

**CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS
AVANZADOS DEL IPN**

DEPARTAMENTO DE CONTROL AUTOMÁTICO

**Descripción del proceso de crecimiento de la lechuga por un conjunto
de sistemas lineales**

TESIS QUE PRESENTA EL

Ing. Abraham Martínez García.

PARA OBTENER EL GRADO DE

**MAESTRO EN CIENCIAS EN LA ESPECIALIDAD DE
CONTROL AUTOMÁTICO**

DIRECTORES DE TESIS:

Dr. Moisés Bonilla Estrada.

Dr. Juan C. Martínez García.



CENTRO DE INVESTIGACION Y DE
ESTUDIOS AVANZADOS DEL
I. P. N.
BIBLIOTECA
INGENIERIA ELECTRICA

México, D.F. Agosto de 2001

Con mucho cariño, respeto y admiración.

A mis padres, Reyna García y
Abraham Martínez.

a mi hermano Rolando.

a Martha A.

CENTRO DE INVESTIGACION Y DE
ESTUDIOS AVANZADOS DEL
I. P. N.
BIBLIOTECA
INGENIERIA ELECTRICA

Agradecimientos

En este trabajo hay muchísima gente a la que tengo que agradecer por su apoyo, así que si no son mencionados una disculpa y les agradezco de todo corazón.

A mis padres por todo el cariño, apoyo, enseñanzas y comprensión que siempre me han brindado.

A mi hermano y primos por hacer de la vida algo grandioso.

Al Dr. Moisés Bonilla, por todo su tiempo, enseñanzas y paciencia. Y por permitirme colaborar con él.

A mis sinodales, Dr Moisés Bonilla E. Dr Juan C. Martínez G. Dr Alexander S. Pozniak, Dr. Guillermo Fernández A. Y al M en C Armando Ramírez A. Por sus comentarios a éste trabajo.

A el M en C. Irineo Lopez Cruz, por su aportación de datos importantes y conocimientos.

A los doctores del Departamento por compartirme sus conocimientos.

A mucha gente del Departamento de Control por su apoyo y comprensión, (Josefina, Lucero, Noemí, Pilar, Patricia, Carlos Guerrero).

A mis compañeros

A los compañeros de Allende.

Al CINVESTAV por permitirme utilizar sus instalaciones, para el desarrollo de este trabajo.

A la Dra. Sabine Mondié por su apoyo.

Mi agradecimiento al apoyo otorgado por CONACyT. A la beca terminal otorgada por el proyecto de investigación CONACyT N° 31951-A.

Y de manera muy especial a mi novia Martha Arcos, por todos los momentos bellos que hemos compartido y tanta felicidad.

CENTRO DE INVESTIGACION Y DE
ESTUDIOS AVANZADOS DEL
I. P. N.
BIBLIOTECA
INGENIERIA ELECTRICA

Índice General

1	Introducción	6
1.1	Estructura de la planta	8
1.1.1	Raíces	8
1.1.2	Tallo y hojas	9
1.1.3	Flores, frutos y semilla	10
1.1.4	Estructura celular	10
1.1.5	La pared celular	11
1.2	Estructura del crecimiento	11
1.2.1	Fotosíntesis	12
1.2.2	Respiración	13
1.2.3	Transpiración	13
1.2.4	Factores que afectan el crecimiento	14
1.2.5	Función logística (Robertson 1923)	15
1.3	Fases de crecimiento	17
1.3.1	Crecimiento expo-lineal	19
2	Modelo de crecimiento de la lechuga	20
2.1	Introducción	20
2.1.1	Ecuación de Michaelis-Menten	21
2.2	Generalidades	25
2.2.1	Modelando la fotosíntesis de las hojas para modelar la planta y el follaje (dosel)	25

2.2.2	Mecanismos de transporte	30
2.2.3	Conducción o difusión.	30
2.2.4	Convección	31
2.2.5	Radiación	33
2.3	Modelo de la lechuga de van Henten	33
3	Modelo implícito del proceso de crecimiento de lechuga: Procedimiento experimental	39
3.1	Descripción de la función logística de crecimiento, por un sistema de escalera.	39
3.2	Un breve resumen de sistemas implícitos	39
3.2.1	Sistemas escalera	41
3.2.2	A.- El factor irreducible de orden 1 sobre \mathfrak{R} , $(p + a_i)$	43
3.2.3	B.- El factor irreducible de orden 2 sobre \mathfrak{R} , $(p^2 + 2\rho\omega_0 + \omega_0^2)$	45
3.2.4	C.- Red de compensación de adelanto/retraso, $(\alpha(\alpha s + 1)/(s + \alpha))$	48
3.3	Asignación dinámica de la salida.	49
3.4	Descripción de la función logística por un sistema escalera.	50
3.4.1	Modelo implícito del proceso de crecimiento de lechuga	55
3.4.2	A.- Función logística	57
3.4.3	B.- Modelo implícito	59
4	Modelo implícito del proceso de crecimiento de lechuga: Estudio de la respuesta al comportamiento de la radiación fotosintéticamente activa.	61
4.1	Respuesta teórica de la PAR	62
4.1.1	Radiación Incidente Global por día por hora.	62
4.2	Obtención del coeficiente de transmitividad de la nubosidad.	64
4.3	Descripción en sistemas de escalera de las Curvas logística y Expo-Lineal.	69
4.3.1	Curva logística	69
4.3.2	Curva Expo-Lineal.	72
4.4	Resultados obtenidos con la PAR teórica y el coeficiente de transmitividad de la nubosidad.	74

4.4.1	Luz teórica promedio.	75
4.4.2	Luz teórica promedio con coeficiente de transmitividad de nubosidad.	78
5	Control Óptimo.	81
5.1	Control óptimo en invernaderos.	81
5.1.1	Resultados obtenidos al aplicar el método del paso descendente.	82
5.1.2	PAR teórica.	83
6	Control Óptimo utilizando sistemas escalera	90
6.1	Análisis para el Control óptimo aplicado a los sistemas escalera.	90
6.2	Control óptimo utilizando los sistemas escalera	93
6.2.1	Tercera Zona $t_2 < t < t_f$:	93
6.2.2	Segunda Zona $t_1 < t < t_2$:	94
6.2.3	Primera Zona $0 < t < t_1$:	95
7	Conclusiones	100
A	Cálculo de las condiciones iniciales para los sistemas escalera.	107
A.1	Curva logística	107
A.1.1	Primera Zona $0 \leq t \leq t_1 < t^*$	107
A.1.2	Segunda Zona $t_1 \leq t \leq t_2$	109
A.1.3	Tercera Zona $t \geq t_2 > t^*$	110
A.2	Curva Expo-Lineal	112
A.2.1	Primera Zona $0 \leq t \leq t_1 < t_b$	112
A.2.2	Segunda Zona $t_1 \leq t \leq t_2$	114
A.2.3	Tercera Zona $t \geq t_2 > t_b$	115
B	Obtención de los parametros de la función Expo-Lineal.	118
C	El Método del Paso Descendente.	121
D	Artículo Aceptado	124

Capítulo 1

Introducción

La propagación de las plantas es una ocupación fundamental de la humanidad. Probablemente la civilización se inició cuando el hombre antiguo aprendió a sembrar y cultivar ciertas clases de plantas que satisfacían sus necesidades nutritivas y las de sus animales. A medida que avanzó la civilización, se fue añadiendo a la diversidad de plantas otros cultivos, no sólo alimenticios, sino también aquellos que le proporcionaban fibras, medicinas, ocasión de recreo y ornato, esto es, cultivos útiles para su bienestar. Este progreso en el mejoramiento de las plantas ha originado un proceso de invención y descubrimiento de técnicas para su propagación. La mayor parte de las plantas cultivadas se propagan en condiciones controladas que permiten preservar las características que las hace útiles. Así, se han desarrollado técnicas para mantener y/o mejorar ciertas características.

Una técnica que ha sido poco usada en nuestro país, es la utilización del invernadero. Se tiene referencia en la literatura (Sthanghellini (1987)[34]), que los romanos aproximadamente hace 2000 años, descubrieron los beneficios de tener cultivos protegidos del clima exterior desfavorable. Se cita a Seneca quien en 63 A.D, se quejó de qué el crecimiento de rosas en invierno en cultivos protegidos era de vivir contra la naturaleza.

En las últimas décadas en algunos países gracias a los avances de la ciencia y la tecnología se ha llegado a hacer uso eficiente de los invernaderos; con estos se puede mejorar el cultivo y la producción, también conseguir su buen desarrollo sin la necesidad de depender de las condiciones naturales, como son: condiciones climatológicas, ambientales locales y la calidad del terreno. Es ampliamente aceptado y utilizado que el cultivo en condiciones climatológicas artificiales

puede producir una gran variedad de cosechas de alta calidad y en un mayor volumen, al poder obtener varias cosechas por año. Estas características pueden crear mayores rendimientos económicos. La finalidad de controlar un invernadero por medio de una computadora es la de establecer un conjunto de acciones de mando, basadas en criterios de decisión preprogramados y de la información adquirida por sus sensores. Con esto, se puede lograr que las condiciones ambientales internas puedan seguir trayectorias de comportamiento ambiental de acuerdo a condiciones teóricas óptimas para cada cultivo, aún cuando las condiciones climáticas externas puedan ser muy diferentes. La automatización de invernaderos inició a fines de los años de los cincuentas, con la introducción de termostatos para el control de calor. Después se pusieron en funcionamiento componentes electrónicos analógicos.

Las condiciones ambientales que influyen en manera importante en el crecimiento y desarrollo de las plantas, y que son las que mayormente se controlan en el invernadero son: el nivel de radiación, la temperatura, la humedad y la concentración de bióxido de carbono, principalmente, aunque también se puede tener control sobre el agua de riego y sus nutrientes.

Desde un punto de vista físico el invernadero se puede considerar como un bioreactor en el cual un cultivo produce un producto comercial realizado, con el bióxido de carbono, agua conteniendo fertilizante y con el suministro de radiación de onda corta. El conjunto de factores ambientales en el "reactor", referido como el clima del invernadero, se tiene de la explotación del factor de crecimiento debido a la luz. Así que es extremadamente importante el control del clima del invernadero, a fin de tener un máximo efecto en la producción por el factor luz.

Un aspecto complejo es el desarrollo del cultivo en términos de producción y su interacción con el ambiente. Mucha información se ha obtenido sobre la relación existente entre el crecimiento del cultivo y las condiciones ambientales, como un aspecto de producción. Así, se tiene la posibilidad de usar una producción óptima, esto es, utilizar un esquema de optimización (un problema típico de control óptimo) haciendo un balance de los beneficios asociados con el nivel de producción y el costo de operación de la producción dada por el equipo de acondicionamiento del clima interno del invernadero.

El control en el invernadero se describe a grandes rasgos: el cultivo que está en crecimiento dentro del invernadero es influenciado por las condiciones internas del invernadero (clima dentro del invernadero). Las condiciones internas son el resultado de las condiciones de los actuadores

(las cuales pueden ser variadas por el crecimiento y pueden ser: sistemas de calentamiento, ventiladores, suministro de agua, humidificadores, etc.) y de algunas condiciones externas, las cuales actúan a través de la estructura del invernadero (la estructura en este caso es el material de cubierta: vidrio o plástico). Las condiciones externas son dadas por el clima.

El controlador ajusta sus actuadores dando condiciones óptimas para el crecimiento en sus diferentes etapas. Esto lo hace teniendo una iteración con el clima, utilizando información recolectada por algunos sensores. El controlador desarrolla algunos procedimientos, que pueden ser desarrollados en términos informáticos.

El clima del invernadero puede ser descrito desde varios puntos de vista, como son; la horticultura, la física y la ciencia de control. En horticultura, el clima es el régimen climático, su relación con los procedimientos de crecimiento y su influencia sobre el crecimiento del cultivo y su desarrollo. Se da mucha atención a las condiciones climáticas extremas para evitar daños a los cultivos (incluyendo enfermedades). En física se da atención principalmente al impacto en términos climáticos sobre la estructura del invernadero (sistemas de calefacción, techos, techos con doble capa, etc.). La ciencia de control se enfoca sobre la naturaleza dinámica del proceso controlado del cual el clima es básico, el cual está fuertemente relacionado con el crecimiento del cultivo y los procesos de desarrollo.

1.1 Estructura de la planta.

La definición de la composición, o estructura de la planta, depende de la *materia seca* de la planta; esto es necesario cuando se incorporan las funciones metabólicas de varios componentes dentro de la planta con el proceso de modelado de la planta. Es útil separar la planta en substratos y en estructura. La estructura comprende el material de las paredes celulares - principalmente celulosa - y la "maquinaria" de la planta - proteínas -. El resto de la planta es tomado como substrato (la glucosa, aminoácidos, etc.).

1.1.1 Raíces

La raíz es una parte importante de la planta. El tamaño y el peso que abarca la raíz de muchas plantas es tan grande como, o mayor que la porción sobre la superficie de la tierra, y constituye

por lo general una tercera parte, por lo menos, del peso seco de la parte sobre dicha superficie.

1.1.2 Tallo y hojas

El tallo de la planta, conocido también en las gramíneas como pedúnculo o caña, sostiene y extiende las hojas en tal forma que hace posible la fácil absorción de bióxido de carbono y de la luz solar. El tallo y sus apéndices constituyen el vástago. El tallo sirve para conducir el agua y las sustancias disueltas que provienen del suelo en dirección a la hoja y, también, para llevar los nutrientes de la planta, de las hojas a todas sus partes. Se ha sugerido que la hoja se puede considerar como una parte aplanada y desplegada del tallo. La hoja contiene una gran parte de la misma clase de células y los tejidos que se encuentran en el tallo. Pero, mientras que el tallo muestra una tendencia al crecimiento ilimitado, en la hoja resulta ser lo contrario. La hoja deja de crecer rápidamente, madura, funciona durante un período y, finalmente, se marchita.

La mayoría de los tallos son firmes y están en posición vertical pero otros tienen forma de enredadera o, incluso están en posición postrada. Otros tienen tallos subterráneos perennes que siguen una orientación horizontal como son muchos pastos.

La estructura de las hojas está dispuesta de tal forma que se adapta de manera peculiar a la fotosíntesis y a la transpiración. La lámina expuesta de la hoja proporciona la máxima superficie para la absorción de energía luminosa. Como es delgada, todas las células se encuentran muy cerca de la superficie, lo cual facilita la absorción y la difusión de gases (entre los que se encuentra el vapor de agua, oxígeno y bióxido de carbono), a las células interiores de la hoja. Las nervaduras fortalecen a la hoja y constituyen los canales para el paso del agua y las sustancias disueltas. Además, conducen una parte del alimento elaborado dentro de la hoja a otras partes de la planta.

En la mayoría de las plantas, la epidermis está formada por una sola capa de células que cubre toda la superficie de la hoja. Esparcidas en ambos lados de la hoja se encuentran las células modificadas, conocidas como las células guardianes de los estomas. Cada estoma cuenta con dos células guardianes que cuando están turgentes o llenas de agua, el estoma se abre. Cuando dichas células pierden agua más rápido de la que se puede obtener de las células vecinas o del tejido vascular, la abertura prácticamente se cierra. Se controla la pérdida de agua cuando se cierran los estomas, lo cual no regula la transpiración, sino que sólo sirve para

evitar un excesivo secamiento de las células sensibles de la hoja. Los estomas se comunican con el espacio intercelular entre las células y permiten que los gases, en especial el vapor de agua, el bióxido de carbono y el oxígeno, se difundan dentro de la atmósfera o se trasladen de ésta hacia la planta. Debajo de esta capa epidérmica externa de células se encuentra otra capa de células ricamente colmada de cloroplastos. La disposición irregular de las células da lugar a una región con apariencia de esponja (mosófilo esponjoso), que proporciona el espacio aéreo necesario para el intercambio gaseoso implicado en la fotosíntesis y en la transpiración.

1.1.3 Flores, frutos y semilla.

Las flores, los frutos y las semillas sirven principalmente para la reproducción. La flor es vistosa, si depende de los insectos para la polinización o poco visible, si es auto polinizada o de polinización cruzada por el viento.

1.1.4 Estructura celular

Cada parte de la planta está formada de células minúsculas, y cada una está compuesta esencialmente de una masa de citoplasma; la materia viviente de la planta. El citoplasma tiene estructuras especiales para realizar funciones definidas. El núcleo está formado de una masa compacta esférica separada del citoplasma por una membrana. La cromatina, que se encuentra en el núcleo, está constituida por estructuras filiformes que se condensan en cuerpos llamados cromosomas cuando la división celular se va a llevar a cabo. Para cada tipo de planta, la cromatina se agrupa en un número definido de cromosomas. La herencia de la planta se determina por el material contenido en estos cromosomas. El ácido desoxirribonucleico (DNA) se encuentra en los cromosomas y es el puente de la herencia entre las generaciones. Contiene la información genética, la cual afecta la maquinaria de la célula mediante el control de síntesis proteínica. Dicha síntesis se efectúa en las pequeñas partículas llamadas ribosomas, que se localizan en el citoplasma.

El citoplasma tiene cavidades o vacuolas llenas de savia celular y cuerpos densos y con apariencia de disco llamados plastidios. Estos portan a menudo pigmentos que les dan las características del color. Los pigmentos verdes son la clorofila. Algunas veces, los plastidios son incoloros o portan otros colores, como los de los pétalos de las flores o de los tallos y las raíces.

Los gránulos pequeños y densos denominados mitocondrias son los sitios de respiración celular. Contienen las enzimas necesarias para la descomposición oxidativa de las moléculas orgánicas. Así se liberan las sustancias portadoras de energía, como el trifosfato de adenosina (ATP), el cual se vuelve accesible a los procesos esenciales de la célula.

1.1.5 La pared celular.

La pared celular está formada de celulosa, con depósitos secundarios de hemicelulosa o lignina en ciertos casos, los cuales fortalecen la pared. Las paredes celulares permiten que el agua y las sustancias disueltas pasen a través de la célula. La mayoría de las sustancias que se disuelven en el agua pueden atravesar fácilmente las paredes celulares. Algunas sales dañinas pueden introducirse de este modo en la célula. Se realiza una selección más rigurosa con la membrana citoplásmica, la cual rodea al citoplasma y se conecta con la pared celular. La mayoría de las sustancias se difunden por toda la membrana citoplásmica en forma de iones en vez de compuestos. Una sustancia electrolítica se ioniza cuando penetra en la solución. Por ejemplo, el cloruro de sodio se convierte en iones positivos de sodio y en iones negativos de cloro que pueden ser absorbidos en proporciones desiguales; lo cual permite que uno u otro ión se combine libremente con los iones de otros solutos. En todos los casos, debe haber un balance de cargas positivas y negativas en forma de iones. Los diferentes iones son absorbidos por la planta en diferentes proporciones. Un tipo de ión influye en la absorción de otro tipo. La zona fibrosa de la raíz es el punto principal de acceso.

1.2 Estructura del crecimiento.

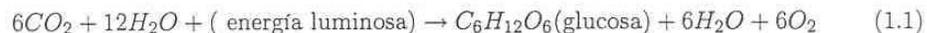
El crecimiento de una planta se efectúa mediante la multiplicación y alargamiento de sus células individuales. El crecimiento de la célula tiene diversas fases. La primera es la de la formación de la célula a través de la división. La segunda fase es la del desarrollo durante la cual la célula alcanza su tamaño total. La tercera fase es la de la maduración, y es cuando engruesan las paredes celulares teniendo lugar otros cambios. Para que el crecimiento se realice, la pared celular debe alargarse y debe añadirse celulosa. El crecimiento de la planta depende internamente de muchos factores, entre los cuales está la proporción con la que se suministran

alimentos y la energía que se obtiene de la oxidación de los azúcares. Es importante contar con una temperatura adecuada, requiriéndose de la luz necesaria para la fotosíntesis, lo que origina la formación del azúcar que se utiliza indirectamente (como fuente de energía a través de la respiración) o directamente en el crecimiento. Los nutrientes y materia prima de la planta necesarios para la fotosíntesis, comprenden dióxido de carbono, agua, fósforo y otros minerales.

1.2.1 Fotosíntesis.

La clorofila en las plantas verdes tiene la capacidad especial de elaborar, con la ayuda de la luz solar, carbohidratos derivados del bióxido de carbono y del agua. La energía se almacena en estos productos elaborados. La liberación de dicha energía es la mayor fuente de poder. Los carbohidratos producidos por las plantas son la fuente fundamental del alimento de todos los animales y plantas. Más del 90% del peso seco de la mayoría de las plantas está compuesto por carbohidratos derivados, mediante la fotosíntesis, del bióxido de carbono y del agua. El bióxido de carbono penetra a la planta por los estomas y se difunde a través del citoplasma hasta los cloroplastos. Los cloroplastos constituyen, como se ha señalado, el “laboratorio alimenticio del mundo”. Con la ayuda de la clorofila y la luz, mediante una serie de reacciones, el bióxido de carbono y el agua se transforman en carbohidratos ricos en energía. La fotosíntesis es un proceso complejo que implica las “reacciones de la luz”, para convertir la energía luminosa en energía química, la última resulta de la conversión de ADP a ATP y de NADP a NADPH₂. La “Reacción oscura” de la fotosíntesis puede ocurrir en ausencia de la luz y se refiere a la formación de compuestos intermedios de carbohidratos y, finalmente, a unidades de azúcar. Este proceso requiere del empleo de energía química que resulta de las reacciones previas que se producen en presencia de la luz.

La siguiente ecuación química, aunque es una simplificación, resume el proceso complejo de la fotosíntesis:

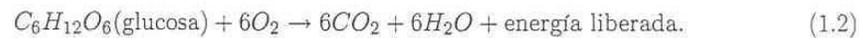


La cantidad de clorofila en las plantas en crecimiento varía del 0% a aproximadamente 0.25 por ciento del peso de la planta verde. El color verde es por lo general un claro indicio de las condiciones para el crecimiento y el suministro de las sustancias necesarias. El color rojo de

ciertas hojas normales, causado por la antocianina, no evita la actividad fotosintética siempre y cuando esté también presente la clorofila normal.

1.2.2 Respiración.

La respiración en las plantas es muy semejante a la de los animales y es esencialmente el proceso contrario de la fotosíntesis. Las sustancias se oxigenan, produciendo bióxido de carbono y agua, y se libera energía. Siempre que haya crecimiento o vida, la respiración está presente; incluso las semillas mientras permanecen en período de latencia (o inactivo), respiran lentamente. La respiración se puede representar mediante la siguiente ecuación simplificada:



Las sustancias principales que se oxidan durante la respiración de la planta, son carbohidratos que ha elaborado o almacenado, aunque se pueden emplear otros productos bajo ciertas condiciones. Los procesos respiratorios se controlan mediante enzimas formadas en el citoplasma.

La respiración ocurre tanto en el día como en la noche. Durante el día, la fotosíntesis se realiza normalmente más rápido que la respiración, por lo que el bióxido de carbono liberado en la respiración está en equilibrio con el oxígeno liberado con la fotosíntesis. Por la noche la planta despidе bióxido de carbono debido a que la respiración continúa durante la noche, mientras que se detiene la fotosíntesis.

1.2.3 Transpiración

El agua penetra a la planta por difusión a través de las paredes de los pelos de la raíz y de otras células de pared delgada, y atraviesan profundamente la raíz hacia el haz fibrovascular, se introduce en el xilema de la planta y sube hacia los tallos y las hojas. Una parte del agua se utiliza en la fotosíntesis y otra en diversos procesos celulares, pero la mayor parte atraviesa los espacios aéreos entre las células y se difunde en la atmósfera a través de las aberturas de los estomas. Esta pérdida de agua se denomina transpiración.

1.2.4 Factores que afectan el crecimiento.

La productividad se daña con frecuencia por las condiciones ambientales desfavorables, que comprenden la temperatura, la humedad disponible, la reacción del suelo, los nutrientes minerales disponibles, la energía radiante y otros factores bióticos (como insectos, las enfermedades y plantas nocivas).

La temperatura afecta algunas funciones de la planta como: la fotosíntesis, la respiración la permeabilidad de la pared celular, la absorción del agua (y sus solutos) y la transpiración. En general, la respiración se torna lenta a temperaturas bajas. Las tasas de transpiración son relativamente bajas a temperaturas más bajas. La absorción del agua y los solutos se incrementa al aumentar la temperatura del suelo. La temperatura influye en el crecimiento de la planta por su efecto en la población microbiana del suelo, la cual, por lo común, aumenta con un incremento en la temperatura del suelo. La relación entre el rendimiento y la temperatura varía en las diferentes especies y en las variedades diferentes de estas especies.

El crecimiento de muchas plantas guarda relación con la cantidad de agua disponible. El crecimiento se restringe tanto a niveles bajos como a muy altos de la humedad del suelo. El agua es indispensable para el mantenimiento de los carbohidratos y como un medio de transporte de los nutrientes y de la materia prima. Además, la tensión interna de la humedad provoca una reducción tanto en la división celular como en el alargamiento de la célula, repercutiendo entonces en el crecimiento. El nivel de humedad del suelo se relaciona directamente con la absorción de los nutrientes de la planta. Cuando la reserva de humedad es adecuada, el incremento en la absorción de nutrientes mejora la eficiencia hidráulica en las plantas. Los niveles bajos de humedad disminuyen la actividad de los microorganismos y ocasionan una reserva menor disponible de nitrógeno.

La energía radiante constituye un factor importante de acuerdo a su calidad, intensidad y duración. En general, se cree que un espectro total de luz solar es lo más provechoso para el crecimiento de la planta. Los cultivos responden de manera diferente a algunos de estos factores.

Liebig ,tuvo la idea de que el crecimiento de las plantas es proporcional a la cantidad de sustancias minerales disponibles y el crecimiento de las plantas está limitado por los elementos nutrientes de la planta que están presentes en cantidades más pequeñas, aunque los otros estén

presentes en cantidades adecuadas.

Algunas observaciones han llevado a científicos a desarrollar funciones (modelos matemáticos) del crecimiento de las plantas, aproximándose así, al crecimiento real, por medio de simulaciones que en control pueden ser útiles.

1.2.5 Función logística (Robertson 1923)

La función logística (ver fig. 1), es una de las tres más importantes funciones que describen el crecimiento y desarrollo de los cultivos. Las otras dos funciones son la función de Gompertz y la función de Richards. En este trabajo solo trabajaremos con la función logística, para más detalle sobre las otras funciones ver [39, Thornley J.H.M. and Johnson I.R.]. La ecuación de la función logística es derivada de las siguientes hipótesis:

- 1.- La cantidad de maquinaria de crecimiento¹ es proporcional a la materia seca W [kg/m^2].
- 2.- Esta cantidad de maquinaria de crecimiento trabaja a razón proporcional a la cantidad de sustrato S .
- 3.- El crecimiento es irreversible.

La ecuación diferencial que gobierna el sistema es (ver fig. 2):

$$\frac{dW}{dt} = k'WS \quad (1.3)$$

donde k' es una constante y, S es el nivel de sustrato.

Sustituyendo $W + S = W_0 + S_0 = W_f = \text{constante}$ (donde W_0 y S_0 son los valores de W y S en el tiempo $t = 0$), y W_f el valor final de W cuando $t \rightarrow \infty$ ($S \rightarrow 0$ como $t \rightarrow \infty$). Entonces podemos escribir

$$\frac{dW}{dt} = k'W(W_f - W) \quad (1.4)$$

tomando a μ como: $\mu = k'W_f$, tal que:

$$\frac{dW}{dt} = \mu W \left(1 - \frac{W}{W_f}\right) \quad (1.5)$$

¹ver sección 1.1

integrando esta última ecuación,

$$W = \frac{W_0 W_f}{W_0 + (W_f - W) e^{-\mu t}} \quad (1.6)$$

en la etapa temprana de crecimiento, cuando t es muy pequeño y $\frac{W}{W_f} \ll 1$, la última ecuación se aproxima a;

$$W = W_0 e^{\mu t} \quad (1.7)$$

se tiene entonces que, durante la etapa temprana del crecimiento de la planta, el crecimiento es exponencial con respecto a la razón de crecimiento específico μ . Diferenciando $\frac{dW}{dt} = \mu W \left(1 - \frac{W}{W_f}\right)$ (ver fig. 2) obtendremos:

$$\frac{1}{\mu} \frac{d^2 W}{dt^2} = \frac{dW}{dt} \left(1 - \frac{2W}{W_f}\right) \quad (1.8)$$

tal que, el punto de inflexión estará localizado en:

$$W = \frac{1}{2} W_f, \quad (1.9)$$

sustituyendo en $W = \frac{W_0 W_f}{W_0 + (W_f - W) e^{-\mu t}}$, esto ocurrirá en el tiempo $t = t^*$ donde;

$$t^* = \frac{1}{\mu} \ln \left(\frac{W_f - W_0}{W_0} \right) \quad (1.10)$$

además;

$$W(t^*) = \frac{W_f}{2} \quad (1.11)$$

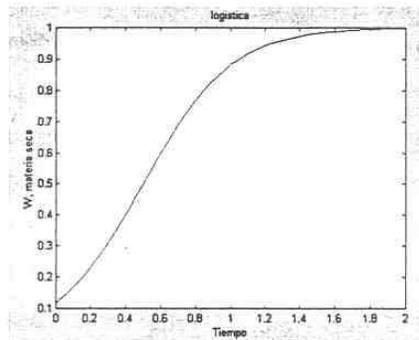


Figura 1.- Función Logística.

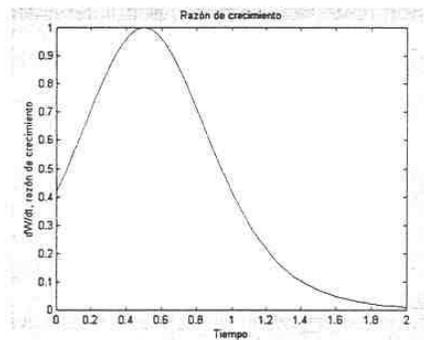


Figura 2.-Razón de Crecimiento

1.3 Fases de crecimiento.

El crecimiento de una planta, puede ser representado en tres etapas. i) Fase exponencial, ii) Fase lineal y iii) Fase de senectud.

Durante la primera fase de crecimiento (*fase exponencial*), mucho del espacio entre las plantas no ha sido ocupado. Cada hoja nueva que es formada contribuye a interceptar más luz, debido a que no existe un sombreado mutuo entre hojas, así, que el crecimiento aumenta mas.

Siendo entonces:

$$\frac{dw}{dt} = r_m * w \tag{1.12}$$

$$r_m = \frac{dw}{dt} \quad (1.13)$$

$$w = w_0 * e^{(r_m * t)} \quad (1.14)$$

donde

w = materia seca [kg m^{-2}];

w_0 = materia seca inicial [kg m^{-2}];

r_m = razón de crecimiento relativo de materia seca [$\text{kg kg}^{-1} \text{s}^{-1}$];

t = tiempo [d].

La fase exponencial, solo ocurre cuando la cobertura del suelo por las hojas es aún pequeña.

Posteriormente (*fase lineal*) las hojas gradualmente comienzan a hacerse sombra entre ellas.

Esto es descrito con un índice de área de hoja por arriba de $3 \text{ m}^2(\text{hoja})/\text{m}^2(\text{terreno})$

$$LAI = \frac{\text{área total de hoja}}{\text{área de terreno cultivado}} \quad \left[\frac{\text{m}^2(\text{hoja})}{\text{m}^2(\text{terreno})} \right] \quad (1.15)$$

donde LAI ² es el índice de área de hoja.

La nueva área de hoja difícilmente resulta en mayor intersección de luz, así la fase de crecimiento exponencial a pasado a una fase de crecimiento lineal. En esta fase es donde se tiene la formación de volumen de materia seca.

Siendo entonces:

$$\frac{dw}{dt} = c_m \quad (1.16)$$

$$w = c_m * (t - t_b) \quad (1.17)$$

donde

w = materia seca [kg m^{-2}];

c_m = razón de crecimiento máximo [$\text{kg m}^{-2} \text{d}^{-1}$];

t = tiempo [s];

²leaf area index, LAI por sus siglas en ingles

t_b = tiempo donde comienza la fase lineal [d].

La transición a la fase lineal toma lugar cuando el terreno está completamente cubierto.

La fase final (fase de senectud) empieza cuando la intersección decrece otra vez, y el LAI ha decrecido por debajo de $3 \text{ m}^2(\text{hoja})/\text{m}^2(\text{terreno})$. A diferencia de la transición de la fase exponencial a la fase lineal, no se pueden dar reglas simples para la transición de la fase lineal a el inicio de esta fase (Depende del tipo de cultivo y clima cuando la fase lineal termina).

1.3.1 Crecimiento expo-lineal.

Si el crecimiento se descompone en una fase puramente exponencial y en otra puramente lineal, en el momento de transición, las dos razones de crecimiento deben ser iguales

$$r_m * w = \frac{dw}{dt} = c_m \quad (1.18)$$

y así tendremos una aproximación expo-lineal (ver fig. 3) de la siguiente forma (Goudriaan [18]):

$$w = \frac{c_m}{r_m} \ln(1 + e^{r_m(t-t_b)}) \quad [kg/m^2] \quad (1.19)$$

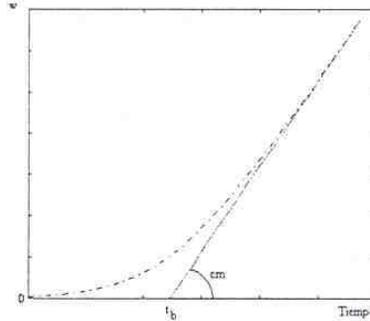


Figura 3.- Funcion Expo-Lineal --, crecimiento lineal -,
 t_b tiempo de conmutación, c_m razón de crecimiento

Capítulo 2

Modelo de crecimiento de la lechuga

2.1 Introducción

En este trabajo el peso seco es considerado como la variable más importante que define el estado del cultivo. Algunas otras variables de estado que representan el clima del invernadero serán: la temperatura del aire, la concentración del bióxido de carbono y la humedad. Las entradas de control estarán dadas por: la energía entrante del sistema de calefacción, la razón de ventilación a través de la ventana y el suministro de bióxido de carbón. Entradas externas serán: las condiciones climáticas externas del invernadero, incluyendo: la radiación solar, velocidad del viento, temperatura, concentración de bióxido de carbono y humedad. Estas, condiciones externas tienen un gran impacto sobre el balance de energía y de masa en el interior del invernadero, además, que la radiación solar es una condición necesaria para el crecimiento de la cosecha. Para la salida del sistema se pueden tomar la calidad total producida, la calidad del producto, y la valoración (cuanto cuesta) y el tiempo de producción. Así, el modelo dinámico describe la evolución de las variables de estado del proceso de producción del cultivo en el invernadero. Por otro lado, la respuesta de la cosecha está dividida en: respuesta en tiempo corto y respuesta en tiempo largo. En tiempo corto, se toman las respuestas en minutos u horas y pueden estar dadas por: los estados de carbohidratos o el estado del agua. Estos dos aspectos dan forma a la producción de energía, a los bloques primarios de producción y a los requerimientos de agua, estos a su vez, forman el proceso de crecimiento del tejido. En tiempo largo las respuestas son de días o meses y están dados por: Acumulación, desarrollo y distribución de materia seca.

Para el modelo dinámico del invernadero, se ha revisado en la literatura que los autores integran una descripción del invernadero tomando dos diferentes sistemas: el modelo del crecimiento (y desarrollo del cultivo) y otro que es el clima interno del invernadero. La transferencia de energía y masa dentro del invernadero se describe generalmente en términos de la transferencia por convección, conducción y radiación. La respuesta del crecimiento de las plantas ha sido investigado dentro de la fisiología de los cultivos, por ejemplo; la producción de materia seca de un cultivo se ha descrito por el proceso fisiológico de la fotosíntesis, respiración y distribución de materia (Penning de Vries, 1974[31]; Thornley y Hurd, 1974; Goudriaan y van Laar, 1994[18]; Farquhar, 1980[14]; Sweeney, 1981. Thornley, 1990[39]). Y muchos de los parámetros son obtenidos de la literatura.

Tomando de la tesis de van Henten[40]:

Sea X_d (kg m²) el peso seco total del cultivo. La base para calcular la producción de materia seca es la razón de asimilación neta del bióxido de carbono en el follaje, esto es, la diferencia entre la asimilación del bióxido de carbono dado por la fotosíntesis ϕ_{fot} y el bióxido de carbono utilizado en la fotorespiración ϕ_{resp} , y donde c_β , c_α son parámetros experimentales.

$$\frac{dX_d}{dt} = c_\beta(c_\alpha\phi_{fot} - \phi_{resp}) \quad (2.1)$$

En la práctica agrícola y hortícola los modelos están basados, por una parte en la tradición y por otra parte, en el conocimiento científico. Por tradición se quiere decir: el conjunto de conjeturas donde las cosas están hechas a causa de su conocimiento y trabajan en cierto grado, pero no es entendible porqué.

Ahora, consideraremos algunas de las ideas básicas de la cinemática de la enzima, esto para derivar algunas ecuaciones para el modelado de las plantas y los cultivos. Por ejemplo, la bioquímica de la síntesis de las proteínas de los azúcares y los aminoácidos es compleja pero, para algunos propósitos de modelado, se puede tener una representación usando la ecuación de Michaelis-Menten[39].

2.1.1 Ecuación de Michaelis-Menten.



Donde E, S, y P indican: la enzima, substrato, y producto de reacción respectivamente, K_1, K_2, K_3 son constantes de velocidad de reacción, ES representa el complejo enzima-substrato. En regimen permanente la concentración de ES es constante, tal que la razón de producción de ES debe ser igual a la razón de degradación de ES :

$$K_1 [E] [S] = (K_2 + K_3) [ES] \quad (2.3)$$

donde los paréntesis cuadrados denotan la concentración de sustancia. Si E_0 es la concentración total de enzima presente, la cual, no varía con el tiempo, entonces,

$$E_0 = [E] + [ES] \quad (2.4)$$

esto es, el número de kilogramos - mol de enzima es constante. De estas dos últimas ecuaciones tendremos,

$$[ES] = \frac{K_1 [S] E_0}{K_1 [S] + (K_2 + K_3)} \quad (2.5)$$

esto es la concentración de moléculas de substrato, las cuales, son combinadas con moléculas de enzima en términos de concentración de substrato $[S]$ y la concentración total de enzima E_0 .

Si la velocidad de reacción en regimen permanente es v , entonces:

$$\begin{aligned} v &= K_3 [ES] = \frac{K_1 K_3 E_0 [S]}{K_1 [S] + (K_2 + K_3)} \quad (2.6) \\ v &= \frac{(K_3 E_0) [S]}{\frac{(K_2 + K_3)}{K_1} + [S]} \\ v &= \frac{v_{\max} [S]}{K + [S]}; \quad \text{ecuación hipérbolica cuadrática} \end{aligned}$$

donde:

$v_{\max} = K_3 E_0$, velocidad máxima de reacción (la cual ocurre cuando todos los sitios activos de las moléculas de enzimas están ocupadas por moléculas de substrato).

$K = \frac{(K_2 + K_3)}{K_1}$ es conocida como la constante de Michael-Menten, y es el valor de la concentración de substrato para la mitad de la velocidad máxima $v = \frac{1}{2} v_m$. (ver fig. 4)

Si derivamos respecto al sustrato y lo igualamos a cero, esto es la pendiente de v cuando la concentración de sustrato es cero (en el origen), tendremos;

$$\left. \frac{dv}{d[S]} \right|_{[S]=0} = \frac{(K + [S]) v_m - v_m [S]}{(K + [S])^2} \Big|_{[S]=0} = \frac{v_m}{K} \quad (2.7)$$

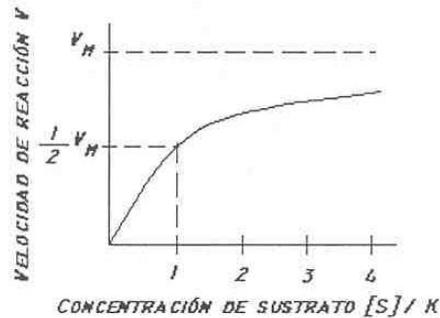


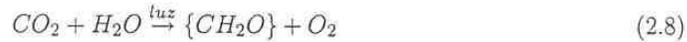
Figura 4.- Concentración de sustrato dado a una determinada velocidad de reacción.

Ahora, hablemos sobre la fotosíntesis: la cual es el proceso primario en el crecimiento y producción del cultivo.

Existen tres niveles en los cuales la fotosíntesis puede ser estudiada: a nivel de célula, a nivel de hoja y a nivel de cultivo. Se pueden ligar los modelos matemáticos de estos niveles, dado que la suma de la fotosíntesis de las células (individuales) nos proporciona la fotosíntesis de la hoja y lo mismo pasa con la fotosíntesis del cultivo. Se describirán algunos modelos de la fotosíntesis del cultivo a continuación. Tales modelos son basados en algunas representaciones características de la fotosíntesis de las hojas, combinado con él, la luz ambiental, y determinado por la intercepción de la luz por el cultivo.

Primero se tomarán en cuenta algunos modelos bioquímicos y celulares de la fotosíntesis en la hoja, de los cuales, se evaluará la función de la respuesta fotosintética de forma hiperbólica no rectangular.

El resultado general de la fotosíntesis puede ser dado por la siguiente reacción:



donde:

$\{CH_2O\}$ denota una unidad de carbohidrato; la glucosa ($C_6H_{12}O_6$) contiene seis unidades de carbohidratos.

Se ha encontrado en la literatura, la consideración de dos importantes grupos de plantas conocidas como C_3 y C_4 , que dependen de su fisiología y bioquímica de la fotosíntesis.

Todas las plantas realizan un proceso llamado respiración "oscura" (la cual ocurre, tanto en la oscuridad, como en presencia de la luz), la cual está dada por:



En el grupo de plantas C_3 la respiración, conocida como fotorespiración toma lugar en presencia de la luz y puede ser:



Así en las plantas del tipo C_3 la fotorespiración compite con la fotosíntesis en la eficiencia de la fijación de carbono. Y la fotosíntesis puede ser tomada como la unión de algunos procesos: a) el suministro de CO_2 del aire, a los sitios donde se lleva a cabo la carboxilación y se elimina el O_2 ; b) la absorción de energía luminosa, la generación de energía química (ATP) y el poder reductor (el cual escribimos como NADPH); c) la utilización de este ATP y NADPH para derivar las reacciones bioquímicas y procesos de transporte asociados con la reducción de CO_2 a azúcares.

Las reacciones bioquímicas de la fotosíntesis producidas por la luz, se representan en la siguiente figura (fig. 5)

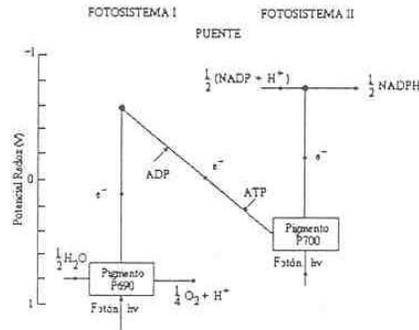


Figura 5.-Reacciones bioquímicas en el proceo de la fotosíntesis.

Note que el ATP tiene lugar cuando un electrón se mueve del punto A del diagrama hacia el pigmento P700. Estequiometricamente



(Es posible que el protón H^+ producido en P690 esté dentro de la membrana del tilacoide, mientras que el protón absorbido en B para la producción de NADPH es tomado fuera de la membrana).

2.2 Generalidades

2.2.1 Modelando la fotosíntesis de las hojas para modelar la planta y el follaje (dosel).

Sea la irradianza en la hoja, I (W/m^2 de radiación fotosintéticamente activa, PAR ¹), la concentración de CO_2 , C_a ($kg\ CO_2\ m^{-3}$), y la razón fotosintética, P_n por unidad de área de hoja [$kgCO_2\ (m^2\ hoja)^{-1} s^{-1}$].

¹Photosyntetic Active Radiation PAR, por sus siglas en inglés

Se considera una hoja homogénea de espesor h (m), y suponga que es uniformemente irradiada con irradianza I_1 y que la concentración de CO_2 interna es C_i , el cual también se supone uniforme. Se asumirá, que la energía de la luz en I_1 reacciona con algunas moléculas X para producir una forma activada X^* :



k_1 es una razón constante. La forma activada X^* reacciona entonces con CO_2 dentro de la hoja para proporcionar carbohidratos $\{\text{CH}_2\text{O}\}$ y regenerar X , como sigue:



k_2 es una segunda razón constante. De estas dos últimas ecuaciones podemos obtener la razón de formación de X^* :

$$\frac{dX^*}{dt} = k_1 I_1 X - k_2 X^* C_i \quad (2.14)$$

suponiendo $X_0 = X + X^*$ constante.

$$\frac{dX^*}{dt} = k_1 I_1 (X_0 - X) - k_2 X^* C_i \quad (2.15)$$

entonces, obtendremos la razón de fotosíntesis

$$P = h k_2 X^* C_i \quad (2.16)$$

y en estado en régimen permanente $\frac{dX^*}{dt} = 0$, será

$$X^* = \frac{k_1 I_1 X_0}{k_1 I_1 + k_2 C_i} \quad (2.17)$$

sustituyendo en, P , finalmente, multiplicando por hX_0 , y escribiendo $\alpha = h k_1 X_0$ y $r_x = (h k_2 X_0)^{-1}$ tendremos.

$$P = \frac{\alpha I_1 C_i / r_x}{\alpha I_1 + C_i / r_x} \quad (2.18)$$

α es conocido como la eficiencia fotoquímica ($\text{kg CO}_2 \text{ J}^{-1}$) y r_x como la resistencia a la carboxilación (s m^{-1}). Esta ecuación describe una ecuación hipérbolica para las relaciones

$P : I_1$ y para $P : C_i$.

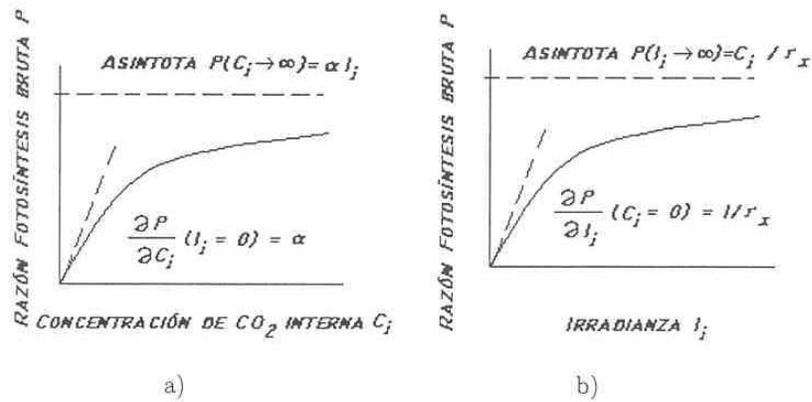


Figura 6.- a) Concentración de Bioxido de carbono interno C_i

b) Razón de fotosíntesis bruta dada por la irradianza I_i

Tomando en cuenta la fotorespiración, este modelo simple tomara la siguiente forma:



recordando que X^* es la forma activada de X , y $X_0 = X + X^*$. Además, C_i y O_i , son las concentraciones internas de CO_2 y O_2 , (fig. 6 a, fig. 6 b).

$$\frac{dX^*}{dt} = k_1 I_1 (X_0 - X) - X^* (k_2 C_i + k_3 O_i) \quad (2.20)$$

en estado de régimen permanente $\frac{dX^*}{dt} = 0$, por lo tanto:

$$X^* = \frac{k_1 I_1 X_0}{k_1 I_1 + k_2 C_i + k_3 O_i} \quad (2.21)$$

la razón fotosintética P (esta es ahora la fotosíntesis menos la fotorespiración).

$$P = \frac{hX_0 I_1 k_1 (k_2 C_i - k_3 O_i)}{k_1 I_1 + k_2 C_i + k_3 O_i} \quad (2.22)$$

finalmente, multiplicando por hX_0 , y escribiendo $\alpha = hk_1 X_0$, $r_x = (hk_2 X_0)^{-1}$ ($s\ m^{-1}$), $r_p = (hk_3 X_0)^{-1}$ ($s\ m^{-1} kg O_2 (kg CO_2)^{-1}$) tendremos.

$$P = \frac{\alpha I_1 (C_i/r_x - O_i/r_p)}{\alpha I_1 + C_i/r_x + O_i/r_p} \quad (2.23)$$

Así, la razón de fotosíntesis neta P_n está dada por:

$$P_n = P - R_d \quad (2.24)$$

donde: R_d , es el componente de respiración, esto es, la evolución de CO_2 y el consumo de O_2 . Pirt (1965) demostró experimentalmente lo siguiente:

$$R_d = a \frac{dW}{dt} + bW \quad (2.25)$$

donde W es la materia seca, $\frac{dW}{dt}$ razón de materia seca (kg/s), a ($kg\ CO_2 (kg\ materia\ seca)^{-1}$) y b ($kg\ CO_2 (kg\ materia\ seca)^{-1} s^{-1}$) son constantes relacionadas fundamentalmente al proceso de crecimiento y mantenimiento.

Ahora, para describir la fotosíntesis en el dosel (follaje), es importante tomar en cuenta un factor; la atenuación de la luz a través del follaje descrita por la ley de Beer, esto es:

$$I(l) = I_0 e^{-kl} \quad (2.26)$$

donde I_0 y $I(l)$ ($W (m^2\ tierra)^{-1}$) son las irradiaciones por unidad de área horizontal arriba y dentro del dosel (follaje), l , índice área de hoja y k , el coeficiente de extinción, lo cual nos introduce al modelo de Goudriaan(1982) de la fotosíntesis en bruto.

$$P_g = P_{gmac} [1 - e^{-(kl)}] \quad (2.27)$$

Ahora la discusión será, cómo las condiciones en el invernadero (clima) modifican el crec-

imiento. Dentro del invernadero los factores que afectan el crecimiento son; el contenido de CO_2 , la temperatura, la presión de vapor de agua y la radiación local, los cuales, son afectados por la cubierta en el invernadero, debido a que la cubierta encierra el aire. Esto induce a una reducción en el cambio de aire entre el cultivo y el aire atmosférico, también se reduce la velocidad local del aire. La transpiración se queda atrapada en el invernadero, más aún, la radiación termal producirá el calentamiento al cultivo, y este calentamiento no podrá salir libremente del invernadero. Entonces, se examinarán, los procesos responsables para la transferencia de masa y energía (vapor de agua, concentración de CO_2). Las condiciones de crecimiento dentro del invernadero podrán ser aplicadas para cuantificar la producción de cultivos en el invernadero.

En principio examinaremos como fluyen la energía y la masa. El balance de energía sobre un volumen dado está dado por:

$$\frac{dQ_h}{dt} = qh_{entra} - qh_{sale} + Ph \quad (2.28)$$

donde: Q_h es el monto de energía en un volumen dado [J](energía interna); Ph es la producción de energía dentro del volumen [J s^{-1}].

El lado izquierdo de la ecuación representa el cambio por unidad de tiempo de energía en el volumen considerado.

El monto de energía Q_h esta relacionado directamente con la temperatura T (K) del volumen a través de su capacidad térmica C_{ap_h} [JK^{-1}]:

$$Q_h = C_{ap_h} T \quad (2.29)$$

y el cambio de energía interna, traducido a cambio de temperatura respecto al tiempo será:

$$C_{ap_h} \frac{dT}{dt} = q_{entra} - q_{sale} + Ph \quad (2.30)$$

Las mismas consideraciones se harán para el balance de masa sobre un volumen.

$$\frac{dQ_m}{dt} = q_{m_{entra}} - q_{m_{sale}} + P_m \quad (2.31)$$

donde: Q_m es el cambio de masa en el tiempo (kg) en el volumen dado; P_m es la producción

de masa dentro del volumen (kg s^{-1}). En el invernadero los balances de CO_2 y vapor de agua, son de especial interés.

La masa Q_m en el volumen está relacionado directamente a la concentración C_m (kg m^{-3}) y al volumen V (m^{-3}):

$$Q_m = VC_m \quad (2.32)$$

así:

$$\frac{VdC_m}{dt} = q_{m_{entra}} - q_{m_{sale}} + P_m \quad (2.33)$$

2.2.2 Mecanismos de transporte

Para formular la relación entre los flujos y variables relevantes, se tienen varios mecanismos responsables del transporte de un lugar a otro (dentro del volumen considerado), estos mecanismos de transporte serán:

2.2.3 Conducción o difusión.

Este es el mecanismo de transporte dado en un medio resistente. En el invernadero, la conducción toma lugar a través de la construcción y cubiertas, pero es importante considerar el transporte con el suelo. En general, el mecanismo se tiene del flujo de energía de la temperatura alta hacia la temperatura baja. Para la conducción, no solo la temperatura es tomada en cuenta, también se toma en cuenta la distancia sobre la cual la temperatura cambia. El cambio de temperatura sobre esa distancia es llamado, *gradiente de temperatura* $\frac{dT}{dx}$.

$$\Phi_h = -\lambda \frac{dT}{dx} \quad (2.34)$$

El transporte de energía es en una dirección, y es proporcional al gradiente de temperatura.

El transporte es expresado como el flujo por unidad de área y es perpendicular a la dirección del transporte, así, este es llamado, densidad de flujo de calor, Φ_h ($\text{W/m}^2 \text{ K}$). El factor proporcional λ , está dado por el material para conducir energía y es llamado conductividad térmica ($\text{W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$). Y el signo negativo liga a una densidad de flujo positiva en la dirección x a un gradiente negativo (de alta temperatura a baja temperatura por incremento en x).

Para el transporte de masa por difusión, se puede seguir la misma aproximación, siendo la

fuerza de conducción un gradiente de concentración. En el invernadero esto podría ser aplicado al movimiento de agua en el suelo.

2.2.4 Convección

Otro mecanismo de transporte es el de convección, el cual, es el transporte de energía y masa por un flujo de un lugar a otro y en dirección del flujo, y lo transporta desde una superficie a un medio circundante o viceversa.

En el invernadero, los cambios de energía y masa (vapor de agua, CO₂) por ventilación y los cambios entre el aire del invernadero y las superficies internas tales como; las cubiertas, el cultivo, la superficie del suelo, constituyen el transporte por convección.

El flujo de energía neta q_h (J s⁻¹) desde adentro del invernadero hacia afuera es debido a la ventilación. El flujo es calculado como sigue:

$$q_h = q_v \rho C_p (T_i - T_a) \quad (2.35)$$

donde: q_v es el flujo volumétrico a través de la abertura (m³s⁻¹), ρC_p es el calor específico volumétrico (Jm³K⁻¹) y T_i, T_a , las temperaturas internas y externas del invernadero respectivamente.

Para el flujo de masa q_m tendremos:

$$q_m = q_v (c_i - c_a) \quad (2.36)$$

c_i, c_a son las concentraciones de vapor de agua o CO₂ interno y externo.

La transferencia de energía y masa de una superficie a un medio circundante es debida a la diferencia de temperatura (o por la diferencia de concentración entre la superficie y el medio circundante). Así, para la transferencia de energía, la densidad de flujo de calor Φ_h está dada por:

$$\Phi_h = \alpha_h (T_s - T_f) \quad (2.37)$$

y para la transferencia de masa, el flujo de densidad de masa Φ_m está dada por:

$$\Phi_m = k_m (c_{m,s} - c_{m,f}) \quad (2.38)$$

Estas ecuaciones de transferencia de energía, fueron establecidas por Newton, quien definió los coeficientes de transferencia de calor $\alpha_h(\text{Wm}^{-2} \text{K}^{-1})$ y el coeficiente de transferencia de masa $k_m(\text{ms}^{-1})$ desde la superficie al medio, como la razón entre la densidad de flujo y la fuerza de impulso. En esta ecuación, no se toman en cuenta algunos factores, como son, las propiedades del medio, las condiciones de flujo y la geometría del campo. Sin embargo, para compensar esto, se toman en cuenta algunos factores relevantes, como por ejemplo: el coeficiente de transferencia de calor α_h es expresado en el llamado número de Nusselt (Nu). Si el flujo es llevado por factores externos (como el viento sobre el invernadero) la convección es llamada; convección forzada y es caracterizada por el número de Reynolds (Re). Y según por el medio en que fluye, para la transferencia de calor, es combinado con el número de Prandtl (Pr). Así, los datos experimentales para la mayoría de los casos de transferencia de calor por convección forzada, son como sigue:

$$Nu = C_l Re^n Pr^m \quad (2.39)$$

donde:

$$\begin{aligned} Nu &= \alpha_h l \lambda^{-1} \\ Re &= ulv^{-1} \\ Pr &= va^{-1} \end{aligned} \quad (2.40)$$

donde: u , es la velocidad de flujo (ms^{-1}); l es una dimensión característica (m) de la superficie considerada; v es la viscosidad cinemática del medio fluyente (m^2s^{-1}) y a es la difusividad térmica del medio (m^2s^{-1}).

En la situación de los invernaderos los coeficientes C_l y las potencias n y m dependen de la geometría y de las condiciones del flujo.

Usando la misma aproximación, el coeficiente de transferencia de masa k_m es combinado con el número adimensional llamado número de Sherwood (Sh). Que depende del flujo y las propiedades del medio. Así:

$$Sh = C_l Re^n Sc^m \quad (2.41)$$

donde Sc es el número de Schmidt.

Por otro lado, los cambios dados por la temperatura y la diferencia de concentración, dan lugar a la convección natural. Para este tipo de convección, la transferencia de calor esta dado en función del número de Grashof (Gr), basado en la diferencia de densidad (resultado de la diferencia de temperatura).

$$Gr = g\Delta T l^3 T^{-1} \nu^{-2} \quad (2.42)$$

donde: g es la aceleración debida a la gravedad (ms^{-2}); ΔT es la diferencia de temperatura entre la superficie y el medio (K) y T es la temperatura absoluta del medio (K).

2.2.5 Radiación

La radiación se refiere a la continua emisión de energía desde la superficie de todos los cuerpos. Esta radiación emitida es de origen electromagnético. La longitud de onda l_w (m) y la frecuencia f (s^{-1} o Hz) están relacionadas como sigue:

$$l_w f = cte \quad (2.43)$$

donde cte es la velocidad de la luz.

2.3 Modelo de la lechuga de van Henten

Van Henten ([40]) desarrolló en su tesis, las ecuaciones del modelo matemático del crecimiento de la lechuga, tomando en cuenta el modelo matemático del clima dentro del invernadero. A los cuales, finalmente, los simplifica integrándolos en un sólo modelo con cuatro variables de estado.

El modelo del crecimiento de la lechuga está dado por:

$$\frac{dX_d}{dt} = c_\beta (c_\alpha \phi_{\text{tot}} - \phi_{\text{resp}}) \quad (2.44)$$

donde; X_d es la materia seca (kg m^{-2}); ϕ_{tot} ($\text{kg m}^{-2}\text{s}^{-1}$) es la toma fotosíntesis bruta considerada como absorción de CO_2 ; ϕ_{resp} ($\text{kg m}^{-2}\text{s}^{-1}$) es la razón de respiración expresada en términos del monto de carbohidratos consumidos; c_β es el parámetro de la respiración y perdida de síntesis en la conversión de carbohidratos a materia estructural y tiene un valor entre cero y uno y c_α es el parámetro para convertir bióxido de carbono asimilado a su equivalente en azúcares.

El modelo del clima está dado por:

$$\begin{aligned}\frac{dX_t}{dt} &= \frac{1}{C_{\text{cap},q}}(Q_{\text{pl},\text{al}} - Q_{\text{al},\text{ou}} + Q_{\text{rad}}) \\ \frac{dX_c}{dt} &= \frac{1}{C_{\text{cap},c}}(U_c - \phi_{\text{c},\text{al},\text{pl}} - \phi_{\text{c},\text{al},\text{ou}}) \\ \frac{dX_h}{dt} &= \frac{1}{C_{\text{cap},h}}(\phi_{\text{h},\text{al},\text{pl}} - \phi_{\text{h},\text{al},\text{ou}})\end{aligned}\quad (2.45)$$

donde: X_t es la temperatura del aire en el invernadero ($^\circ\text{C}$); X_c es la concentración de bióxido de carbono (kg m^{-3}); X_h es la humedad absoluta (kg m^{-3}) y $C_{\text{cap},q}$ ($\text{J m}^{-2} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$), $C_{\text{cap},c}$ (m), $C_{\text{cap},h}$ (m), son las capacidades de calor, masa y aire dentro del invernadero, respectivamente.

Van Henten ([40]) hace la integración de estos dos modelos matemáticos después de haber realizado un análisis de sensibilidad sobre las variables que pueden afectar el crecimiento y hace una simplificación del modelo como sigue:

$$\begin{aligned}\frac{dX_d}{dt} &= c_{\alpha\beta}(1 - e^{-c_{\text{pl},d}X_d}) \frac{c_1 V_1 (-c_{\text{co}2,1}X_t^2 + c_{\text{co}2,2}X_t - c_{\text{co}2,3})(X_c - c_\Gamma)}{c_1 V_1 + (-c_{\text{co}2,1}X_t^2 + c_{\text{co}2,2}X_t - c_{\text{co}2,3})(X_c - c_\Gamma)} - c_{\text{resp},1}X_d 2^{(0.1X_t - 2.5)} \\ \frac{dX_c}{dt} &= \frac{1}{C_{\text{cap},c}} [-((1 - e^{-c_{\text{pl},d}X_d}) \frac{c_1 V_1 (-c_{\text{co}2,1}X_t^2 + c_{\text{co}2,2}X_t - c_{\text{co}2,3})(X_c - c_\Gamma)}{c_1 V_1 + (-c_{\text{co}2,1}X_t^2 + c_{\text{co}2,2}X_t - c_{\text{co}2,3})(X_c - c_\Gamma)} \\ &\quad + c_{\text{resp},2}X_d 2^{(0.1X_t - 2.5)} + U_c - (U_v + C_{\text{leak}})(X_c - V_c)] \\ \frac{dX_t}{dt} &= \frac{1}{C_{\text{cap},q}}(U_q - (c_{\text{cap},q,v}U_v + C_{\text{al},\text{ou}})(X_t - V_t) + c_{\text{rad}}V_1) \\ \frac{dX_h}{dt} &= \frac{1}{C_{\text{cap},h}}((1 - e^{-c_{\text{pl},d}X_d})c_{\text{v},\text{pl},\text{al}}(\frac{c_{\text{v},5}}{c_R(X_t + c_{\text{t},\text{abs}})}e^{\frac{c_{\text{v},2}X_t}{X_t + c_{\text{v},3}}} - X_h) - (U_v + C_{\text{leak}})(X_h - V_h)\end{aligned}\quad (2.46)$$

en donde:

X_d [kg m⁻²], X_c [kg m⁻³], X_t [°C], X_h [kg m⁻³], son el peso seco del cultivo, la concentración de bióxido de carbono, la temperatura del aire y la humedad absoluta; U_v [m s⁻¹] es el flujo de ventilación a través de la ventana; U_q [W m⁻²] es la entrada de energía dada por el sistema térmico; U_c [kg m⁻² s⁻¹] es la razón de suministro de bióxido de carbono; V_1 [W m⁻²] es la radiación solar, PAR; V_t [°C] es la temperatura exterior; V_c [kg m⁻³] es la concentración de bióxido de carbono exterior y V_h [kg m⁻³] es la humedad absoluta exterior. Los demás parámetros están dados como sigue:

$c_{\alpha\beta} = c_\alpha c_\beta = 0.544$	—
$c_{pl} = c_k (1 - c_\tau) c_{lar,d} = 53$	m ² kg ⁻¹
$c_l = c_{par} c_{rad,r} 14.2 \times 10^{-9} = 3.55 \times 10^{-9}$	kg J ⁻¹
$c_{co2,1} = 5.11 \times 10^{-6}$	m s ⁻¹ °C ⁻²
$c_{co2,2} = 2.30 \times 10^{-4}$	m s ⁻¹ °C ⁻¹
$c_{co2,3} = 6.29 \times 10^{-4}$	m s ⁻¹
$c_\Gamma = 5.2 \times 10^{-5}$	kg m ⁻³
$c_{resp,1} = c_\beta (c_{resp,s} (1 - c_\tau) + c_{resp,r} c_\tau) = 2.65 \times 10^{-7}$	s ⁻¹
$c_{resp,2} = (c_{resp,s} (1 - c_\tau) + c_{resp,r} c_\tau) / c_\alpha = 4.87 \times 10^{-7}$	s ⁻¹
$c_{al,ou} = 6 + c_{cap,q,v} c_{leak} = 6.1$	W m ⁻² °C ⁻¹
$c_{v,5} = c_{v,0} c_{H2O} c_{v,1} = 9348$	J km m ⁻³ kmol ⁻¹
$c_{pl,s} = c_k (1 - c_\tau) c_{lar,s} = 62.8$	m ² kg ⁻¹
$c_{gr} = c_{r,gr,max} / c_\beta = 6.25 \times 10^{-6}$	s ⁻¹
$c_{resp,3} = (c_{resp,s} (1 - c_\tau) + c_{resp,r} c_\tau) = 3.3 \times 10^{-7}$	s ⁻¹
$c_{resp,4} = (c_{r,gr,max} (1 - c_\beta) / c_\beta c_\alpha) = 1.8 \times 10^{-6}$	s ⁻¹

Los cuales, son datos resultados de experimentos, o resultado del análisis de sensibilidad.

Analizando el modelo matemático de la ecuación (2.46), podremos darnos cuenta que existen dos diferentes escalas de tiempo. Estas son debidas a que las ecuaciones muestran la integración del crecimiento, el cual tiene una respuesta en el tiempo de días, y es integrado con las ecuaciones del clima, las cuales tienen respuestas en el tiempo de segundos.

Dada esta situación, van Henten realizó un análisis basado en la técnica llamada *perturbaciones singulares* (Kokotovic et al.,1986[22]), para poder realizar un control óptimo sobre un criterio económico.

La suposición dada, es qué, para la región transitoria del sistema de respuesta rápida, las variables del sistema de respuesta lento permanecen constantes y que en el tiempo sus cambios llegan a ser evidentes. Cuando el sistema transitorio de respuesta rápida ha alcanzado su estado en régimen permanente. Así se tiene el modelo matemático siguiente.

$$\begin{aligned}
\frac{dX_d}{dt} &= c_{\alpha\beta}(1 - e^{-c_{pl,d}X_d}) \frac{c_1 V_1 (-c_{co2,1} Z_t^2 + c_{co2,2} Z_t - c_{co2,3})(Z_c - c_{\Gamma})}{c_1 V_1 + (-c_{co2,1}^2 Z_t + c_{co2,2} Z_t - c_{co2,3})(Z_c - c_{\Gamma})} - c_{resp,1} X_d 2^{(0.1Z_t - 2.5)} \\
\varepsilon \frac{dZ_c}{dt} &= \frac{1}{C_{cap,c}} \left[-((1 - e^{-c_{pl,d}X_d}) \frac{c_1 V_1 (-c_{co2,1} Z_t^2 + c_{co2,2} Z_t - c_{co2,3})(Z_c - c_{\Gamma})}{c_1 V_1 + (-c_{co2,1}^2 Z_t + c_{co2,2} Z_t - c_{co2,3})(Z_c - c_{\Gamma})} \right. \\
&\quad \left. + c_{resp,2} X_d 2^{(0.1X_t - 2.5)} + U_c - (U_v + C_{leak})(Z_c - V_c) \right] \\
\varepsilon \frac{dZ_t}{dt} &= \frac{1}{C_{cap,q}} (U_q - (c_{cap,q,v} U_v + C_{al,ou})(Z_t - V_t) + c_{rad} V_1) \\
\varepsilon \frac{dZ_h}{dt} &= \frac{1}{C_{cap,h}} \left((1 - e^{-c_{pl,d}X_d}) c_{v,pl,al} \left(\frac{c_{v,5}}{c_R(Z_t + c_{t,abs})} e^{\left(\frac{c_{v,2} Z_t}{Z_t + c_{v,3}} \right)} - Z_h \right) - (U_v + C_{leak})(X_h - V_h) \right)
\end{aligned} \tag{2.47}$$

Aplicando la técnica de las perturbaciones singulares y estudiando el sub-problema lento, esto es, cuando los estados rápidos los mantenemos constantes (en estado permanente) y haciendo la perturbación $\varepsilon=0$. Se obtiene entonces las ecuaciones algebraicas siguientes:

$$\begin{aligned}
\frac{d\bar{X}_d}{dt} &= c_{\alpha\beta}(1 - e^{-c_{pl,d}\bar{X}_d}) \frac{c_1 V_1 (-c_{co2,1} \bar{Z}_t^2 + c_{co2,2} \bar{Z}_t - c_{co2,3})(\bar{Z}_c - c_{\Gamma})}{c_1 V_1 + (-c_{co2,1}^2 \bar{Z}_t + c_{co2,2} \bar{Z}_t - c_{co2,3})(\bar{Z}_c - c_{\Gamma})} - c_{resp,1} \bar{X}_d 2^{(0.1Z_t - 2.5)} \\
\bar{Z}_t &= \frac{(c_{cap,q,v} \bar{U}_v + C_{al,ou}) \bar{V}_t + c_{rad} \bar{V}_1 + \bar{U}_q}{(c_{cap,q,v} \bar{U}_v + C_{al,ou})} \\
\bar{Z}_h &= \frac{\left(1 - e^{-c_{pl,d}\bar{X}_d} \right) c_{v,pl,al} \left(\frac{c_{v,5}}{c_R(\bar{Z}_t + c_{t,abs})} e^{\left(\frac{c_{v,2} \bar{Z}_t}{\bar{Z}_t + c_{v,3}} \right)} + (U_v + C_{leak}) V_h \right)}{(1 - e^{-c_{pl,d}\bar{X}_d}) c_{v,pl,al} + (\bar{U}_v + C_{leak})} \\
\bar{Z}_c &= \frac{-(\omega\alpha\rho + \alpha\tau - \delta\rho) + \sqrt{(\omega\alpha\rho + \alpha\tau - \delta\rho)^2 + 4\delta\alpha\tau\rho}}{2\tau\rho} + c_{\Gamma}
\end{aligned} \tag{2.48}$$

donde:

$$\begin{aligned}
\alpha &= c_{rad} V_1 ; \rho = -c_{co2,1} \bar{Z}_t^2 + c_{co2,2} \bar{Z}_t - c_{co2,3} ; \omega = \left(1 - e^{-c_{pl,d}\bar{X}_d} \right) ; \tau = U_v + C_{leak} ; \\
\delta &= c_{resp,2} \bar{X}_d 2^{(0.1Z_t - 2.5)} + U_c - (\bar{U}_v + C_{leak})(V_c - c_{\Gamma})
\end{aligned}$$

Como \bar{Z}_t no depende de \bar{Z}_c y \bar{Z}_h , se calcula primero, después \bar{Z}_c y \bar{Z}_h , hecho esto, se

sustituyen en la ecuación de \bar{X}_d .

Haciendo simulaciones de este modelo, utilizando el Simulink de matlab, se obtuvo que el patrón es similar al obtenido por van Henten (ver fig. 9), no se llegaron a los mismos resultados debido que no se tenían los datos precisos que utilizó van Henten en sus simulaciones, pero se da por hecho la validez ya que cumple con el mismo patrón.

A fin de obtener la respuesta al escalón de la producción de Materia seca, X_d , como función de la razón de suministro de Carbón, U_c , utilizamos los siguientes datos: para la radiación (fig. 7), V_i , temperatura exterior (fig. 8), V_t , para un periodo de 57 días con porcentaje de medición de cada media hora. Se introdujeron también los siguientes datos. La concentración de bióxido de carbono, V_c , con un valor constante de 350 ppm, esto es, $6.41 \times 10^{-4} \text{ Kg/m}^3$, La ventilación por la ventana, U_v y la entrada de energía, U_q igual a $1 \times 10^{-3} \text{ m/s}$, y 0 W/m^2 , respectivamente, La razón de suministro de bióxido de carbono \bar{U}_c igual a la señal escalón $0 \rightarrow 1.2 \times 10^{-6} \text{ Kg/(m}^2\text{s)}$ (c.f. parametros de la tabla descritos anteriormente y Sección 3.2.4.2 de ([40])).

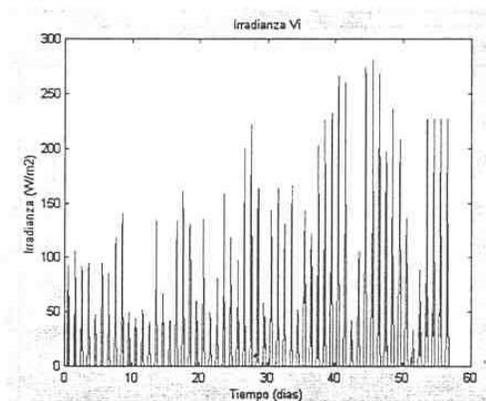


Figura 7.-Irradianza para en el periodo del 21 de enero al 17 de Marzo de 1992

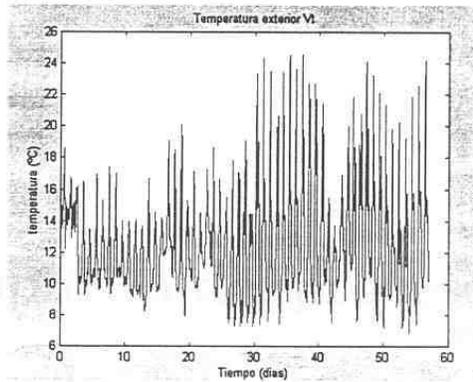


Figura 8.-Temperatura exterior para el periodo del 21 de enero al 17 de Marzo de 1992

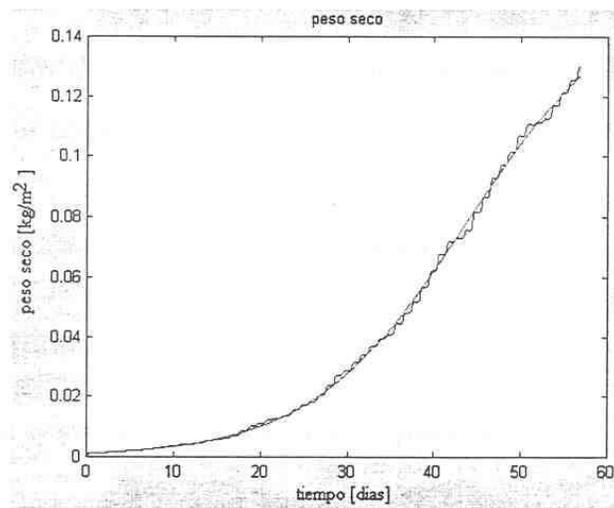


Figura 9.-Simulación de la materia seca dada por la ecuación 2.46

Capítulo 3

Modelo implícito del proceso de crecimiento de lechuga: Procedimiento experimental

3.1 Descripción de la función logística de crecimiento, por un sistema de escalera.

Dado el modelo de la lechuga de van Henten, se realizó una comparación con una de las curvas de crecimiento más significativas; la logística. (Ver Sección 1.3). Se usó la función Logística debido a su sencillez. Esta función da la respuesta de crecimiento de las plantas al clima, y es de forma parecida a un sigmoide.

3.2 Un breve resumen de sistemas implícitos

Rosenbrock [32] fue el primero en introducir las descripciones Implícitas,

$$E \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad , \quad y(t) = Cx(t) \quad (3.1)$$

donde: $E : \mathcal{X} \rightarrow \underline{\mathcal{X}}$, $A : \mathcal{X} \rightarrow \underline{\mathcal{X}}$, $B : \mathcal{U} \rightarrow \underline{\mathcal{X}}$, y $C : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$, son operadores lineales de dimensiones apropiadas. Como una generalización del caso Espacio-Estado estándar ($E = I$).

Desde que se introdujeron, se han realizado trabajos desde diferentes puntos de vista: (i) La teoría geométrica, (ii) El enfoque del dominio del tiempo, (iii) La transformada de Laplace, (iv) La teoría de Kronecker, (v) El enfoque polinomial, (vi) Álgebra Diferencial y (viii) Técnicas de inclusiones diferenciales.

Con los sistemas implícitos, no solamente se han resuelto problemas de investigación, sino también problemas prácticos. Es reconocido ahora que los sistemas implícitos describen un amplio rango de comportamientos externos en teoría de sistema, como son: 1) sistemas propios ($E = I$), 2) sistemas no propios con acciones derivativas, 3) sistemas con entradas acotadas y 4) sistemas con estados algebraicos restringidos.

En [5], se mostró que cuando $\dim \underline{\mathcal{X}} \leq \dim \mathcal{X}$, es posible describir sistemas lineales con estructura variable interna. En efecto, cuando $\dim \underline{\mathcal{X}} < \dim \mathcal{X}$ y si el sistema tiene solución (posee al menos una solución), generalmente las soluciones no son únicas. De alguna forma hay un grado de libertad en (3.1), el cual puede ser usado por ejemplo, para tener en cuenta una posible variación de estructura en una forma implícita. Otros tipos de variación de estructura han sido tomados en cuenta en ([19]), ([3])

En el caso general (las matrices E y A no necesariamente cuadradas) Frankowska ([16]) caracterizó los subespacios controlables usando técnicas de inclusiones diferenciales. Pero en el caso de matrices E, A no cuadradas (rectangulares) uno puede enfrentarse a sistemas controlables aún en ausencia de cualquier entrada; esto es posible a causa de la existencia de variables descriptores libres (grados de libertad) actuando como controladores internos. A fin de evitar tales patologías, se ha introducido en ([7]) el concepto de *asignación dinámica de la salida*, el cual garantiza controlabilidad a partir de las entradas de control, utilizando una retroalimentación proporcional y derivativa. $u = F_d \dot{x} + F_p x$, tal que el espectro de $\lambda(E - BF_d) - (A + BF_p)$ es asignada arbitrariamente si y solo si las dos siguientes condiciones geométricas se cumplen:

$$\mathcal{R}_{\mathcal{X}}^* = \mathcal{X} \quad (3.2)$$

$$\dim(\mathcal{V}_{\mathcal{X}}^* \cap \text{Ker } E) - \dim\left(\frac{\text{Im } B}{\text{Im } B \cap \text{Im } E}\right) \leq \dim(\mathcal{V}_{\text{Ker } C}^* \cap E^{-1} \text{Im } B), \quad (3.3)$$

donde: $\mathcal{R}_{\mathcal{X}}^*$ y $\mathcal{V}_{\mathcal{X}}^*$ (con \mathcal{K} igual a \mathcal{X} o a $\text{Ker } C$) son respectivamente los límites de los algoritmos

siguientes:

$$\mathcal{R}_X^0 = \mathcal{V}_X^* \cap \text{Ker } E ; \mathcal{R}_X^i = \mathcal{V}_X^* \cap E^{-1} (\text{Im } B + A\mathcal{R}_X^{i-1}) , i \geq 1, \quad (3.4)$$

$$\mathcal{V}_X^0 = \mathcal{K} ; \mathcal{V}_X^i = \mathcal{K} \cap A^{-1} (\text{Im } B + E\mathcal{V}_X^{i-1}) , i \geq 1. \quad (3.5)$$

Debido a que a la fecha, la gente no sabe como sintetizar las acciones derivativas puras, se propuso en ([7]) un procedimiento de aproximación de leyes de control no propias, basado en ([6]), por controladores propios garantizando estabilidad interna (ver también ([8]) para un estudio general sobre este tema). Como las leyes de control necesitan el conocimiento de la variable descriptor (ambos, tanto el controlador no propio, como, el propio) es necesario estimarla. Como la síntesis de una *variable descriptor* depende profundamente del conocimiento de cual *estructura interna* esta activa, en ([9]) se propuso un *detector de estructura* basado en el algoritmo del gradiente adaptable normalizado, proyectado a lo largo de una hiper - esfera, cuya finalidad es identificar en tiempo finito cual estructura interna esta presente.

Con el fin de tratar de completar el esquema de control anterior, se introdujo en ([10]) el sistema llamado escalera, para lo cual, se considera que el comportamiento entrada - salida puede variar desde un primer orden hasta un sistema de n-esimo orden (dependiendo de la posición de interruptores internos), la descripción implícita rectangular es única. El sistema escalera es una herramienta para sintetizar Sistemas Implícitos rectangulares, con la propiedad de la asignación dinámica de la salida, con el cual es posible describir sistemas lineales con estructura variable interna.

3.2.1 Sistemas escalera

Consideremos un sistema del cual, su comportamiento externo (u,y), puede ser descrito por uno de los siguientes 2^{n-1} sistemas lineales:

$$(pa_1 + 1) y(t) = u(t) \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned}
(pa_i + 1)(pa_1 + 1)y(t) &= u(t) \quad i \in \{2, \dots, n\} \\
(pa_j + 1)(pa_i + 1)(pa_1 + 1)y(t) &= u(t) \quad i, j \in \{2, \dots, n\}; i \neq j \\
\dots &= \dots \dots \dots \\
(pa_n + 1)\dots\dots\dots(pa_1 + 1)y(t) &= u(t)
\end{aligned}$$

donde los a_i ($i = 1, \dots, n$) son números reales.

Todos esos sistemas 2^{n-1} lineales pueden ser descritos por el siguiente sistema implícito global:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_2 &= -a_1(x_1(t) + x_2(t)) + (x_3(t) + x_4(t)) & (3.7) \\
\dot{x}_4 &= (a_n - 1)x_1(t) - a_n(x_3(t) + x_4(t)) + (x_5(t) + x_6(t)) \\
\dots &= \dots \dots \dots \dots \dots \\
\dot{x}_{2n-4} &= (a_4 - 1)x_{2n-7}(t) - a_4(x_{2n-5}(t) + x_{2n-4}(t)) + (x_{2n-3}(t) + x_{2n-2}(t)) \\
\dot{x}_{2n-2} &= (a_3 - 1)x_{2n-5}(t) - a_3(x_{2n-3}(t) + x_{2n-2}(t)) + (x_{2n-1}(t)) \\
\dot{x}_{2n-1} &= (a_2 - 1)x_{2n-3}(t) - a_2(x_{2n-1}(t)) + u(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &= x_1(t) - \theta_0(x_3(t) + x_4(t)) & (3.8) \\
0 &= x_3(t) - \theta_1(x_5(t) + x_6(t)) \\
\dots &= \dots \dots \dots \dots \dots \\
0 &= x_{2n-5}(t) - \theta_{n-3}(x_{2n-3}(t) + x_{2n-2}(t)) \\
0 &= x_{2n-3}(t) - \theta_{n-2}(x_{2n-1}(t))
\end{aligned}$$

$$y(t) = (x_1(t) + x_2(t)) \quad (3.9)$$

donde los parámetros θ_i , $i = 0, 1, \dots, n - 2$, son interruptores y tienen un valor de "1" o "0".

Considerare los siguientes tres casos (p es el operador derivada d/dt y s es la variable

compleja de Laplace):

- A. Factores irreducibles de orden 1, $(p + a_i)$,
- B. Factores irreducibles de orden 2, $(p^2 + 2\rho\omega_0 p + \omega_0^2)$,
- C. Red de compensación de adelanto/atraso, $(\alpha(\alpha s + 1) / (s + \alpha))$,

3.2.2 A.- El factor irreducible de orden 1 sobre \mathfrak{R} , $(p + a_i)$.

Consideremos el sistema cuyo comportamiento entrada-salida puede ser descrito por uno de los siguientes ocho ecuaciones diferenciales:

$$\left(\prod_{i=0}^{n-2} ((1 - \theta_i)(p + a_{n-i}) + \theta_i) \right) (p + a_1) y(t) = \left(\prod_{i=0}^{n-2} ((1 - \theta_i) a_{n-i} + \theta_i) \right) a_1 u(t)$$

con $n = 4$, y donde $\theta_i \in \{0, 1\}$, para $i = 0, 1, 2$. donde su descripción implícita es como sigue;

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -\bar{a}_1 & -a_1 & k_4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ (a_4-1) & 0 & -\bar{a}_4 & -a_4 & k_3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (a_3-1) & 0 & -\bar{a}_3 & -a_3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (a_2-1) & 0 & -a_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ k_2 \end{bmatrix} u(t) \quad (3.10)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} k_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

$$0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\theta_0 k_4 & -\theta_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\theta_1 k_3 & -\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\theta_2 \end{bmatrix} x(t) \quad (3.11)$$

Los parametros \bar{a}_i y sus ganancias k_i tienen los siguientes valores:

$$\bar{a}_i = k_i(a_i - 1) + 1 \quad ; \quad i = 1, 3, 4$$

$$k_2 = \hat{a}_4 \hat{a}_3 \hat{a}_2 \hat{a}_1 ; (k_1, k_3, k_4) = \left(\frac{1}{\hat{a}_4}, \frac{1}{\hat{a}_2}, \frac{1}{\hat{a}_3} \right) ; \text{ si } a_i \neq 0 \text{ entonces } \hat{a}_i = |a_i| \text{ si no } \hat{a}_i = 1$$

En la siguiente tabla describiremos los comportamientos internos:

θ_0	θ_1	θ_2	Comportamiento entrada - salida	Comportamiento interno
1	1	1	$y = (x_2 + k_1(x_4 + k_4(x_6 + k_3x_7)))$ $(p + a_1)y = a_1u$	$(p + a_1)x_2 = k_1(1 - a_1)x_4 + (k_4(x_6 + k_3x_7))$ $(p + 1)x_4 = 0; (p + 1)x_6 = 0;$ $(p + 1)x_7 = k_2u$
0	1	1	$y = (x_2 + k_1(x_4 + k_4x_6))$ $(p + a_2)(p + a_1)y = a_2a_1u$	$(p + a_1)x_2 = k_1(1 - a_1)(x_4 + k_4x_6)$ $(p + 1)x_4 = 0; (p + 1)x_6 = x_7;$ $(p + 1)x_7 = k_2u$
1	0	1	$y = (x_2 + k_1x_4),$ $(p + a_3)(p + a_1)y = a_3a_1u$	$(p + a_1)x_2 = k_1(1 - a_1)x_4; (p + 1)x_6 = x_7;$ $(p + 1)x_4 = (x_6 + k_3x_7); (p + 1)x_7 = k_2u$
1	1	0	$y = x_2$ $(p + a_4)(p + a_1)y = a_4a_1u$	$(p + a_1)x_2 = (x_4 + k_4(x_6 + k_3x_7));$ $(p + 1)x_4 = k_4(1 - a_4(x_6 + k_3x_7));$ $(p + 1)x_6 = 0;$ $(p + 1)x_7 = k_2u;$
0	0	1	$y = (x_2 + k_1x_4)$ $(p + a_3)(p + a_2)(p + a_1)y = a_3a_2a_1u$	$(p + a_1)x_2 = k_1(1 - a_1)x_4; (p + 1)x_4 = x_6$ $(p + a_3)x_6 = x_7; (p + a_2)x_7 = k_2u;$
0	1	0	$y = x_2$ $(p + a_4)(p + a_2)(p + a_1)y = a_4a_2a_1u$	$(p + a_1)x_2 = (x_4 + k_4x_6); (p + 1)x_6 = x_7$ $(p + a_4)x_4 = k_4(1 - a_4)x_6; (p + a_2)x_7 = k_2u$
1	0	0	$y = x_2$ $(p + a_4)(p + a_3)(p + a_1)y = a_4a_3a_1u$	$(p + a_1)x_2 = x_4;$ $(p + a_4)x_4 = (x_6 + k_3x_7)$ $(p + a_3)x_6 = k_3(1 - a_3)x_7; (p + 1)x_7 = k_2u$
0	0	0	$y = x_2$ $(\prod_{i=1}^4 (p + a_i))y = (\prod_{i=1}^4 a_i)u$	$(p + a_1)x_2 = x_4; (p + a_4)x_4 = x_6$ $(p + a_3)x_6 = x_7; (p + a_2)x_7 = k_2u$

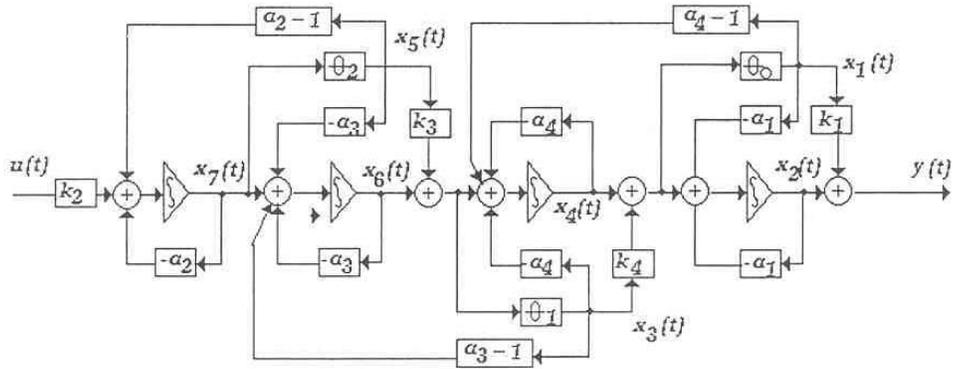


Figura 10.- Diagrama de bloques del sistema escalera para un sistema de primer orden

3.2.3 B.- El factor irreducible de orden 2 sobre \mathcal{R} , $(p^2 + 2\rho\omega_0 + \omega_0^2)$,

Consideremos el sistema cuyo comportamiento entrada-salida puede ser descrito por uno de los siguientes cuatro ecuaciones diferenciales:

$$(((1 - \theta_1)(p + a_2) + \theta_1)((1 - \theta_0)(p^2 + 2\rho\omega_0 + \omega_0^2) + \theta_0))(p + a_1)y(t) = ((1 - \theta_1)a_2 + \theta_1) * ((1 - \theta_1)\omega_0^2 + \theta_1)a_1 u(t)$$

donde $\theta_i \in \{0, 1\}$, para $i = 0, 1$. donde su descripción implícita es como sigue;

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -\bar{a}_1 & -a_1 & k_4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ (a_4 - 1) & 0 & -\bar{a}_4 & -a_4 & k_3 & 1 & 0 \\ \omega_0^2 & 0 & \hat{a}_3 & -\omega_0^2 & -\bar{a}_3 & -a_3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (a_2 - 1) & 0 & -a_2 \end{bmatrix} x(t)$$

$$\begin{aligned}
& + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ k_2 \end{bmatrix} u(t) \\
y(t) &= \begin{bmatrix} k_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t)
\end{aligned} \tag{3.12}$$

$$0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\theta_0 k_4 & -\theta_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\theta_1 k_3 & -\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\theta_1 \end{bmatrix} x(t) \tag{3.13}$$

Los parametros a_3, a_4, \bar{a}_i ($i = 1, 3, 4$), \hat{a} y sus ganancias k_i tienen los siguientes valores:

$$\begin{aligned}
a_3 &= \omega_0^2; & a_4 &= 2\rho\omega_0; & \hat{a}_3 &= k_4\omega_0^2 + 1; & \bar{a}_1 &= k_1(a_1 - 1) + 1; & \bar{a}_3 &= 1 - k_3 \\
\bar{a}_4 &= k_4(2\rho\omega_0 - 1) + 1; & k_2 &= \hat{a}_3\hat{a}_2\hat{a}_1; \\
(k_1, k_3, k_4) &= \left(\frac{1}{\sqrt{\hat{a}_3}}, \frac{1}{\hat{a}_2}, \frac{1}{\sqrt{\hat{a}_3}} \right); & \text{si } a_i \neq 0 & \text{ entonces } \hat{a}_i = |a_i| & \text{ si no } \hat{a}_i = 1; & (i = 1, 2, 3)
\end{aligned}$$

En la siguiente tabla describiremos los comportamientos internos:

θ_0	θ_1	Comportamiento entrada - salida	Comportamiento interno
1	1	$y = (x_2 + k_1(x_4 + k_3x_5))$ $(p + a_1)y = a_1u$	$(p + a_1)x_2 = k_1(1 - a_1)(x_4 + k_3x_5)$ $(p + 1)x_4 = 0; (p + 1)x_5 = k_2u;$
1	0	$y = (x_2 + k_1(x_4 + \alpha x_5))$ $(p + \alpha)(p + a_1)y = (\alpha p + 1)\alpha a_1u$	$(p + a_1)x_2 = k_1(1 - a_1)(x_4 + \alpha x_5)$ $(p + 1)x_4 = (1 - \alpha)x_5;$ $(p + \alpha)x_5 = k_2u$
0	1	$y = x_2,$ $(p + a_2)(p + a_1)y = a_2a_1u$	$(p + a_1)x_2 = x_4 + k_3x_5;$ $(p + 1)x_5 = k_2u$ $(p + a_2)x_4 = k_3(1 - a_2)x_5;$
0	0	$y = x_2$ $(p + \alpha)(p + a_2)(p + a_1)y = (\alpha p + 1)\alpha a_2a_1u$	$(p + a_1)x_2 = (x_4 + k_4(x_6 + k_3x_7));$ $(p + 1)x_4 = k_4(1 - a_4)(x_6 + k_3x_7);$ $(p + 1)x_6 = 0;$ $(p + 1)x_7 = k_2u;$

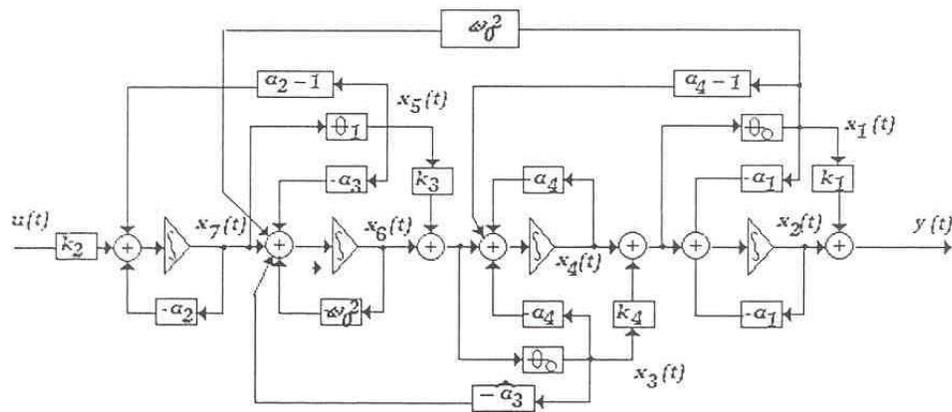


Figura 11.- Diagrama de bloques del sistema escalera para el sistema de segundo orden.

3.2.4 C.- Red de compensación de adelanto/retraso, $(\alpha(\alpha s + 1)/(s + \alpha))$, .

Consideremos por ultimo el sistema cuyo comportamiento entrada-salida puede ser descrito por uno de las siguientes cuatro ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} & (((1 - \theta_1)(p + a_2) + \theta_1) ((1 - \theta_0)(p + \alpha) + \theta_0)) (p + a_1) y(t) \\ = & (((1 - \theta_0)(\alpha p + 1) + \theta_0)) * (((1 - \theta_1) a_2 + \theta_1)) * (((1 - \theta_0) \alpha + \theta_0)) a_1 u(t) \end{aligned}$$

donde $\theta_i \in \{0, 1\}$, para $i = 0, 1$. donde su descripción implícita es como sigue;

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -\bar{a}_1 & -a_1 & k_3 - \alpha & 1 & \alpha \\ (a_2 - 1) & 0 & -\bar{a}_2 & -a_2 & (1 - a_2 \alpha) \\ 0 & 0 & (\alpha - 1) & 0 & -\alpha \end{bmatrix} x(t) \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k_2 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} k_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\theta_0(k_3 - \alpha) & -\theta_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\theta_1 \end{bmatrix} x(t) \quad (3.15)$$

Los parametros \bar{a}_1, \bar{a}_2 y sus ganancias k_i ($i = 1, 2, 3$) tienen los siguientes valores:

$$\begin{aligned} \bar{a}_1 &= k_1(a_1 - 1) + 1 \quad ; \quad \bar{a}_2 = k_3(a_2 - 1) + (1 - a_2 \alpha) \quad ; \quad a_3 = \alpha \\ k_2 &= \hat{a}_3 \hat{a}_2 \hat{a}_1 \quad ; \\ (k_1, k_3) &= \left(\frac{1}{\hat{a}_2}, \frac{1}{\hat{a}_3} \right) \quad ; \quad \text{si } a_i \neq 0 \text{ entonces } \hat{a}_i = |a_i| \text{ si no } \hat{a}_i = 1; \quad (i = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

En la siguiente tabla describiremos los comportamientos internos:

θ_0	θ_1	Comportamiento entrada - salida	Comportamiento interno
1	1	$y = (x_2 + k_1(x_4 + k_3x_5))$ $(p + a_1)y = a_1u$	$(p + a_1)x_2 = k_1(1 - a_1)(x_4 + k_3x_5)$ $(p + 1)x_4 = 0; (p + 1)x_5 = k_2u;$
1	0	$y = (x_2 + k_1(x_4 + \alpha x_5))$ $(p + \alpha)(p + a_1)y = (\alpha p + 1)\alpha a_1u$	$(p + a_1)x_2 = k_1(1 - a_1)(x_4 + \alpha x_5)$ $(p + 1)x_4 = (1 - \alpha)x_5;$ $(p + \alpha)x_5 = k_2u$
0	1	$y = x_2,$ $(p + a_2)(p + a_1)y = a_2a_1u$	$(p + a_1)x_2 = x_4 + k_3x_5;$ $(p + 1)x_5 = k_2u$ $(p + a_2)x_4 = k_3(1 - a_2)x_5;$
0	0	$y = x_2$ $(p + \alpha)(p + a_2)(p + a_1)y = (\alpha p + 1)\alpha a_2a_1u$	$(p + a_1)x_2 = (x_4 + \alpha x_5);$ $(p + a_2)x_4 = (1 - a_2\alpha)x_5;$ $(p + \alpha)x_5 = k_2u;$

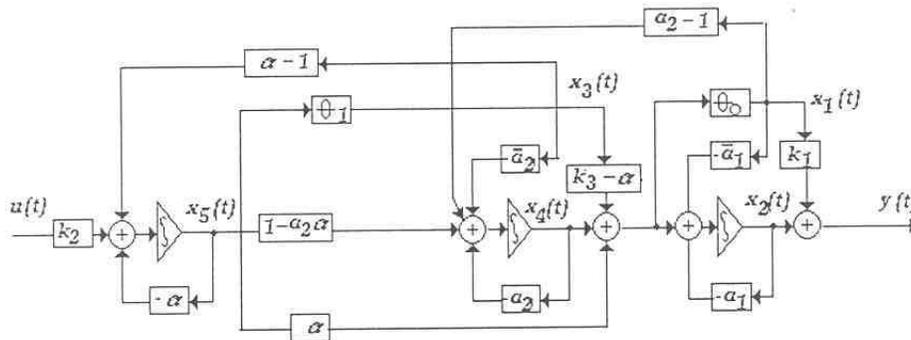


Figura 12.-Diagrama de bloques del sistema escalera para la descripción del sistema de red retraso-adelanto

3.3 Asignación dinámica de la salida.

Consideremos las siguientes observaciones sobre las matrices E , A , B , y C de los casos previos:

1.- Las matrices E de los sistemas (3.10),(3.12) y (3.14) son de rango completo por filas, lo cual implica: $\text{Im } E = \underline{\mathcal{X}}, \mathcal{V}_{\mathcal{X}}^* = \mathcal{X}$, y $\dim(\text{Im } B/\text{Im } B \cap \text{Im } E) = 0$.

2.-De las matrices E y C de los sistemas (3.10),(3.12) y (3.14) tenemos $E\text{Ker } C = \underline{\mathcal{X}}$, que implica: $\mathcal{V}_{\text{Ker } C}^* = \text{Ker } C$,

3.-De las observaciones anteriores la condición (3) es equivalente a: $\dim \text{Ker } E \leq \dim(\text{Ker } C \cap E^{-1}\text{Im } B)$. Esta desigualdad es satisfecha (con la igualdad) por los sistemas (3.10),(3.12) y (3.14).

4.-Con respecto a la condición (2), esto es, subespacio alcanzable, notemos que los sistemas (3.10),(3.12) y (3.14), satisfacen: $\text{Im } A + \text{Im } B = \underline{\mathcal{X}}$, lo cual implica que $\mathcal{R}_{\mathcal{X}}^* = \mathcal{X}$.

Y entonces todas las descripciones implícitas tienen la propiedad de asignación de salidas dinámicas, y entonces, pueden ser controladas por una entrada de control externa.

3.4 Descripción de la función logística por un sistema escalera.

En el trabajo de Bonilla y Malabre [10], se describió la función Logística dada, por un crecimiento exponencial en la primera etapa, seguida por una aproximación de crecimiento lineal después de que las hojas del cultivo se cerraran, esto es, el crecimiento de las hojas hace que su sombra cubra toda el área de terreno donde esta cultivado, demás, que se van bloqueando la luz solar entre ellas, y finalmente, una etapa de crecimiento muy lento debida a la edad.

Sea la ecuación logística:

$$\bar{y} = \bar{y}^* \left(\frac{e^{\kappa \bar{y}^* (t-t^*)}}{1 + e^{\kappa \bar{y}^* (t-t^*)}} \right). \quad (3.16)$$

Esta función tiene la propiedad que su razón de crecimiento relativo $RGR = \frac{\dot{\bar{y}}}{\bar{y}}$, es proporcional al incremento de \bar{y} , así,

$$\frac{\dot{\bar{y}}}{\bar{y}} = \kappa (\bar{y}^* - \bar{y}(t)) \quad (3.17)$$

donde, \bar{y}^* , es el valor máximo alcanzado por \bar{y} y κ es la constante de proporción entre RGR y \bar{y} , $\kappa = -\frac{dRGR}{d\bar{y}}$.

Usualmente la ecuación logística (3.16) es clasificada en tres regiones diferentes, que son; la región exponencial, la región lineal y la región logarítmica. La parte exponencial de la curva, abajo del punto de inflexión, se caracteriza por el acelerado crecimiento; la parte lineal

al rededor del punto de inflexión, se caracteriza por una razón de crecimiento estacionario; y la parte logarítmica, arriba del punto de inflexión, se caracteriza por una desaceleración del crecimiento.

Se obtuvo una función logística de referencia. Introduzcamos entonces el siguiente cambio de variables:

$$\bar{y} = \bar{y}^* \bar{z}, \quad t = t^* + r(\tau - \tau^*), \quad r = \frac{\eta}{(\kappa \bar{y}^*)}. \quad (3.18)$$

Con este cambio de variables la función logística (3.16) y su ecuación diferencial asociada (3.17) toman la siguiente forma:

$$\bar{z}(\tau) = \frac{e^{\eta(\tau - \tau^*)}}{(1 + e^{\eta(\tau - \tau^*)})} \quad (3.19)$$

$$\frac{d\bar{z}(\tau)}{d\tau} = \eta(1 - \bar{z}(\tau)) \quad (3.20)$$

Para esta función logística de referencia, escojamos $\tau^* = 1/2$ y $\eta = 4$: con esos valores tendremos el punto de inflexión $\bar{z}(1/2) = 1/2$, $\bar{z}(0) = e^{-2}/(1 + e^{-2}) \approx 0.12$, y el valor estacionario $\bar{y}(\infty) = 1$. Con estos valores seleccionados la curva de crecimiento (3.19) puede ser aproximada por la respuesta al escalón de cuatro ecuaciones diferenciales lineales mostradas a continuación en un intervalo de $[-0.7, 1.5]$ con un error menor al 0.7%

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{d\tau} + \alpha_1^*\right) \left(\frac{d}{d\tau} + a_1^*\right) \left(\frac{d}{d\tau} + s_1^*\right) z_1(\tau) &= \left(\alpha_1^* \frac{d}{d\tau} + 1\right) \bar{u}(\tau), & \tau \in [\tau_0, \tau_1] \\ \left(\frac{d}{d\tau} + \alpha_2^*\right) \left(\frac{d}{d\tau} + a_2^*\right) \left(\frac{d}{d\tau} + s_1^*\right) z_2(\tau) &= \left(\alpha_2^* \frac{d}{d\tau} + 1\right) |\alpha_2^*| |a_2^*| |s_1^*| \bar{u}(\tau), & \tau \in [\tau_1, \tau_2] \\ \left(\frac{d}{d\tau}\right) \left(\frac{d}{d\tau} + s_1^*\right) z_3(\tau) &= |s_1^*| \bar{u}(\tau), & \tau \in [\tau_2, \tau_3] \\ \left(\frac{d}{d\tau} + s_2^*\right) \left(\frac{d}{d\tau} + s_1^*\right) z_4(\tau) &= \omega_0^{*2} \bar{u}(\tau), & \tau \in [\tau_3, \tau_4] \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\tau_0 = -0.7; \quad \tau_1 = -0.1; \quad \tau_2 = 0.4; \quad \tau_3 = 0.6; \quad \tau_4 = 1.5. \quad (3.22)$$

Los parámetros α_1^* , a_1^* , y s_1^* son iguales a:

$$\begin{aligned}
s_1^* &= \omega_0^* \rho + \omega_0^* \sqrt{\rho^2 - 1}, & s_2^* &= \omega_0^* \rho - \omega_0^* \sqrt{\rho^2 - 1}, & \omega_0^* &= 4.615, & \rho &= 1.001 & (3.23) \\
\alpha_1^* &= 100, & a_1^* &= -3.799, & \alpha_2^* &= 1.48125, & a_2^* &= -0.973
\end{aligned}$$

La entrada es la señal escalón unitario: $\bar{u}(\tau) = 1$ si $\tau \geq \tau_0$, de otra forma $\bar{u}(\tau) = 0$, y las condiciones iniciales son:

$$\begin{aligned}
z_1(\tau_0) &= \bar{z}(\tau_0), & dz_1(\tau_0)/d\tau &= d\bar{z}(\tau_0)/d\tau, & (3.24) \\
d^2 z_1(\tau_0)/d\tau^2 &= -(a_1^* + s_1^*) d\bar{z}(\tau_0)/d\tau - a_1^* s_1^* \bar{z}(\tau_0) + \left(\frac{1}{\alpha_1^*}\right) \bar{u}(\tau_0), \\
z_2(\tau_1) &= \bar{z}(\tau_1), & dz_2(\tau_1)/d\tau &= d\bar{z}(\tau_1)/d\tau, \\
d^2 z_2(\tau_1)/d\tau^2 &= -(a_2^* + s_2^*) d\bar{z}(\tau_1)/d\tau - a_2^* s_2^* \bar{z}(\tau_1) + (1 + \alpha_2^* - \alpha_2^{*2}) |\alpha_2^*| |a_2^*| |s_1^*| \bar{u}(\tau_1), \\
z_3(\tau_2) &= \bar{z}(\tau_2), & dz_3(\tau_2)/d\tau &= d\bar{z}(\tau_2)/d\tau, \\
z_4(\tau_3) &= \bar{z}(\tau_3), & dz_4(\tau_3)/d\tau &= (\omega_0^*/(2\rho)) (\bar{u}(\tau_3) - \bar{z}(\tau_3)).
\end{aligned}$$

En la figura (fig. 13) se muestran los resultados obtenidos de la simulación en simulink-matlab, del conjunto de los sistemas lineales (3.21) y la función logística de referencia (3.19), $z(\tau)$ y $\bar{z}(\tau)$, y el error relativo figura (fig. 14) $100 |z(\tau) - \bar{z}(\tau)| / |\bar{z}(\tau)|$.

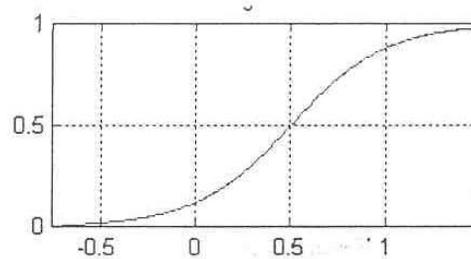


Figura 13.-Sistema lineal 3.21-3.24 y función logística de referencia 3.9 $\bar{z}(t)$ y $z(t)$

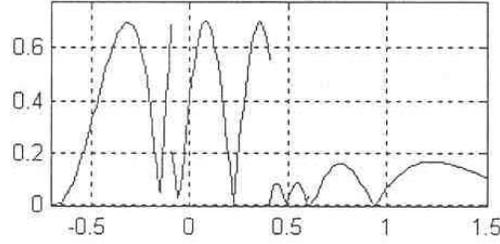


Figura 14.-Error relativo $100 * |z(\tau) - \bar{z}(t)| / |\bar{z}(t)|$.

Entonces, dando cualquier función logística (3.16), obtendremos de (3.21)-(3.24) y el cambio de variables (3.18), el conjunto de ecuaciones diferenciales (3.25), aproximando (3.16) con un error relativo menor al 0.7%

$$\begin{aligned}
 (p + \alpha_1)(p + a_1)(p + s_1)y_1(t) &= (r^2\alpha_1p + 1)(1/r^3)u(t), & t \in [t_0, t_1] & \quad (3.25) \\
 (p + \alpha_2)(p + a_2)(p + s_1)y_2(t) &= (r^2\alpha_2p + 1)|\alpha_2||a_2||s_1|u(t), & t \in [t_1, t_2] \\
 p(p + s_1)y_3(t) &= |s_1|(1/r)u(t), & t \in [t_2, t_3] \\
 (p + s_2)(p + s_1)y_4(t) &= \omega_0^2u(t), & t \in (t_2, t_3]
 \end{aligned}$$

$$t_i = t^* + r(\tau_i - \tau^*), \quad \alpha_i = \alpha_i^*/r, \quad a_i = a_i^*/r, \quad s_i = s_i^*/r, \quad \omega_0 = \omega_0^*/r. \quad (3.26)$$

La señal de entrada es el escalón: $u(t) = \bar{y}^*$, si $t \geq t_0$, de otra forma $u(t) = 0$, y las condiciones iniciales son:

$$\begin{aligned}
 y_1(t_0) &= \bar{y}(t_0), \quad \dot{y}_1(t_0) = \dot{\bar{y}}(t_0), & (3.27) \\
 \dot{y}_1(t_0) &= -(a_1 + s_1)\dot{\bar{y}}(t_0) - a_1s_1\bar{y}(t_0) + (1/\alpha_1)(1/r^3)u(t_0), \\
 y_2(t_1) &= \bar{y}(t_1), \quad \dot{y}_2(t_1) = \dot{\bar{y}}(t_1), \\
 \dot{y}_2(t_1) &= -(a_2 + s_1)\dot{\bar{y}}(t_1) - a_2s_1\bar{y}(t_1) + (1 + r\alpha_2 - r^2\alpha_2^2)|\alpha_2||a_2||s_1|ru(t),
 \end{aligned}$$

$$y_3(t_2) = \bar{y}(t_2), \quad \dot{y}_3(t_2) = \dot{\bar{y}}(t_2),$$

$$y_4(t_3) = \bar{y}(t_3), \quad \dot{y}_4(t_3) = (\omega_0/(2\rho))(u(t_3) - \bar{y}(t_3)),$$

De la sección (3.2.1). La descripción del sistema implícito de (3.25) es (ver (3.10)-(3.14) y tabla I :

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \dot{x} & & (3.28) \\
 \\
 = & \begin{bmatrix} -\bar{s}_1 & -s_1 & \hat{\alpha}_2 & 1 & r^2\alpha_2|s_1| & r^2\alpha_2 & 0 & 0 & 0 \\ a_2-1 & 0 & -\bar{a}_2 & -a_2 & (1-r^2\alpha_2a_2)|s_1| & (1-r^2\alpha_2a_2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\alpha_2-1) & 0 & -\bar{a}_2 & -\alpha_2 & 1 & r^3\alpha_1 & r^2\alpha_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (a_1-1) & 0 & -a_1 & 1-r^2\alpha_1a_1 & 1-r^2\alpha_1a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\bar{a}_1 & -\alpha_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ |s_1|/\omega_0^2 & 1 & 0 \\ -\bar{a}_3 & 0 & 1 \\ s_2-1 & 0 & -s_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ k_2 \end{bmatrix} \\
 y = & \begin{bmatrix} 1/|\alpha_2| & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x
 \end{aligned}$$

donde: $\bar{s}_1 = |a_2|^{-1}(s_1 - 1) + 1$, $\bar{a}_2 = |\alpha_2|^{-1}(a_2 - 1) + (1 - r^2\alpha_2a_2)$, $\bar{\alpha}_2 = |s_1|(\alpha_2 - 1) + 1$,
 $\bar{a}_1 = r^3(a_1 - 1) + (1 - r^2\alpha_1a_1)$, $\bar{\alpha}_1 = r(\alpha_1 - 1) + 1$, $\bar{a}_3 = -(|s_1|/\omega_0^2) + 1$, $\hat{\alpha}_2 = \alpha_2^{-1} - r^2\alpha_1$,
y $k_2 = (1/r^4)|\alpha_2||a_2|(\omega_0^2/|s_1|)$. Y sus restricciones algebraicas son (vease la tabla II)

$$0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\theta_0\hat{\alpha}_2 & -\theta_0 & -\theta_0|s_1|r^2\alpha_2 & -\theta_0r^2\alpha_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\theta_0|s_1| & -\theta_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\theta_1\hat{\alpha}_1 & -\theta_1 & -\theta_1r^3\alpha_1 & -\theta_1r^2\alpha_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\theta_1 & -\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\theta_2|s_1|/\omega_0^2 & -\theta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\theta_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x \quad (3.29)$$

Se puede verificar que el sistema (3.28) satisface:

$$ImE = \underline{X}, EKerC = \underline{X}, y \dim KerE = \dim (KerC \cap E^{-1}ImB).$$

$$\text{Donde } \det \begin{vmatrix} 1 & r^2\alpha_i \\ -a_i & (1 - r^2\alpha_ia_i) \end{vmatrix} = 1, \quad i = 1, 2.$$

obtendremos: $ImA + ImB = \underline{X}$. En otras palabras el sistema (3.28) tiene la propiedad de asignación de la dinámica de la salida.

3.4.1 Modelo implícito del proceso de crecimiento de lechuga

van Henten desarrollo en [40, Van Henten] modelos para el proceso del crecimiento de la lechuga para utilizar técnicas de control óptimo. La principal variable que describe el proceso del crecimiento es el peso seco del cultivo, X_d (kg/m^2). En general, la producción de peso seco esta en función de la radiación solar exterior del invernadero V_i (W/m^2) y de las variables del

clima dentro del invernadero, la temperatura del aire X_t ($^{\circ}C$), la concentración de bióxido de carbono X_c (kg/m^2), y la humedad absoluta X_h (kg/m^2).

En el capítulo tres de la tesis de doctorado de van Henten [40], van Henten dio una explicación para la integración del modelo que describe el crecimiento de la lechuga con el modelo que describe el comportamiento del clima interno en el invernadero. Esta integración da lugar a la dinámica del modelo del proceso de producción de cultivo total dentro del invernadero.

En esta sección se procederá a obtener una descripción con sistemas escalera del modelo desarrollado por van Henten. Para esto se procederá a utilizar el procedimiento experimental siguiente:

1.- A partir de los datos experimentales de radiación y temperatura, proporcionados por la universidad de Wageningen se obtienen la respuesta al escalón y se encuentra la curva logística que mejor se aproxima a la respuesta experimental

2.- En base a la curva logística encontrada se obtiene la descripción escalera utilizada en la sección (3.4).

En el capítulo siguiente se analizará la respuesta de la radiación fotosintéticamente activa, PAR, para obtener la descripción en sistemas de escalera.

De las ecuaciones (3.19) y (3.20), damos la posible descripción del sistema como sigue:

Tabla I

$(\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$	Comportamiento entrada - salida
$(1, 1, 1, 0)$	$y = x_2 + k_1 (x_4 + k_7 (x_6 + k_6 (x_8 + k_5 (x_{10} + k_4 x_{12}))))$ $(p + s_2) (p + s_1) y = \omega_0^2 u$
$(1, 1, 0, 1)$	$y = x_2 + k_1 (x_4 + k_7 (x_6 + k_6 (x_8 + k_5 x_{10})))$ $p (p + s_1) y = (s_1 /r) u$
$(0, 1, 1, 1)$	$y = x_2$ $(p + \alpha_2) (p + a_2) (p + s_1) y = (r^2 \alpha_2 p + 1) \alpha_2 a_2 s_1 u$
$(1, 0, 1, 1)$	$y = x_2$ $(p + \alpha_1) (p + a_1) (p + s_1) y = (r^2 \alpha_1 p + 1) (1/r^3) u$

Tabla II

$(\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$	Comportamiento Interno
$(1, 1, 1, 0)$	$(p + s_1) x_2 = k_1 (1 - s_1) (x_4 + k_7 (x_6 + k_6 (x_8 + k_5 (x_{10} + k_4 x_{12}))))$ $(p + 1) x_4 = 0; (p + 1) x_6 = 0; (p + 1) x_8 = 0; (p + 1) x_{10} = 0$ $(p + 1) x_{12} = x_{13}; (p + s_2) x_{13} = k_2 u$
$(1, 1, 0, 1)$	$(p + s_1) x_2 = k_1 (1 - s_1) (x_4 + k_7 (x_6 + k_6 (x_8 + k_5 x_{10})))$ $(p + 1) x_4 = 0; (p + 1) x_6 = 0; (p + 1) x_8 = 0; (p + 1) x_{10} = x_{12} + k_3 x_{13}$ $(p + 1) x_{12} = k_3 x_{13}; (p + 1) x_{13} = k_2 u$
$(0, 1, 1, 1)$	$(p + s_1) x_2 = x_4 + r^2 \alpha_2 (x_6 + k_6 (x_8 + k_5 (x_{10} + k_4 (x_{12} + k_3 x_{13}))))$; $(p + a_2) x_4 = (1 - r^2 \alpha_2 a_2) (x_6 + k_6 (x_8 + k_5 (x_{10} + k_4 (x_{12} + k_3 x_{13}))))$; $(p + \alpha_2) x_6 = k_6 (1 - \alpha_2) (x_8 + k_5 (x_{10} + k_4 (x_{12} + k_3 x_{13})))$; $(p + 1) x_8 = 0$; $(p + 1) x_{10} = 0; (p + 1) x_{12} = 0; (p + 1) x_{13} = k_2 u$
$(1, 0, 1, 1)$	$(p + s_1) x_2 = k_1 (1 - s_1) (x_4 + k_7 x_6)$; $(p + 1) x_4 = 0$; $(p + 1) x_6 = x_8 + r^2 \alpha_1 (x_{10} + k_4 (x_{12} + k_3 x_{13}))$; $(p + a_1) x_8 = (1 - r^2 \alpha_2 a_2) (x_{10} + k_4 (x_{12} + k_3 x_{13}))$; $(p + 1) x_{12} = 0$ $(p + \alpha_1) x_{10} = k_4 (1 - \alpha_1) (x_{12} + k_3 x_{13})$

3.4.2 A.-Función logística

A forma de obtener la respuesta al escalón de la producción de peso seco del cultivo, X_d , como una función de la razón de suministro de bióxido de carbono, U_c , y aplicando algunos datos del clima exterior que obtuvimos de la universidad de Wageningen, introducimos en algunos experimentos de van Henten, tales como la temperatura, V_t , y a la radiación solar, V_i , para un periodo de 57 días, con media hora en promedio de medida (ver figuras Capitulo anterior, fig. 7 y fig. 8).

Para otras variables externas consideramos: La concentración de bióxido de carbono exterior V_c , igual a un valor constante de 350ppm (6.41×10^{-4} kg/m³); el flujo de ventilación a través de las ventanas U_v y la entrada de energía U_q igual a 1×10^{-3} kgm/s y 0 W/m², respectivamente,

y el suministro de bióxido de carbono U_c igual a la señal escalón $0 \rightarrow 1.2 \times 10^{-6} \text{ kg}/(\text{m}^2\text{s})$, (ver Sección (2.3) o referenciando a la tabla 6.1 sección 3.2.4.2 de [40]).

En la figura (fig. 15 a) se muestran la respuesta al escalón de la producción de materia seca de cultivo X_d , como una función de la razón de suministro de bióxido de carbono U_c . (tomando en cuenta que se aplicó las técnicas de perturbaciones singulares con $\varepsilon = 0$, para obtener $\dot{X}_c \equiv 0$, y $\dot{X}_t \equiv 0$, debido a que las constantes de tiempo son del orden de minutos, mientras que las constantes de tiempo de X_d es del orden de días (c.f capítulo 6.2.2 de [40]).

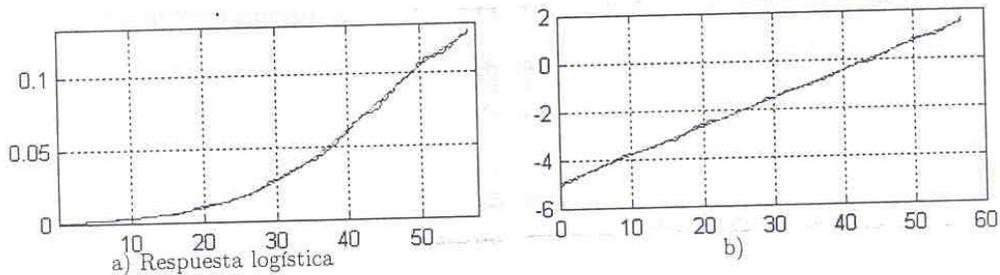


Figura 15 a) Respuesta del modelo de van Henten X_d y

Respuesta del sistema de escalera \bar{Y} . v.s. tiempo.

b) $\ln \left(\frac{X_d}{X_d^* - X_d} \right)$ y $\ln \left(\frac{\bar{Y}}{X_d^* - \bar{Y}} \right)$ v.s. tiempo

Para obtener una curva logística, puesta en respuesta al escalón de la producción de materia seca del cultivo, se ha procedido como sigue:

- 1.- Primero, graficamos la respuesta al escalón de $X_d(t)$, en la gráfica $\ln \left(\frac{X_d}{X_d^* - X_d} \right)$ vs t .
- 2.- Después, el valor de la variable desconocida X_d^* es puesta en tal manera que la gráfica $\ln \left(\frac{X_d}{X_d^* - X_d} \right)$ vs t , se parezca lo mejor posible a una línea recta figura (fig. 15 b).
- 3.- Entonces, aplicamos un algoritmo de mínimos cuadrados para localizar los mejores parámetros para la gráfica.
- 4.- Finalmente, de estos parámetros, $(\kappa X_d^*)t + (-\kappa t^*)$, obtenemos los valores faltantes κ y t^* (ver figura (fig. 15 a)).

Con este procedimiento obtuvimos los siguientes parámetros de la función logística \bar{Y} (de

la ecuación 3.19)

$$y^* = 0.155; \quad \kappa = 0.7284; \quad t^* = 43.5934 \quad (3.30)$$

y en la figura (fig. 15 a) se muestra en rojo, la función logística obtenida.

3.4.3 B.- Modelo implícito

De los parametros de la función logística (3.30), obtenemos el siguiente factor de escala r , el tiempo de switcheo t_i , y los parametros α_i, a_i, s_i , y ω_0 (vease (3.16), (3.22) y (3.26)):

$$r = \eta / (\kappa X_d^*) = 35.428956 \quad (3.31)$$

$$t_0 = 1.078; \quad t_1 = 22.336; \quad t_2 = 40.050; \quad t_3 = 47.136; \quad t_4 = 79.022 \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} s_1 &= \omega_0 \rho + \omega_0 \sqrt{\rho^2 - 1}; & s_2 &= \omega_0 \rho - \omega_0 \sqrt{\rho^2 - 1}; & \omega_0 &= 0.130260; & \rho &= 1.001 \\ \alpha_1 &= 2.822550; & a_1 &= -0.107228; & \alpha_2 &= 0.041809; & a_2 &= -0.027463 \end{aligned} \quad (3.33)$$

En la figura (fig. 16 a) se muestra las simulaciones en simulink-Matlab, del conjunto de las ecuaciones dinámicas de los sistemas lineales ((3.25), (3.31) y (3.33), y la función logística (3.16), (3.30), $y(t)$, $\bar{Y}(t)$, también como el error relativo $100 |y(t) - \bar{Y}(t)| / |\bar{Y}(t)|$.

En la figura (fig. 16 a) se muestra el comportamiento del conjunto de las dinámicas de las ecuaciones lineales (3.25), (3.27), (3.31), (3.32), (3.33), $y(t)$, y la respuesta al escalón de la producción de materia seca, X_d , así como, las graficas linealizadas $\ln \left(\frac{X_d}{X_d^* - X_d} \right)$ y $\ln \left(\frac{y}{X_d^* - y} \right)$ vs t .

La descripción lineal implícita de la producción de materia seca del cultivo de lechuga, esta dada, entonces, por la ecuación (3.28) y sus restricciones algebraicas son: (3.29).

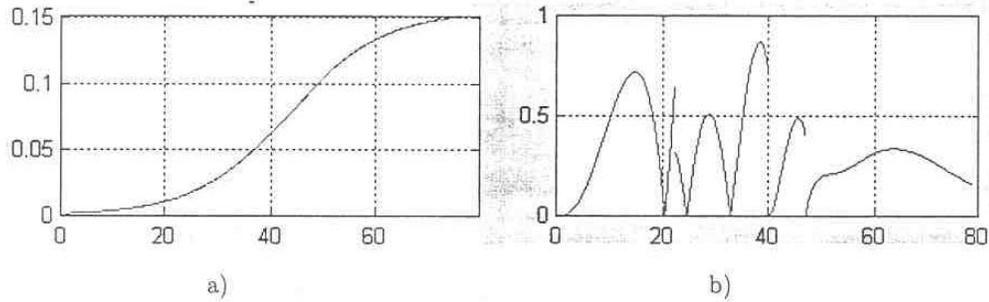


Figura 16. Simulación en Simulink_Matlab del sistema lineal escalera de las ecuaciones (3.25), (3.27), (3.31), (3.32), (3.33), y de la función logística (3.16), (3.30). a) $y(t)$ y $\bar{Y}(t)$, b) $100 \cdot |y(t) - \bar{Y}(t)| / |\bar{Y}(t)|$ v.s. tiempo.

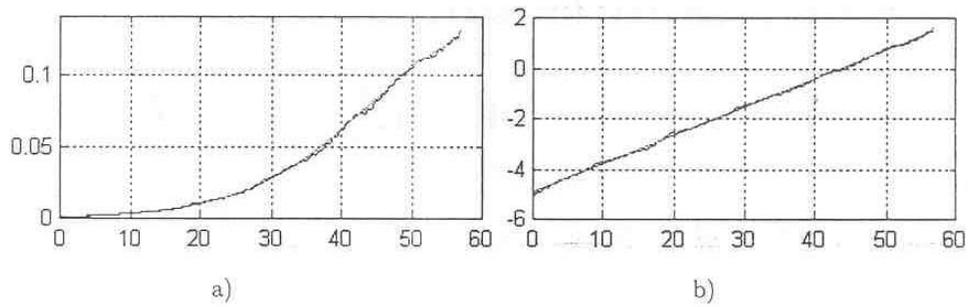


Figura 17. Comportamiento del conjunto de sistemas escalera (3.25), (3.27), (3.31), (3.32), (3.33), $y(t)$ y la respuesta de la producción de materia seca al escalón X_d . a) X_d y y v.s. tiempo, b) $\ln \left(\frac{X_d}{X_d - \bar{Y}} \right)$ y $\ln \left(\frac{\bar{Y}}{X_d - \bar{Y}} \right)$ v.s. tiempo.

Capítulo 4

Modelo implícito del proceso de crecimiento de lechuga: Estudio de la respuesta al comportamiento de la radiación fotosintéticamente activa.

Como ya se mencionó, las simulaciones del modelo de van Henten hechas en este trabajo se hicieron a partir de datos experimentales obtenidos de la Universidad de Wageningen, para el clima del 21 de Enero al 17 de Marzo de 1992. De los cuales se usaron datos estadísticos en el periodo de 1975 a 1989.

Dado que se observó que cambios en la temperatura (dentro de los rangos permisibles) no tienen grandes efectos sobre el crecimiento de la planta, se tomó una temperatura constante (12.5 °C) para facilitar el análisis. También se observó en las simulaciones, que el efecto de la radiación solar sobre la planta origina grandes variaciones en el crecimiento.

Para analizar los efectos de la *Radiación Fotosintéticamente Activa*¹ sobre el modelo de van Henten se procederá como sigue:

- 1.- Primeramente, se estudia la respuesta teórica de la PAR.

¹Radiación que se encuentra en el espectro visible en el rango de longitud de onda entre 400 y 700 nm. Este espectro de radiación es denominado para posteriores referencias como, PAR, por sus siglas en inglés Photosintetic Active Radiation

2.-Posteriormente, se comparan los resultados experimentales de la PAR obtenidos por van Henten con la respuesta teórica de la PAR. Con esta comparación se obtiene el comportamiento del coeficiente de transmitividad dado por la presencia de nubes, esto es, la nubosidad presente.

3.- Enseguida, se obtienen las descripciones en sistemas de escalera de las respuestas logística y expo-lineal haciendo uso de la división Euclidiana.

4.-Se hacen las simulaciones utilizando la PAR estimada teóricamente y se obtiene su descripción en sistemas escalera. Al igual se hacen las simulaciones utilizando la PAR teórica afectada con el coeficiente de transmitividad, obtenida por el punto anterior y se obtiene de igual forma su descripción por sistemas escalera.

5.- Finalmente se comparan los resultados con los obtenidos en el capítulo anterior.

4.1 Respuesta teórica de la PAR

4.1.1 Radiación Incidente Global por día por hora.

En Goudriaan [18], se muestra que la radiación global, V_i , del sol (comprendida en el espectro de longitud de onda entre 350 y 2000 nm) incidente sobre un punto de la superficie terrestre, se puede reconstruir de la tendencia diaria de la posición solar según el día del año y la latitud del lugar donde se quiere obtener la PAR incidente sobre este punto. Existe una dependencia con un factor llamado coeficiente de transmitividad, (τ_a), que esta ligado a la densidad de nubes:

$$V_i = I_0 \tau_a * \text{sen} \beta \left[1 + 0.033 \cos \left(2\pi \left(\frac{t_d - 10}{365} \right) \right) \right] \quad [W/m^2] \quad (4.1)$$

donde:

V_i =Radiación incidente global, $[W/m^2]$,

$I_0 = 1367$; $[W/m^2]$ constante solar de la energía recibida en un punto normal a los rayos solares en la frontera de la atmosfera terrestre.

τ_a .-coeficiente de transmitividad dado por las nubes presentes en la atmosfera.

β .-ángulo de elevación del sol a un punto dado sobre la superficie terrestre, medido respecto al horizonte.

El termino $\left[1 + 0.033 \cos \left(2\pi \left(\frac{t_d - 10}{365} \right) \right) \right]$ es el coeficiente de corrección de la excentricidad de la

tierra considerada en el análisis teórico, ya que existe una máxima distancia entre la trayectoria de la tierra con el sol en Julio y una mínima en Enero.

t_d .- día fenológico (el cual asigna 1 a partir del 1º de enero y cuenta consecutivamente hasta 365 al 31 de diciembre, en el caso de año no bisiesto).

El curso diario del seno de la altura solar ($\text{sen}\beta$) progresa sinusoidalmente fig. 18:

$$\text{sen}\beta = a + b * \cos(2\pi * (t_h + 12)/24) \quad (4.2)$$

donde: t_h es el tiempo solar en horas

a es el desplazamiento solar dependiente de la temporada con respecto al ecuador

$$a = \text{sen}\lambda \text{sen}\delta \quad [-]$$

b es la amplitud de la altura solar dependiente de la temporada.

$$b = \text{cos}\lambda \text{cos}\delta \quad [-]$$

$$\text{sen}\delta = -\text{sen}(\pi * 23.45/180) * \cos(2\pi * (t_d + 10)/365) \quad [-]$$

donde: λ el grado de Latitud

δ la declinación del sol con respecto al ecuador.

El número de 23.45 representa la inclinación en grados del eje terrestre con respecto al plano en el cual la tierra se mueve alrededor del sol.

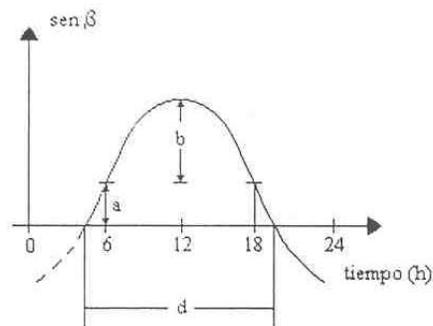


Figura 18.-Curso diario de la altura del sol.

Por otra parte la duración del día con luz solar esta relacionada con a y b de la siguiente

manera:

$$d = 12 * [1 + 2/\pi * a \text{sen}(a/b)] \quad [h]$$

La duración del día con luz solar influencia la razón de desarrollo del cultivo por efectos fotoperiodicos. El promedio de transmisión diaria de radiación global, esta dado por

$$\int_{12-d/2}^{12+d/2} \text{sen}\beta = a * d + (24b/\pi) * \cos((d/12 - 1) * \pi/2) \quad [h] \quad (4.3)$$

Ver Goudriaan[18] para mayor detalle.

4.2 Obtención del coeficiente de transmitividad de la nubosidad.

Para obtener el coeficiente de transmitividad, τ_a , se analiza la respuesta teórica promedio de la radiación incidente global, \bar{V}_i (4.1) y (4.3):

$$\bar{V}_i = I_0 \tau_a * \frac{1}{d} \int \text{sen}\beta \left[1 + 0.033 \cos\left(2\pi \left(\frac{t_d - 10}{365}\right)\right) \right] \quad [W * dia/m^2] \quad (4.4)$$

Obteniendo

$$\hat{V}_{i(\text{teórico})} = \begin{cases} \bar{V}_i & \text{para } t \in [12 - d/2, 12 + d/2]; \\ \bar{V}_i = 0; & \text{de otra manera.} \end{cases}$$

Con los datos experimentales reportados por van Henten para el periodo del 21 de Enero (td=21) al 17 de Marzo (td=76), (ver fig. 19); el coeficiente de transmitividad, τ_a , es igual a

$$\tau_a = \frac{\hat{V}_{i(\text{teórico})}}{V_{i(\text{real})}} \quad (4.5)$$

En la figura 21, se muestra la respuesta de haber dividido la envolvente de la radiación teórica $\hat{V}_{i(\text{teórico})}$ mostrada en la fig. 20 con la envolvente de la radiación real $V_{i(\text{real})}$ mostrada en la

fig. 19.

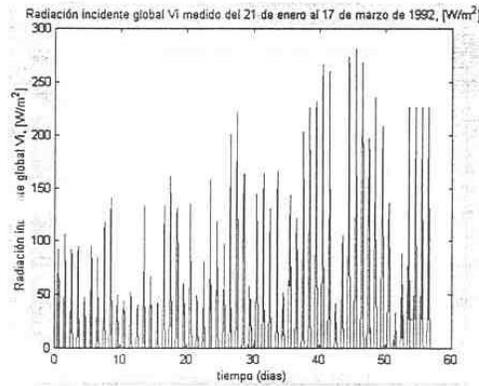


Figura 19.-Radiación global, $V_{i(reat)}$, proporcionada por Universidad de Wangeningen

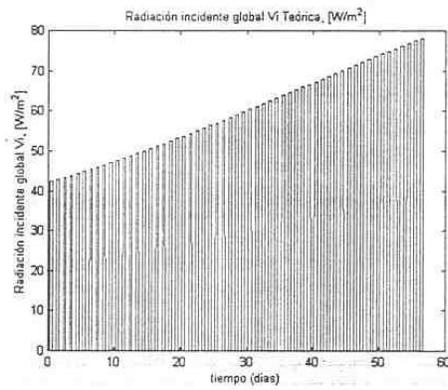


Figura 20. — Radiación incidente global teórica, $V_{i(teorico)}$, (4.4)

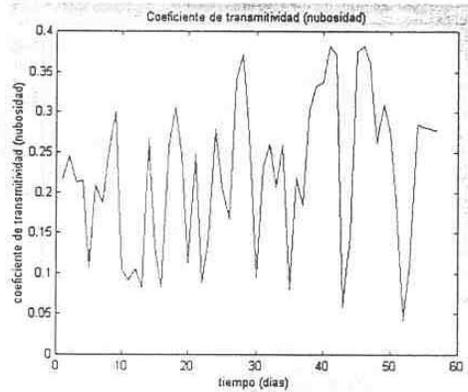


Figura 21.-Coeficiente de transmitividad τ

Con el fin de obtener una expresión explícita del coeficiente de transmitividad mostrado en la fig. 21 se aproximó esta curva por la siguiente expansión en series de Fourier con 4 terminos

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^4 (a_k \cos kw_0t + b_k \text{sen}kw_0t) \quad (4.6)$$

n	a_n	b_n	
0	4.1995	0	
1	7.3071	-3.0874	
2	2.3202	-1.2114	(4.7)
3	1.6757	-0.0400	
4	1.0930	0.5848	

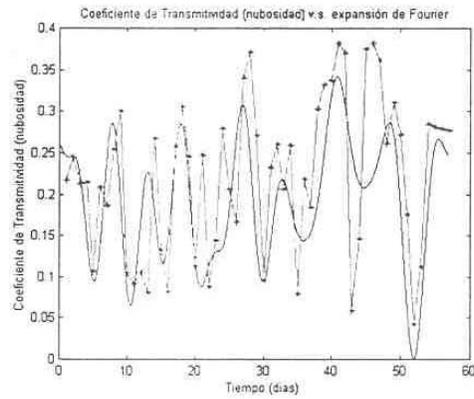


Figura 22.-Coeficiente de transmitividad aproximada de la expansión en series de Fourier de cuatro terminos (4.6),(4.7) la curva continua corresponde al coeficiente dado por la ecuación (4.6) y la curva marcada con -* corresponde al coeficiente dado por (4.5).

En la fig. 22 se comparan ambas respuestas.

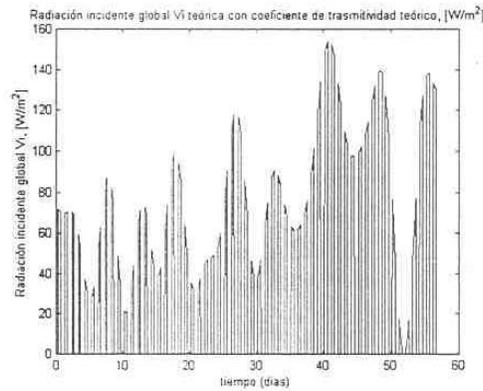


Figura 23.- Radiación incidente global teórica con coeficiente de transmitividad modulado por la

aproximación en series de Fourier (ec. 4.3 y 4.4).

En la fig. 23 se muestra la radiación incidente global teórica modulada por la expansión en series de Fourier del coeficiente de transmitividad, τ , dado por (4.6),(4.7).

La respuesta al escalón del sistema (2.48) en función de; 1) la radiación medida , 2) la radiación teorica y 3) con radiación teórica modulada por el coeficiente de transmitividad, Se muestran en la figura 24.

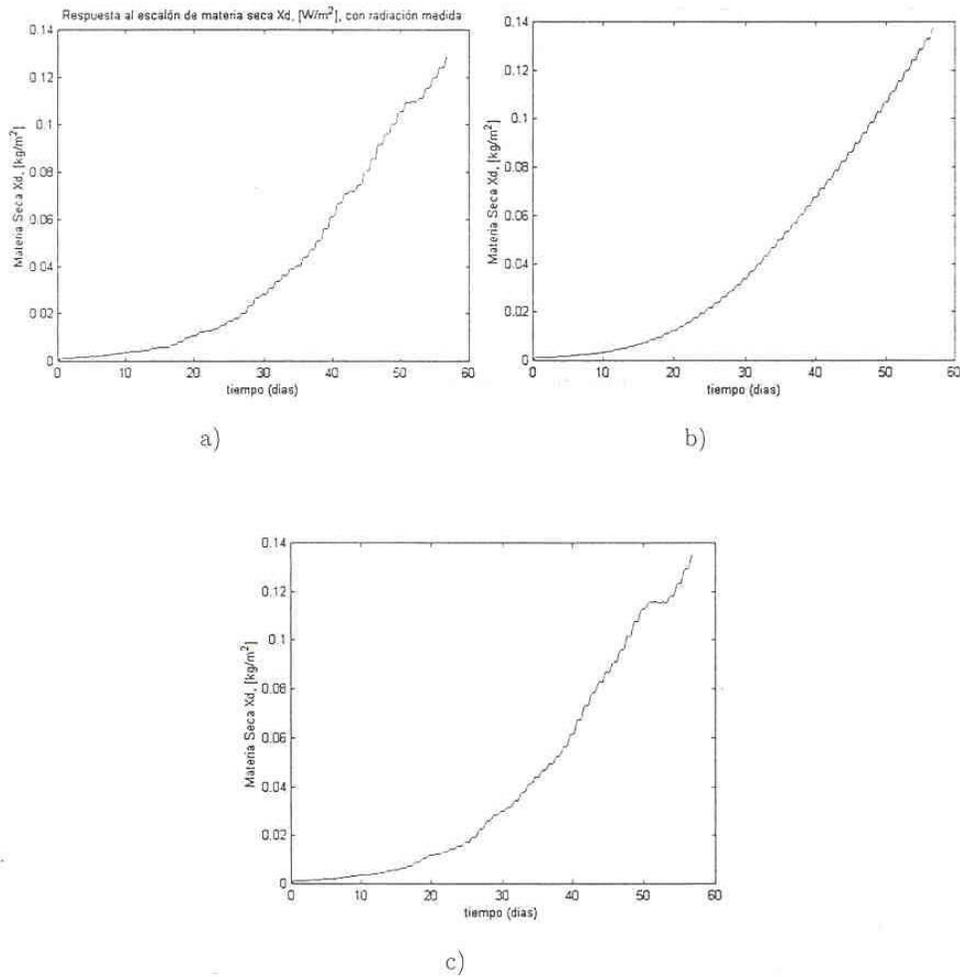


Figura 24 Respuesta al escalón del sistema (2.48) , utilizando a) la radiación medida, b) la radiación teórica y c) la radiación teórica modulada por el coeficiente de transmitividad aproximado en series de

Fourier.

4.3 Descripción en sistemas de escalera de las Curvas logística y Expo-Lineal.

Utilizando la radiación teórica, PAR, modulada por la aproximación en series de Fourier del coeficiente de transmitividad (ver fig. 22) en el modelo de van Henten (2.48) se obtuvo la respuesta mostrada en la fig. 24 c), la cual tiene la misma forma de una curva logística. De esta manera se llega a la conclusión de que el modelo de van Henten se ajustó a la curva logística obtenida en la Sección 3.4 debido a las perturbaciones de la nubosidad; y por lo que la tendencia anual sin perturbación de la nubosidad tendrá un comportamiento de forma expo-lineal (ver fig. 24 b)).

En vista de esta conclusión, a continuación se analizarán las funciones logística y expolineal con el fin de obtener sus respectivas descripciones en sistemas escalera.

En esta Sección, se obtienen las descripciones en sistemas de escalera de las respuestas logística y expo-lineal haciendo uso de la división Euclidiana.

4.3.1 Curva logística

Sea la función logística (ver Sección 1.3):

$$w = \frac{k}{1 + e^{-rk(t-t^*)}} = \frac{ke^{-rk(t^*-t)}}{1 + e^{-rk(t^*-t)}} \quad (4.8)$$

solución de la ecuación diferencial

$$\dot{w} = rw(k - w) = rkw - w^2 \quad (4.9)$$

Notando que: i) por división Euclidiana se tiene:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n x^n + (-1)^{(n+1)} \frac{x^{(n+1)}}{1+x} \quad (4.10)$$

$$\frac{x}{1+x} = x - x^2 + x^3 + \dots + (-1)^{n-1} x^n - (-1)^n \frac{x^{(n+1)}}{1+x} \quad (4.11)$$

ii) para $0 \leq t \leq t_1 < t^*$, se tiene: $\lim_{\nu \rightarrow \infty} e^{-\nu r k(t-t^*)} \rightarrow 0$

iii) para $t \geq t_2 > t^*$, se tiene: $\lim_{\nu \rightarrow \infty} e^{-\nu r k(t-t^*)} \rightarrow 0$.

iv) para $t_1 \leq t \leq t_2$, se tiene: en $t = t^*$, $\dot{w}(t^*) = 0$, esto es, existe un punto de inflexión

La curva logistica se dividirá en las tres zonas siguientes:

A.- $0 \leq t \leq t_1 < t^*$

B.- $t \geq t_2 > t^*$.

C.- $t_1 \leq t \leq t_2$.

Las zonas ($0 \leq t \leq t_1 < t^*$) y ($t \geq t_2 > t^*$) podrán ser aproximadas por el número de términos que se ajuste a la precisión deseada..

A.- Para la zona $0 \leq t \leq t_1 < t^*$, se tiene de (4.8) y (4.11):

$$w = k \sum_{\nu=1}^n (-1)^{(\nu-1)} e^{-\nu r k(t-t^*)} + k(-1)^n \frac{e^{-(n+1)r k(t-t^*)}}{1 + e^{-r k(t-t^*)}} \quad (4.12)$$

entonces podremos escribir:

$$\prod_{\nu=1}^n (p - \nu k r) w = p l(t) + \mathcal{O} \left(\left((n+1)^n r^n k^{(n+1)} \frac{e^{-(n+1)r k(t-t^*)}}{1 + e^{-(n+1)r k(t-t^*)}} \right) \right) \quad (4.13)$$

Para obtener las condiciones iniciales se utilizará el Teorema de la Proyección [28, Luenberger]:

Sea $x(t) \in L_2[0, t_1]$, y $\mathcal{M}_1 = [\{e^{rkt}, e^{2rkt}, \dots, e^{nrkt}\}] \subset L_2[t_0, T]$, existe $m_0 \in M$, tal que, $\|x - m_0\| \leq \|x - m\|$ para todo $m \in \mathcal{M}_1$ y además $(x - m_0) \perp \mathcal{M}_1$.

B.- Para la zona $t \geq t_2 > t^*$, se tiene de (4.8) y (4.10):

$$w = k + k \sum_{\nu=1}^{\bar{n}} (-1)^\nu e^{-\nu r k(t-t^*)} + k(-1)^{(\bar{n}+1)} \frac{e^{-(\bar{n}+1)r k(t-t^*)}}{1 + e^{-r k(t-t^*)}} \quad (4.14)$$

entonces podremos escribir:

$$\prod_{\nu=1}^{\bar{n}} (p + \nu k r) w = (n!) r^{\bar{n}} k^{(\bar{n}+1)} l(t) + \mathcal{O} \left(\left((\bar{n}+1)^{\bar{n}} r^{\bar{n}} k^{(\bar{n}+1)} \frac{e^{-(\bar{n}+1)r k(t-t^*)}}{1 + e^{-r k(t-t^*)}} \right) \right) \quad (4.15)$$

Para obtener las condiciones iniciales se utilizará el Teorema de la Proyección:

Sea $x(t) \in L_2[t_2, T]$, y $\mathcal{M}_3 = [\{1, e^{-rkt}, e^{-2rkt}, \dots, e^{-\bar{n}rkt}\}] \subset L_2[t_0, T]$, existe $m_0 \in \mathcal{M}_3$,

tal que, $\|x - m_0\| \leq \|x - m\|$ para todo $m \in \mathcal{M}_3$ y además $(x - m_0) \perp \mathcal{M}_3$.

C.-Para la zona $t_1 \leq t \leq t_2$: se aproximara por la respuesta a la rampa de un sistema de primer orden. En efecto, dado que en $t = t^*$, se tiene un punto de inflexión, entonces existiran un par de puntos t_1 y t_2 suficientemente cercanos de t^* , tales que, dentro de la región (t_1, t_2) , la respuesta del sistema tiene un comportamiento de una rampa $f(t) = mt + b$, (ver fig. 25).

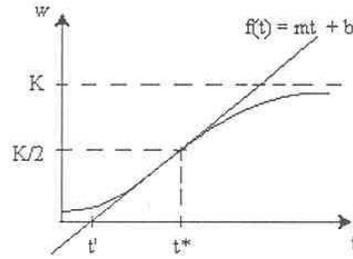


Figura 25. Respuesta del sistema en la segunda zona, dada por la pendiente "m".

A fin de obtener la ecuación de la rampa, de la fig. 25, se observa de (4.9) que:

$$\dot{w}(t^*) = r \left(\frac{K}{2} \right)^2 \quad (4.16)$$

por lo que

$$f(t') = r \left(\frac{K}{2} \right)^2 (t' - t^*) + \frac{K}{2} = 0 \quad (4.17)$$

donde $t' = t^* - \frac{2}{rk}$. Entonces la respuesta a la rampa del sistema de primer orden sera:

$$g(t) = m(t - t') + mt'e^{-krKt} \quad (4.18)$$

que es solución de la ecuación diferencial

$$p(p + krK)w(t) = kK^3r^2m/4 \quad (4.19)$$

los valores de t_1 y t_2 se ajustarán en función de la precisión deseada.

Para obtener las condiciones iniciales se utilizará el Teorema de la Proyección:

Sea $x(t) - \frac{K^2r}{4}t \in L_2[t_1, t_2]$, y $\mathcal{M}_2 = [\{1, t, e^{-krKt}\} \subset L_2[t_0, T]$, existe $m_0 \in \mathcal{M}_2$, tal que,

$\|x - m_0\| \leq \|x - m\|$ para todo $m \in \mathcal{M}_2$ y además $(x - m_0) \perp \mathcal{M}_2$, y además $k = 1$.

Dada la respuesta exponencial de la función logística al rededor del punto de inflexión (ver fig. 25), una posible selección de los puntos t_1 y t_2 , serán aquellos donde la curva logística alcance el 37% viz, $(\frac{1}{e})$, y el 63%, viz, $(1 - \frac{1}{e})$, esto es,

$$w(t_1) = c_m \frac{1}{e} \quad y \quad w(t_2) = c_m (1 - \frac{1}{e})$$

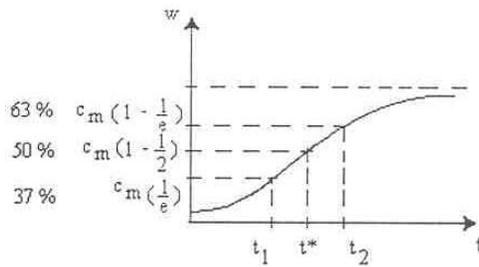


Figura 26.-Puntos de conmutación del sistema escalera

4.3.2 Curva Expo-Lineal.

En la Sección 1.4.1 se mostro que la función expo-lineal es:

$$w = \frac{c_m}{r_m} \ln \left(1 + e^{r_m(t-t_b)} \right) \quad (4.20)$$

siendo solución de la ecuación diferencial

$$\dot{w} = c_m (1 - e^{-\frac{r_m}{c_m} w}), \quad (4.21)$$

Derivando (4.21), se tiene:

$$\dot{w} = r_m e^{-\frac{r_m}{c_m} w} * w = r_m \left(1 - \frac{w}{c_m}\right) \dot{w} \quad (4.22)$$

esto es,

$$\ddot{w} = \left(\frac{r_m}{c_m}\right) * \dot{w} (c_m - w) \quad (4.23)$$

comparando las ecuaciones (4.23) con (4.8) se observa que la velocidad de variación de la función expo-lineal tiene un comportamiento parecido al de una función logística. Sustituyendo el valor de w en la variación de velocidad \dot{w} (4.21) se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{w} &= c_m (1 - e^{-ln(1+r_m(t-t_b))}) \\ \dot{w} &= c_m \left(1 - \frac{1}{1 + e^{r_m(t-t_b)}}\right) \\ \dot{w} &= \frac{c_m e^{-r_m(t-t_b)}}{1 + e^{-r_m(t-t_b)}} = \frac{c_m}{1 + e^{-r_m(t-t_b)}} \quad [\text{logística}] \end{aligned} \quad (4.24)$$

donde los coeficientes k , r y t^* de la ecuación logística (4.8), corresponderán respectivamente a: c_m , $\frac{r_m}{c_m}$ y t_b . De los resultados obtenidos en la sección (4.3.1) tendremos las siguientes tres zonas.

A.- Para la zona $0 \leq t \leq t_1 < t_b$:

$$\dot{w} = c_m \sum_{\nu=1}^n (-1)^{(\nu-1)} e^{-\nu r_m(t_b-t)} + c_m (-1)^n \frac{e^{-(n+1)r_m(t_b-t)}}{1 + e^{-r_m(t_b-t)}} \quad (4.25)$$

donde utilizando el procedimiento ya descrito tendremos:

$$w \prod_{\nu=0}^n (p - \nu kr) = p1(t) + \mathcal{O}((n+1)^n r_m^n c_m) \frac{e^{-(n+1)r_m(t_b-t)}}{1 + e^{-r_m(t_b-t)}} \quad (4.26)$$

Para obtener las condiciones iniciales se utilizará el Teorema de la Proyección:

Sea $x(t) \in L_2[t_1, t_2]$, y $\mathcal{M}_{1a} = [\{1, e^{r_m t}, e^{2r_m t}, \dots, e^{nr_m t}\}] \subset L_2[t_0, T]$, existe $m_0 \in \mathcal{M}_{1a}$, tal que, $\|x - m_0\| \leq \|x - m\|$ para todo $m \in \mathcal{M}_{1a}$ y además $(x - m_0) \perp \mathcal{M}_{1a}$.

B.- Para la zona $t \geq t_2 > t_b$:

$$\dot{w} = c_m + c_m \sum_{\nu=1}^{\bar{n}} (-1)^\nu e^{-\nu r_m(t-t_b)} + c_m (-1)^{(\bar{n}+1)} \frac{e^{-(\bar{n}+1)r_m(t-t_b)}}{1 + e^{-r_m(t-t_b)}} \quad (4.27)$$

$$\prod_{\nu=0}^{\bar{n}} (p + \nu kr) w = (\bar{n}!) r_m^{\bar{n}} c_m l(t) + \mathcal{O}(c_m (\bar{n} + 1) r_m^{\bar{n}}) \frac{e^{-(\bar{n}+1)r_m(t-t_b)}}{1 + e^{-r_m(t-t_b)}} \quad (4.28)$$

Para obtener las condiciones iniciales se utilizará el Teorema de la Proyección:

Sea $x(t) \in L_2[t_o, T]$, y $\mathcal{M}_{2a} = [\{1, e^{-r_m t}, e^{-2r_m t}, \dots, e^{-\bar{n}r_m t}\}] \subset L_2[t_o, T]$, existe $m_o \in \mathcal{M}_{2a}$, tal que, $\|x - m_o\| \leq \|x - m\|$ para todo $m \in \mathcal{M}_{2a}$ y además $(x - m_o) \perp \mathcal{M}_{2a}$

C.- Para la zona $t_1 \leq t \leq t_2$:

$$\begin{aligned} p(p + kr_m) \dot{w}(t) &= kc_m r_m^2 / 4 \\ p^2(p + kr_m) w(t) &= kc_m r_m^2 / 4 \end{aligned} \quad (4.29)$$

Para obtener las condiciones iniciales se utilizará el Teorema de la Proyección:

Sea $x(t) - \frac{cmr_m}{8} t^2 \in L_2[t_o, T]$, y $\mathcal{M}_{3a} = [\{1, t, e^{-kr_m t}\}] \subset L_2[t_o, T]$, existe $m_o \in \mathcal{M}_{3a}$, tal que, $\|x - m_o\| \leq \|x - m\|$ para todo $m \in \mathcal{M}_{3a}$ y además $(x - m_o) \perp \mathcal{M}_{3a}$. y además $k = 1$.

Los tiempos de conmutación estarán dados de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} t_1 &= t_b - \frac{1}{r_m} \ln(e - 1) ; \quad 37\% \\ t_2 &= t_b + \frac{1}{r_m} \ln(e - 1) ; \quad 63\% \end{aligned} \quad (4.30)$$

4.4 Resultados obtenidos con la PAR teórica y el coeficiente de transmitividad de la nubosidad.

En esta sección se muestran:

1.- los resultados obtenidos cuando se utiliza la PAR teórica (4.4) y (4.5) (ver figura (fig. 20) y (fig. 23)) en el modelo de van Henten (2.46)-(2.48) con una temperatura constante de 12.5 °C.

2.-Posteriormente se modula la PAR teórica por la aproximación en series de Fourier (4.6) y (4.7) el coeficiente de transmitividad, τ_a , ver figura (21)

4.4.1 Luz teórica promedio.

En la fig. 27 a), se muestran los resultados obtenidos con la PAR teórica (4.4) y (4.5) en el modelo de van Henten (2.46)-(2.48) con una temperatura constante de 12.5 °C. De esta figura se puede observar que la respuesta de crecimiento de la Lechuga sigue un comportamiento Expo-Lineal (recordar Sección (4.3.1)), en efecto, se verifica la tendencia lineal mostrada en la fig. 24 b)). Con los coeficientes de la función Expo-Lineal siguientes (En el apéndice (B) se muestra como se obtienen estos parametros):

$$\begin{aligned}c_m &= 0.0041536 \text{ kg/m}^2d \\r_m &= 0.1408 \text{ kg/kgd} \\t_b &= 24.5 \text{ dias}\end{aligned}\tag{4.31}$$

Del análisis hecho en la Sección 4.3.1, la respuesta Expo-Lineal se obtiene la siguiente descripción escalera del sistemas :

1. Para la primera zona, $0 \leq t \leq t_1 < t_b$, se tiene de la ecuación (4.26) con $n=2$.²

$$p(p - r_m)(p - 2r_m)w = p1(t)\tag{4.32}$$

las condiciones iniciales obtenidas a partir del Teorema de la Proyección, (ver apéndice (A.2.1.) para más detalle) son:

$$\begin{aligned}w_{01} &= 6.6605148 \times 10^{-3}; \\ \dot{w}_{01} &= 8.44049 \times 10^{-4}; \\ \ddot{w}_{01} &= 1.160516 \times 10^{-4};\end{aligned}\tag{4.33}$$

²Se usaron solamente dos terminos porque con estos se obtiene un error de 3×10^{-6} que es comparable con el obtenido en la segunda zona.

$$\ddot{w}_{01} = 1.155301 \times 10^{-5},$$

2. Para la segunda zona, $t_1 \leq t \leq t_2$, se tiene de la ecuación (4.29):

$$p^2(p + r_m)w' = c_m \frac{r_m^2}{4} \quad (4.34)$$

las condiciones iniciales obtenidas a partir del Teorema de la Proyección, (ver apendice (A.2.2) para más detalle) son:

$$\begin{aligned} w_{02} &= 4.899509 \times 10^{-2}; \\ \dot{w}_{02} &= -2.4761114 \times 10^{-2}; \\ \ddot{w}_{02} &= 2.882884 \times 10^{-3}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

3. Para la zona final, $t \geq t_2 > t_b$, se tiene de la ecuación (4.28) con $\bar{n}=2^3$

$$p(p + r_m)(p + 2r_m)w = (2!)c_m r_m^2 \quad (4.36)$$

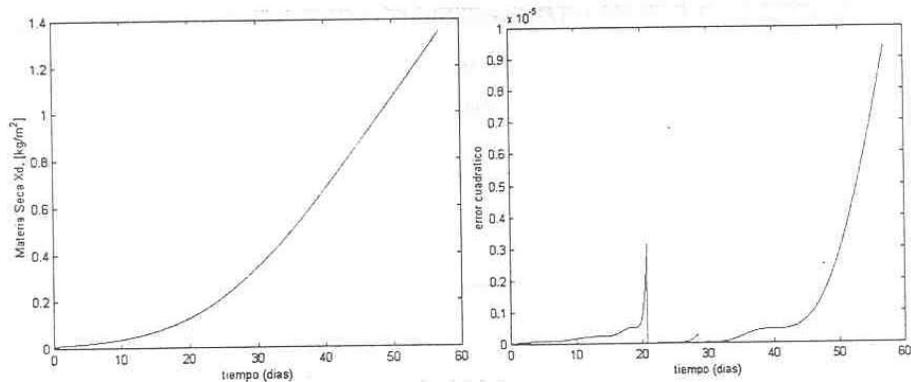
las condiciones iniciales obtenidas a partir del Teorema de la Proyección, (ver apendice (A.2.3) para más detalle) son:

$$\begin{aligned} w_{03} &= 9.44382 \times 10^{-3}; \\ \dot{w}_{03} &= 4.029965 \times 10^{-2}; \\ \ddot{w}_{03} &= -1.0370493 \times 10^{-1}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

En la fig. 27 a), se muestra la respuesta del sistema escalera (4.32), (4.34) y (4.36) con condiciones iniciales (4.33), (4.35) y (4.37). En la fig. 27 b), se muestra el error $\int_{t_0}^T (expolineal - sist. escalera)^2 dt$, y en la figura 26 c), se comparan la respuesta del sistema (2.48), exitado con

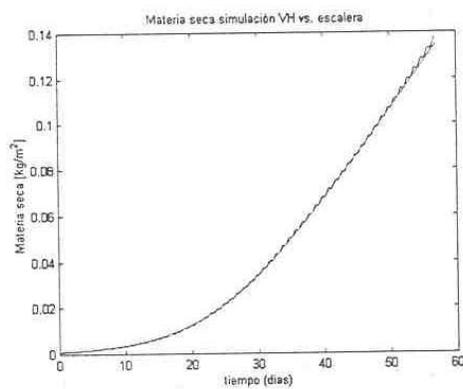
³Se usaron solamente dos terminos porque con estos se obtiene un error de 9.4×10^{-6} que es comparable con el obtenido en la segunda zona.

la PAR teórica (4.6) y (4.7) contra la respuesta del sistema escalera (4.32), (4.34) y (4.36).



a)

b)



c)

Figura 27, a) Respuesta del sistema escalera (4.32), (4.34) y (4.36) con condiciones iniciales (4.33), (4.35) y (4.37) y los parametros $c_m = 0.0041536$, $r_m = 0.1408$, $t_b = 24.5$, $t_1 = 17.398$, $t_2 = 31.602$. b) Error $\int_{t_0}^T (\text{expolineal-sist. escalera})^2 dt$, y c) Comparación de la respuesta del sistema (2.48), exitado con la PAR teórica (4.6) y (4.7) contra la respuesta del sistema escalera (4.32), (4.34) y (4.36).

4.4.2 Luz teórica promedio con coeficiente de transmitividad de nubosidad.

En la fig. 28 se muestran los resultados obtenidos con PAR teórica (4.4) y (4.5) modulanda con el coeficiente de transmitividad, τ_a , expresado en series de Fourier en (4.6) y (4.7) en el modelo de van Henten (2.46)-(2.48) con una temperatura constante de 12.5 °C. De esta figura se puede observar que la respuesta de crecimiento de la lechuga sigue el mismo patrón obtenido previamente en la sección (3.4.2).

Del análisis hecho a la curva logística (4.8) ver sección (4.3.1) se obtuvo la siguiente descripción en sistemas de escalera, y con los siguientes coeficientes obtenidos en (4.8):

$$\begin{aligned}c_m &= 0.155 \\r_m &= 0.1129 \\t_b &= 43.5934\end{aligned}$$

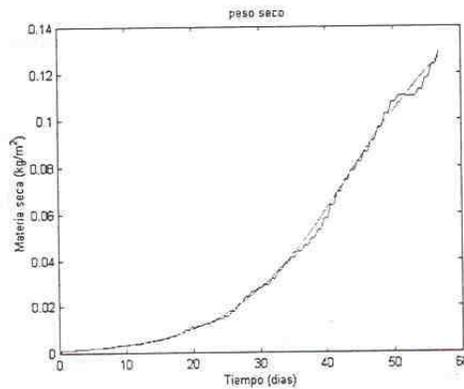


Figura 28. Respuesta del sistema escalera (4.38), (4.40) y (4.42) con condiciones iniciales (4.39), (4.41) y (4.43) y los parametros $c_m = 0.155$, $r_m = 0.1129$, $t_b = 43.5934$, $t_1 = 38.798671$, $t_2 = 48.388128$ (curva suave) contra el modelo (2.48) (curva no suave).

1. Para la primera zona, $0 \leq t \leq t_1 < t_b$, se tiene de la ecuación (4.13) con $n=3$,⁴

$$(p - r_m)(p - 2r_m)(p - 3r_m)w = p1(t) \quad (4.38)$$

las condiciones iniciales obtenidas a partir del Teorema de la Proyección (ver apendice (A.1.1) para más detalle), son:

$$\begin{aligned} w_{01} &= 0.0011056 \\ \dot{w}_{01} &= 0.000124065 \\ \ddot{w}_{01} &= 0.000013837 \end{aligned} \quad (4.39)$$

2. Para la segunda zona, $t_1 \leq t \leq t_2$, se tiene de la ecuación (4.19)

$$p(p + r_m)w = c_m \frac{r_m^2}{4} \quad (4.40)$$

las condiciones iniciales obtenidas a partir del Teorema de la Proyección (ver apendice (A.1.2) para más detalle), son:

$$\begin{aligned} w_{02} &= -0.0648521 \\ \dot{w}_{02} &= -0.0011022 \end{aligned} \quad (4.41)$$

3. Para la zona final, $t \geq t_2 > t_b$, se tiene de la ecuación (4.15) con $\bar{n}=2$ ⁵

$$(p + r_m)(p + 2r_m)w = (2!)c_m r_m^2 \quad (4.42)$$

las condiciones iniciales obtenidas a partir del Teorema de la Proyección, (ver apendice (A.2.3) para más detalle) son:

⁴Se usaron solamente tres terminos porque con estos se obtiene un error de 3×10^{-6} que es comparable con el obtenido en la segunda zona.

⁵Se usaron solamente dos terminos porque con estos se obtiene un error de 3×10^{-6} que es comparable con el obtenido en la segunda zona.

$$\begin{aligned}w_{03} &= 1.44 \times 10^3 \\ \dot{w}_{03} &= -3.28 \times 10^2\end{aligned}\tag{4.43}$$

En la fig. 28 se comparan estas dos respuestas.

Esto es, se verifica la tendencia a la curva logística descrita por la ecuación (4.8).

Capítulo 5

Control Óptimo.

5.1 Control óptimo en invernaderos.

El control óptimo en invernaderos se utiliza para controlar el clima, integrándose al control del crecimiento de diferentes cultivos, para obtener un máximo beneficio económico. Los factores del clima que se controlan son la temperatura, la humedad relativa y en algunos casos el contenido de bióxido de carbono, los cuales en manera directa afectan al crecimiento de las plantas y por ende al crecimiento de flores o frutos.

El control óptimo da lugar a mejores resultados cuando el comportamiento del sistema dinámico (modelo matemático) es completamente conocido. Esto implica perfecto conocimiento de las ecuaciones de variables de estado y de las perturbaciones hacia el sistema. La optimalidad de los controles esta fuertemente ligada a la precisión en las dinámicas del invernadero, las dinámicas de los cultivos y la predicción del clima. En el caso de las dinámicas de los cultivos por ejemplo, un mejor conocimiento de la influencia de la humedad en el crecimiento del cultivo mejoraría el control.

En los trabajos referentes al uso del control óptimo en los invernaderos, se trata de maximizar el principal criterio de desempeño, el cual, esta dado en función de la ganancia económica o el mayor beneficio después de la cosecha del cultivo, esto es:

$$J(u) = \Phi(x(t_f), c, t_f) - \int_{t_0}^{t_f} L(x, u, v, c, t) dt \quad (5.1)$$

En el cual, $\Phi(x(t_f), c, t_f)$ es el ingreso de la subasta debido a la venta del producto cultivado, $L(x, u, v, c, t)$ es el costo al momento de operación del equipo para acondicionar el clima como son por ejemplo: el suministro de energía para el sistema calefactor, el costo del suministro de bióxido de carbono puro, el costo relacionado a la apertura de las ventanas de ventilación, el consumo de energía eléctrica por motores e iluminación, nutrientes, suministro de agua, etc.

Debido a las fuertes no linealidades presentes en el modelo de crecimiento no ha sido posible encontrar soluciones explícitas del control, por lo que generalmente se ha recurrido al uso de algoritmos computacionales.

Entre los algoritmos utilizados para resolver el problema de control óptimo, se pueden citar:

(1) El algoritmo del gradiente de primer orden (Kalman 1969), (2) el algoritmo de primer orden con variaciones fuertes (Mayne y Polak 1975), (3) el método del paso descendente (Kirk 1970 ([21])), y (4) el algoritmo de control sub-óptimo (Friedland y Sarachnick 1966) e implementado por van Henten y Chalabi (1994). Ésta ultima implementación está dada en función de las dos diferentes respuestas en el tiempo que son integradas en el modelo: la respuesta rápida del clima y la respuesta lenta del crecimiento, en las cuales, se analiza la respuesta del clima primeramente en estado permanente, a fin, de que al aplicar el método del paso descendente obtengamos las funciones de costo (multiplicadores de Lagrange), que serán utilizadas en la optimización del modelo dinámico para el clima y crecimiento (ambos integrados).

5.1.1 Resultados obtenidos al aplicar el método del paso descendente.

A continuación se hicieron las simulaciones para obtener el control óptimo de la dinámica del crecimiento, para las cuales se considero: 1.- la PAR teórica, (ver sección 4.1) y, 2.- la PAR teorica considerando el coeficiente de transmitividad, dado por la nubosidad y modulado con la expansión en series de Fourier (ver sección 4.2). Donde el indice de desempeño a ser maximizado es el siguiente:

$$J(u) = \alpha + \beta X_d(t_f) - \int_{t_b}^{t_f} \gamma U_c dt \quad (5.2)$$

donde:

α es el precio de la lechuga por metro cuadrado, dada en la subasta del mercado (se tomo 10 centavos por cabeza, ver capitulo 6 de van Henten [40] , referido a estadísticas del mercado

y como se tienen 18 lechugas por metro cuadrado, así, $\alpha = 180$ centavos por metro cuadrado).

β es la ganancia adicional por buena cosecha, se toma ¹ de 1600 centavos por kilogramo.

γ es el precio unitario de bióxido de carbono 42 centavos por kilogramo².

t_b es el día de cultivo $t_b = 0$.

t_f es el día de la cosecha $t_f = 57$.

La estrategia de control óptimo en este capítulo se sintetiza utilizando el algoritmo computacional conocido como “método del paso descendente”, el cual se bosqueja en el apéndice C.

5.1.2 PAR teórica.

Se desea maximizar el índice de desempeño, que está basado en la ganancia económica producida por el cultivo y cosecha de lechugas seleccionando únicamente como entrada de control al suministro U_c , las otras entradas se concideran nulas ($U_v = U_g = 0$). Se utilizan los datos dados por van Henten [40], además con $V_t = 12.5^\circ C$, temperatura constante; $V_c = 350$ ppm; y V_i (ver sección (4.2) y utilizando V_i como en las figuras (fig. 20)), (fig. 23)).

A continuación se muestran los resultados de simulación obtenidos cuando se selecciona la PAR teórica:

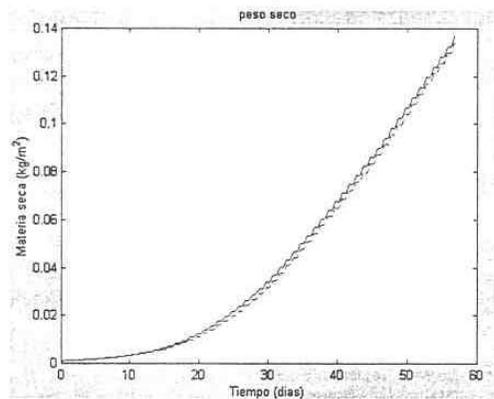


Figura 30.- Simulación de la materia seca utilizando la PAR teórica figura (22 a)). simulación con el modelo (2.48) —, y aplicando el paso ascendente - - - -, el cual muestra un índice de desempeño máximo

¹ver van Henten [40] para más detalle

²idem

de 372 contra el índice de desempeño de 150 aplicando el escalón $U_c = 1.2 \times 10^{-6} \frac{kg}{m^2s}$.

En la figura 30 se comparan las respuestas obtenidas al escalón (máximo suministro de bióxido de carbono) y el obtenido aplicando la estrategia de control óptimo sintetizada mediante el algoritmo del paso descendente. De esta figura se puede observar que se tiene en ambos casos una dinámica semejante, pero con un índice de desempeño notablemente mayor en el caso de la estrategia del control óptimo el índice es de 372, mientras que la respuesta al escalón su índice es de 150. En las siguientes figuras se muestra el desempeño de las variables de estado, así como también, la estrategia de bióxido de carbono.

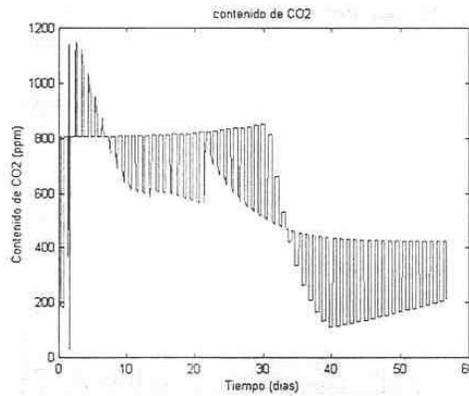


Figura 31. – Estado Z_c resultado de aplicar el control óptimo

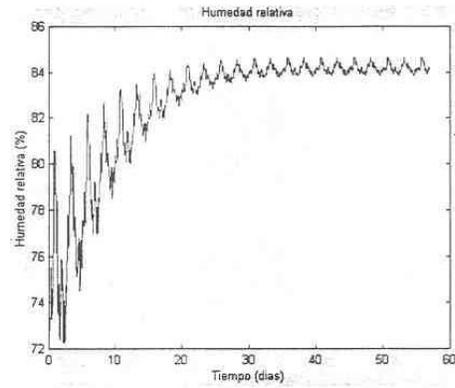


Figura 32. — Estado Z_h resultado de aplicar el control óptimo

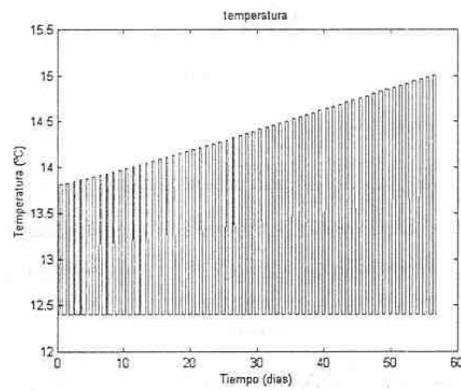


Figura 33. — Estado Z_t resultado de aplicar el control óptimo

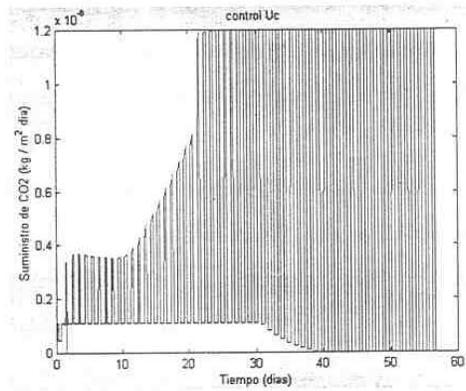


Figura 34. — Control U_c resultado de aplicar el control óptimo

PAR teórica modulada con el coeficiente de nubosidad dado por la expansión en series de Fourier

En esta sección se muestran los resultados de simulación obtenidos cuando se selecciona a la PAR teórica modulada con el coeficiente de transmitividad, dado por la nubosidad y modulado por la expansión en series de Fouier (4.6)-(4.7) (ver figura (fig. 23)).

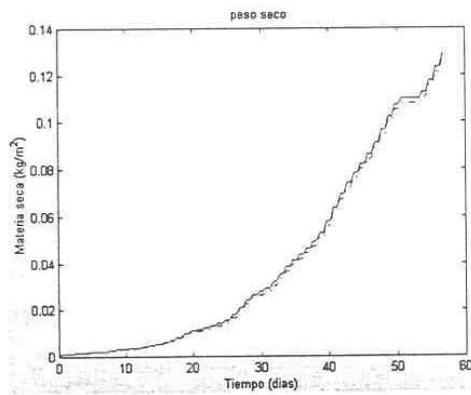


Figura 35.- Simulación de la materia seca utilizando la PAR teórica figura (22 a)). simulación del

modelo (2.48) —, y aplicando el paso ascendente —, el cual muestra un índice de desempeño máximo de 362 contra el índice de desempeño de 137 aplicando el escalón $U_c = 1.2 \times 10^{-6} \frac{kg}{m^2 \cdot s}$.

En la figura 35 se comparan las respuestas obtenidas al escalón (máximo suministro de bióxido de carbono) y el obtenido aplicando la estrategia de control óptimo sintetizada mediante el algoritmo del paso descendente. De esta figura se puede observar que se tiene en ambos casos una dinámica semejante, pero con un índice de desempeño notablemente mayor en el caso de la estrategia del control óptimo el índice es de 362, mientras que la respuesta al escalón su índice es de 137. En las siguientes figuras se muestra el desempeño de las variables de estado; así como también, la estrategia de bióxido de carbono.

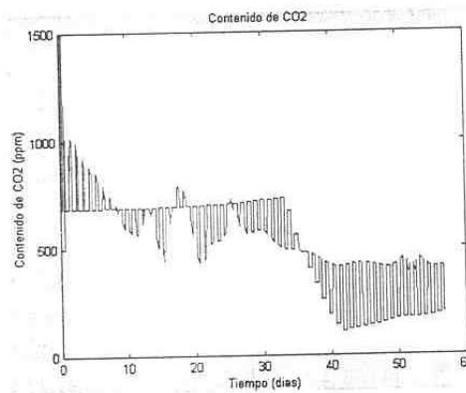


Figura 36. — Estado Z_c resultado de aplicar el control óptimo

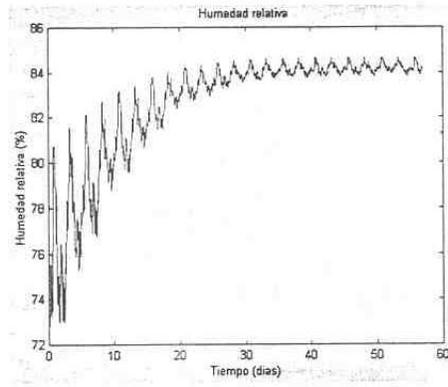


Figura 37. — Estado Z_h resultado de aplicar el control óptimo

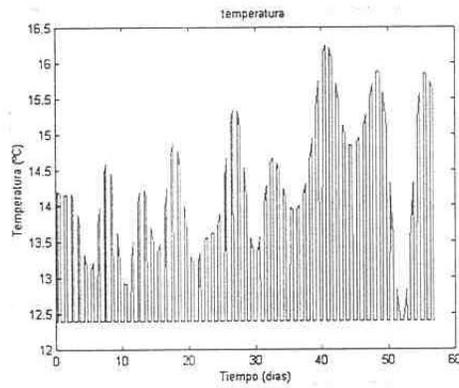


Figura 38. — Estado Z_l resultado de aplicar el control óptimo

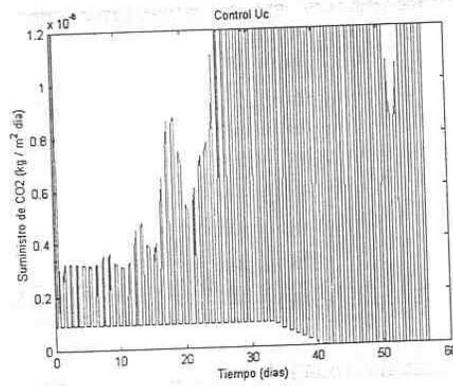


Figura 39. — Control U_c resultado de aplicar el control óptimo

Capítulo 6

Control Óptimo utilizando sistemas escalera

6.1 Análisis para el Control óptimo aplicado a los sistemas escalera.

En este capítulo se muestra el método que se siguió para sintetizar la estrategia de control óptimo utilizando como herramienta de diseño a los sistemas escalera; una ventaja de este procedimiento es el de obtener una ley de control explícita. Para esto, se hizo el siguiente desarrollo.

Sea el sistema dinámico:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x, u, t) = Ax(t) + bu(t) \\ y(t) &= c^T x(t)\end{aligned}\tag{6.1}$$

donde $y(t)$ es la producción de materia seca X_d , y $u(t)$ es el suministro de bióxido de carbono, U_c .

Con entrada acotada $0 \leq u(t) \leq M$ y con el siguiente índice de desempeño (comparar con (5.2) del capítulo 5).

$$J(u) = \beta y(t_f) - \int_{t_b}^{t_f} \gamma u dt\tag{6.2}$$

Dado que se trata de un criterio lineal con respecto a la entrada de control, se hará uso del

Principio de Optimalidad.

Para aplicar el Principio de Optimalidad al criterio (6.2) hacemos la siguiente transformación:

$$\begin{aligned}
 J(u) &= \int_{t_0}^{t_f} (-\gamma u + \beta \dot{y}) dt = \int_{t_0}^{t_f} (-\gamma u + \beta c^T \dot{x}) dt & (6.3) \\
 &= \int_{t_0}^{t_f} (-\gamma u + \beta c^T (Ax + bu)) dt \\
 &= \int_{t_0}^{t_f} (\beta c^T Ax + (-\gamma + \beta c^T b)u) dt
 \end{aligned}$$

así de este índice obtenemos

$$l(x, u, t) = \beta c^T Ax + (-\gamma + \beta c^T b)u \quad (6.4)$$

Para utilizar el Teorema 1, de la sección 9.6 del Luenberger([28]), necesitamos definir el coestado, λ , solución de la ecuación

$$-\dot{\lambda}(t) = f_x^T \lambda(t) + l_x^T; \quad \lambda(t_f) = 0$$

donde: $f_x^T = A^T$; y $l_x^T = \beta A^T c$, así

$$\dot{\lambda}(t) = -A^T \lambda - \beta A^T c \quad (6.5)$$

el Hamiltoniano, $\mathcal{H}(x, u, \lambda, t) = \lambda^T f + l$, es

$$\mathcal{H}(x^*, u, \lambda^*, t) = \beta c^T Ax^* + (-\gamma + \beta c^T b)u + \lambda^* Ax^* + \lambda^* bu \quad (6.6)$$

El Principio de Optimalidad establece para el caso de la maximización de un criterio,

$$\mathcal{H}(x^*, u, \lambda^*, t) \leq \mathcal{H}(x^*, u^*, \lambda^*, t)$$

esto es,

$$\beta c^T Ax^* + (-\gamma + \beta c^T b)u + \lambda^* Ax^* + \lambda^* bu \leq$$

$$\beta c^T A x^* + (-\gamma + \beta c^T b) u^* + \lambda^* A x^* + \lambda^* b u^* \quad (6.7)$$

$$(-\gamma + \beta c^T b + \lambda^* b) u \leq (-\gamma + \beta c^T b + \lambda^* b) u^* \quad (6.8)$$

Sea

$$s(t) = -\gamma + \beta c^T b + \lambda^*(t) b \quad (6.9)$$

La solución de la ecuación (6.5) es

$$\lambda^*(t) = e^{-A^T(t-t_0)} \lambda^*(t_0) - \int_{t_0}^t e^{-A^T(t-\tau)} \beta A^T c d\tau \quad (6.10)$$

$$\lambda^*(t) = e^{-A^T(t-t_0)} \lambda^*(t_0) + (e^{-A^T t} - I) \beta c \quad (6.11)$$

Para $t = t_f$, el Teorema establece $\lambda^*(t_f) = 0$, entonces

$$\lambda^*(t_0) = e^{A^T(t_f-t_0)} (I - e^{-A^T t_f}) \beta c \quad (6.12)$$

sustituyendo en (6.11)

$$\lambda^*(t) = e^{-A^T(t-t_f)} (I - e^{-A^T t_f}) \beta c - (I - e^{-A^T t}) \beta c \quad (6.13)$$

finalmente,

$$\lambda^*(t) = (e^{-A^T(t-T)} - I) \beta c \quad (6.14)$$

de esta forma, (6.9) toma la siguiente forma

$$s(t) = \beta c^T (e^{-A^T(t-t_f)} - I) b - \gamma + \beta c^T b$$

para el cual, la superficie de conmutación es,

$$s(t) = \beta c^T e^{-A(t-t_f)} b - \gamma \quad (6.15)$$

aplicando el Principio de Optimalidad

$$s(t) u(t) \leq s(t) u^*(t) \quad (6.16)$$

lo cual implica

$$u^*(t) = \begin{cases} M & \text{si } s(t) > 0 \\ 0 & \text{si } s(t) \leq 0 \end{cases} \quad (6.17)$$

Para nuestro caso $M = 1.2 \times 10^{-6} \frac{kg}{m^2s}$.

Note que $\beta c^T e^{-A(t-t_f)}$ es la solución de la siguiente ecuación diferencial:

$$\dot{\bar{\lambda}} = -A^T \bar{\lambda}, \quad \text{con } \bar{\lambda}(t_f) = \beta c \quad (6.18)$$

por lo que la superficie de conmutación (6.15) también se expresa como

$$s(t) = b^T \bar{\lambda}(t) - \gamma \quad (6.19)$$

6.2 Control óptimo utilizando los sistemas escalera

En esta sección se aplica el algoritmo de Control Óptimo desarrollado en la sección anterior

Para esto vamos a construir la variable $\bar{\lambda}(t)$ evolucionando en el tiempo de atrás para adelante; teniendo cuidado de obtener una trayectoria suave sin saltos en los cambios de zona.

6.2.1 Tercera Zona $t_2 < t < t_f$:

La ecuación diferencial lineal obtenida para la tercera zona es (c.f.(4.42) de la sección 4.2.2):

$$(p + r_m)(p + 2r_m)u = \frac{2c_m r_m^2}{M} u \quad (6.20)$$

una representación en variables de estado es

$$\begin{aligned} \dot{x}_3(t) &= A_3 x_3 + b_3 u \\ w_1(t) &= c_3^T x_3 \end{aligned} \quad (6.21)$$

donde $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & -2r_m^2 \\ 1 & -3r_m \end{bmatrix}$, $b_3 = \begin{bmatrix} K_3 \\ 0 \end{bmatrix}$, $c_3^T = [0 \ 1]$ y $K_3 = \frac{2c_m r_m^2}{M}$. De la ecuación (6.18) obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_3(t) &= -A_3^T \bar{\lambda}_3(t) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2r_m^2 & 3r_m \end{bmatrix} \bar{\lambda}_3(t) \end{aligned} \quad (6.22)$$

también

$$\bar{\lambda}_3(t) = \begin{bmatrix} \lambda_{31}(t_f) \\ \lambda_{32}(t_f) \end{bmatrix} = \beta c = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \end{bmatrix} \quad (6.23)$$

entonces para esta tercer zona, de (6.19) se tiene

$$s_3(t) = K_3 \lambda_{31}(t) - \gamma \quad (6.24)$$

6.2.2 Segunda Zona $t_1 < t < t_2$:

La ecuación diferencial lineal obtenida para la segunda zona es (c.f.(4.40) de la sección 4.2.2):

$$p(p + r_m)w = \frac{c_m r_m^2}{4M} u \quad (6.25)$$

una representación en variables de estado es

$$\begin{aligned} \dot{x}_2(t) &= A_2 x_2 + b_2 u \\ w_1(t) &= c_2^T x_2 \end{aligned} \quad (6.26)$$

donde $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -r_m \end{bmatrix}$, $b_2 = \begin{bmatrix} K_2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $c_2^T = [0 \ 1]$, $K_2 = \frac{c_m r_m^2}{4M}$. De la ecuación (6.18) obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_2(t) &= -A_2^T \bar{\lambda}_2(t) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & r_m \end{bmatrix} \bar{\lambda}_2(t) \end{aligned} \quad (6.27)$$

Para obtener suavidad en la transición de zonas se seleccionaran las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned}\lambda_{21}(t_{2-}) &= \lambda_{31}(t_{2+}) \\ \lambda_{22}(t_{2-}) &= \lambda_{32}(t_{2+})\end{aligned}\tag{6.28}$$

y de (6.19) se tiene

$$s_2 = K_2 \lambda_{21}(t) - \gamma\tag{6.29}$$

6.2.3 Primera Zona $0 < t < t_1$:

La ecuación diferencial lineal obtenida para la primera zona es (c.f.(4.38) de la sección 4.2.2):

$$(p - r_m)(p - 2r_m)(p - 3r_m)w = p \frac{c_m r_m^2}{M_1} u\tag{6.30}$$

una representación en variables de estado es

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= A_1 x_1 + b_1 u \\ w_1(t) &= x_1\end{aligned}\tag{6.31}$$

donde $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6r_m^3 \\ 1 & 0 & -11r_m^2 \\ 0 & 1 & 6r_m \end{bmatrix}$, $b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ K_1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $c_1^T = [0 \ 0 \ 1]$ y $K_1 = \frac{c_m r_m^2}{M_1}$. De la ecuación (6.18) obtenemos

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\lambda}}_1(t) &= -A_1^T \bar{\lambda}_1(t) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -6r_m^3 & 11r_m^2 & -6r_m \end{bmatrix} \bar{\lambda}_1(t)\end{aligned}\tag{6.32}$$

Para obtener suavidad en la transición de zonas se seleccionaran las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} \lambda_{11}(t_{1-}) = \lambda_{21}(t_{1+}) \\ \lambda_{12}(t_{1-}) = \lambda_{22}(t_{1+}) \\ \lambda_{13}(t_{1-}) = -\dot{\lambda}_{22}(t_{1+}) = r_m \dot{\lambda}_{21}(t_{1+}) \end{cases}\tag{6.33}$$

y de (6.19) se tiene

$$s_1 = K_1 \lambda_{12}(t) - \gamma \quad (6.34)$$

De las ecuaciones (6.24), (6.29), (6.34) y (6.17) se obtiene (ver figura 40)

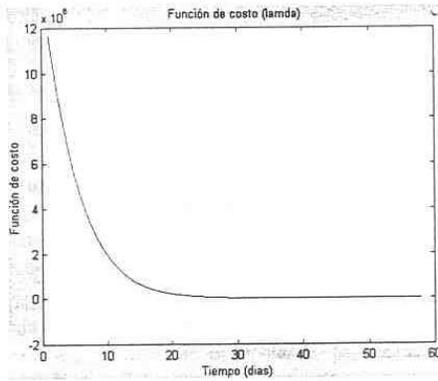


Figura 40.- Coestado, utilizando los sistema escalera.

para este coestado obtenemos la siguiente superficie de conmutación

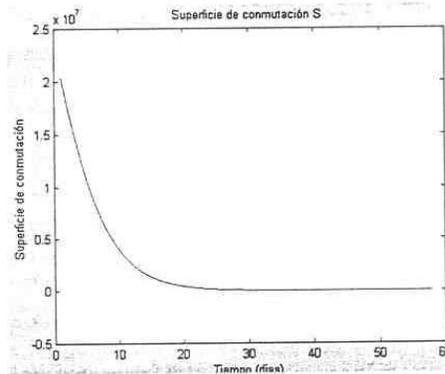


Figura41.-Superficie de conmutación.

y a continuación en la figura 42 se muestra un detalle de dicha superficie, para obtener el control

explicito

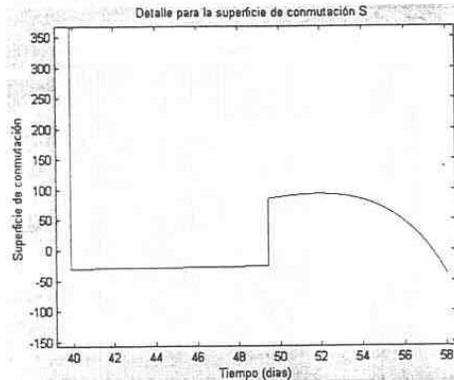


Figura42.-Detalle de las superficie de conmutación
utilizando el sistema escalera

De esta figura se observa que la superficie de conmutación es negativa en el conjunto $[t_1, t_2] \cup [t'_2, t_f]$ donde $t_1 = 39.5; t_2 = 49.5, t'_2 = 57, t_f = 57.5$. Entonces la ley de control óptimo será:

$$u^*(t) = \begin{cases} M & \text{para } 0 < t < t_1 \\ 0 & \text{para } t_1 < t < t_2 \\ M & \text{para } t_2 < t < t'_2 \\ 0 & \text{para } t'_2 < t < t_f \end{cases}$$

Ahora bien, dado que la fotosíntesis y la absorción de bióxido de carbono, por la planta, solamente tiene lugar en presencia de PAR, entonces hay que modular el suministro de bióxido de carbono por la duración de horas día, esto es, (Ver sección 4.1.1)

$$U_c = u^*(t)h(t)$$

donde

$$h(t) = \begin{cases} 1 & \text{si existe PAR} \\ 0 & \text{de otra modo} \end{cases}$$

En las figuras 43 y 44 se muestran el suministro de Bióxido de carbono y el crecimiento obtenido.

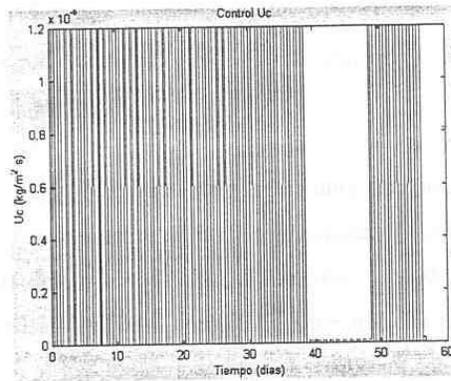


Figura 43.- Control U_c resultado de aplicar el análisis de control óptimo para los sistemas escalera

dando la siguiente respuesta, que es comparada con la respuesta dada por el control óptimo utilizando el método del paso descendente

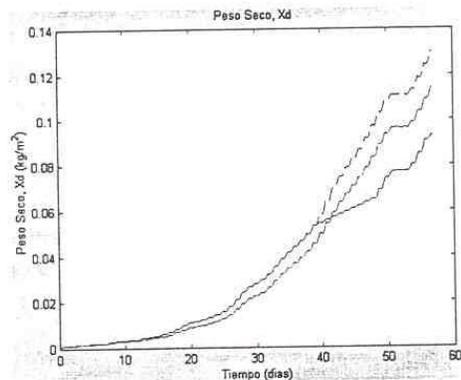


Figura 44.- Crecimiento del cultivo al aplicar la ley de Control Óptimo

(figura 43) desarrollada utilizando el sistema escalera

- 1.- respuesta optimizada sin ventilación (línea continua),
- 2.- respuesta con ventilación (línea -.-), y 3.- respuesta al escalón sin optimizar línea - - - .

En la figura 44 se muestran las respuestas del sistema dinámico para el control U_c analizado para los sistemas escalera. Primeramente se analizó el sistema dinámico sin ventilación, en el cual se obtiene un índice de desempeño de $J(u) = 328$. Acto seguido, se obtuvo la respuesta añadiéndole la máxima ventilación y con el control U_c , antes mencionado, este nos proporciona un índice de desempeño $J(u) = 362$. Estas respuestas se comparan con la respuesta del sistema dinámico al escalón sin optimizar, que resulta en un índice de desempeño de $J(u) = 137$. Al igual cuando se optimiza el sistema utilizando el método del paso descendente, se obtuvo un índice de desempeño de $J(u) = 362$, ver figura 35.

Se puede concluir entonces que el sistema escalera es una buena aproximación del sistema dinámico no lineal utilizado por van Henten. Aunque se necesita aún realizar un estudio más profundo para igualar los resultados obtenidos con este análisis, y los obtenidos con el método del paso descendente.

Capítulo 7

Conclusiones

En este trabajo de tesis, se estudió el modelo de la respuesta dinámica del proceso de crecimiento de la lechuga. En el capítulo 2 se consideraron dos casos:

A.- Respuesta del modelo utilizando la PAR teórica.

B.- Respuesta del modelo utilizando la PAR teórica aplicándole un coeficiente de nubosidad.

Para ambas respuestas se ajustó una curva típica del análisis de crecimiento, en los capítulos 3 y 4. Para la respuesta de la PAR teórica se ajustó una curva Expo-lineal. La respuesta del modelo modulado con el coeficiente de nubosidad se le ajustó la curva típica Logística, que es un modelo conocido del crecimiento.

A las curvas típicas de crecimiento, expo-lineal y logística aproximadas por las curvas típicas, se les aproximó la respuesta de un conjunto de sistemas lineales en sus diferentes zonas de funcionamiento: A) Primero se ajustó, en el capítulo 3, la respuesta logística por un procedimiento experimental con sistemas de primer y segundo orden y redes de atraso adelante. B) En el capítulo 4, las curvas expo-lineal y logística, se seccionaron en tres zonas y en cada una de estas zonas se hizo una expansión en series exponenciales, ajustándose los coeficientes utilizando el Teorema de la Proyección; obteniéndose así otro conjunto de sistemas lineales que describen el proceso de crecimiento de la lechuga.

En el capítulo 5, se sintetizó un control óptimo para el crecimiento de la lechuga, utilizando el método del paso descendente aplicado al modelo completo del crecimiento de la lechuga. Por otra parte, en el capítulo 6, se sintetizó un control óptimo utilizando el conjunto de sistemas lineales y se compararon ambos resultados.

Se puede observar que aún el control óptimo sintetizado con el método del paso descendente, da mejores resultados, aunque no muy alejados. Se piensa que esto es debido a que no se ajustó correctamente el conjunto de sistemas lineales, en particular el valor de las ganancias.

En trabajos posteriores se estudiará más a fondo esta aproximación, así como también la incorporación en el control de las otras variables agrometeorológicas, esto es, ventilación, temperatura, y humedad relativa.

Bibliografía

- [1] Aplevich J.D.(1991). *Implicit Linear Systems*. Ed. Springer-Verlag, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Vol. 152.
- [2] Armentano V.A. (1986). The Pencil $(sE - A)$ and Controllability-Observability for Generalized Linear Systems: a geometric approach. *SIAM J. Control Opt.*, Vol. 24, No. 4, pp. 616-638.
- [3] Baser U. and Shumacher J. M.(1998). Descriptor Representations of Jump Behaviors. *IFAC-CSSC*, pp. 159-164, Nantes France, July 8-10.
- [4] Bernhard P.(1982). On Singular Implicit Linear Dynamical System. *SIAM J. Control and Optimization*, Vol. 20, No. 5, pp. 612-633, Sep.
- [5] Bonilla M. and Malabre M.(1991). Variable Structure System via implicit Descriptions. *1st European Control Conference, 2-5 July, Grenoble France*, Vol. 1, pp 403-408.
- [6] Bonilla M., Fonseca M. and Malabre M.(1993).On the Implementation of Some Variable Structure Systems Control Laws(the case of two points varying systems). *32nd IEEE-CDC*, pp 859-896..
- [7] Bonilla M., Lebret G. and Malabre M.(1994).Output Dynamics Assignment for Implicit Description. *Circuits, Systems and Signal Processing, Special Issue on "Implicit Robust Systems"*, Vol 13 No. 2-3, pp 349-359.
- [8] Bonilla M., Malabre M. and Fonseca M.(1997).On the Approximation of Non Proper Control Laws. *International Journals of Control*, Vol. 68, No. 4, pp. 775-796.

- [9] Bonilla M., Goire M.M. and Mondié S.(2000). Adaptive Structure Detector for Linear Implicit Systems. *American Control Conference 2000*, pp.2179-2183.
- [10] Bonilla M. and Malabre M.(2000).More About Non Square Implicit Descriptions for Modelling and Control. *39th IEEE-CDC*, pp.3642-3647.
- [11] Bonilla M. and Martinez A.(2001).Modelling the Lettuce Growing Process by a Set of linear Systems. a ser publicado en el IMACS/IFAC M²SABI'01, Fourth International Symposium on Mathematical Modelling and Simulation in Agricultural and Bio-Industries, Hifa, Israel, 12-14 June 2001
- [12] Campbell S. L. (1982). Singular Systems of Diff. Equations II. *Ed. Pitman, London*.
- [13] Cobb D.(1984).Controllability, Observability and Duality in Singular Systems. *IEEE trans. on Automat. Contr.*, AC-29, 12, pp. 1076-1082.
- [14] Farquhar, G.D. S von Caemmerer and J.A. Berry, (1980).A biochemical model of photosynthetic CO₂ assimilation in leaves of C₃ species. *Planta*, 149: 78-90.
- [15] Fliess M.(1990). Some Basic Structural Properties of Generalized Linear Systems. *Systems and Control Letters*, Vol 15, pp. 391-396.
- [16] Frankowska H.(1990).On Controllability and Observability of Implicit Systems. *Systems and Control Letters*, Vol 14, pp. 219-225.
- [17] Gantmacher F. R.(1959). *The Theory of Matrices*, Vol II. Ed. Chelsea Pub. Co.
- [18] Goudriann J. and van Laar H. H.(1994).Modelling Potential Crop Growth Processes. *Current Issues In Production Ecology*, Vol II. Ed. Kluwer Ac. Pub.
- [19] Heemels W.P.M.H., Schumacher J.M. and Weiland S. (2000). *Linear complementarity Systems* To appear in SIAM Journal on Applied Mathematics.
- [20] Hunt R. (1982). Plant Growth Curves: The Functional Approach to Plant Growth Analysis. *Ed.Edward Arnold*, ISBN O 7131 2844 5.
- [21] Kirk D. E.(1970). Optimal Control Theory. *Ed. Prentice Hall. Englewood Cliffs, New Jersey*.

- [22] Kokotovic P. V., Kalil H. K., O'Reilly J.,(1986). Singular Perturbation Methods in Control: Analysis and Design. Ed. *Academic Press London*
- [23] Kuijper M. and Schumacher J.M. (1990). Realization of autoregressive equations in pencil and descriptor form. *SIAM J. Control Optimiz.*, Vol 28, pp. 1162-1189.
- [24] Kucera V., Zagalak P. (1988). Towards a Fundamental Theorem of State Feedback for Singular Systems. *Automatica*, Vol. 24, No 5, pp. 653-658.
- [25] Lewis F .L. (1992). A Tutorial on the Geometric Analysis of Linear Time-invariant Implicit Systems. *Automatica*, Vol. 28, No.1, pp 119-137.
- [26] Lewis F .L. (1986). A Survey of Linear Singular Systems. *Circuits, Systems and Signal Process*, Vol. 5, No.1, pp 3-36.
- [27] Lebret G., Loiseau J.J. (1994). Proportional and Proportional-Derivative Canonical Forms for Descriptor Systems with Outputs. *Automatica*, Vol. 30, No.5, pp. 847-864.
- [28] Luenberger D. (1969). Optimization by Space Vector Methods. Ed. *John Wiley & Sons*
- [29] Malabre M. (1989). Generalized linear systems geometric and structural approaches. *Linear Algebra and its Applications*, Vol122/123/124, pp 591-62L
- [30] Munack A., Tantau H.-J. (1997). Mathematical and Control Applications in Agriculture and Horticulture 1997. *A Proceedings volume from the IFAC Workshop Hannover, Germany, 28 September-20 October 1997*. Ed. Pergamon.
- [31] Pennin de Vries, F.W.T.,A.H.M. Brunsting, H.H. van Laar, (1974).Products, Requeriments and Efficiency of biosynthesis: a quantitavive approach. *Journal of theoretical biology*, 45 339-377.
- [32] Rosenbrock H.H. (1970). State Space and Multivariable Theory. ed. *Wiley, New York*.
- [33] Rothwell J., Chotai A., Young P. (1997). Optimal Control of Crop Production in Horticultural Glasshouse *Mathematical and Control Applications in Agriculture and Horticulture 1997* (see reference [26]), pp. 103-108.

- [34] Stanghellini C.(1987).Transpiration of greenhouse crops. Ph Thesis, Wageningen Agricultural University, Wageningen.
- [35] Tap R.F ., van Willigenburg L.G., van Straten G., van Henten E.J.(1993). Optimal Control of Greenhouse Climate: Computation of the Influence of Fast and Slow Dynamics. *12th IFAC World Congress*, Vol 10, pp. 321-324, Sydney Australia 18-26, July.
- [36] Tap R.F ., van Willigenburg L.G., van Straten G., van Henten E.J.(1996). Receding horizon optimal control of greenhouse climate based on the lazy man weather prediction. *13th IFAC Triennial World Congress*, Vol 4a-01 3, pp. 387-392, San Francisco.
- [37] Tap R.F ., van Straten G., van Willigenburg L.G. (1997). Comparison of Classical and Optimal Control of Greenhouse Tomato Crop Production. *Mathematical and Control Applications in Agriculture and Horticulture 1997* (see reference [26]), pp. 103-108.
- [38] Tchamitchian M. (1993). Optimal control applied to tomato crop. *ECC'93*, pp. 1348-1352, Groningen, The Netherlands.
- [39] Thornley J.H.M. and Johnson I.R. (1990). Plant and Crop Modelling: *A Mathematical Approach to Plant and Crop Phys.* Ed. Clarendon Press, ISBN 0 19 854160 0.
- [40] van Henten E.J. (1994). *Greenhouse Climate Management:An Optimal Control Approach*. Ph.D. Thesis, Wageningen Agricultural University, Wageningen The Netherlands, December 20, 1994.
- [41] van Henten E.J., Bontsema J. (1992). Singular Perturbation Methods Applied to a Variational Problem in Greenhouse Climate Control. *31st IEEE-CDC*, pp. 3068-3069.
- [42] van Straten G., Bantum J.W., Tap R.F. (1997). Paradigms in Greenhouse Climate Control: On Hierarchy and Energy Savings *Mathematical and Control Applications in Agriculture and Horticulture 1997* (see reference [26]), pp. 307-312.
- [43] van Straten G., Tap R.F ., Willigenburg L.G. (1999). Sensitivity of On-Line Rhoc of Greenhouse Climate to Adjoint Variables for the Crop. *14th IFAC Triennial World Congress*, Vol K-4a-01-1, pp. 383-387, Beijing, P.R. China.

- [44] Verghese G.C., Lévy B.C. and Kailath T. (1981). A Generalized State-Space for Singular Systems. *IEEE-TAC*, Vol. AC-26, No.4, pp 811-831.
- [45] Yip E. L., Sincovec R. F. (1981) .Solvability, Controllability and Observability of cont. descriptor systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, Vol. AC-26, No 3, pp. 702-707.

Apéndice A

Cálculo de las condiciones iniciales para los sistemas escalera.

En este apéndice, se mostrara el método utilizado para encontrar las condiciones iniciales en las conmutaciones entre las zonas, para los sistemas escalera. Dados para la representación de la curva logística, así como para la representación de la curva esponencial.

A.1 Curva logística

A.1.1 Primera Zona $0 \leq t \leq t_1 < t^*$.

Sea la ecuación en función del tiempo del sistema escalera para la primer zona con $n=3$:

$$(p - r_m)(p - 2r_m)(p - 3r_m)w = p1(t) \quad (\text{A.1})$$

aplicando Transformada de Laplace a esta ecuación tenemos

$$w(s) = \frac{1}{(s - r_m)(s - 2r_m)(s - 3r_m)} ((s^2 - 6r_m s + 11r_m^2)w_0 + (s - 6r_m) \dot{w}_0 + \ddot{w}_0) \quad (\text{A.2})$$

aplicando fracciones parciales y la transformada inversa de Laplace tenemos

$$\begin{aligned}
w(t) &= \left(3w_0 - \frac{5\dot{w}_0}{2r_m} + \frac{\ddot{w}_0}{2r_m^2}\right)e^{r_mt} + \left(-3w_0 - \frac{4\dot{w}_0}{r_m} - \frac{\ddot{w}_0}{r_m^2}\right)e^{2r_mt} + \\
&+ \left(w_0 - \frac{3\dot{w}_0}{2r_m} + \frac{\ddot{w}_0}{2r_m^2}\right)e^{3r_mt}
\end{aligned} \tag{A.3}$$

utilizando el Teorema de la Proyección para resolver las condiciones iniciales tendremos.

Sea $x(t) \in L_2[0, t_1]$, y $\mathcal{M}_1 = [\{e^{r_mt}, e^{2r_mt}, e^{3r_mt}\}] \subset L_2[0, t_1]$, existe $m_0 \in \mathcal{M}_1$, tal que, $\|x - m_0\| \leq \|x - m\|$ para todo $m \in \mathcal{M}_1$ y además $(x - m_0) \perp \mathcal{M}_1$:

$$x(t) = w(t) = \frac{c_m}{1 + e^{-rk(t-t^*)}} \tag{A.4}$$

$$m = \alpha_0 e^{r_mt} + \beta_0 e^{2r_mt} + \gamma_0 e^{3r_mt} \in \mathcal{M}_1 \tag{A.5}$$

de (A.3) y (A.5) obtenemos

$$\begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \\ \gamma_0 \end{bmatrix} = W_1 \begin{bmatrix} w_0 \\ \dot{w}_0 \\ \ddot{w}_0 \end{bmatrix} \tag{A.6}$$

donde $W = \begin{bmatrix} 3 & -\frac{5}{2r_m} & \frac{1}{2r_m^2} \\ -3 & -\frac{4}{r_m} & -\frac{1}{r_m^2} \\ 1 & -\frac{3}{2r_m} & \frac{1}{2r_m^2} \end{bmatrix}$, note que $\det = -\frac{15}{2r_m^3} \neq 0$.

por lo que el Teorema de Proyección implica:

$$\begin{aligned}
(x \mid e^{r_mt}) &= \alpha_0(e^{r_mt} \mid e^{r_mt}) + \beta_0(e^{2r_mt} \mid e^{r_mt}) + \gamma_0(e^{3r_mt} \mid e^{r_mt}) \\
(x \mid e^{2r_mt}) &= \alpha_0(e^{r_mt} \mid e^{2r_mt}) + \beta_0(e^{2r_mt} \mid e^{2r_mt}) + \gamma_0(e^{3r_mt} \mid e^{2r_mt}) \\
(x \mid e^{3r_mt}) &= \alpha_0(e^{r_mt} \mid e^{3r_mt}) + \beta_0(e^{2r_mt} \mid e^{3r_mt}) + \gamma_0(e^{3r_mt} \mid e^{3r_mt})
\end{aligned} \tag{A.7}$$

donde $(y \mid z)$, es el producto interno: $\int_0^{t_1} y(t)z(t)dt$, esto es,

$$\int_0^{t_1} x e^{r_mt} dt = \alpha_0 \int_0^{t_1} (e^{2r_mt}) dt + \beta_0 \int_0^{t_1} (e^{3r_mt}) dt + \gamma_0 \int_0^{t_1} (e^{4r_mt}) dt$$

$$\begin{aligned}\int_0^{t_1} x e^{2r_m t} dt &= \alpha_0 \int_0^{t_1} (e^{3r_m t}) dt + \beta_0 \int_0^{t_1} (e^{4r_m t}) dt + \gamma_0 \int_0^{t_1} (e^{5r_m t}) dt \\ \int_0^{t_1} x e^{3r_m t} dt &= \alpha_0 \int_0^{t_1} (e^{4r_m t}) dt + \beta_0 \int_0^{t_1} (e^{5r_m t}) dt + \gamma_0 \int_0^{t_1} (e^{6r_m t}) dt\end{aligned}\quad (\text{A.8})$$

utilizando Matlab se resolvieron las ecuaciones para α_0, β_0 y γ_0 , y aplicando en (A.6) se obtuvo

$$\begin{aligned}w_{01} &= 0.0011056 \\ \dot{w}_{01} &= 0.000124065 \\ \ddot{w}_{01} &= 0.000013837\end{aligned}\quad (\text{A.9})$$

A.1.2 Segunda Zona $t_1 \leq t \leq t_2$.

Sea la ecuación en función del tiempo del sistema escalera para la primer zona

$$p(p + r_m)w = c_m \frac{r_m^2}{4} \quad (\text{A.10})$$

aplicando Transformada de Laplace a esta ecuación tenemos

$$w(s) = \frac{w_0}{s} + \frac{\dot{w}_0}{s(s + r_m)} + \frac{c_m r_m^2}{4} \frac{1}{s^2(s + r_m)} \quad (\text{A.11})$$

aplicando fracciones parciales y la transformada inversa de Laplace tenemos

$$w(t) - \frac{c_m r_m}{4} t = (w_0 - \frac{\dot{w}_0}{r_m} + \frac{c_m}{4}) + (\frac{\dot{w}_0}{r_m} - \frac{c_m}{4}) e^{-r_m t} \quad (\text{A.12})$$

utilizando el Teorema de la Proyección para resolver las condiciones iniciales tendremos.

Sea $x(t) \in L_2[t_1, t_2]$, y $\mathcal{M}_2 = [\{1, e^{-r_m t}\}] \subset L_2[t_1, t_2]$, existe $m_0 \in \mathcal{M}_2$, tal que, $\|x - m_0\| \leq \|x - m\|$ para todo $m \in \mathcal{M}_2$ y además $(x - m_0) \perp \mathcal{M}_2$

$$x = \frac{c_m}{1 + e^{-rk(t-t^*)}} - \frac{c_m r_m}{4} t \quad (\text{A.13})$$

$$m = \alpha_1 + \beta_1 e^{-r_m t} \in \mathcal{M}_2 \quad (\text{A.14})$$

de (A.3) y (A.5) obtenemos

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = W_2 \begin{bmatrix} w_{02} \\ \dot{w}_{02} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{c_m}{4} \\ -\frac{c_m}{4} \end{bmatrix} \quad (\text{A.15})$$

donde $W_2 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{r_m} \\ 0 & \frac{1}{r_m} \end{bmatrix}$, note que $\det = \frac{1}{r_m} \neq 0$
 por lo que el Teorema de la Proyección implica:

$$\begin{aligned} (x \mid 1) &= \alpha_1(1 \mid 1) + \beta_1(1 \mid e^{-r_m t}) \\ (x \mid e^{-r_m t}) &= \alpha_1(1 \mid e^{-r_m t}) + \beta_1(e^{-r_m t} \mid e^{-r_m t}) \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

donde $(y \mid z)$, es el producto interno: $\int_{t_1}^{t_2} y(t)z(t)dt$, esto es,

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} x dt &= \alpha_1 \int_{t_1}^{t_2} dt + \beta_1 \int_{t_1}^{t_2} (e^{-r_m t}) dt \\ \int_{t_1}^{t_2} x e^{2r_m t} dt &= \alpha_1 \int_{t_1}^{t_2} (e^{-r_m t}) dt + \beta_1 \int_{t_1}^{t_2} (e^{-2r_m t}) dt \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

utilizando Matlab se resolvieron las ecuaciones para α_1 y β_1 , y aplicando en (A.15) se obtuvo

$$\begin{aligned} w_{02} &= -0.0648521 \\ \dot{w}_{02} &= -0.0011022 \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

A.1.3 Tercera Zona $t \geq t_2 > t^*$,

Sea la ecuación en función del tiempo del sistema escalera para la primer zona con $\bar{n}=2$:

$$(p + r_m)(p + 2r_m)w = (2!)c_m r_m^2 \quad (\text{A.19})$$

aplicando Transformada de Laplace a esta ecuación tenemos

$$w(s) = \frac{1}{(s + r_m)(s + 2r_m)} ((s + 3r_m)w_0 + \dot{w}_0 + 2c_m r_m^2) \quad (\text{A.20})$$

aplicando fracciones parciales y la transformada inversa de Laplace tenemos

$$w(t) - c_m = (2w_0 + \frac{\dot{w}_0}{2r_m} - 2c_m)e^{-r_mt} + (-w_0 - \frac{\dot{w}_0}{r_m} + c_m)e^{-2r_mt} \quad (\text{A.21})$$

utilizando el Teorema de la Proyección para resolver las condiciones iniciales tendremos.

Sea $x(t) \in L_2[t_2, T]$, y $\mathcal{M}_3 = \{[e^{-r_mt}, e^{-2r_mt}]\} \subset L_2[t_2, T]$, existe $m_0 \in \mathcal{M}_3$, tal que, $\|x - m_0\| \leq \|x - m\|$ para todo $m \in \mathcal{M}_3$ y además $(x - m_0) \perp \mathcal{M}_3$:

$$x(t) = \frac{c_m e^{-rk(t^*-t)}}{1 + e^{-rk(t^*-t)}} - c_m \quad (\text{A.22})$$

$$m = \alpha_2 e^{-r_mt} + \beta_2 e^{-2r_mt} \in \mathcal{M}_3 \quad (\text{A.23})$$

de (A.21) y (A.23) obtenemos

$$\begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = W_3 \begin{bmatrix} w_0 \\ \dot{w}_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2c_m \\ c_m \end{bmatrix} \quad (\text{A.24})$$

donde $W_3 = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{r_m} \\ -1 & -\frac{1}{r_m} \end{bmatrix}$, note que $\det = -\frac{1}{r_m} \neq 0$.

por lo que el Teorema de Proyección implica:

$$\begin{aligned} (x \mid e^{-r_mt}) &= \alpha_2(e^{-r_mt} \mid e^{-r_mt}) + \beta_2(e^{-2r_mt} \mid e^{-r_mt}) \\ (x \mid e^{-2r_mt}) &= \alpha_2(e^{-r_mt} \mid e^{-2r_mt}) + \beta_2(e^{-2r_mt} \mid e^{-2r_mt}) \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

donde $(y \mid z)$, es el producto interno: $\int_{t_2}^T y(t)z(t)dt$, esto es,

$$\begin{aligned} \int_{t_2}^T x e^{-r_mt} dt &= \alpha_2 \int_{t_2}^T (e^{-2r_mt}) dt + \beta_2 \int_{t_2}^T (e^{-3r_mt}) dt \\ \int_{t_2}^T x e^{-2r_mt} dt &= \alpha_2 \int_{t_2}^T (e^{-3r_mt}) dt + \beta_2 \int_{t_2}^T (e^{-4r_mt}) dt \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

utilizando Matlab se resolvieron las ecuaciones para α_2, β_2 y γ_2 , y aplicando en (A.24) se obtuvo

$$w_{03} = 1.44 \times 10^3$$

$$\dot{w}_{03} = -3.28 \times 10^2 \quad (\text{A.27})$$

A.2 Curva Expo-Lineal

A.2.1 Primera Zona $0 \leq t \leq t_1 < t_b$.

Sea la ecuación en función del tiempo del sistema escalera para la primer zona con $n=3$:

$$p(p - r_m)(p - 2r_m)(p - 3r_m)w = p1(t) \quad (\text{A.28})$$

aplicando Transformada de Laplace a esta ecuación tenemos

$$w(s) = \frac{w_0}{s} + \frac{1}{s(s - r_m)(s - 2r_m)(s - 3r_m)} ((s^2 - 6r_m s + 11r_m^2) \dot{w}_0 + (s - 6r_m) \ddot{w}_0 + \ddot{\ddot{w}}_0) \quad (\text{A.29})$$

aplicando fracciones parciales y la transformada inversa de Laplace tenemos

$$\begin{aligned} w(t) = & \left(w_0 - \frac{11 \dot{w}_0}{6r_m} + \frac{\ddot{w}_0}{r_m^2} - \frac{\ddot{\ddot{w}}_0}{6r_m^3} \right) 1 + \left(-\frac{3 \dot{w}_0}{r_m} - \frac{5 \ddot{w}_0}{2r_m^2} + \frac{\ddot{\ddot{w}}_0}{2r_m^3} \right) e^{r_m t} + \\ & + \left(\frac{3 \dot{w}_0}{2r_m} + \frac{2 \ddot{w}_0}{r_m^2} - \frac{\ddot{\ddot{w}}_0}{2r_m^3} \right) e^{2r_m t} + \left(\frac{\dot{w}_0}{3r_m} + \frac{\ddot{w}_0}{2r_m^2} - \frac{\ddot{\ddot{w}}_0}{6r_m^3} \right) e^{3r_m t} \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

utilizando el Teorema de la Proyección para resolver las condiciones iniciales tendremos.

Sea $x(t) \in L_2[0, t_1]$, y $\mathcal{M}_{1a} = \{[1, e^{r_m t}, e^{2r_m t}, e^{3r_m t}]\} \subset L_2[0, t_1]$, existe $m_0 \in \mathcal{M}_{1a}$, tal que, $\|x - m_0\| \leq \|x - m\|$ para todo $m \in \mathcal{M}_{1a}$ y además $(x - m_0) \perp \mathcal{M}_{1a}$

$$x = \frac{c_m}{r_m} \ln \left(1 + e^{r_m(t-t_b)} \right) \quad (\text{A.31})$$

$$m = \alpha_0 + \beta_0 e^{r_m t} + \gamma_0 e^{2r_m t} + \delta_0 e^{3r_m t} \in \mathcal{M}_{1a} \quad (\text{A.32})$$

de (A.30) y (A.32) obtenemos

$$\begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \\ \gamma_0 \\ \delta_0 \end{bmatrix} = M_1 \begin{bmatrix} w_0 \\ \dot{w}_0 \\ \ddot{w}_0 \\ \ddot{\dot{w}}_0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.33})$$

donde $M_1 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{11}{6r_m} & \frac{1}{r_m^2} & -\frac{1}{6r_m^3} \\ 0 & -\frac{3}{r_m} & -\frac{5}{2r_m^2} & \frac{1}{2r_m^3} \\ 0 & \frac{3}{2r_m} & \frac{2}{r_m^2} & -\frac{1}{2r_m^3} \\ 0 & \frac{1}{3r_m} & \frac{1}{2r_m^2} & -\frac{1}{6r_m^3} \end{bmatrix}$, note que $\det = \frac{1}{12r_m^6} \neq 0$

por lo que el Teorema de Proyección implica:

$$\begin{aligned} (x \mid 1) &= \alpha_0(1 \mid 1) + \beta_0(e^{r_m t} \mid 1) + \gamma_0(e^{2r_m t} \mid 1) + \delta_0(e^{3r_m t} \mid 1) \\ (x \mid e^{r_m t}) &= \alpha_0(1 \mid e^{r_m t}) + \beta_0(e^{r_m t} \mid e^{r_m t}) + \gamma_0(e^{2r_m t} \mid e^{r_m t}) + \delta_0(e^{3r_m t} \mid e^{r_m t}) \quad (\text{A.34}) \\ (x \mid e^{2r_m t}) &= \alpha_0(1 \mid e^{2r_m t}) + \beta_0(e^{r_m t} \mid e^{2r_m t}) + \gamma_0(e^{2r_m t} \mid e^{2r_m t}) + \delta_0(e^{3r_m t} \mid e^{2r_m t}) \\ (x \mid e^{3r_m t}) &= \alpha_0(1 \mid e^{3r_m t}) + \beta_0(e^{r_m t} \mid e^{3r_m t}) + \gamma_0(e^{2r_m t} \mid e^{3r_m t}) + \delta_0(e^{3r_m t} \mid e^{3r_m t}) \end{aligned}$$

donde $(y \mid z)$, es el producto interno: $\int_0^{t_1} y(t)z(t)dt$, esto es,

$$\begin{aligned} \int_0^{t_1} x dt &= \alpha_0 \int_0^{t_1} dt + \beta_0 \int_0^{t_1} (e^{r_m t})dt + \gamma_0 \int_0^{t_1} (e^{2r_m t})dt + \delta_0 \int_0^{t_1} (e^{3r_m t})dt \quad (\text{A.35}) \\ \int_0^{t_1} x e^{r_m t} dt &= \alpha_0 \int_0^{t_1} (e^{r_m t})dt + \beta_0 \int_0^{t_1} (e^{2r_m t})dt + \gamma_0 \int_0^{t_1} (e^{3r_m t})dt + \delta_0 \int_0^{t_1} (e^{4r_m t})dt \\ \int_0^{t_1} x e^{2r_m t} dt &= \alpha_0 \int_0^{t_1} (e^{2r_m t})dt + \beta_0 \int_0^{t_1} (e^{3r_m t})dt + \gamma_0 \int_0^{t_1} (e^{4r_m t})dt + \delta_0 \int_0^{t_1} (e^{5r_m t})dt \\ \int_0^{t_1} x e^{3r_m t} dt &= \alpha_0 \int_0^{t_1} (e^{3r_m t})dt + \beta_0 \int_0^{t_1} (e^{4r_m t})dt + \gamma_0 \int_0^{t_1} (e^{5r_m t})dt + \delta_0 \int_0^{t_1} (e^{6r_m t})dt \end{aligned}$$

utilizando Matlab se resolvieron las ecuaciones para α_0, β_0 y γ_0 , y aplicando en (A.33) se obtuvo

$$\begin{aligned} w_{01} &= 6.6605148 \times 10^{-3}; \\ \dot{w}_{01} &= 8.44049 \times 10^{-4}; \\ \ddot{w}_{01} &= 1.160516 \times 10^{-4}; \\ \ddot{\dot{w}}_{01} &= 1.155301 \times 10^{-5}. \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

A.2.2 Segunda Zona $t_1 \leq t \leq t_2$.

Sea la ecuación en función del tiempo del sistema escalera para la primer zona

$$p^2(p + r_m)w = c_m \frac{r_m^2}{4} \quad (\text{A.37})$$

aplicando Transformada de Laplace a esta ecuación tenemos

$$w(s) = \frac{w_0}{s} + \frac{\dot{w}_0}{s^2} + \frac{\ddot{w}_0}{s^2(s + r_m)} + \frac{c_m r_m^2}{4} \frac{1}{s^3(s + r_m)} \quad (\text{A.38})$$

aplicando fracciones parciales y la transformada inversa de Laplace tenemos

$$w(t) - \frac{c_m r_m}{8} t^2 = (w_0 - \frac{\dot{w}_0}{r_m^2} + \frac{c_m}{4r_m})1 + (\dot{w}_0 + \frac{\ddot{w}_0}{r_m} - \frac{c_m}{4})t + (\frac{\ddot{w}_0}{r_m^2} - \frac{c_m}{4r_m})e^{-r_m t} \quad (\text{A.39})$$

utilizando el Teorema de la Proyección para resolver las condiciones iniciales tendremos.

Sea $x(t) \in L_2[t_1, t_2]$, y $\mathcal{M}_{2a} = [\{1, t, e^{-kr_m t}\}] \subset L_2[t_1, t_2]$, existe $m_0 \in \mathcal{M}_{2a}$, tal que, $\|x - m_0\| \leq \|x - m\|$ para todo $m \in \mathcal{M}_{2a}$ y además $(x - m_0) \perp \mathcal{M}_{2a}$. y además $k = 1$.

$$x(t) = \frac{c_m}{r_m} \ln(1 + e^{r_m(t-t_b)}) - \frac{c_m r_m}{4} t^2 \quad (\text{A.40})$$

$$m = \alpha_1 + \beta_1 t + e^{-r_m t} \in \mathcal{M}_{2a} \quad (\text{A.41})$$

de (A.39) y (A.41) obtenemos

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{bmatrix} = M_2 \begin{bmatrix} w_0 \\ \dot{w}_0 \\ \ddot{w}_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{c_m}{4r_m} \\ -\frac{c_m}{4} \\ -\frac{c_m}{4r_m} \end{bmatrix} \quad (\text{A.42})$$

donde $M_2 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{r_m^2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{r_m} \\ 0 & 0 & \frac{1}{r_m^2} \end{bmatrix}$, note que $\det = \frac{1}{r_m^2} \neq 0$

por lo que el Teorema de Proyección implica:

$$\begin{aligned}
 (x | 1) &= \alpha_1(1 | 1) + \beta_1(t | 1) + (e^{-r_m t} | 1) \\
 (x | t) &= \alpha_1(1 | t) + \beta_1(t | t) + \gamma_1(e^{-r_m t} | t) \\
 (x | e^{-r_m t}) &= \alpha_1(1 | e^{-r_m t}) + \beta_1(t | e^{-r_m t}) + \gamma_1(e^{-r_m t} | e^{-r_m t})
 \end{aligned} \tag{A.43}$$

dónde $(y | z)$, es el producto interno $:\int_{t_1}^{t_2} y(t)z(t)dt$, esto es,

$$\begin{aligned}
 \int_{t_1}^{t_2} x dt &= \alpha_1 \int_{t_1}^{t_2} dt + \beta_1 \int_{t_1}^{t_2} t dt + \gamma_1 \int_{t_1}^{t_2} (e^{-r_m t}) dt \\
 \int_{t_1}^{t_2} x t dt &= \alpha_1 \int_{t_1}^{t_2} t dt + \beta_1 \int_{t_1}^{t_2} t^2 dt + \gamma_1 \int_{t_1}^{t_2} (t e^{-r_m t}) dt \\
 \int_{t_1}^{t_2} x e^{2r_m t} dt &= \alpha_1 \int_{t_1}^{t_2} (e^{-r_m t}) dt + \beta_1 \int_{t_1}^{t_2} (t e^{-r_m t}) dt + \gamma_1 \int_{t_1}^{t_2} (e^{-2r_m t}) dt
 \end{aligned} \tag{A.44}$$

utilizando Matlab se resolvieron las ecuaciones para α_1 y β_1 , y aplicando en (A.42) se obtuvo

$$\begin{aligned}
 w_{02} &= 4.899509 \times 10^{-2}; \\
 \dot{w}_{02} &= -2.4761114 \times 10^{-2}; \\
 \ddot{w}_{02} &= 2.882884 \times 10^{-3}.
 \end{aligned} \tag{A.45}$$

A.2.3 Tercera Zona $t \geq t_2 > t_b$,

Sea la ecuación en función del tiempo del sistema escalera para la primer zona con $\bar{n}=2$:

$$p(p + r_m)(p + 2r_m)w = (2!)c_m r_m^2 \tag{A.46}$$

aplicando Transformada de Laplace a esta ecuación tenemos

$$w(s) = \frac{w_0}{s} + \frac{1}{s(s + r_m)(s + 2r_m)} ((s + 3r_m) \dot{w}_0 + \ddot{w}_0 + 2c_m r_m^2) \tag{A.47}$$

aplicando fracciones parciales y la transformada inversa de Laplace tenemos

$$\begin{aligned}
w(t) - c_m t &= \left(w_0 + \frac{3\dot{w}_0}{2r_m^2} + \frac{\ddot{w}_0}{2r_m^2} - \frac{3c_m}{2r_m} \right) + \left(\frac{(r_m-3)\dot{w}_0}{r_m^2} - \frac{\ddot{w}_0}{r_m^2} + \frac{2c_m}{r_m} \right) e^{-r_m t} + \\
&+ \left(-\frac{(2r_m-3)\dot{w}_0}{2r_m^2} + \frac{\ddot{w}_0}{2r_m^2} - \frac{c_m}{2r_m} \right) e^{-2r_m t}
\end{aligned} \tag{A.48}$$

utilizando el Teorema de la Proyección para resolver las condiciones iniciales tendremos.

Sea $x(t) \in L_2[t_2, T]$, y $\mathcal{M}_{3a} = \{[1, e^{-r_m t}, e^{-2r_m t}]\} \subset L_2[t_2, T]$, existe $m_0 \in \mathcal{M}_{3a}$, tal que, $\|x - m_0\| \leq \|x - m\|$ para todo $m \in \mathcal{M}_{3a}$ y además $(x - m_0) \perp \mathcal{M}_{3a}$

$$x = \frac{c_m}{r_m} \ln(1 + e^{r_m(t-t_b)}) - c_m t \tag{A.49}$$

$$m = \alpha_2 + \beta_2 e^{-r_m t} + \gamma_2 e^{-2r_m t} \in \mathcal{M}_{3a} \tag{A.50}$$

de (A.48) y (A.50) obtenemos

$$\begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} = M_3 \begin{bmatrix} w_0 \\ \dot{w}_0 \\ \ddot{w}_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{3c_m}{2r_m} \\ \frac{2c_m}{r_m} \\ -\frac{c_m}{2r_m} \end{bmatrix} \tag{A.51}$$

donde $M_3 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3\dot{w}_0}{2r_m^2} & \frac{\ddot{w}_0}{2r_m^2} \\ 0 & \frac{(r_m-3)}{r_m^2} & -\frac{1}{r_m^2} \\ 0 & -\frac{(2r_m-3)}{2r_m^2} & +\frac{1}{2r_m^2} \end{bmatrix}$, note que $\det = -\frac{1}{2r_m^3} \neq 0$

por lo que el Teorema de Proyección implica:

$$\begin{aligned}
(x \mid 1) &= \alpha_2(1 \mid 1) + \beta_2(e^{-r_m t} \mid 1) + \gamma_2(e^{-2r_m t} \mid 1) \\
(x \mid e^{-r_m t}) &= \alpha_2(1 \mid e^{-r_m t}) + \beta_2(e^{-r_m t} \mid e^{-r_m t}) + \gamma_2(e^{-2r_m t} \mid e^{-r_m t}) \\
(x \mid e^{-2r_m t}) &= \alpha_2(1 \mid e^{-2r_m t}) + \beta_2(e^{-r_m t} \mid e^{-2r_m t}) + \gamma_2(e^{-2r_m t} \mid e^{-2r_m t})
\end{aligned} \tag{A.52}$$

donde $(y | z)$, es el producto interno $:\int_{t_2}^T y(t)z(t)dt$, esto es,

$$\begin{aligned}
 \int_{t_2}^T x dt &= \alpha_2 \int_{t_2}^T dt + \beta_0 \int_{t_2}^T (e^{-r_m t}) dt + \gamma_2 \int_{t_2}^T (e^{-2r_m t}) dt \\
 \int_{t_2}^T x e^{-r_m t} dt &= \alpha_2 \int_{t_2}^T (e^{-r_m t}) dt + \beta_2 \int_{t_2}^T (e^{-2r_m t}) dt + \gamma_2 \int_{t_2}^T (e^{-3r_m t}) dt \quad (A.53) \\
 \int_{t_2}^T x e^{-2r_m t} dt &= \alpha_2 \int_{t_2}^T (e^{-2r_m t}) dt + \beta_2 \int_{t_2}^T (e^{-3r_m t}) dt + \gamma_2 \int_{t_2}^T (e^{-4r_m t}) dt
 \end{aligned}$$

utilizando Matlab se resolvieron las ecuaciones para α_2, β_2 y γ_2 , y aplicando en (A.51) se obtuvo

$$\begin{aligned}
 w_{03} &= 9.44382 \times 10^{-3}; \\
 \dot{w}_{03} &= 4.029965 \times 10^{-2}; \\
 \ddot{w}_{03} &= -1.0370493 \times 10^{-1}.
 \end{aligned} \quad (A.54)$$

Apéndice B

Obtención de los parametros de la función Expo-Lineal.

Para obtener los parametros que describen la función expo-lineal

$$w(t) = \frac{c_m}{r_m} \ln(1 + e^{r_m(t-t_b)}) \quad (\text{B.1})$$

es necesario, encontrar los valores de c_m , r_m y t_b . Para esto, se procede como sigue:

1.-haciendo $\frac{c_m}{r_m} = \alpha$; $r_m = \beta$; y sustituyendo en (B.1),

$$w(t) = \alpha \ln(1 + e^{\beta(t-t_b)}) \quad (\text{B.2})$$

despejando el termino $\beta(t-t_b)$:

$$\ln[e^{w/\alpha} - 1] = \beta(t-t_b) \quad (\text{B.3})$$

en la figura (fig. B1) se muestra el comportamiento de (B.3)

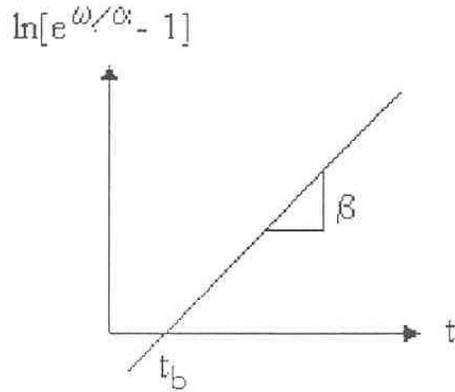


Figura B1. - Comportamiento de (B.3)

evaluando para $\beta(t - t_b) = \ln[e^{w/\alpha} - 1] = 0$, tendremos que $t_b = 24.5$; y usando el hecho que $\beta(t - t_b) = 1$, tendremos $t \approx 31.6$ obtenemos entonces $\beta = 0.1408 = r_m$.

Analizando para $w(t_b) = \alpha \ln(2)$,

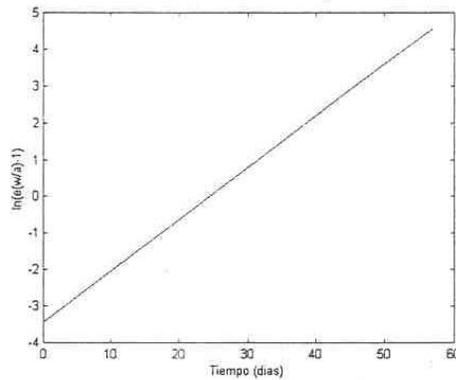


Figura B2.- Comportamiento de (B.3), para la simulación del modelo (2.48), con PAR teórica.

obtenemos $\alpha = 0.0295$; lo que implica que $c_m = 0.0041536$.

Apéndice C

El Método del Paso Descendente.

[21, Kirk D. E.]

En este algoritmo el problema es visualizado como escalar una colina. Supongamos que la función f esta definida con valles y cimas en un espacio tridimensional $y_1, y_2, f(y_1, y_2)$. Una forma de encontrar el punto más bajo (alto) de una colina, es empezar desde un punto de prueba $y^{(0)}$ y escalar hacia abajo (arriba) hasta que el punto y^* sea alcanzado (Mínimo o Máximo).

Minimización de funcionales por el método de paso descendete

El algoritmo del paso descendente ha sido utilizado para encontrar solución a problemas de control óptimo. Supongase que existe una trayectoria de control nominal $u^{(i)}(t), t \in [t_0, t_f]$, conocida y usada para resolver la ecuación diferencial

$$\dot{x}^{(i)}(t) = a(x^{(i)}(t), u^{(i)}(t), t) \quad (C.1)$$

$$\dot{\lambda}^{(i)}(t) = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}(x^{(i)}(t), u^{(i)}(t), \lambda^{(i)}(t), t) \quad (C.2)$$

tal que la trayectoria nominal estado-costo $x^{(i)}, \lambda^{(i)}$ satisfaciendo las condiciones de limite

$$x^{(i)}(t_0) = x_0 \quad (C.3)$$

$$\lambda^{(i)}(t_f) = \frac{\partial h}{\partial x}(x^{(i)}(t_f)). \quad (C.4)$$

Si esta trayectoria de control también satisface

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} \left(x^{(i)}(t), u^{(i)}(t), \lambda^{(i)}(t), t \right) = 0, \quad t \in [t_0, t_f], \quad (\text{C.5})$$

entonces $u^{(i)}(t)$, $x^{(i)}(t)$ y $\lambda^{(i)}(t)$ son extremos. Suponga que la ecuación (C.5) no es satisfecha; la variación del argumento de la funcional J_a sobre la historia de estado-costo-control nominal es:

$$\begin{aligned} \delta J_a = & \left[\frac{\partial h}{\partial x} \left(x^{(i)}(t_f) \right) - \lambda^{(i)}(t) \right]^T \delta x(t_f) \\ & + \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left[\dot{\lambda}^{(i)}(t) + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \left(x^{(i)}(t), u^{(i)}(t), \lambda^{(i)}(t), t \right) \right]^T \delta x(t) \right. \\ & + \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} \left(x^{(i)}(t), u^{(i)}(t), \lambda^{(i)}(t), t \right) \right]^T \delta u(t) \\ & \left. + \left[a \left(x^{(i)}(t), u^{(i)}(t), t \right) - \dot{x}^{(i)}(t) \right]^T \delta \lambda(t) \right\} dt, \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

donde $\delta x(t) \triangleq x^{(i+1)}(t) - x^{(i)}(t)$, $\delta u(t) \triangleq u^{(i+1)}(t) - u^{(i)}(t)$ y $\delta p(t) \triangleq \lambda^{(i+1)}(t) - \lambda^{(i)}(t)$.

Si (C.1) - (C.4) son satisfechas, entonces

$$\delta J_a = \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} \left(x^{(i)}(t), u^{(i)}(t), \lambda^{(i)}(t), t \right) \right]^T \delta u(t) dt. \quad (\text{C.7})$$

δJ_a es la parte lineal del incremento $\Delta J_a \triangleq J(u^{(i+1)}) - J(u^{(i)})$, y si la norma de δu , $\|u^{(i+1)} - u^{(i)}\|$, es pequeña, el signo de ΔJ_a será determinado por el signo de δJ_a , entonces nuestra meta es minimizar J_a , y hacer ΔJ_a negativa. Si seleccionamos el cambio en u como:

$$\delta u(t) = u^{(i+1)}(t) - u^{(i)}(t) = -\tau \frac{\partial \mathcal{H}^{(i)}}{\partial u}(t), \quad t \in [t_0, t_f], \quad (\text{C.8})$$

con $\tau > 0$, entonces

$$\delta J_a = -\tau \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial \mathcal{H}^{(i)}}{\partial u}(t) \right]^T \left[\frac{\partial \mathcal{H}^{(i)}}{\partial u}(t) \right] dt \leq 0, \quad (\text{C.9})$$

¹De aquí en adelante denotaremos $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} \left(x^{(i)}(t), u^{(i)}(t), \lambda^{(i)}(t), t \right)$ por $\frac{\partial \mathcal{H}^{(i)}}{\partial u}(t)$

²Consideraremos a τ como constante, sin embargo no es un requerimiento.

Seleccionando δu de esta manera, con $\|\delta u\|$ suficientemente pequeña, aseguramos que cada valor de la medida del costo de desempeño sera al menos tan pequeña como el valor anterior, cuando J_a alcance un mínimo (relativo) el vector $\frac{\partial \mathcal{H}^{(i)}}{\partial u}$ sera igual a zero dentro del intervalo $t \in [t_0, t_f]$,

Para la implementación de este algoritmo, se tiene:

- 1.- Poner el indice de la interacción $i = 0$; elegir una aproximación discreta de la trayectoria de la ley de control $u^{(0)}(t)$, $t \in [t_0, t_f]$ satisfaciendo las restricciones de control.
- 2.- Integrar las ecuaciones de estado $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), v(t), c, t)$ de t_0 a t_f usando la trayectoria de control nominal $u^{(i)}(t)$, y condiciones iniciales $x(t_0) = x_0$.
- 3.- Calcular el indice de desempeño $J^{(i)}$.
- 4.- Integrar la ecuación de costo $-\dot{\lambda} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}(x^{(i)}, \lambda^{(i)}, u^{(i)}, t)$, desde t_f a t_0 , usando las trayectorias nominales de estado y control $x^{(i)}(t)$, $u^{(i)}(t)$. Donde \mathcal{H} , es el hamiltoniano de la función definido como:

$$\mathcal{H} = -g(x(t), u(t), t) + \lambda^T f(x(t), u(t), v(t), c, t)$$

- 5.- Calcular $\frac{\partial \mathcal{H}^{(i)}}{\partial x}(t)$, y también $\delta u_{j, \max}^{(i)}(t)$, $j = 1, \dots, m$, para toda $t \in [t_0, t_f]$

donde:

$$\delta u_{\max}(t) = \begin{cases} u_{\max}(t) - u^{(i)}(t) , & \text{si } \frac{\partial \mathcal{H}^{(i)}}{\partial x}(t) > 0, \\ u^{(i)}(t) - u_{\min}(t) , & \text{si } \frac{\partial \mathcal{H}^{(i)}}{\partial x}(t) < 0, \end{cases} \quad (\text{C.10})$$

- 6.- Usando $u^{(i+1)} = u^{(i)} + \sigma \frac{\partial \mathcal{H}^{(i)}}{\partial x} \delta u_{\max}^{(i)}(t)$, para seguir una linea de investigación para maximizar $J^{(i+1)}$,

donde $0 < \sigma \leq \sigma_{\max}$, y $\sigma_{\max} = \frac{1}{|\partial \mathcal{H}^{(i)} / \partial x|}$,

- 7.- Si $0 < J^{(i+1)} - J^{(i)} < \varepsilon$, almacenar la trayectoria de control $u^{(i+1)}$, y terminar las interacciones, si no, poner $i = i+1$, e ir al paso 2.

Apéndice D

Artículo Aceptado



Proceedings of
the Fourth International Symposium on Mathematical Modelling
and Simulation in Agricultural and Bio-Industries
(M²SABI'01)

12-14 June, 2001
Haifa, Israel

Proceedings

International Organizing Committee

National Organizing Committee

Conference Secretariat

Symposium Web Site

Topics

About IMACS

About IFAC

Co-sponsors

About these proceedings

INTERNATIONAL PROGRAM COMMITTEE

F. Abreu, Portugal	B. Norton, Northern Ireland
L. Albright, U.S.A.	T. Nybrant, Sweden
J.-P. Babary, France	H. Ramon, Belgium
G. Bayer, Austria	K. Roubelakis-Angelakis, Greece
G. Bot, The Netherlands	I. Schleifer, U.S.A.
J. Bear, Israel	I. Seginer, Israel
W. Day, U.K.	M. Sheintuch, Israel
J. De Baerdemaeker, Belgium	J. Staniskis, Lithuania
I. Farkas, Hungary	J. Stencl, Czech Republic
C. Gary, France	G. Stephanopoulos, U.S.A.
L. Gauthier, Canada	H.-J. Tantau, Germany
R. Hanus, Belgium	M. Tchamitchian, France
Y. Hashimoto, Japan	M. Tirrell, U.S.A.
B. K. Huang, U.S.A.	K. Toyoda, Japan
F. Kampers, The Netherlands	I. Troch, Austria
L. Kuchar, Poland	H. Unno, Japan
A. Kenig, Israel	J. Van Impe, Belgium
H.-P. Kläring, Germany	G. van Straten, The Netherlands
R. Larsen, Sweden	P. Young, U.K.

Modelling the lettuce growing process by a set of linear systems

M. Bonilla E., and A. Martínez G. *

Abstract

In this paper we present a procedure to approximate the crop dry weight production of the lettuce by a set of linear systems. This approximation is based on the fitting of a reference logistic function.

keywords: growing process, greenhouse climate control, agriculture, implicit systems, variable structure systems, linear systems

1 Introduction

One of the most important advances of the modern agriculture is due thanks to the use of mathematical models for describing the physiological behavior and the growing process of the plants (see Thornley and Johnson, 1990; for example). The incorporation of mathematical models in crop production has allowed the use of advances control techniques to climate control in greenhouses (see for example Munack and Tantau, 1997). The growth of crops in artificial environments is both qualitatively and quantitatively desirable from the perspective of both growers and consumers, and hence by controlling growth cycles and crop weight via control of climatic conditions, this will allow the optimization of crop growth and reliability in yield (Rothhell *et al*, 1997). Recently, optimal control techniques begins to be a powerful tool in crop productions in greenhouses, since this enables to increase the profit obtained from crop production along with the energy efficiency of greenhouses (Tap *et al*, 1997).

One of the most important researching on greenhouse climate management optimization has been done by van Henten (1994). In that work, van Henten applied an optimal control approach to the lettuce crop production. Due to the very nonlinearities present in the dynamical grow model, it was necessary to use computational algorithms in order to solve the Hamiltonian equation (see also van Henten and Bontsema, 1992). Some improvements have been done in the optimization of lettuce and tomato crop production, but they are also based on computational algorithms (see for example Rothwell *et al*, 1997; van Straten *et al*, 1997; van Straten *et al*, 1981; Tap *et al*, 1993; Tap *et al*, 1996; Tap *et al*, 1997; and Tchamitchian, 1993).

*CINVESTAV-IPN, Departamento de Control Automático. AP 14-740. México 07000, MEXICO. Tel.: (+)(52-5)-747-7000. FAX: (+)(52-5)-747-7002. e-mails: "mbonilla@enigma.red.cinvestav.mx" and "abecito@hotmail.com"

The aim of this paper is to present a procedure to model the lettuce growth process by a set of linear systems in order to avoid such computational algorithms. For this, we give, in Section 2, an overview about flat implicit systems, which are able to describe systems having a certain degree of freedom. Thanks to this degree of freedom it is possible to model and to control systems with an internal variable structure, for example systems which switches among a set of linear systems. In Section 3 we obtain a set of four linear systems for a given reference logistic function. In Section 4 we applied the results obtained in Section 3 to the lettuce growing model developed in the Ph.D. thesis work of van Henten; SIMULINK-MatLab simulations are provided. Finally, some concluding remarks are given.

2 An overview about Implicit Flat Systems

Rosenbrock (1970) was the first to introduce the Implicit Descriptions,

$$(1) \quad E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad , \quad y(t) = Cx(t) \quad ,$$

where $E : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, $B : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}$ and $C : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ are linear operators of appropriate dimensions, as a generalization of the standard State Space case ($E = I$). Since this introduction many people have payed attention to this broader class of systems with different points of view: *(i)* The Geometric Theory (e.g. Cobb, 1984; Armentano, 1986; Malabre, 1989; Lewis, 1992), *(ii)* The Time Domain Approach (e.g. Yip and Sincovec, 1981), *(iii)* The Laplace Transform (e.g. Verghese *et al.*, 1981; Bernhard, 1982; Kuijper and Schumacher, 1990), *(iv)* The Kronecker Theory (e.g. Lebret and Loiseau, 1994), *(v)* The Polynomial Approach (e.g. Kučera and Zagalak, 1988), *(vi)* The Differential Algebra (e.g. Fliess, 1990), and *(vii)* The Differential Inclusion Techniques (e.g. Frankowska, 1990).

Not only many interesting research problems have been solved but also some practical aspects of System Theory have been raised though this vision. In fact, it is now well recognized that Implicit Descriptions are able to describe a wide range of interesting external behaviors in System Theory (e.g. Verghese *et al.*, 1981; Campbell, 1982; Cobb, 1984; Aplevich, 1991; Lewis, 1986), namely, Proper Systems ($E=I$), Non Proper Systems with Derivative Actions, Restricted Input Systems, and Systems with Algebraic State Constraints (see Gantmacher, 1959).

In Bonilla and Malabre (1991), it was shown that when $\dim \mathcal{X} \leq \dim \mathcal{X}$, it is also possible to describe linear systems with an internal Variable Structure. Indeed, when $\dim \mathcal{X} < \dim \mathcal{X}$ and if the system is solvable (i.e. possesses at least one solution), solutions are generally non unique. In some sense there is a degree of freedom in (1), which can be used for instance to take into account a possible *structure variation* in an implicit way. Other kinds of structure variations have taken into account in Heemels *et al.* (2000) and in Başer and Schumacher (1998).

In the general case (matrices E and A not necessarily square) Frankowska (1990) characterized the controllable subspace using differential inclusion techniques. But in the case of non square (flat) E , A matrices one may be faced to controllable systems even in the absence of any input; this is possible because of the existence of the free descriptor variables (degree of freedom) acting as internal controllers.

In order to avoid such pathologies has been introduced in Bonilla *et al* (1994) the concept of *output dynamics assignment*, which guarantees controllability by means of the control input, following a proportional and derivative feedback.

Now, since up to now people do not know how to synthesize pure derivative actions, Bonilla *et al* (1993) have proposed a procedure for approximating the non proper control laws, as proposed in Bonilla *et al* (1994), by proper controllers guaranteeing internal stability (see also Bonilla *et al*, 1997, for a general study on this topic). Since the control law needs the knowledge of the descriptor variable (both the non proper controller and the proper one) it is necessary to estimate it. As the synthesis of a *descriptor variable* deeply depends on the knowledge of which *internal structure* is active, it has been proposed in Bonilla *et al* (2000) a *structure detector* based on a normalized gradient adaptation algorithm, projected along a given hyper-sphere, which aim is to identify in finite time which *internal structure* is present.

In order to try to complete the above control scheme, Bonilla and Malabre (2000) have introduced the so called "*ladder systems*", for which, though the input-output behavior can vary from a first order to a nth order system (depending on the position of the internal switches), the non square (flat) implicit description is unique. The ladder systems are a tool for synthesizing Implicit Flat Systems, with the output dynamics assignment property, which are able to describe linear systems with a variable internal structure.

3 Linear Systems Set for a Reference Logistic Function

The three most important functions used to describe the growing curve of crops development are the logistic function, the Gompertz function and the Richards function (see Hunt, 1982; Thornley and Johnson, 1990; Heller *et al*, 1995). In view of its simplicity, the logistic function is rather used to analyze the plant growing responses to climatic factors. This function was introduced by Robertson in 1923, having a sigmoid shaped. Indeed, it has an approximately exponential growth in the young stage, followed by an approximately linear growth after canopy closure, and finally a slowing down of growth due to ageing, namely:

$$(2) \quad \bar{y}(t) = \bar{y}^* \left(\frac{e^{\kappa \bar{y}^*(t-t^*)}}{1 + e^{\kappa \bar{y}^*(t-t^*)}} \right) .$$

The logistic function has the property that the decreasing of its Relative Growth Rate, $\overline{RGR} = \dot{\bar{y}}/\bar{y}$, is proportional to the increasing of \bar{y} , i.e.,

$$(3) \quad \dot{\bar{y}}(t)/\bar{y}(t) = \kappa(\bar{y}^* - \bar{y}(t)) ,$$

where \bar{y}^* is the maximal value reached by \bar{y} and κ is the proportionally constant among \overline{RGR} and \bar{y} , $\kappa = -\frac{d}{d\bar{y}}\overline{RGR}$. Usually the growing curve (2) is classified in three different regions, namely, the exponential region, the linear region, and the logarithmic region. The exponential part of the curve, below the inflection point, characterizes the accelerated growth; the linear part, around the inflection

point, characterizes the stationary growing rate; and the logarithmic part, above the inflection point, characterizes the deceleration growth.

In order to have a reference logistic function, let us introduce the change of variables:

$$(4) \quad \bar{y} = \bar{y}^* \bar{z} \quad , \quad t = t^* + r(\tau - \tau^*) \quad , \quad r = \eta / (\kappa \bar{y}^*) \quad .$$

Applying (4) to the logistic function (2) and to its differential equation (3), we get:

$$(5) \quad \bar{z}(\tau) = e^{\eta(\tau - \tau^*)} / (1 + e^{\eta(\tau - \tau^*)})$$

$$(6) \quad \frac{d\bar{z}(\tau)}{d\tau} / \bar{z}(\tau) = \eta(1 - \bar{z}(\tau))$$

For this reference logistic function, let us choose: $\tau^* = 1/2$ and $\eta = 4$; with these values we have the inflection point $\bar{z}(1/2) = 1/2$, the zero time value $\bar{z}(0) = C^{-2}/(1 + C^{-2}) \approx 0.12$, and the stationary value $\bar{y}(\infty) = 1$. With these selected values the growing curve (5) can be approximated by the step responses of the four linear differential equations shown in (7) in the time horizon $[-0.7, 1.5]$ with an error less than 0.7 %.

$$(7) \quad \begin{cases} \left(\frac{d}{d\tau} + \alpha_1^* \right) \left(\frac{d}{d\tau} + a_1^* \right) \left(\frac{d}{d\tau} + s_1^* \right) z_1(\tau) = (\alpha_1^* \frac{d}{d\tau} + 1) \bar{u}(\tau), & \tau \in [\tau_0, \tau_1] \\ \left(\frac{d}{d\tau} + \alpha_2^* \right) \left(\frac{d}{d\tau} + a_2^* \right) \left(\frac{d}{d\tau} + s_1^* \right) z_2(\tau) = (\alpha_2^* \frac{d}{d\tau} + 1) |\alpha_2^*| |a_2^*| |s_1^*| \bar{u}(\tau), & \tau \in [\tau_1, \tau_2] \\ \left(\frac{d}{d\tau} + s_1^* \right) z_3(\tau) = |s_1^*| \bar{u}(\tau), & \tau \in [\tau_2, \tau_3] \\ \left(\frac{d}{d\tau} + s_2^* \right) \left(\frac{d}{d\tau} + s_1^* \right) z_4(\tau) = \omega_o^{*2} \bar{u}(\tau), & \tau \in [\tau_3, \tau_4] \end{cases}$$

$$(8) \quad \tau_0 = -0.7, \quad \tau_1 = -0.1, \quad \tau_2 = 0.4, \quad \tau_3 = 0.6, \quad \text{and} \quad \tau_4 = 1.5.$$

The parameters α_i^* , a_i^* , and s_i^* are equal to:

$$(9) \quad \begin{cases} s_1^* = \omega_o^* \rho + \omega_o^* \sqrt{\rho^2 - 1}, \quad s_2^* = \omega_o^* \rho - \omega_o^* \sqrt{\rho^2 - 1}, \quad \omega_o^* = 4.615, \quad \rho = 1.001 \\ \alpha_1^* = 100; \quad a_1^* = -3.799, \quad \alpha_2^* = 1.48125; \quad a_2^* = -0.973 \end{cases}$$

The input is the step signal: $\bar{u}(\tau) = 1$ if $\tau \geq \tau_0$, otherwise $\bar{u}(\tau) = 0$, and with initial conditions:

$$(10) \quad \begin{cases} z_1(\tau_0) = \bar{z}(\tau_0), \quad \frac{d}{d\tau} z_1(\tau_0) = \frac{d}{d\tau} \bar{z}(\tau_0), \\ \frac{d^2}{d\tau^2} z_1(\tau_0) = -(\alpha_1^* + s_1^*) \frac{d}{d\tau} \bar{z}(\tau_0) - a_1^* s_1^* \bar{z}(\tau_0) + (1/\alpha_1^*) \bar{u}(\tau_0), \\ z_2(\tau_1) = \bar{z}(\tau_1), \quad \frac{d}{d\tau} z_2(\tau_1) = \frac{d}{d\tau} \bar{z}(\tau_1), \\ \frac{d^2}{d\tau^2} z_2(\tau_1) = -(\alpha_2^* + s_1^*) \frac{d}{d\tau} \bar{z}(\tau_1) - a_2^* s_1^* \bar{z}(\tau_1) + (1 + \alpha_2^* - \alpha_2^{*2}) |\alpha_2^*| |a_2^*| |s_1^*| \bar{u}(\tau_1), \\ z_3(\tau_2) = \bar{z}(\tau_2), \quad \frac{d}{d\tau} z_3(\tau_2) = \frac{d}{d\tau} \bar{z}(\tau_2), \\ z_4(\tau_3) = \bar{z}(\tau_3), \quad \frac{d}{d\tau} z_4(\tau_3) = (\omega_o^*/(2\rho)) (\bar{u}(\tau_3) - \bar{z}(\tau_3)). \end{cases}$$

In figure 1 we show SIMULINK–MatLab simulations of the set of the linear dynamical systems (7) and the reference logistic function (5), $z(\tau)$ and $\bar{z}(\tau)$, as well as the relative error $100|z(\tau) - \bar{z}(\tau)| / |\bar{z}(\tau)|$.

Then, given any logistic function (2), we obtain from (7)–(10) and the change of variables (4) the set of linear differential equations (11), approximating (2) with a

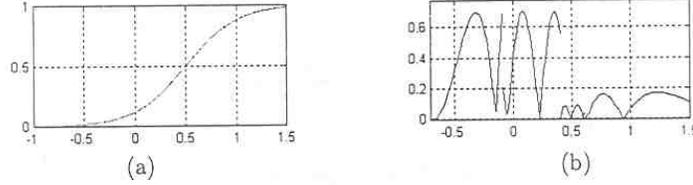


Figure 1: SIMULINK-MatLab simulations of the switched linear systems (7)–(10) and the reference logistic function (5). (a) $z(\tau)$ and $\bar{z}(\tau)$, (b) $100|z(\tau) - \bar{z}(\tau)|/|\bar{z}(\tau)|$.

relative error less than 0.7%,¹

$$(11) \quad \begin{cases} (p + \alpha_1)(p + a_1)(p + s_1)y_1(t) = (r^2\alpha_1p + 1)(1/r^3)u(t), & t \in [t_0, t_1] \\ (p + \alpha_2)(p + a_2)(p + s_1)y_2(t) = (r^2\alpha_2p + 1)|\alpha_2||a_2||s_1|u(t), & t \in [t_1, t_2] \\ p(p + s_1)y_3(t) = |s_1|(1/r)u(t), & t \in [t_2, t_3] \\ (p + s_2)(p + s_1)y_4(t) = \omega_o^2u(t), & t \in [t_3, t_4] \end{cases}$$

$$(12) \quad t_i = t^* + r(\tau_i - \tau^*), \quad \alpha_i = \alpha_i^*/r, \quad a_i = a_i^*/r, \quad s_i = s_i^*/r, \quad \text{and} \quad \omega_o = \omega_o^*/r.$$

The input is the step signal: $u(t) = \bar{y}^*$ if $t \geq t_0$, otherwise $u(t) = 0$, and with initial conditions:²

$$(13) \quad \begin{cases} y_1(t_0) = \bar{y}(t_0), \quad \dot{y}_1(t_0) = \dot{\bar{y}}(t_0), \\ \dot{y}_1(t_0) = -(a_1 + s_1)\dot{\bar{y}}(t_0) - a_1s_1\bar{y}(t_0) + (1/\alpha_1)(1/r^3)u(t_0), \\ y_2(t_1) = \bar{y}(t_1), \quad \dot{y}_2(t_1) = \dot{\bar{y}}(t_1), \\ \dot{y}_2(t_1) = -(a_2 + s_1)\dot{\bar{y}}(t_1) - a_2s_1\bar{y}(t_1) + (1 + r\alpha_2 - r^2\alpha_2^2)|\alpha_2||a_2||s_1|ru(t_1), \\ y_3(t_2) = \bar{y}(t_2), \quad \dot{y}_3(t_2) = \dot{\bar{y}}(t_2), \\ y_4(t_3) = \bar{y}(t_3), \quad \dot{y}_4(t_3) = (\omega_o/(2\rho))(u(t_3) - \bar{y}(t_3)). \end{cases}$$

4 Linear Systems Set for the Lettuce Growing Model

van Henten (1994) developed models for the lettuce growth process in order to apply optimal control techniques. The principal variable which describes the growing process is the crop dry weight, X_d (Kg/m^2). In general, the dry weight production is function of the solar radiation outside the greenhouse V_I (W/m^2) and of the greenhouse climate variables, the air temperature X_t ($^\circ\text{C}$), the carbon dioxide concentration X_c (Kg/m^3), and absolute humidity X_h (Kg/m^3).

In the third chapter of the van Henten Ph.D. thesis work (1994), it is integrated the model describing the lettuce growth and the one describing the greenhouse

¹ p is the derivative operator in the original time variable t , i.e. d/dt

² $\dot{y}_i(t_0)$ and $\ddot{y}_i(t_0)$ are the initial conditions of the first and second time derivatives in the original time variable t , i.e. $dy_i(t_0)/dt$ and $d^2y_i(t_0)/dt^2$, respectively.

climate behavior. This integration yields a dynamic model of the total greenhouse crop production process, namely:³

$$(14) \quad \dot{X}_d = c_{\alpha\beta} \left(1 - e^{-c_{pl,d} X_d}\right) \frac{c_1 V_I (-c_{co2,1} X_t^2 + c_{co2,2} X_t - c_{co2,3})(X_c - c_\gamma)}{c_1 V_I + (-c_{co2,1} X_t^2 + c_{co2,2} X_t - c_{co2,3})(X_c - c_\gamma)} - c_{resp,1} X_d 2^{(0.1 X_t - 2.5)}$$

$$(15) \quad \dot{X}_c = \frac{1}{c_{cap,c}} \left(- \left(1 - e^{-c_{pl,d} X_d}\right) \frac{c_1 V_I (-c_{co2,1} X_t^2 + c_{co2,2} X_t - c_{co2,3})(X_c - c_\gamma)}{c_1 V_I + (-c_{co2,1} X_t^2 + c_{co2,2} X_t - c_{co2,3})(X_c - c_\gamma)} - c_{resp,2} X_d 2^{(0.1 X_t - 2.5)} + U_c - (U_v + c_{leak})(X_c - V_c) \right)$$

$$(16) \quad \dot{X}_t = \frac{1}{c_{cap,q}} (U_q - (c_{cap,q,v} U_v + c_{al,ou})(X_t - V_t) + c_{rad} V_I)$$

in which X_d (Kg/m²), X_c (Kg/m³) and X_t (°C) are the crop dry weight, carbon dioxide concentration and air temperature, U_v (m/s) is the ventilation flux through the windows, U_q (W/m²) the energy input by the heating systems, U_c (Kg/(m²s)) the carbon dioxide supply rate, V_I (W/m²) the solar radiation, V_t (°C) the outdoor temperature, and V_c (Kg/m³) the outdoor carbon dioxide concentration. The parameters values are (see Tables 3.3 and 3.6 of van Henten, 1994; for more details): $c_{\alpha\beta} = 0.544$, $c_{pl,d} = 53$ m²/Kg, $c_1 = 3.55 \times 10^{-9}$ Kg/J, $c_{co2,1} = 5.11 \times 10^{-6}$ m/(s °C⁻²), $c_{co2,2} = 2.30 \times 10^{-4}$ m/(s °C⁻¹), $c_{co2,3} = 6.29 \times 10^{-4}$ m/s, $c_\gamma = 5.2 \times 10^{-5}$ Kg/m³, $c_{resp,1} = 2.65 \times 10^{-7}$ 1/s, $c_{resp,2} = 4.87 \times 10^{-7}$ 1/s, $c_{al,ou} = 6.1 \times 10^{-4}$ W/(m² °C⁻¹), $c_{cap,c} = 4.1$ m, $c_{cap,q} = 30000$ J/(m² °C⁻¹), $c_{cap,q,v} = 1290$ J/(m³ °C⁻¹), $c_{rad} = 0.2$, and $c_{leak} = 0.75 \times 10^{-4}$ m/s.

In the two following subsections, we first fit a logistic function to the steep response of the greenhouse crop production process (14)-(16), and then we apply the results of Section 3.

4.1 Logistic Function

In order to obtain the step response of the crop dry weight production, X_d , as a function of the carbon dioxide supply rate, U_c , we have procured, from the Systems and Control Group of the Wageningen University, the measurements data of the temperature, V_t , in the greenhouse and the solar radiation outside the greenhouse, V_I , for a period of 60 days with half hour average of the measurement (see Figure 2).

For the other exogenous signals we have considered the following values: (i) the outdoor carbon dioxide concentration V_c equal to the constant value of 350 ppm, i.e. 6.41×10^{-4} Kg/m³, (ii) the ventilation flux through the windows U_v and the energy input U_q equal to the values 1×10^{-3} Kg/m/s and 0 W/m², respectively, and (iii) the carbon dioxide supply rate U_c equal to the step signal $0 \rightarrow 1.2 \times 10^{-6}$ Kg/(m²s) (c.f. Table 6.1. and Section 3.2.4.2 of van Henten, 1994). In Figure 3(a) the step

³We have written off the absolute humidity equation since in this model it does not affect the other variables.

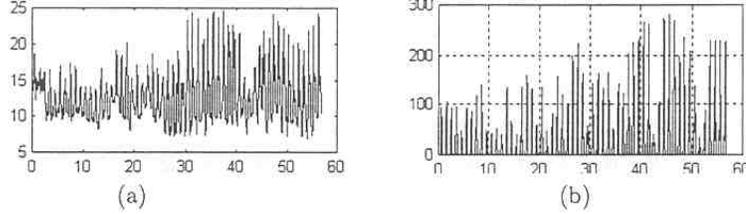


Figure 2: Half hour average of the measurements of (a) the temperature, V_t ($^{\circ}\text{C}$), in the greenhouse, and (b) the solar radiation outside the greenhouse, V_f (W/m^2).

response of the crop dry weight production X_d as a function of the carbon dioxide supply rate U_c is shown in color black⁴.

To obtain a logistic curve fitting the step response of the crop dry weight production we have proceeded as follows:

1. At first, we have plotted the step response of $X_d(t)$ in the graphic $\ln\left(\frac{X_d}{X_d^* - X_d}\right)$ v.s. t , the value of X_d^* is specified in next item.
2. Next, the value of the unknown X_d^* is fitted in such a way that the plot, $\ln\left(\frac{X_d}{X_d^* - X_d}\right)$ v.s. t , resembles, the best possible, to a straight line (see the black curve of Figure 3(b)).
3. Then, we have applied a least square straight line fitting to the above plot.
4. Finally, from the straight line fitted, $(\kappa X_d^*)t + (-\kappa t^*)$, we obtain the lacking values κ and t^* (see the gray curve of Figure 3(b)).

With this procedure we have obtained the following parameters of the logistic function \tilde{Y} :

$$(17) \quad X_d^* = 0.155, \quad \kappa = 0.7284, \quad t^* = 43.5934$$

(recall (2)). In Figure 3(a) it is shown in gray the such obtained logistic function.

4.2 Linear Systems Set

From the logistic function's parameters (17), we get the following scale factor r , switching times t_i , and parameters α_i , a_i , s_i , and w_o (see (4.c), (8) and (12)):

$$(18) \quad r = \eta / (\kappa X_d^*) = 35.428956$$

$$(19) \quad t_0 = 1.078, \quad t_1 = 22.336, \quad t_2 = 40.050, \quad t_3 = 47.136, \quad t_4 = 79.022$$

$$(20) \quad \begin{cases} s_1 = \omega_o \rho + \omega_o \sqrt{\rho^2 - 1}, & s_2 = \omega_o \rho - \omega_o \sqrt{\rho^2 - 1}, & \omega_o = 0.130260, & \rho = 1.001 \\ \alpha_1 = 2.822550; & a_1 = -0.107228, & \alpha_2 = 0.041809; & a_2 = -0.027463 \end{cases}$$

⁴In the same way as van Henten (1994) did it, we have fixed $\dot{X}_c \equiv 0$ and $\dot{X}_l \equiv 0$ in the SIMULINK–MatLab simulation of (14)–(16), since their time constants are of the order of seconds while the time constant of X_d is of the order of days (c.f. Ch. 6.2.2. of van Henten, 1994).

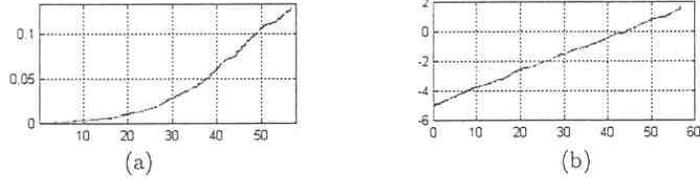


Figure 3: Fitness of the Logistic Function \bar{Y} (gray) to the step response of the crop dry weight production X_d (black). (a) X_d and \bar{Y} *v.s.* t , (b) $\ln\left(\frac{X_d}{X_d - X_d}\right)$ and $\ln\left(\frac{\bar{Y}}{X_d - \bar{Y}}\right)$ *v.s.* t .

In Figure 4 we show SIMULINK–MatLab simulations of the set of linear dynamical systems (11), (18), (20), (19), (13), and the logistic function (2), (17), $y(t)$ and $\bar{Y}(t)$, as well the relative error $100 |y(t) - \bar{Y}(t)| / |\bar{Y}(t)|$.

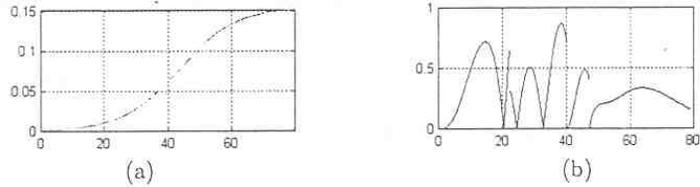


Figure 4: SIMULINK–MatLab simulations of the switched linear systems (11), (18), (20), (19), (13), and the logistic function (2), (17). (a) $y(t)$ and $\bar{Y}(t)$, (b) $100 |y(t) - \bar{Y}(t)| / |\bar{Y}(t)|$.

In Figure 5 we show the behavior of the set of linear dynamical systems (11), (18), (20), (19), (13), $y(t)$, and the step response of the crop dry weight production, $X_d(t)$, as well the linearized plots $\ln\left(\frac{X_d}{X_d - X_d}\right)$ and $\ln\left(\frac{y}{X_d - y}\right)$ *v.s.* t

In (Bonilla and Malabre, 2000) the linear implicit description of the crop dry weight production of the lettuce is shown, as well as its associated algebraic restriction.

5 Concluding Reemarks

In this paper we have presented a procedure to approximate the step response of the crop dry weight production, $X_d(t)$, of the lettuce by a set of linear systems. With this set of linear systems we are able to obtain a linear implicit flat description having the output dynamics assignment property (see Bonilla and Malabre, 2000; for details).

We have taken advantage of the fact that logistic functions can be always carried to a given reference logistic function, by the change of variable (4.c), in order to

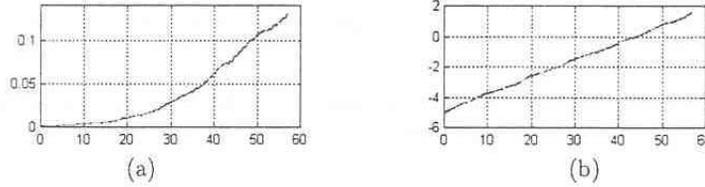


Figure 5: Behavior of the set of linear dynamical systems (11), (18), (20), (19), (13), $y(t)$ (gray) and the step response of the crop dry weight production X_d (black). (a) X_d and y *v.s.* t , (b) $\ln\left(\frac{X_d}{X_d^* - X_d}\right)$ and $\ln\left(\frac{y}{X_d^* - y}\right)$ *v.s.* t .

furnish a reference set of linear systems as well as its set reference parameters. Given any logistic function, it is relatively simple to obtain its associated set of linear systems by using (4.c) and (12).

The next step of our researching will be to tackle the problem of obtaining an optimal control law from the set of linear systems, in order to avoid the hard algorithms procedures for obtaining optimal control laws of very non linear systems.

References

- [1] Aplevich J.D. (1991). *Implicit Linear Systems*. Ed. Springer-Verlag, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Vol. 152.
- [2] Armentano V. A. (1986). The Pencil ($sE - A$) and Controllability-Observability for Generalized linear Systems: a geometric approach. *SIAM J. Control Opt.*, Vol.24, No. 4, pp. 616-638.
- [3] Başer U. and Schumacher J.M. (1998). *Descriptor Representations of Jump Behaviors*. IFAC-CSSC, pp. 159-164, Nantes France, July 8-10.
- [4] Bernhard P. (1982). On Singular Implicit Linear Dynamical Systems. *SIAM J. Control and Optimization*, Vol. 20, No. 5, pp. 612-633, Sep.
- [5] Bonilla M. and Malabre M. (1991). Variable Structure Systems via implicit Descriptions. *1st European Control Conference*, 2-5 July, Grenoble France, Vol. 1, pp 403-408.
- [6] Bonilla M., Lebret G. and Malabre M. (1994). Output Dynamics Assignment for Implicit Descriptions. *Circuits, Systems and Signal Processing, Special Issue on "Implicit Robust Systems"*, Vol 13 No. 2-3, pp 349-359.
- [7] Bonilla M., Fonseca M. and Malabre M. (1993). On the implementation of some Variable Structure Systems Control Laws (the case of two points varying systems). *32nd IEEE-CDC*, pp 895-896.

- [8] Bonilla M., Malabre M., Fonseca M. (1997). On the Approximation of Non Proper Control Laws. *International Journal of Control*, Vol 68, No. 4, pp. 775-796.
- [9] Bonilla M., Goire M.M. and Mondié S. (2000). Adaptive Structure Detector for Linear Implicit Systems. *American Control Conference 2000*, pp. 2179-2183.
- [10] Bonilla M. and Malabre M. (2000). More about non square implicit descriptions for modelling and control. *39-th IEEE-CDC*, pp. 3642-3647.
- [11] Campbell S.L. (1982). Singular Systems of Diff. Equations II. *ed, Pitman*, London.
- [12] Cobb D. (1984). Controllability, Observability and Duality in Singular Systems. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, AC-29, 12, 1076-1082.
- [13] Fliess M.(1990). Some basic structural properties of generalized linear systems. *Systems & Control Letters*, Vol 15, pp. 391-396.
- [14] Frankowska H. (1990). On Controllability and Observability of Implicit Systems. *Systems and Control Letters*, Vol. 14, pp. 219-225.
- [15] Gantmacher F.R. (1959). *The Theory of Matrices, Vol. II.* ed. Chelsea Pub. Co.
- [16] Heller R., Esnault R. et Lance C. (1995). Physiologie Végétale, 2. développement. *Ed. Masson, Paris*, ISBN 2-225-84778-9.
- [17] Heemels W.P.M.H., Schumacher J.M. and Weiland S. (2000). *Linear Complementarity Systems* To appear in SIAM Journal on Applied Mathematics
- [18] Hunt R. (1982). Plant Growth Curves: The Functional Approach to Plant Growth Analysis. *Ed. Edward Arnold*, ISBN 0 7131 2844 5.
- [19] Kuijper M. and Schumacher J.M. (1990). Realization of autoregressive equations in pencil and descriptor form. *SIAM J. Control Optimiz.*, Vol 28, pp. 1162-1189.
- [20] Kučera V., Zagalak P. (1988). Towards a Fundamental Theorem of State Feedback for Singular Systems. *Automatica*, Vol. 24, n° 5, pp. 653-658.
- [21] Lewis F.L. (1992). A Tutorial on the Geometric Analysis of Linear Time-invariant Implicit Systems. *Automatica*, Vol. 28, No. 1, pp 119-137.
- [22] Lewis F.L. (1986). A Survey of Linear Singular Systems. *Circuits, Systems and Signal Process*, Vol. 5, No. 1, pp 3-36.
- [23] Lebret G., Loiseau J.J. (1994). Proportional and Proportional-Derivative Canonical Forms for Descriptor Systems with Outputs. *Automatica*, Vol. 30, No. 5, pp. 847-864.

- [24] Malabre M. (1989). Generalized linear systems geometric and structural approaches. *Linear Algebra and its Applications*, Vol 122/123/124, pp 591-621.
- [25] Munack A., Tantau H.-J. (1997). Mathematical and Control Applications in Agriculture and Horticulture 1997. *A Proceedings volume from the IFAC Workshop Hannover, Germany, 28 September-2October 1997*. Ed. Pergamon.
- [26] Rosenbrock H.H. (1970). State Space and Multivariable Theory. *ed. Wiley*, New York.
- [27] Rothwell J., Chotai A., Young P. (1997). Optimal Control of Crop Production in Horticultural Glasshouse *Mathematical and Control Applications in Agriculture and Horticulture 1997* (see reference [25]), pp. 103-108.
- [28] Tap R.F., van Willigenburg L.G., van Straten G., van Henten E.J. (1993). Optimal Control of Greenhouse Climate: Computation of the Influence of Fast and Slow Dynamics. *12th IFAC World Congress*, Vol 10, pp. 321-324, Sydney Australia 18-26, July.
- [29] Tap R.F., van Willigenburg L.G., van Straten G., van Henten E.J. (1996). Receding horizon optimal control of greenhouse climate based on the lazy man weather prediction. *13th IFAC Triennial World Congress*, Vol 4a-01 3, pp. 387-392, San Francisco.
- [30] Tap R.F., van Straten G., van Willigenburg L.G. (1997). Comparison of Classical and Optimal Control of Greenhouse Tomato Crop Production. *Mathematical and Control Applications in Agriculture and Horticulture 1997* (see reference [25]), pp. 103-108.
- [31] Tchamitchian M. (1993). Optimal control applied to tomato crop. *ECC'93*, pp. 1348-1352, Groningen, The Netherlands.
- [32] Thornley J.H.M. and Johnson I.R. (1990). Plant and Crop Modelling: A Mathematical Approach to Plant and Crop Phys. *Ed. Clarendon Press*, ISBN 0 19 854160 0.
- [33] van Henten E.J. (1994). *Greenhouse Climate Management: An Optimal Control Approach*. Ph.D. Thesis, Wageningen Agricultural University, Wageningen The Netherlands, December 20, 1994.
- [34] van Henten E.J., Bontsema J. (1992). Singular Perturbation Methods Applied to a Variational Problem in Greenhouse Climate Control. *31st IEEE-CDC*, pp. 3068-3069.
- [35] van Straten G., Bantum J.W., Tap R.F. (1997). Paradigms in Greenhouse Climate Control: On Hierarchy and Energy Savings *Mathematical and Control Applications in Agriculture and Horticulture 1997* (see reference [25]), pp. 307-312.

- [36] van Straten G., Tap R.F., Willigenburg L.G. (1999). Sensitivity of On-Line Rhoc of Greenhouse Climate to Adjoint Variables for the Crop. *14th IFAC Triennial World Congress*, Vol K-4a-01-1, pp. 383-387, Beijing, P.R. China.
- [37] Verghese G.C., Lévy B.C. and Kailath T. (1981). A Generalized State-Space for Singular Systems. *IEEE-TAC*, Vol. AC-26, No. 4, pp 811-831.
- [38] Yip E. L., Sincovec R. F. (1981). Solvability, Controllability and Observability of cont. descriptor systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, Vol. AC-26, n' 3, pp. 702-707.

EL JURADO DESIGNADO POR EL DEPARTAMENTO DE CONTROL AUTOMÁTICO, APROBÓ ESTA TESIS EL DIA VEINTISIETE DE AGOSTO DEL AÑO DOS MIL UNO.



Dr. Alexander Semionovich Pozniak



Dr. Moisés Bonilla Estrada



Dr. Juan Carlos Martínez García



Dr. Guillermo Fernández Anaya



M. en C. Armando Ramírez Arias