control, en el prototipo de laboratorio, el programa Matlab Simulink[®] de la computadora de la maqueta experimental del helicóptero, corrió adecuadamente. Pero el programa de comunicación WinCon[®], entre Matlab Simulink[®] y el helicóptero, siempre marco errores debido a

los supuestos lazos algebraicos, los cuales no permitieron la compilación. Por esta razón no se pudieron realizar pruebas en el prototipo de laboratorio.

Dado que estos problemas de tipo informático, escapan del objetivo principal de este trabajo de tesis, se decidió dar por concluida la tesis con los resultados de simulación numérica.

8.5 Conclusiones

En la simulación del control comportamental aplicada al modelo del helicóptero, se observó que funciona correctamente esto para los tres casos de estudio en simulación. Cabe mencionar que en esta última prueba, el periodo de muestreo fue de 0.1 segundo, ya que si se cambiaba el periodo de muestreo más grande se tenía problemas con el control, esto para tener un comparativo con el ejemplo ilustrativo del capítulo 3 en el cual el periodo de muestreo fue de 10 segundos, 100 veces más grande. Con esto concluimos que el controlador hace la tarea de llevar al helicóptero a la referencia $\theta(t_f)$ en un tiempo finito y con una aceleración promedio final igual a cero ($d^2\theta(t_f)/dt^2 = 0$), lo que demuestra que si existe una ley de control, $u(\cdot) \in C^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^m)$, que genera una trayectoria, $x(\cdot) \in C^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n)$.

Los resultados reportados en este capítulo, se limitaron a resultados de simulación numérica. No se llevó a cabo la aplicación del control al prototipo de laboratorio, dado que se presentaron problemas del tipo informático, los cuales escapan del objetivo principal de este trabajo de tesis (ver sección 8.4).

Capítulo 9

Conclusión

En esta tesis se probó la viabilidad y eficacia del esquema de control, basado en el sistema inverso por la derecha, recientemente desarrollado en [1, 2].

Para esto, se seleccionó un prototipo de laboratorio que consiste en un helicóptero de 3 grados de libertad, en el cual solamente se ocupó un grado de libertad. Con este prototipo se buscó seguir una referencia, en un tiempo finito, y con una aceleración final nula, es decir, que el helicóptero aterrice suavemente.

El esquema de control esta constituido por dos controles, uno interno que lleva a un sistema variante en el tiempo a un sistema invariante en el tiempo, y otro externo, cuya función es de controlar el comportamiento, esto es, se controla tanto el estado final como la salida de control final.

En el capítulo 5, en el cual se obtuvo el modelo matemático del helicóptero experimental usando la técnica de Euler - Lagrange, el cual resultó ser un modelo no lineal. El término no lineal se consideró como una perturbación.

En el capítulo 6 se realizó una linealización estática, mediante una retroalimentación estática de salida. Se identificaron los parámetros del sistema retroalimentado, utilizando técnicas frecuenciales (diagramas de Bode). Se obtuvieron seis modelos que representan el funcionamiento del sistema en sus diferentes rangos de operación. Estos seis modelos se obtuvieron con la refinación de la linealización por retroalimentación de salida (6.16) - (6.21) . Dado que se tienen seis modelos diferentes que describen el comportamiento del sistema, en sus diferentes rangos de operación, entonces el sistema en lazo cerrado tiene un comportamiento variable en el tiempo.

Posteriormente en este capítulo 7 se aplicó el esquema de control implícito singularmente perturbado, (7.3) - (7.4), con el fin de obtener un comportamiento descrito por un sistema lineal invariante en el tiempo.

Se obtuvieron cuatro modelos, (7.9) - (7.12), los cuales corresponden a los diferentes rangos de funcionamiento mostrados en la tabla 7.2. Como los parámetros de estos modelos, son aproximadamente iguales, se consideró un solo modelo, cuyos parámetros son el promedio de los anteriores modelos.

Dado que con la primera retroalimentación estática de salida, no se linealizó correctamente la respuesta del sistema, en estado permanente, se propuso una refinación de la linealización, la cual consistió en tomar en cuenta los parámetros del sistema de la primera linealización, obteniéndose así, una mejor compensación del factor no lineal, con un factor de error pequeño.

Y por último en el capítulo 8, se realizó la simulación del control comportamental aplicada al modelo del helicóptero, se observó que funciona correctamente esto para los tres casos de estudio en simulación. Cabe mencionar que en esta última prueba, el periodo de muestreo fue de 0.1 segundo, ya que si se cambiaba el periodo de muestreo mas grande se tenía problemas con el control, esto para tener un comparativo con el ejemplo ilustrativo del capítulo 3 en el cual el periodo de muestreo fue de 10 segundos, 100 veces más grande. Con esto concluimos que el controlador hace la tarea de llevar al helicóptero a la referencia $\theta(t_f)$ en un tiempo finito y con una aceleración promedio final igual a cero ($d^2\theta(t_f)/dt^2 = 0$), lo que demuestra que si existe una ley de control, $u(\cdot) \in C^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^m)$, que genera una trayectoria, $x(\cdot) \in C^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n)$.

Los resultados reportados en el capítulo 8, se limitaron a resultados de simulación numérica. No se llevó a cabo la aplicación del control al prototipo de laboratorio, dado que se presentaron problemas del tipo informático, los cuales escapan del objetivo principal de este trabajo de tesis.

Apendice A

Derivación de señales ruidosas

A.1 Introducción

Para poder implementar la ley de control, (7.3) y (7.4), es necesario contar con la medición o estimación de la componente, $\xi_2 = d\theta/dt$. El prototipo del helicóptero solamente cuenta con un decodificador digital que proporciona el ángulo de elevación del helicóptero, θ ; por lo que necesitamos estimar la velocidad angular.

Una manera simple de obtener la estimación de la derivada, es utilizando la generalización del filtro de Jackson [10, 11]:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\chi_1 &= -\beta_d\chi_1 - \varepsilon_d^2\hat{y} \\ \frac{d}{dt}(\varepsilon_d\hat{y} - \theta) &= -\hat{y} + \chi_1\end{aligned}$$

Al aplicar esta aproximación de derivada, al prototipo de helicóptero, con los valores: $\beta_d = 10$ y $\varepsilon_d = 0.01$, se obtiene la aproximación mostrada en la figura A.1. De esta figura se puede observar que la aproximación obtenida es sumamente ruidosa; esto se debe a que el sensor de posición es un decodificador digital, y por ende no derivable.

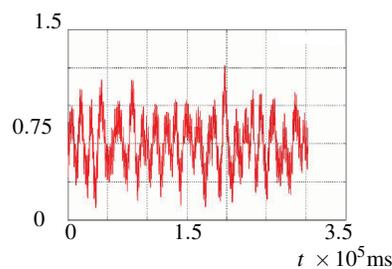


Figura A.1 Gráfica que muestra la derivada de θ ($d\theta/dt$).

Para afrontar este problema se hizo uso de una aproximación del filtro de Gauss, el cual se describe brevemente a continuación.

A.2 Filtro de Gauss

El filtro de Gauss está definido por el siguiente espectro en frecuencia [13, 4]:

$$H(\omega) = A_0 e^{-\alpha\omega^2} e^{-j\alpha\omega t_0} \quad (\text{A.1})$$

La respuesta al impulso del filtro de Gauss, $h(t)$, es la siguiente:

$$\frac{A_0}{2\sqrt{\pi\alpha}} e^{-(t-t_0)^2/4\alpha}, \quad t \in \mathbb{R} \quad (\text{A.2})$$

Las características principales de este filtro son:

1. Mínimo sobrepaso de la respuesta al impulso.
2. Su espectro en frecuencia no está limitado en ancho de banda.
3. El retardo introducido por este filtro es el de menor valor.

La característica de tener el menor retardo, es importante cuando se incorpora en un lazo de control en bucle cerrado. En la figura A.2 se muestra una comparación de la atenuación del filtro de Gauss con respecto al filtro de Bessel.

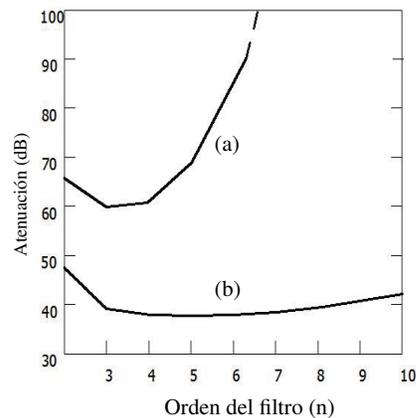


Figura A.2 Gráfica [4] que muestra la atenuación del filtro de Gauss (b) con respecto al filtro de Bessel (a).

La figura A.3 muestra el tiempo de subida (retardos) de los filtros de Butterworth, Gaussiano, y de Bessel, usando el rango de 10 - 90 %. Notamos en la figura A.3, que el tiempo de subida de los filtros de Bessel y de Gauss son los de menor tiempo de subida, y el filtro de Gauss tiene el menor retardo.

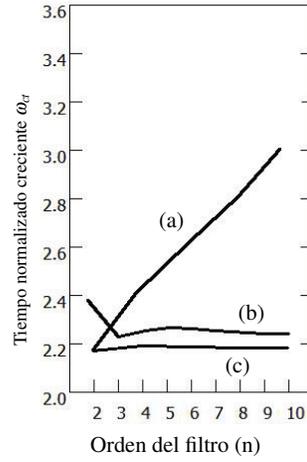


Figura A.3 Gráfica [4] que muestra el tiempo de subida de los filtros de Butterworth (a), de Bessel (b) y de Gauss (c).

A.3 Causalidad del filtro de Gauss

De (A.2) se observa que el filtro de Gauss es no causal. En efecto, la condición de causalidad introducida por Paley y Wiener [13], es que el espectro de Fourier del filtro satisfaga:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln A(\omega)|}{1 + \omega^2} d\omega < \infty \quad (\text{A.3})$$

Para una función gaussiana, $A(\omega) = e^{-c\omega^2}$, se tiene sustituyendo $A(\omega)$ en (A.3):

$$I = \lim_{B \rightarrow \infty} \int_{-B}^B \frac{|\ln e^{-c\omega^2}|}{1 + \omega^2} d\omega = c \lim_{B \rightarrow \infty} \int_{-B}^B \frac{\omega^2}{1 + \omega^2} d\omega = 2c \left[\lim_{B \rightarrow \infty} B - \frac{\pi}{2} \right] = \infty \quad (\text{A.4})$$

Por lo que se requiere de una aproximación causal del filtro de Gauss.

A.4 Aproximación práctica del filtro de Gauss

Una manera usual de aproximar el filtro de Gauss, es la siguiente [4]:

1. Primero, se trunca la serie de Taylor de la norma al cuadrado de su respuesta en frecuencia, $|H(s)|^2 = H(s)H(-s)$, en sus primeros $\eta + 1$ términos, esto es:

$$H(s)H(-s) = \frac{\eta!}{\sum_{i=0}^{\eta} (-1)^{(\eta-i)} \left(\frac{\eta!}{i!}\right) \left(\frac{s}{\bar{\omega}}\right)^{2i}} \quad (\text{A.5})$$

donde $\bar{\omega} = \omega_c / \sqrt{\ln \sqrt{2}}$

2. Posteriormente, se factoriza al denominador en sus factores irreducibles.

3. Enseguida, se expresa a la factorización de $H(s)H(-s)$, como el producto de dos términos, uno que contiene a todas las raíces Hurwitz, y otro que contiene a las raíces no Hurwitz.
4. Finalmente, con el término que posee las raíces Hurwitz, se sintetiza la aproximación causal del filtro de Gauss.

A.5 Programa que calcula los coeficientes del filtro de Gauss

En esta sección se muestra un programa de Matlab[®] para obtener una aproximación causal del filtro de Gauss.

```

%%Programa que calcula los coeficientes del filtro de Gauss%%
clear all
syms s
n=input('Introduce el orden (n) del filtro de Gauss (Numero entero positivo)');
n1=n*2+1;
PolGauss=zeros(1,n*2+1);
b=0;
for i=1:2:n1
    b=1+b;
    if (i==1)
        PolGauss(i)=((-1)^(b+1))*factorial(n)/factorial(n);
    else
        PolGauss(i)=((-1)^(b+1))*factorial(n)/factorial(n-b+1);
    end
end
raicesPolGauss=roots(PolGauss);
n1=size(raicesPolGauss);
n2=n1(1)/2;
for i=1:1:n2
    a(i)=raicesPolGauss(i);
    if (n2==1)
        a(i)=raicesPolGauss(n2+i)*-1;
    end
end
b=poly(a);

```

donde:

1. La instrucción “*input*” sirve para que el usuario pueda introducir el orden del filtro de Gauss que desea calcular.
2. La instrucción “*zeros(n,m)*” crea una matriz de tamaño $n \times m$ con todos sus elementos iguales a cero.
3. La instrucción “*roots(phi)*” encuentra las raíces del polinomio ϕ .
4. La instrucción “*poly(a)*” obtiene al polinomio a partir de sus raíces a .
5. La instrucción “*size(chi)*” obtiene el tamaño del arreglo χ .

En la figura A.4 se compara el tiempo de subida (retardos) del filtro de Gauss ideal, con respecto a las aproximaciones causales del filtro de Gauss. De esta figura se observa que para, $\eta \geq 4$, se obtiene una buena aproximación causal del filtro de Gauss.

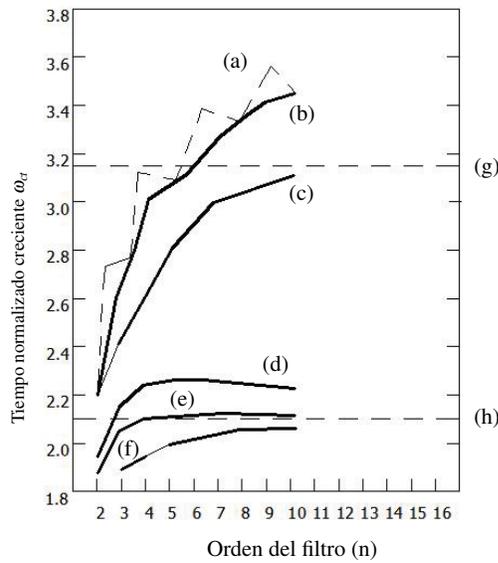


Figura A.4 Gráfica [4] que muestra el tiempo de subida de los filtros de Chebyshev (0.5 dB) (a), Chebyshev (0.1 dB) (b), Butterworth (c), Bessel (d), Gauss (e), y Sincronos (f). Donde (g) es la respuesta de magnitud rectangular y la línea de fase, y (h) es el filtro ideal de Gauss.

A.6 Filtro causal de quinto orden

En base a la sección A.5, se propone una aproximación de quinto orden.

Aplicando el programa de cálculo de los coeficientes de Gauss de la sección A.5, se obtiene la parte Hurwitz, determinada por el siguiente polinomio de quinto orden:

$$s^5 + 6.7173 s^4 + 20.0616 s^3 + 32.7784 s^2 + 28.9506 s + 10.9545, \quad (\text{A.6})$$

esto es:

$$\hat{H}(s) = \frac{10.9545}{\frac{1}{\omega^5} s^5 + \frac{6.7173}{\omega^4} s^4 + \frac{20.0616}{\omega^4} s^3 + \frac{32.7784}{\omega^2} s^2 + \frac{28.9506}{\omega^5} s + 10.9545} \quad (\text{A.7})$$

En la figura A.5 se muestra el diagrama de simulación Matlab Simulink[®] de la aproximación causal, \hat{H} , de quinto orden del filtro ideal de Gauss.

A partir de este filtro, se obtiene la derivada de la posición angular, $d\theta/dt$, que se utiliza en la propuesta de ley de control del capítulo 7.

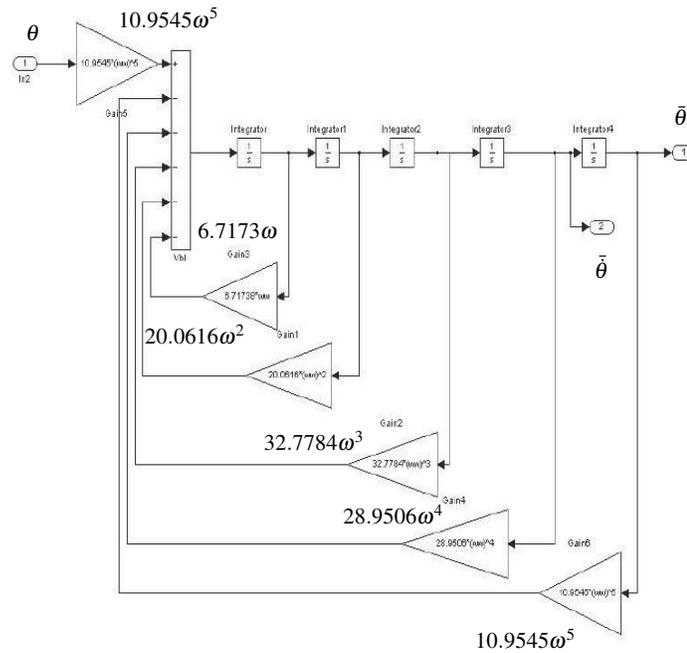


Figura A.5 Gráfica que muestra el diagrama de (A.7) en Matlab Simulink[®].

A.6.1 Resultados experimentales

Se hizo una prueba con los siguientes valores: $\omega = 5$ [rad/seg], y $\omega_n = 0.4$ [rad/seg], el cual es menor 12.5 veces que ω . En la grafica A.6 se ve la comparación de θ del sistema del helicóptero y θ_g ó $\bar{\theta}$ (salida del filtro de Gauss).

En la figura A.7, podemos ver que hay un defasamiento (retardo) de 1.2 segundos, y una atenuación del 10 %, entre $\bar{\theta}$ y $d\bar{\theta}/dt$. Este comportamiento es mejor al mostrado en la figura A.1.

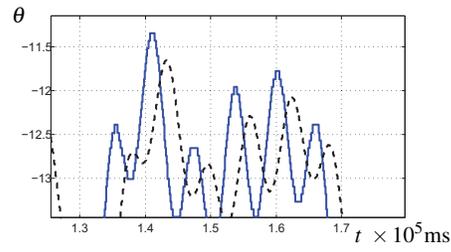


Figura A.6 Gráfica que compara la salida del helicóptero, θ (línea continua azul), v.s. la salida del filtro de Gauss, $\bar{\theta}$ (línea discontinua negra).

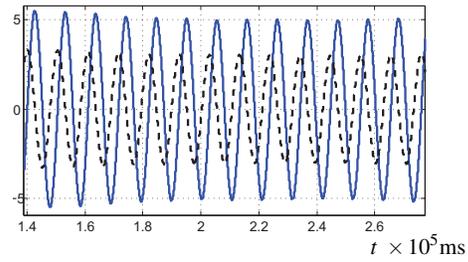


Figura A.7 Gráfica que muestra la salida del helicóptero, θ (línea continua azul), y la derivada de la salida del filtro de Gauss, $d\bar{\theta}/dt$ (línea discontinua negra), obtenida en la entrada del último integrador del filtro de Gauss de quinto orden.

Referencias

1. **Bonilla, M., M. Malabre and J.J. Loiseau (2009)**. One Step Right Inversion. *Rapport Interne, IRCCyN*, **2** <http://www.irccyn.ec-nantes.fr> , (4361.pdf).
2. **Bonilla, M., M. Malabre and J.J. Loiseau (2009)**. Implicit Systems Reachability: A Geometric Point of View. *48th IEEE-CDC*, Shanghai, China, 4270-4275.
3. **Brunovsky, P. (1970)**. A classification of linear controllable systems. *Kybernetika* **6(3)**, 173–188.
4. **Herman J. Bilinchikoff and Anatol I. Zverev (1976)**. Filtering in the Time and Frequency Domains. *Westinghouse Electric Corporation*.
5. **Hsu, Hwei P. (2000)**. Análisis de Fourier. *Addison Wesley Iberoamericana*. **6(3)**.
6. **Kalman, R.E. (1960)**. Contributions to the theory of optimal control. *Bol. Soc. Mat. Mexicana*, **5** (1960), 102–119.
7. **Kalman, R.E. (1963)**. Mathematical Description of Linear Systems. *SIAM J. Control*, **1** (1963), 152–192.
8. **Kokotović, P.V., H.K. Khalil and J. O’Reilly (1986)**. Singular Perturbation Methods in Control: Analysis and Design. *SIAM J. Control*, **1** (1963), 152–192.
9. **Lewis, F.L. (1986)**. A Survey of Linear Singular Systems. *Circuits, Systems and Signal Processing* **5(1)**, 3–36.
10. **Méndez, H., M. Bonilla et M. Malabre (2007)**. “Singular perturbed derivative coupling-filter: the SISO case”. Dans: *3rd IFAC Symposium on System, Structure and Control*, 6 pp. (CD). Iguassu Falls, Brazil octobre 17-19, 6 pp. en CD.
11. **Méndez, H., M. Bonilla, M. Malabre et J. Pacheco (2008)**. “Singularly Perturbed Derivative Coupling-Filter”. Dans: *17th IFAC World Congress*, pp. 1283-1298, Korea, juillet 6-11, pp. 1283-1298.
12. **Ogata, K. (1970)**. Modern Control Engineering.. *Ed. Prentice Hall*., **1**, 152–192.
13. **Papoulis (1962)**. The fourier transform and its applications. *McGraw - Hill Electronic Sciences Series—Verlag*.
14. **Polderman, J.W., and J.C. Willems (1998)**. Introduction to Mathematical Systems Theory: A Behavioral Approach. *New York: Springer—Verlag*.
15. **Puga, S. M. Bonilla and M. Malabre (2010)**. Singularly Perturbed Implicit Control Law for Linear Time Varying SISO System *49th IEEE-CDC*, Atlanta GA, 6870-6875.
16. **Willems, J.C., (1983)** Input-output and state space representations of finite-dimensional linear time-invariant systems. *Linear Algebra and its Applications*
17. **Wonham, W.M. (1985)**. **Linear Multivariable Control: A Geometric Approach**. *New York: Springer-Verlag*, 3rd ed.