CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

DEPARTAMENTO DE CONTROL AUTOMÁTICO

Desacoplamiento de Entradas por Técnicas de Invertibilidad a la Izquierda: Aplicación al Desacoplamiento de Fallas con Estabilidad

Tesis que presenta

M.C. Maricela Guadalupe Figueroa García[1]

Para Obtener el Grado de

Doctora en Ciencias

En la Especialidad de

Control Automático

Directores de tesis:

Dr. Moisés Bonilla Estrada

Dr. Juan Carlos Martínez García

México, D.F. 8 de mayo 2006

[1]Becaria de CONACyT

Contenido

Agradecimientos

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por impulsar el doctorado en México.

Al CONACyT por la beca otorgada para realizar mis estudios doctorales.

Al Proyecto de Investigación CONACyT 41723/A1 por el boleto de avión y dos meses de beca internacional para realizar una estancia de investigación en el Laborartorio de Automática de Nantes del Instituto de Investigación en Comunicaciones y Cibernética de Nantes, Francia, del 9 de marzo al 9 de mayo 2005.

Al Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (CINVESTAV) por el apoyo brindado durante mi estudio doctoral.

Al personal de CINVESTAV (control escolar, área de becas, bibliotecas).

Al Dr. Moisés Bonilla Estrada, por la dirección de esta tesis con paciencia y comprensión. Por transmitirme sus conocimientos y su inquietud por la investigación.

Al Dr. Juan Carlos Martínez García por su confianza y por la dirección de esta tesis.

Al Dr. Michel Malabre por el apoyo brindado en este trabajo de tesis, así como sus comentarios, asesorías, sugerencias y por participar como sinodal. Así también le agradesco su tiempo y dedicación otorgados durante mi estancia de investigación en el Laborartorio de Automática de Nantes del Instituto de Investigación en Comunicaciones y Cibernética de Nantes.

Al Laborartorio de Automática de Nantes del Instituto de Investigación en Comunicaciones y Cibernética de Nantes, Francia, por el apoyo dado durante mi estancia doctoral en ese instituto, siendo responsable de la estancia el Dr. Michel Malabre.

A los sinodales:

Dr. Jaime Moreno Pérez, investigador del Instituto de Ingeniería de la UNAM.

Dr. Basilio del Muro Cuéllar, investigador de Instituto Politécnico Nacional.

Dr. Gabriel Daniel Villa Salvador, investigador de CINVESTAV.

Dr. Rafael Martínez Guerra, investigador de CINVESTAV.

A profesores, compañeros y personal del Departamento de Control Automático-CINVESTAV.

A mi familia y a Jaime por compartir y apoyar mis inquietudes.

Prefacio

Problema de Desacoplamiento de Fallas

En esta tesis doctoral abordamos el Problema de Desacoplamiento de Fallas, el cual consiste en hacer un desacoplamiento en las interconexiones de entrada-salida del diagrama de flujo de señales del observador de estado.

Beard y Jones resolvieron este problema proponiendo un procedimiento para diseñar un observador de estado que acentúe el efecto de las fallas mediante una comparación entre la salida del sistema original con fallas y la salida del observador del sistema sin tomar en cuenta las fallas.

La presencia de las fallas origina una señal de error que es llamado *vector residual* del observador.

Este observador es diseñado de tal forma que en ausencia de fallas, el vector residual tiende exponencialmente a cero, lo cual no ocurre ante la presencia de fallas. Cuando se presentan fallas, cada uno de los vectores residuales originados por cada falla son restringidos a subespacios vectoriales independientes.

Este problema fue reformulado por Massoumnia utilizando conceptos geométricos como subespacios $(C, A) - invariantes$, proporcionando condiciones necesarias y suficientes para la solución de este problema.

En este trabajo de tesis se resuelve este Problema de Desacoplamiento de Fallas restringido a la conservación de estabilidad, es decir, para el caso cuando se presentan ceros no Hurwitz.

Para esto desarrollamos un método que consiste en descomponer al sistema estrictamente propio como la cascada de un *sistema estrictamente propio de polos* que contiene todos los polos del sistema y ningún cero y en un *sistema estrictamente no propio de ceros (no Hurwitz)*.

Se demuestra que el sistema estrictamente propio de polos es *invertible a la izquierda en el dominio del tiempo* y que la Matriz de Transferencia del *sistema estrictamente no propio de ceros* es invertible a la izquierda.

Debido a la *invertibilidad izquierda* del *sistema estrictamente propio de polos*, podemos encontrar al menos un sistema inverso izquierdo que reconstruya las entradas desconocidas no importando las condiciones iniciales de este sistema de polos ni la naturaleza de las entradas.

Como la Matriz de Transferencia del *sistema estrictamente no propio de ceros* es invertible a la izquierda, se puede aplicar un sistema cuya matriz de transferencia coincida con la inversa de la Matriz de Transferencia de este sistema de ceros. Pero esto se hace únicamente para sistemas de fase mínima. Paro el caso de ceros no Hurwitz solamente se busca el desacoplamiento de las entradas-salidas en el diagrama de flujo de señales del sistema. Este desacoplamiento se obtiene con la aplicación de la matriz *adjunta izquierda*, en lugar de la matriz inversa izquierda.

Una vez que se obtiene el *desacoplador de fallas* se combina con el observador de estado asociado al sistema estrictamente propio, obteniéndose así el detector desacoplador de fallas.

La ventaja de esta técnica es que además de proporcionar la detección e identificación de los modos de fallas, también reconstruye estos modos.

Otra ventaja de la técnica de reconstrucción de entradas desconocidas es la independencia de los inversores con respecto a las condiciones iniciales del sistema monitoreado.

Aportaciones

Las aportaciones de este trabajo son:

- Se define la invertibilidad izquierda en el dominio del tiempo y se caracteriza geométrica y estructuralmente.

- Equivalencia del sistema original a la conexión en cascada de un sistema de ceros y un sistema de polos, es decir:

    1. un *sistema estrictamente propio de polos* que contiene todos los polos del sistema y ningún cero, teniendo la propiedad de invertibilidad a la izquierda en el dominio del tiempo.
    2. un *sistema estrictamente no propio de ceros (no Hurwitz)* cuya Matriz de Transferencia es invertible a la izquierda.

- Diagonalización del desacoplador de fallas conservando los ceros no Hurwitz.

Organización general de la tesis

La organización general de esta tesis es como sigue:

En el capítulo 1 (Preliminares) se dan los conceptos y herramientas esenciales utilizados en el desarrollo de esta tesis.

En el capítulo 2 (Problema de detección e identificación de fallas) se da un planteamiento general del Problema de Detección e identificación de fallas.

En el capítulo 3 (Dualización del problema de desacoplamiento de perturbación) se expone la dualización entre el Problema de desacoplamiento de perturbaciones y el Problema de desacoplamiento de fallas.

En el capítulo 4 (Formulación geométrica del problema del filtro Beard-Jones para detección de fallas) se revisa la formulación geométrica del problema del filtro Beard-Jones para detección de fallas propuesto por Massoumnia, así como algunas ideas importantes cuando el sistema posee algún cero no Hurwitz. En el capítulo 5 (Invertibilidad por la izquierda) se estudia la *invertibilidad izquierda de la Matriz de Transferencia* y la *invertibilidad izquierda en el Dominio del Tiempo*.

En el capítulo 6 (Separación polo-cero de un sistema estrictamente propio) se aborda el tema de separación polo-cero de un sistema estrictamente propio.

En el capítulo 7 (Desacoplamiento con estabilidad interna).

Notación

$\mathcal{V}$,$\mathcal{W}, \ldots$	Espacios vectoriales
$v, w, \ldots$	Elementos de espacios vectoriales
$\frac{\mathcal{W}}{\mathcal{V}}$ o $\mathcal{W}/\mathcal{V}$	Espacio cociente $\mathcal{W}$ módulo $\mathcal{V}$ ($\mathcal{V} \subset \mathcal{W}$)
$\mathcal{Q}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{Q}_r$	Si todos los subespacios $\mathcal{Q}_1, \ldots, \mathcal{Q}_r$ están contenidos en el mismo espacio, entonces es la suma directa interna, de lo contrario es la suma directa externa
X	Representa tanto un mapeo lineal como su representación matricial
Im X	Imagen del mapeo X:$\mathcal{V} \to \mathcal{W}$
Ker X	Núcleo del mapeo X:$\mathcal{V} \to \mathcal{W}$
$X^{-1}\mathcal{T}$	Imagen inversa del subespacio $\mathcal{T}$ por el mapeo lineal X (posiblemente no invertible)
X^T	La transpuesta de la matriz X
adj$X$	La adjunta de la matriz X
$\sigma(X)$	El espectro de X
$\mathcal{X}'$	Espacio dual de $\mathcal{X}$
$\mathcal{V}^{\perp}$	El anulador del subespacio $\mathcal{V}$
e_i	Vector con 1 en su i-*ésima* componente y 0 en las demás
$\{v_1, \ldots v_k\}$	Subespacio generado por los vectores $v_1, \ldots v_k$
$\dot{x}$ y $\ddot{x}$	La primera y segunda derivada de x
$x^{(i)}$	Es usado para derivada de orden i
p	Operador derivada, d/dt
s	Variable de Laplace
MDB	Matriz Diagonal por Bloques
$\uplus$	Union disjunta de conjuntos
$\langle X \mid \text{Im } S\rangle$	Es el subespacio de controlabilidad del par (X, S), *i.e.* Im $S + X$Im $S + \cdots + X^{n-1}$Im S
$\langle \text{Ker } S \mid \text{Im } X\rangle$	Es el subespacio de inobservabilidad del par (X, S), *i.e.* Ker $S \cap X^{-1}$Ker $S \cap \cdots \cap X^{-(n-1)}$Ker S

Equivalente hispánico	*Término en inglés*
Núcleo	Kernel
Abanico	Pencil

CAPíTULO 1

Preliminares

En este capítulo se presentan los conceptos necesarios que serán utilizados en los demás capítulos de esta tesis.

Primeramente exponemos la realización de estado $\Sigma(A, B, C)$, así como los subespacios invariantes que están relacionados con las propiedades estructurales de estos sistemas.

Posteriormente recordaremos la realización de sistemas generalizados $\Sigma(\mathbb{E}, \mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C})$, así como algunas de sus propiedades.

1.1. Realización de estado $\Sigma(A, B, C)$

Sea la representación de estado de un sistema lineal invariante en el tiempo estrictamente propio $\Sigma(A, B, C) : \mathcal{U} \to \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$:

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}(t) & = & Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) & = & Cx(t) \end{array} \tag{1.1}$$

donde $\dot{x}(t), x(t) \in \mathcal{X}$ (espacio de estado), $u(t) \in \mathcal{U}$ (espacio de entradas) y $y(t) \in \mathcal{Y}$ (espacio de salidas). Los mapeos lineales A, B y C están definidos como: $A : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, $B : \mathcal{U} \to \mathcal{X}$ y $C : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$.

Para esta clase de sistemas Morse [62] caracterizó geométricamente su estructura, la cual permanece invariante bajo cambios de bases, retroalimentación de estado e inyección de salida. Esta caracterización se logra con ayuda de dos subespacios considerados como el punto de partida de todo el enfoque geométrico: el subespacio supremo $(A, B) - invariante$ contenido en el Ker C y el subespacio ínfimo $(C, A) - invariante$ que contiene a Im B.

Enseguida recordamos estos subespacios invariantes así como los demás subespacios obtenidos a partir de ellos.

1.2. Subespacios: propiedades y propiedades duales

1.2.1. Subespacio inobservable del par (C, A)

El subespacio inobservable del par (C, A), $\mathcal{N}$, está definido como [78]:

$$\mathcal{N} = \bigcap_{i=0}^{n-1} A^{-i}\text{Ker } C, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Este subespacio caracteriza al conjunto de trayectorias de estados inobservables a la salida.

1.2.2. Subespacio (A,B)-invariante

Un subespacio $\mathcal{V}_{[A,B,\mathcal{K}]} \subset \mathcal{K}$ es $(A, B)-invariante$ si existe un mapeo lineal $F : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{U}$ tal que

$$(A + BF)\mathcal{V}_{[A,B,\mathcal{K}]} \subset \mathcal{V}_{[A,B,\mathcal{K}]}. \tag{1.2}$$

Al conjunto de mapeos lineales F que satisfacen (1.2) se le llama conjunto de retroalimentaciones amigas de $\mathcal{V}_{[A,B,\mathcal{K}]}$:

$$\mathbf{F}(\mathcal{V}) = \{F : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{U} \mid \big(A + BF\big)\mathcal{V}_{[A,B,\mathcal{K}]} \subset \mathcal{V}_{[A,B,\mathcal{K}]}\}.$$

Una caracterización geométrica de los subespacios $(A, B) - invariantes$ es [78] :

$$A\mathcal{V}_{[A,B,\mathcal{K}]} \subset \mathcal{V}_{[A,B,\mathcal{K}]} + \text{Im } B$$

la cual permite saber si un subespacio es $(A, B)-invariante$ sin tener que especificar alguna F determinada.

El subespacio supremo $(A, B) - invariante$ contenido en Ker C [78] es:

$$\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} = \sup\{\mathcal{V}_{[A,B,C]} \subset \text{Ker } C \mid A\mathcal{V}_{[A,B,C]} \subset \mathcal{V}_{[A,B,C]} + \text{Im } B\}$$

el cual es el límite del siguiente algoritmo no creciente:

$$\mathcal{V}^0_{[A,B,C]} = \mathcal{X} \ ; \quad \mathcal{V}^{\mu+1}_{[A,B,C]} = \text{Ker } C \cap A^{-1}\left(\mathcal{V}^{\mu}_{[A,B,C]} + \text{Im } B\right). \tag{1.3}$$

La utilidad de este subespacio $\mathcal{V}^*_{[A,B,C]}$ reside en el hecho de que las dinámicas, con condiciones iniciales en este espacio, permanecen inobservables a la salida mediante una retroalimentación amiga.

1.2.3. Subespacio (C,A)-invariante

Un subespacio $\mathcal{W}_{[C,A,\mathcal{T}]} \subset \mathcal{T}$ es $(C, A)-invariante$ si existe un mapeo lineal $D : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{X}$ tal que [5], [74] y [78]:

$$(A + DC)\mathcal{W}_{[C,A,\mathcal{T}]} \subset \mathcal{W}_{[C,A,\mathcal{T}]} \quad \text{y} \quad \mathcal{T} \subset \mathcal{W}_{[C,A,\mathcal{T}]}. \tag{1.4}$$

Al conjunto de mapeos lineales D que satisfacen (1.4) se les denominan *inyecciones de salida amigas de* $\mathcal{W}_{[C,A,\mathcal{T}]}$ y se define como:

$$\underline{D}(\mathcal{W}_{[C,A,\mathcal{T}]}) = \{D : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{X} \mid (A + DC)\mathcal{W}_{[C,A,\mathcal{T}]} \subset \mathcal{W}_{[C,A,\mathcal{T}]}\}.$$

Una caracterización geométrica de los subespacios $(C, A) - invariante$ es:

$$A(\text{Ker } C \cap \mathcal{W}_{[C,A,\mathcal{T}]}) \subset \mathcal{W}_{[C,A,\mathcal{T}]}$$

la cual nos permite determinar la $(C, A) - invariancia$ de un subespacio sin especificar una *inyección de salida* D.

El subespacio ínfimo $(C, A) - invariante$ que contiene a Im B [74] es:

$$\mathcal{W}^*_{[C,A,B]} = \text{ínf}\{\mathcal{W}_{[C,A,B]} \supset \text{Im } B \mid A(\text{Ker } C \cap \mathcal{W}_{[C,A,B]}) \subset \mathcal{W}_{[C,A,B]}\}$$

el cual es el límite del algoritmo no decreciente:

$$\mathcal{W}^0_{[C,A,B]} = \{0\} \ ; \quad \mathcal{W}^{\mu+1}_{[C,A,B]} = \text{Im } B + A\left(\mathcal{W}^{\mu}_{[C,A,B]} \cap \text{Ker } C\right) \tag{1.5}$$

Observe que:

- Si se aplican los anuladores del algoritmo (1.5) se obtiene:

  $$\mathcal{W}^{\perp^0}_{[C,A,B]} = \mathcal{X}'; \qquad \mathcal{W}^{\perp^{\mu+1}}_{[C,A,B]} = \text{Ker } B' \cap (A')^{-1}\left(\mathcal{W}^{\perp^{\mu}}_{[C,A,B]} + \text{Im } C'\right).$$

  Es decir, si un subespacio $\mathcal{W}_{[C,A,B]}$ es *(C,A)-invariante* conteniendo a Im B entonces su dual $\mathcal{W}^{\perp}_{[C,A,B]}$ es (C', A')-*invariante* contenido en el Ker B'.

- El concepto de (C, A)-invariancia es el concepto dual de (A, B)-invariancia, es decir:
  (A, B)**-invariancia:** $\exists F : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{U}$ tal que $(A + BF)\mathcal{V}_{[A,B,C]} \subset \mathcal{V}_{[A,B,C]}$ y
  (C, A)**-invariancia:** $\exists D : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{X}$ tal que $(A + DC)\mathcal{W}_{[C,A,B]} \subset \mathcal{W}_{[C,A,B]}$.

En el Capítulo 3 se tratarán más en detalle estas dualidades.

1.2.4. (A,B)-subespacio de controlabilidad contenido en el núcleo de C

Un subespacio $\mathcal{R}_{[A,B,C]} \subset \mathcal{V}^*_{[A,B,C]}$ es *(A,B)-de controlabilidad* si

$$\mathcal{R}_{[A,B,C]} = \langle A + BF_1 \mid \text{Im } (BG)\rangle$$

para alguna retroalimentación amiga $F_1 : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{U}$ y algún mapeo lineal $G : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U}$.

Esto quiere decir que a $\mathcal{R}_{[A,B,C]}$ se le puede hacer invariante y también se le puede modificar su dinámica (valores propios de la restricción $A + BF_1$ en $\mathcal{R}_{[A,B,C]}$), mediante otra retroalimentación amiga F_2, sin alterar su invariancia ya obtenida con F_1.

Sea $\mathcal{R}^*_{[A,B,C]}$ el subespacio supremo de los subespacios *(A,B)- de controlabilidad* contenidos en Ker C entonces [78]:

$$\mathcal{R}^*_{[A,B,C]} = \mathcal{V}^*_{[A,B,C]} \cap \mathcal{W}^*_{[C,A,B]}. \tag{1.6}$$

Además $\mathcal{R}^*_{[A,B,C]}$ es el límite del algoritmo no creciente:

$$\mathcal{R}^0_{[A,B,C]} = \{0\}; \quad \mathcal{R}^{\mu+1}_{[A,B,C]} = \mathcal{V}^*_{[A,B,C]} \cap \left(A\mathcal{R}^{\mu}_{[A,B,C]} + \text{Im } B\right). \tag{1.7}$$

1.2.5. (C,A)-subespacio de inobservabilidad

Un subespacio $\mathcal{S}_{[C,A,B]} \subset \mathcal{X}$ es *(C,A)- de inobservabilidad* si [78]

$$\mathcal{S}_{[C,A,B]} = \langle \text{Ker } HC \mid A + DC \rangle$$

para alguna inyección de salida amiga $D : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{X}$ y algún mapeo lineal $H : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{Y}$.

Sea $\mathcal{S}^*_{[C,A,B]}$ el subespacio ínfimo de los subespacio *(C,A)- de inobservabilidad* que contienen a Im B entonces [74] y [78]:

$$\mathcal{S}^*_{[C,A,B]} = \mathcal{V}^*_{[A,B,C]} + \mathcal{W}^*_{[C,A,B]}. \tag{1.8}$$

Note que el dual de $\mathcal{S}^*_{[C,A,B]}$ es $\mathcal{R}^*_{[A,B,C]}$. En efecto, si se toma el anulador a (1.8) se obtiene:

$$\mathcal{S}^{*\perp}_{[C,A,B]} = \mathcal{V}^{*\perp}_{[A,B,C]} \cap \mathcal{W}^{*\perp}_{[C,A,B]}.$$

Esto quiere decir que a $\mathcal{S}^*_{[C,A,B]}$ se le puede hacer invariante y también se le puede hacer inobservable. Debido a su dualidad con $\mathcal{R}^*_{[A,B,C]}$ se puede modificar su dinámica (valores propios de la restricción de $A + D_1C$ en $\mathcal{S}^*_{[C,A,B]}$) mediante otra inyección de salida amiga D_2 sin alterar su invariancia ya obtenida con D_1.

1.2.6. Subespacios (C,A)-invariantes compatibles

Sean $\mathcal{W}_i$, $i = 1, \ldots, k$ subespacios *(C,A)-invariantes* en $\mathcal{X}$. Estos subespacios $\mathcal{W}_i$, $i = 1, \ldots, k$ son **compatibles** si existe una inyección de salida D tal que [59]:

$$(A + DC)\mathcal{W}_i \subset \mathcal{W}_i, \quad i = 1, \ldots, k.$$

1.2.7. Subespacios (C,A)-invariantes separables a la salida

Sean $\mathcal{W}_i$, $i = 1, \ldots, k$ subespacios en $\mathcal{X}$. Estos subespacios $\mathcal{W}_i$, $i = 1, \ldots, k$ son **separables a la salida** [59] si:

$$C\mathcal{W}_i \cap \left(\sum_{j \neq i} C\mathcal{W}_j \right) = \{0\},\ i = 1, \ldots, k.$$

Esto significa que las imágenes de salida de los $\mathcal{W}_i$ son independientes.

1.3. Ceros

Un concepto estructural importante en la Teoría de Sistemas es el relacionado con los ceros. Esto se debe a que la viabilidad de las soluciones de los problemas de control está determinada por la naturaleza de los ceros.

Han sido propuestas muchas definiciones sobre la *estructura cero* de sistemas lineales (A, B, C). Algunas definiciones han sido dadas en un contexto espacio-estado, otras en términos entrada/salida (MacFarlane y Karcanias [53]) y (Francis and Wonham [27]). La mayoría de estas definiciones son tratadas en el trabajo de Rosenbrock [66], quien caracterizó diferentes tipos de ceros en términos de matrices sistemas polinomiales, demostrando la relación entre ellos y sus interpretaciones.

Casi al mismo tiempo fue introducido el enfoque geométrico y muy pronto estuvo disponible una interpretación geométrica de *ceros de transmisión* para sistemas mínimos estrictamente propios. La clave fue dada por la *descomposición canónica de Morse [62]* basada en el subespacio invariante supremo controlado con salida nula y su contraparte dual.

Por otra parte, H. Aling y Schumacher [1] propusieron una completa caracterización geométrica de los ceros.

Enseguida recordamos los tipos de ceros utilizados en este trabajo: *ceros invariantes*, *ceros de transmisión*, *ceros invariantes desacoplados en la entrada* y *ceros invariantes observables*.

1. Los *ceros invariantes* son los ceros de los polinomios distintos de ceros que aparecen en la diagonal de la forma de Smith de la matriz sistema:

$$P(s) = \begin{bmatrix} s - A & B \\ -C & 0 \end{bmatrix}$$

2. Los *ceros de transmisión* son los ceros de los polinomios distintos de ceros en los numeradores de los términos de la forma Schmith-McMillan de la función de transferencia $C(sI - A)^{-1}B$. Estos ceros dependen únicamente de la función de transferencia.

3. Los *ceros invariantes desacoplados en la entrada* son los ceros del polinomio distinto de cero el cual es el *máximo común divisor* de los menores de orden n del abanico $[sI - A \quad B]$. Estos ceros corresponden a los modos no controlables del sistema.

4. Los *ceros invariantes observables* son:

$$\{\text{ceros de transmisión}\} \cup \{\text{ceros invariantes desacoplados en la entrada}\}.$$

De la caracterización geométrica de Aling y Schumacher [1], se tiene que el número total de *ceros invariantes observables*, es:

$$\#\text{ ceros invariantes observables} = \dim \left(\frac{\mathcal{V}^*_{[A,B,C]}}{\mathcal{R}^*_{[A,B,C]} + \mathcal{N}} \right). \tag{1.9}$$

1.4. Sistemas generalizados $\Sigma(\mathbb{E}, \mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C})$

En el estudio de sistemas lineales es preferible trabajar con realizaciones que describen una amplia gama de comportamientos físicos de los sistemas. Con este fin, Rosenbrock [66] introdujo los sistemas generalizados que son una generalización de la realización de estado de los sistemas propios clásicos. Estos sistemas generalizados $\Sigma(\mathbb{E}, \mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}) : \mathcal{U} \to \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ están descritos por:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\dot{x}(t) &= \mathbb{A}x(t) + \mathbb{B}u(t) \\ y(t) &= \mathbb{C}x(t) \end{aligned} \tag{1.10}$$

donde u es la entrada, y es la salida y x es la variable descriptora. Los mapeos lineales son definidos como:

$$\mathbb{E} : \mathcal{X} \to \underline{\mathcal{X}}, \quad \mathbb{A} : \mathcal{X} \to \underline{\mathcal{X}}, \quad \mathbb{B} : \mathcal{U} \to \mathcal{X} \ \text{ y } \ \mathbb{C} : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$$

donde $\mathcal{X}$, $\underline{\mathcal{X}}, \mathcal{U}$ y $\mathcal{Y}$ son los espacios de las variables descriptoras, de ecuaciones, de entradas y salidas respectivamente.

En general, el espacio de la variable descriptora $\mathcal{X}$ y el espacio de ecuaciones $\underline{\mathcal{X}}$ no tienen que tener la misma dimensión.

El estudio de este tipo de sistemas se ha realizado en diferentes etapas:

1. Primero se estudió el caso en que las matrices $\mathbb{E}$ y $\mathbb{A}$ son cuadradas con $\det[\lambda\mathbb{E}-\mathbb{A}] \neq 0$. A esta clase de sistemas se le conoce como sistemas generalizados regulares.

2. Posteriormente se consideró que el abanico cuadrado $[\lambda\mathbb{E} - \mathbb{A}]$ podría ser singular. A esta clase de sistemas se le conoce como sistemas singulares.

3. En el caso de que las matrices $\mathbb{E}$ y $\mathbb{A}$ no sean necesariamente cuadradas se denominan implícitos a los sistemas asociados.

El estudio de los sistemas generalizados ha sido abordado bajo diferentes herramientas de trabajo, entre las cuales se pueden mencionar las siguientes:

1) Enfoque geométrico (ver por ejemplo [3], [22], [49], [57], [64] y [77]).

2) Análisis temporal (ver por ejemplo [79]).

3) Transformada de Laplace (ver por ejemplo [73], [7], [42], etc).

4) Teoría de Kronecker (ver [51], [45]).

5) Enfoque polinomial (ver por ejemplo [41]).

6) Algebra diferencial (ver por ejemplo [26]).

7) Técnicas de inclusiones diferenciales (ver por ejemplo [28]).

Con este tipo de realizaciones $(\mathbb{E},\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{C})$ se es capaz de describir sistemas con diversos comportamientos muy interesantes desde el punto de vista de la Teoría de Sistemas. Entre estos se pueden mencionar los siguientes (ver [73], [22], [2], [47],[19] y [17]).

1. Sistemas propios

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & \mathrm{I} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} B \\ -\mathrm{I} \end{bmatrix} u(t) \qquad t \geq 0; \\
y(t) &= \begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} x(t)
\end{aligned}$$

2. Sistemas no propios

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \qquad t \geq 0; \\
y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)
\end{aligned}$$

   es decir

$$y(t) = \dot{u}(t) \qquad \text{para } t \geq 0.$$

3. Sistemas con restricciones en la dinámica de la entrada, por ejemplo:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} u \qquad t \geq 0 \\
y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t)
\end{aligned}$$

   es decir

$$\dot{y} = u$$

   con la restricción

$$\ddot{u} + \dot{u} + u = 0.$$

4. Sistemas con grados de libertad que describen variaciones en la estructura interna, por ejemplo (ver [19]):

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \qquad t \geq 0; \\
y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)
\end{aligned}$$

   Así para diferentes asignaciones del grado de libertad[1] se tienen diferentes comportamientos, por ejemplo:

   i) si $x_3 = x_1 + x_2$ entonces

$$\dot{y} + y = u$$

[1] Dado que existen más incógnitas que ecuaciones hay un grado de libertad determinado por las variables libres.

ii) si $x_3 = x_1$ entonces

$$\ddot{y} + \dot{y} = u$$

iii) Si $x_3 = x_1 + 5x_2$ entonces

$$\ddot{y} + 6\dot{y} + 5y = 5\dot{u} + u$$

iv) si $x_3 = -(x_1 + x_2)$ entonces

$$\dot{y} - 3y = -u$$

Ver también [17].

5. Sistemas con comportamiento discontinuo o impulsional, por ejemplo:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) \qquad t > 0; \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned} \tag{1.11}$$

es decir

$$y(t) = x_2(0_-)\delta(t).$$

Con respecto a este ejemplo hay que hacer notar lo siguiente:

a) Cuando se consideran señales discontinuas no se puede trabajar con la derivada temporal ordinaria, puesto que no son derivables. En este caso se trabaja con funciones generalizadas y la derivada se entiende como una derivada distribucional, no con respecto al tiempo (ver [21] y [22]).

b) Las condiciones iniciales no satisfacen al sistema (razón por la cual se especifica $t > 0$). Cuando las condiciones iniciales satisfacen al sistema se les llama condiciones iniciales admisibles.

1.4.1. Descomposición de Kronecker y subespacios asociados

En el estudio de las propiedades estructurales de sistemas lineales generalizados es usual expresar el sistema (1.10) en la *forma normal de Kronecker* [29]. En esa forma normal, el abanico $[\mathrm{s}\mathbb{E} - \mathbb{A}]$ tiene típicamente cuatro clases de bloques:

1. divisores elementales finitos, *i.e*, $\begin{bmatrix} (\mathrm{s}-\alpha) & 1 \\ 0 & (\mathrm{s}-\alpha) \end{bmatrix}$.

2. divisores elementales infinitos, *i.e*, $\begin{bmatrix} 1 & \mathrm{s} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Ver [31], [32] y [21] para los aspectos distribucionales en las derivadas generalizadas.

3. índices mínimos por columna, *i.e*, $\begin{bmatrix} \mathrm{s} & 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{s} & 1 \end{bmatrix}$.

4. índices mínimos por línea, *i.e,* $\begin{bmatrix} \mathrm{s} & 0 \\ 1 & \mathrm{s} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Los *divisores elementales finitos* corresponden a la *parte propia (ecuaciones diferenciales)* del sistema, mientras que los *divisores elementales infinitos* corresponden a la *parte no propia (derivadores).*

Los *índices mínimos por columna* corresponden a la existencia de *grados de libertad* (más variables que ecuaciones) y los *índices mínimos por línea* corresponden a las *restricciones de la dinámica de las entradas* (las entradas admisibles satisfacen una ecuación diferencial pre-especificada).

En el caso particular de los sistemas regulares, es decir, $\mathcal{X} \approx \underline{\mathcal{X}}$ y $\det[\lambda\mathbb{E} - \mathbb{A}] \neq 0$, únicamente se tienen divisores elementales finitos e infinitos.

Por otro lado, Wong [77] y Bernhard [7] caracterizaron geométricamente a los divisores elementales finitos a través del subespacio supremo $(\mathbb{E}, \mathbb{A}) - invariante$ contenido en $\mathcal{X}$:

$$\mathcal{V}^*_{[\mathcal{X},\mathbb{E},\mathbb{A}]} = \sup\{\mathcal{V} \subset \mathcal{X} \ \mid \ \mathbb{A}\mathcal{V} \subset \mathbb{E}\mathcal{V}\} \tag{1.12}$$

el cual es el límite del algoritmo no creciente:

$$\mathcal{V}^0_{[\mathcal{X},\mathbb{E},\mathbb{A}]} = \mathcal{X}; \quad \mathcal{V}^{\mu+1}_{[\mathcal{X},\mathbb{E},\mathbb{A}]} = \mathbb{A}^{-1}\mathbb{E}\mathcal{V}^{\mu}_0. \tag{1.13}$$

En efecto, si λ es un cero finito del abanico $[\lambda\mathbb{E} - \mathbb{A}]$ existe entonces un modo exponencial caracterizado por un vector no nulo $v \in \mathcal{V}_{[\mathcal{X},\mathbb{E},\mathbb{A}]}$ tal que $\mathbb{A}v = \lambda\mathbb{E}v$.

Armentano [3] caracterizó geométricamente la descomposición global de Kronecker con la ayuda del subespacio supremo $(\mathbb{E}, \mathbb{A}) - invariante$ contenido en $\mathcal{X}$ y del subespacio:

$$\mathcal{W}^*_{[\mathcal{X},\mathbb{A},\mathbb{E}]} = \inf\{\mathcal{T} \subset \mathcal{X} \mid \mathcal{T} = \mathbb{E}^{-1}\mathbb{A}\mathcal{T}\}$$

siendo el límite del algoritmo no creciente:

$$\mathcal{W}^0_{[\mathcal{X},\mathbb{A},\mathbb{E}]} = \operatorname{Ker} \mathbb{E}; \quad \mathcal{W}^{\mu+1}_{[\mathcal{X},\mathbb{A},\mathbb{E}]} = \mathbb{E}^{-1}\mathbb{A}\mathcal{W}^{\mu}_{[\mathcal{X},\mathbb{A},\mathbb{E}]} \tag{1.14}$$

es decir:

1. los divisores elementales finitos $[\lambda I - J_i]$ (siendo J_i las correspondientes matrices de Jordan) se encuentran en las restricciones:

   $$[\lambda\mathbb{E} - \mathbb{A}]\Bigg|\frac{\mathcal{V}^*_{[\mathcal{X},\mathbb{E},\mathbb{A}]}}{\mathcal{V}^*_{[\mathcal{X},\mathbb{E},\mathbb{A}]} \cap \mathcal{W}^*_{[\mathcal{X},\mathbb{A},\mathbb{E}]}}$$

   en el dominio y

   $$\frac{\mathbb{E}\mathcal{V}^*_{[\mathcal{X},\mathbb{E},\mathbb{A}]}}{\mathbb{E}\Big(\mathcal{V}^*_{[\mathcal{X},\mathbb{E},\mathbb{A}]} \cap \mathcal{W}^*_{[\mathcal{X},\mathbb{A},\mathbb{E}]}\Big)}\Bigg|[\lambda\mathbb{E} - \mathbb{A}]$$

   en el codominio.

2. Los divisores elementales infinitos $[\lambda N_i - I]$ (siendo N_i las correspondientes matrices nilpotentes) se encuentran en las restricciones:

$$[\lambda \mathbb{E} - \mathbb{A}]\Bigg|\frac{\mathcal{W}^*_{[\mathcal{X},\mathbb{A},\mathbb{E}]}}{\mathcal{V}^*_{[\mathcal{X},\mathbb{E},\mathbb{A}]} \cap \mathcal{W}^*_{[\mathcal{X},\mathbb{A},\mathbb{E}]}}$$

en el dominio y

$$\frac{\mathbb{A}\mathcal{W}^*_{[\mathcal{X},\mathbb{A},\mathbb{E}]}}{\mathbb{A}\Big(\mathcal{V}_{[\mathcal{X},\mathbb{E},\mathbb{A}]} \cap \mathcal{W}_{[\mathcal{X},\mathbb{A},\mathbb{E}]}\Big)}\Bigg|[\lambda \mathbb{E} - \mathbb{A}]$$

en el codominio.

3. Los índices mínimos por columna se encuentran en las restricciones

$$[\lambda \mathbb{E} - \mathbb{A}]\Big|\mathcal{V}^*_{[\mathcal{X},\mathbb{E},\mathbb{A}]} \cap \mathcal{W}^*_{[\mathcal{X},\mathbb{A},\mathbb{E}]}$$

en el dominio y

$$\mathbb{E}\Big(\mathcal{V}^*_{[\mathcal{X},\mathbb{E},\mathbb{A}]} \cap \mathcal{W}^*_{[\mathcal{X},\mathbb{A},\mathbb{E}]}\Big)\Big|[\lambda \mathbb{E} - \mathbb{A}]$$

en el codominio.

4. Los índices mínimos por filas se encuentran en las restricciones:

$$[\lambda \mathbb{E} - \mathbb{A}]\Bigg|\frac{\mathcal{X}}{\mathcal{V}^*_{[\mathcal{X},\mathbb{E},\mathbb{A}]} + \mathcal{W}^*_{[\mathcal{X},\mathbb{A},\mathbb{E}]}}$$

en el dominio y

$$\frac{\mathcal{X}}{\mathbb{E}\mathcal{V}^*_{[\mathcal{X},\mathbb{E},\mathbb{A}]} + \mathbb{A}\mathcal{W}^*_{[\mathcal{X},\mathbb{A},\mathbb{E}]}}\Bigg|[\lambda \mathbb{E} - \mathbb{A}]$$

en el codominio.

Con respecto a la generalización de la forma de Morse [62] el lector puede consultar a Lebret y Loiseau [45].

1.4.2. Minimalidad bajo equivalencia externa

Cuando uno trata de describir un comportamiento físico, en una clase dada de modelos, la noción de minimalidad es muy importante; puesto que esto permite seleccionar la descripción más compacta dentro de la clase dada (ver Willems [75], Aplevich [2], Schumacher [68] y Kuijper [44]). En este trabajo de tesis se considera la minimalidad externa.

Definición 1 Dos modelos son llamados externamente equivalentes si el correspondiente conjunto de todas las trayectorias posibles para las variables externas (comportamientos externos) de ambos modelos son las mismas.

Definición 2 La descripción (1.10) es mínima entre todas las descripciones externamente equivalentes del mismo tipo si:

1. la correspondiente ecuación descriptora tiene el menor número posible de filas,

2. la variable descriptora tiene el menor número de componentes.

Esta noción de equivalencia externa fue introducida por Willems [75] y ha sido ampliamente estudiada por Aplevich [2], Shumacher [68], Fliess [26] y Kuijper [44].

Kuijper [43] dio la siguiente prueba matricial de la minimalidad (ver también [12]).

Proposición 3 .
El sistema implícito $\Sigma(\mathbb{E}, \mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C})$ (1.10) es *mínimo bajo equivalencia externa* si y sólo si:

(1) la matriz $\begin{bmatrix} \mathbb{E} & \mathbb{B} \end{bmatrix}$ es suprayectiva,

(2) la matriz $\begin{bmatrix} \mathbb{E} \\ \mathbb{C} \end{bmatrix}$ es inyectiva,

(3) $\begin{bmatrix} \lambda\bar{\mathbb{E}} - \bar{\mathbb{A}} \\ \bar{\mathbb{C}} \end{bmatrix}$ es de rango pleno por columnas para todo número complejo λ si y sólo si la matrix $\begin{bmatrix} \bar{\mathbb{C}} \\ \lambda \mathrm{I} - \bar{\mathbb{A}} \end{bmatrix}$ también lo es. Es decir, si y sólo si $\mathcal{N} = \{0\}$.

donde $(\bar{\mathbb{E}}, \bar{\mathbb{A}}, \bar{\mathbb{C}})$ es la parte regular del sistema $(\mathbb{E}, \mathbb{A}, \mathbb{C})$, es decir, la parte comprendida por los divisores elementales finitos e infinitos (ver sección 5.1).

En [12] se da una caracterización geométrica de la minimalidad. Hay que notar también que los resultados de minimalidad solamente son aplicables cuando se trabaja con condiciones iniciales admisibles, es decir, para modelos válidos en $t \geq 0$. Para el caso $t > 0$ (ver 1.11) no existe ningún resultado sobre la minimalidad.

1.4.3. Invertibilidad

Los sistemas inversos han sido ampliamente estudiados para obtener propiedades estructurales de los sistemas. En la teoría clásica de los sistemas lineales tenemos los trabajos de Silverman [69], Luenberger [52], Silverman Kitapçi [70] y Lizarzabaru [50].

Para los sistemas no lineales están los trabajos de Hirschorn [35]y [36], Singh [71] y Moog [61].

Para los sistemas en dimensión infinita Malabre y Rabah [58]. Para los sistemas descriptores Lewis [46], Lewis y Beauchamp [48], Malabre [56] y Bonilla y Malabre [10].

Los sistemas inversos también han sido de gran utilidad en la resolución de problemas típicos del control, distinguiéndose en este caso la inversa a la derecha y la inversa a la izquierda.

Un sistema inverso derecho, $\Sigma^d : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{U}$, de un sistema invertible a la derecha, $\Sigma : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{Y}$, es aquel que satisface $\Sigma\Big(\Sigma^d\big(\bar{y}(t)\big)\Big) = \bar{y}(t)$. Los sistemas inversos derechos son usados para controlar. Por ejemplo en el rechazo de perturbaciones ([11], [16] y [18]).

Un sistema inverso izquierdo, $\Sigma^i : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{U}$, de un sistema invertible a la izquierda, $\Sigma : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{Y}$ es aquel que satisface $\Sigma^i\Big(\Sigma\big(u(t)\big)\Big) = u(t)$. Los sistemas inversos izquierdos son usados para observar. Por ejemplo la reconstrucción de entradas desconocidas, que se tratará en los Capítulos 5, 6 y 7 de esta tesis.

Invertibilidad de sistemas generalizados. Cuando se trabaja con sistemas generalizados aparentemente se puede obtener un sistema inverso mediante una simple reescritura de (1.10).

En efecto, Tan y Vanderwalle [72] propusieron para (1.10). el siguiente sistema inverso (ver también Grimm [33]):

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathbb{E} & 0 \end{bmatrix} \dot{\xi}(t) &= \begin{bmatrix} \mathbb{C} & 0 \\ \mathbb{A} & \mathbb{B} \end{bmatrix} \xi(t) + \begin{bmatrix} -\mathrm{I} \\ 0 \end{bmatrix} y(t) \\ u(t) &= \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{I} \end{bmatrix} \xi(t) \end{aligned} \tag{1.15}$$

Pero si el sistema (1.10) no es invertible entonces (1.15) jamás podrá ser su sistema inverso. La no invertibilidad de (1.10) se ve reflejada en la no solubilidad del sistema (1.15).

En la siguiente definición se especifica qué se entiende por solubilidad.

Definición 4 Un sistema generalizado del tipo (1.10) es soluble, si para cada trayectoria de las entradas externas $u(t)$ existe al menos una trayectoria $x(t) \in \mathcal{X}$ solución de la ecuación diferencial

$$\mathbb{E}\dot{x} - \mathbb{A}x = \mathbb{B}u(t)$$

Para abordar la invertibilidad del sistema generalizado (1.10) en [8] se demostraron los siguientes dos resultados:

Lema 5 Un sistema generalizado del tipo (1.10) es soluble, si existe una transformación lineal:

$$\Psi(\cdot) : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{X}$$

solución de la ecuación diferencial

$$\mathbb{E}\dot{x} - \mathbb{A}x = \mathbb{B}u(t)$$

es decir, $\Psi(\cdot)$ satisface

$$\mathbb{E}\dot{\Psi}\big(u(t)\big) = \mathbb{A}\Psi\big(u(t)\big) + \mathbb{B}u(t).$$

Además:

$$y(t) = \mathbb{C}\Psi\big(u(t)\big) \quad \forall\ u(t) \in \mathcal{U}.$$

Lema 6 *:*

a) El sistema (1.10) es invertible a la izquierda si:

$$\mathrm{Ker}\ \mathbb{C}\Psi(\cdot) = \{0\}$$

b) El sistema (1.10) es invertible a la derecha si:

$$\text{Im } \mathbb{C}\Psi(\cdot) = \mathcal{Y}$$

donde $\Psi(\cdot) : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{X}$ es la solución mencionada en el Lema 5.

En [8] se estableció el siguiente resultado:

Hecho 7 Si el sistema (1.10) es invertible (a la izquierda o a la derecha) entonces el sistema (1.15) es soluble y por tanto una inversa (izquierda o derecha) del sistema (1.10)

Como se verá en el capítulo 5, el sistema inverso (1.15) corresponde a una inversa en el dominio del tiempo.

CAPíTULO 2

Problema de detección de fallas

En este capítulo exponemos, en forma general, el problema de detección de fallas, así como las funciones elementales que existen en el área de detección e identificación de fallas.

El problema de detección de fallas fue dado a conocer en los trabajos de Beard [6] y Jones [40]. Posteriormente Willsky [76] e Isermann [38] dieron dos estudios complementarios con respecto a los diferentes tipos de tareas en el área de detección e identificación de fallas.

Massoumnia aborda el problema de identificación de fallas desde el punto de vista geométrico [59], [60] utilizando observadores de estado. Dado que las condiciones para la existencia de detectores de fallas basados en observadores de estado son muy restrictivas, debido a la exigencia de la separabilidad de ciertos subespacios vectoriales, Niemann [63] y Saberi [67] han considerado algunas alternativas menos restrictivas. Estas alternativas están principalmente enfocadas en la reconstrucción casi directa del vector de falla.

2.1. Introducción

Una *falla* en un proceso industrial es definida como una desviación indeseable de una propiedad característica del proceso monitoreado. Esta desviación indeseable resulta de una modificación catastrósfica del comportamiento normal del sistema.

Clasificación de las fallas de acuerdo con su dependencia del tiempo [39]:

1. **Fallas incipientes** (fallas asintóticamente crecientes).

2. **Fallas abruptas** (fallas continuas por pedazos).

3. **Fallas intermitentes**.

Las *fallas incipientes* se originan principalmente por el desgaste de componentes del proceso, que deteriora lentamente su funcionamiento. Esta clase de fallas pueden ser detectadas y corregidas normalmente por mantenimiento preventivo.

Las *fallas abruptas e intermitentes* están asociadas a colapsos de los actuadores, sensores y componentes internos del sistema. Es obvio que estas clases de fallas deben ser detectadas e identificadas rápidamente para minimizar sus efectos en el comportamiento del sistema.

Clasificación de las fallas de acuerdo a modelos básicos [39]:

1. **Fallas aditivas.** Fallas que se suman con señales internas del sistema.

2. **Fallas multiplicativas.** Fallas que se multiplican con las señales internas del sistema.

2.2. Funciones elementales en el área de detección e identificación de fallas

Saberi *et al* [67] clasifican la *detección e identificación de fallas* en las siguientes tres funciones elementales:

1. Detección de la falla.

2. Identificación de la falla.

3. Estimación de la falla.

Enseguida especificamos brevemente estas tres funciones elementales (ver [67] para más detalles):

A. Detección de la falla. La *detección* consiste en el diseño de un generador residual que genera una señal residual capaz de indicar si está ocurriendo una falla o no.

B. Identificación de la falla. La *identificación* impone un requerimiento más fuerte. La señal residual no solamente debe ser capaz de detectar que están ocurriendo fallas en el sistema, sino también debe ser capaz de identificar (aislar) estas fallas.

C. La estimación de la falla. La *estimación* es la cuantificación de los efectos de la falla sobre el sistema.

En este trabajo de tesis al *problema de identificación de fallas* también se le designa como *problema de desacoplamiento de fallas*. Esta designación se hace debido a que técnicamente es lo que se está efectuando para identificar la falla.

2.3. Sistemas lineales con fallas

En esta tesis nos ocupamos únicamente de los primeros dos puntos de la lista anterior, es decir, de la *detección e identificación* de las fallas en sistemas lineales invariantes en el tiempo.

El sistema lineal con fallas que se considera en este trabajo de tesis es[1]:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Lm(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \tag{2.1}$$

[1] Para el caso de fallas a la salida ver [60].

donde $\dot{x}(t)$, $x(t) \in \mathcal{X}$ (espacio de estado), $u(t) \in \mathcal{U}$ (espacio de entradas conocidas), $y(t) \in \mathcal{Y}$ (espacio de salidas conocidas) y $m(t) \in \mathcal{M}$ (espacio de entradas desconocidas, es decir, fallas).

Además A, B, C, L son mapeos lineales definidos como: $A : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, $B : \mathcal{U} \to \mathcal{X}$, $C : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ y $L : \mathcal{M} \to \mathcal{X}$.

$L = \begin{bmatrix} L_1 & L_2 \dots L_k \end{bmatrix}$ y $m(t) = \begin{bmatrix} m_1(t) & m_2(t) \dots m_k(t) \end{bmatrix}^T$, donde $i = 1, \dots, k$.

Las entradas arbitrarias $m_i(t)$ son los *modos de falla* desconocidos tales que:

$$\begin{aligned} m_i(t) = 0 &\quad \text{si no existen fallas} \\ m_i(t) \neq 0 &\quad \text{si se presentan fallas} \end{aligned}$$

donde $m_i(t) \in \mathcal{M}_i$ y $\dim \mathcal{M}_i = \eta_i$.

Al mapeo $L_i : \mathcal{M}_i \longrightarrow \mathcal{X}$ se le denomina *firma de falla*.

Se asume que el par (C, A) es *observable* y que Ker $L_i = \{0\}$.

El proceso de detección e identificación de fallas comprende esencialmente dos etapas:

1. Generación de residuos.

2. Toma de decisiones (en torno a la operación del sistema).

En esta tesis nos concentramos únicamente en la generación de residuos. Para la etapa de toma de decisiones ver [38] y [4].

2.3.1. Generación de residuos

Consideremos el siguiente *observador de orden completo* para el sistema (2.1) sin tomar en cuenta la presencia de fallas (conocido también como filtro Beard-Jones para detección de fallas):

$$\dot{w}(t) \;=\; (A + DC)w(t) - Dy(t) + Bu(t); \quad \widehat{y}(t) = Cw(t) \tag{2.2}$$

donde $D : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{X}$ es un mapeo *inyección de salida* [2].

Definimos la siguiente señal de error entre las salidas, denominado *vector residual* (innovación):

$$r(t) = \widehat{y}(t) - y(t) = Cw(t) - y(t). \tag{2.3}$$

Un *generador residual* toma las mediciones $y(t)$ y las señales de entrada $u(t)$ y genera un vector residual $r(t)$ (conocido también como vector innovación) el cual tiende a cero exponencialmente cuando no hay fallas, pero tiende a un valor distinto de cero mientras esté presente la falla.

[2]En realidad, como se verá en el Capítulo 4, esta inyección de salida corresponde a una amiga del subespacio $\mathcal{W}^*_{[C,A,L]}$.

Ahora bien, el vector error entre los estados (error de observación) es:

$$e(t) = w(t) - x(t).$$

Por lo que, utilizando (2.1) y (2.2) obtenemos la siguiente *dinámica del error de observación*:

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= (A + DC)e(t) - Lm(t) \\ r(t) &= Ce(t) \end{aligned} \tag{2.4}$$

En este momento por (2.4) podemos saber si existe alguna falla (bajo la hipótesis de que $(A + DC)$ sea Hurwitz). En el Capítulo 4 daremos más condiciones que nos permitirán identificar la falla.

2.3.2. Ejemplo ilustrativo, caso de dos fallas

Ilustraremos este procedimiento para el caso de dos fallas.

Ejemplo 2.1

Consideremos el sistema continuo lineal invariante en el tiempo observable con dos fallas:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + \begin{bmatrix} L_1 & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1(t) \\ m_2(t) \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

$$y(t) = Cx(t) \tag{2.6}$$

donde
$L_1 m_1(t)$ caracteriza la primera falla.
$L_2 m_2(t)$ caracteriza la segunda falla.

Las funciones $m_i(t)$ son desconocidas y por definición $m_i(t) = 0$ cuando no existen fallas, $i = 1, 2$.

Para el sistema (2.5) consideremos el observador de orden completo (2.2).

Definamos dos diferentes mapeos lineales del vector residual $r(t)$:

$$\begin{aligned} r_1(t) &= H_1(\hat{y}(t) - y(t)), \\ r_2(t) &= H_2(\hat{y}(t) - y(t)). \end{aligned}$$

Se desea encontrar mapeos lineales D, H_1 y H_2 tales que:

- la falla $m_1(t) \neq 0$ se muestre en $r_1(t)$ pero no tenga efecto en $r_2(t)$
- la falla $m_2(t) \neq 0$ se muestre en $r_2(t)$ pero no tenga efecto en $r_1(t)$

Si $r_1(t)$ y $r_2(t)$ son restringidos a subespacios independientes, entonces H_1 y H_2 son proyecciones sobre estos subespacios independientes.

Este es básicamente el enfoque utilizado por Beard y Jones.

La idea general de la formulación geométrica del filtro Bear-Jones realizado por Massoumnia [59] es la siguiente:

Para que $m_2(s) \neq 0$ no afecte a $r_1(s)$, es decir, la función de transferencia entre $m_2(s)$ y $r_1(s)$ sea nula, el subespacio de controlabilidad del par (A, L_2) debe estar incluido en el espacio de inobservabilidad del par $(H_1 C, A + DC)$.

El *subespacio inobservable* del sistema $(H_1 C, A + DC)$ es el subespacio generado por los vectores propios de $A + DC$ los cuales están en el espacio nulo de $H_1 C$.

También, el vector columna L_2 debería ser una combinación lineal de aquellos vectores propios, ya que la falla $m_2(t) \neq 0$ no deberá mostrarse en $r_1(t)$.

Por lo tanto, el problema es usar la propiedad de asignar libremente[3] los vectores propios de $A + DC$ para satisfacer los requerimientos de detección e identificación de fallas.

En lugar de buscar mapeos lineales D, H_1 y H_2, entonces el problema se reformula en términos de la existencia de subespacios $\mathcal{K}_1$ y $\mathcal{K}_2$ tales que Im $L_1 \subset \mathcal{K}_1$ e Im $L_2 \subset \mathcal{K}_2$ y que estos subespacios puedan ser asignados como los subespacios inobservables de los sistemas $(H_1 C, A + DC)$ y $(H_2 C, A + DC)$ respectivamente.

Por lo tanto un problema que consiste en hallar los mapeos D, H_1 y H_2 se convierte en el problema de hallar los subespacios $\mathcal{K}_1$ y $\mathcal{K}_2$.

En el Capítulo 4 exponemos con más detalles esta *formulación geométrica del problema del filtro Beard-Jones para detección de fallas* realizado por Massoumnia [59].

Pero antes de esto, en el Capítulo 3 se revisa las dualidades existente entre el subespacio supremo $(A, B) - invariante$ contenido en el Ker C, $\mathcal{V}^*_{[A,B,C]}$, y el subespacio ínfimo $(C, A) - invariante$ que contiene a Im B, $\mathcal{W}^*_{[C,A,B]}$, pues esta dualidad es el punto de partida de la solución geométrica del problema de detección de fallas.

[3] Asignación arbitraria

CAPÍTULO 3

Dualidades entre los subespacios $(A+BF)-invariante$ y $(A+DC)-invariante$

En este capítulo se recuerdan brevemente dos aplicaciones típicas de los sistemas inversos a la derecha y a la izquierda, a saber: (i) *el control no interactivo*, también llamado *desacoplamiento*, y (ii) *la identificación de fallas*, aquí llamada *desacoplamiento de fallas*.

También se muestra que la solución a estos dos problemas reposa en la dualidad de los subespacios $(A+BF)-invariante$ y $(A+DC)-invariante$.

Finalmente se analizan las propiedades principales de los subespacios $(A+BF)-invariante$ y $(A+DC)-invariante$ que conducen a la dualización de estos dos problemas.

3.1. Introducción

Los concepto básicos de los problemas de *desacoplamiento* y de *desacoplamiento de fallas* son los siguientes:

1. El problema de *desacoplamiento* consiste en encontrar un precompensador $\Psi(\mathrm{s})$ para una planta dada $T(\mathrm{s})$, tal que: $T(\mathrm{s})\Psi(\mathrm{s}) = \mathrm{I}$.

2. El problema de *desacoplamiento de fallas* consiste en encontrar un filtro $\Phi(\mathrm{s})$ para una planta dada $T(\mathrm{s})$, tal que: $\Phi(\mathrm{s})T(\mathrm{s}) = \mathrm{I}$.

Por lo que estos dos problemas son resueltos mediante la aplicación directa de un sistema inverso derecho y un sistema inverso izquierdo, respectivamente.

Ahora bien, Hautus y Heymann [80] mostraron, que bajo ciertas condiciones, el precompensador $\Psi(\mathrm{s})$ de la planta $T(\mathrm{s}) = C\big(\mathrm{sI} - A\big)^{-1}B$, puede realizarse mediante una simple retroalimantación de estado. Entonces por dualidad, existen también condiciones bajo las cuales el filtro $\Phi(\mathrm{s})$ puede realizarse mediante una simple inyección de salida.

3.2. Problema de desacoplamiento

Para el problema de desacoplamiento se considera el siguiente sistema:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad ; \quad \underbrace{\begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_k(t) \end{bmatrix}}_{y(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_k \end{bmatrix}}_{C} x(t)$$

donde u es la entrada, x es el estado, y y_1, …, y_k son las salidas. Los mapas están definidos como sigue: $A : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, $B : \mathcal{U} \to \mathcal{X}$, $C_i : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}_i$, $i \in \{1, \ldots, k\}$, donde $\mathcal{X}, \mathcal{U}$, y $\mathcal{Y}_i$ son el espacio de estado, de entradas, y de salidas, respectivamente, con $\dim \mathcal{X} = n$ y $\mathcal{Y} = \oplus_{i=1}^{k} \mathcal{Y}_i$.

En [78] el Problema del Desacoplamiento es resuelto utilizando los *subespacios supremos* $(A, B) -$ *de controlabilidad* contenidos en subespacios $\mathcal{K}_i$, $\mathcal{R}^*_{[A,B,\mathcal{K}_i]}$; estos subespacios son calculados también como: $\mathcal{R}^*_{[A,B,\mathcal{K}_i]} = \mathcal{V}^*_{[A,B,\mathcal{K}_i]} \cap \mathcal{W}^*_{[A,B,\mathcal{K}_i]}$. En efecto, si se asume que existe al menos una retroalimentació amiga, F, de todos los $\mathcal{R}^*_{[A,B,\mathcal{K}_i]}$, $i \in \{1, \ldots, k\}$, y si se hace la siguiente asignación mediante la retroalimentación amiga: $A \mapsto (A + BF)$ y $B \mapsto B \begin{bmatrix} G_1 & \cdots & G_k \end{bmatrix}$, se obtiene la siguiente *condición de compatibilidad*: $(A+BF)\mathcal{R}^*_{[A,B,\mathcal{K}_i]} \subset \mathcal{R}^*_{[A,B,\mathcal{K}_i]}$ y Im $BG_i \subset \mathcal{R}^*_{[A,B,\mathcal{K}_i]}$. Por ejemplo para $k = 3$ se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix} A_{F,1} & 0 & 0 & * \\ 0 & A_{F,2} & 0 & * \\ 0 & 0 & A_{F,3} & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix}}_{A+BF} x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{B}_1 & 0 & 0 & * \\ 0 & \bar{B}_2 & 0 & * \\ 0 & 0 & \bar{B}_2 & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix}}_{BG} u(t) \\ y(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} & C_{1,3} & C_{1,4} \\ C_{2,1} & C_{2,2} & C_{2,3} & C_{2,4} \\ C_{3,1} & C_{3,2} & C_{3,3} & C_{3,4} \end{bmatrix}}_{C} x(t) \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde $\mathcal{R}^*_{[A,B,\mathcal{K}_1]} = \{e_1\}$, $\mathcal{R}^*_{[A,B,\mathcal{K}_2]} = \{e_2\}$ y $\mathcal{R}^*_{[A,B,\mathcal{K}_3]} = \{e_3\}$. Los $A_{F,i}$ son los mapeos de doble restricción $\mathcal{R}^*_{[A,B,\mathcal{K}_i]}|(A+BF)|\mathcal{R}^*_{[A,B,\mathcal{K}_i]}$. Sean las siguientes condiciones complementarias: (i) *de no interacción*: $\mathcal{K}_i = \cap_{j \neq i}$Ker C_j y (ii) *de controlabilidad de la salida*: $\mathcal{R}^*_{[A,B,\mathcal{K}_i]} +$Ker $C_i = \mathcal{X}$. Entonces de (i) se tiene que: $C_{1,2} = C_{1,3} = C_{2,1} = C_{2,3} = C_{3,1} = C_{3,2} = 0$ y de (ii) se sigue que: $C_{1,4} = C_{2,4} = C_{3,4} = 0$. Lográndose de esta manera el desacoplamiento.

3.3. Problema de desacoplamiento de fallas

Para el problema de desacoplamiento de fallas se considera el siguiente sistema:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} L_1 & \cdots & L_k \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} m_1(t) \\ \vdots \\ m_k(t) \end{bmatrix}}_{m(t)} \quad ; \quad y(t) = Cx(t)$$

donde y es la salida, u es la entrada, y $m_1, \ldots, m_k$ son las fallas. Los mapas están definidos como sigue: $A : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, $B : \mathcal{U} \to \mathcal{X}$, $L_i : \mathcal{M}_i \to \mathcal{X}$, $i \in \{1, \ldots, k\}$, $C : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, donde $\mathcal{X}$, $\mathcal{U}$, $\mathcal{M}_i$ y $\mathcal{Y}$ son el espacio de estado, de entradas, de fallas y de salida, respectivamente, con $\dim \mathcal{X} = n$ y $\mathcal{M} = \oplus_{i=1}^{k} \mathcal{M}_i$.

Para resolver el *problema de desacoplamiento de fallas*, Massoumnia [59] utiliza el filtro de Beard-Jones (ver sección 2.3.1) obteniendo el siguiente sistema de dinámica del error:

$$\dot{e}(t) = (A + DC)e(t) - Lm(t) \quad ; \quad r(t) = Ce(t)$$

Por la dualidad se tiene que el problema de desacoplamiento de fallas puede resolverse utilizando los duales de los subespacios $\mathcal{R}_{[A,L,\mathcal{K}_i]}$, es decir, utilizando los *subespacios ínfimos* (C, A) *– de inobservabilidad* que contienen subespacios $\mathcal{K}_i$, $\mathcal{S}^*_{[C,A,\mathcal{K}_i]}$; estos subespacios son calculados también como: $\mathcal{S}^*_{[C,A,\mathcal{K}_i]} = \mathcal{V}^*_{[A,B,\mathcal{K}_i]} + \mathcal{W}^*_{[A,B,\mathcal{K}_i]}$. En efecto, si se asume que existe al menos una inyección de salida amiga, D, de todos los $\mathcal{S}^*_{[C,A,\mathcal{K}_i]}$, $i \in \{1, \ldots, k\}$, y si se hace la siguiente asignación mediante la inyección de salida amiga: $A \mapsto (A + DC)$ y $C \mapsto \begin{bmatrix} H_1 & \cdots & H_k \end{bmatrix} C$, se obtiene la siguiente *condición de compatibilidad*: $(A+DC)\mathcal{S}^*_{[C,A,\mathcal{K}_i]} \subset \mathcal{S}^*_{[C,A,\mathcal{K}_i]}$ y Ker $H_iC \supset \mathcal{S}^*_{[C,A,\mathcal{K}_i]}$. Por ejemplo para $k = 3$ se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix} A_{D,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{D,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{D,3} & 0 \\ * & * & * & * \end{bmatrix}}_{A+DC} e(t) - \underbrace{\begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & B_{1,3} \\ B_{2,1} & B_{2,2} & B_{2,3} \\ B_{3,1} & B_{3,2} & B_{3,3} \\ B_{4,1} & B_{4,2} & B_{4,3} \end{bmatrix}}_{L} m(t) \\ r(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{C}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{C}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{C}_2 & 0 \\ * & * & * & * \end{bmatrix}}_{HC} e(t) \end{aligned} \tag{3.2}$$

donde $\mathcal{S}^*_{[C,A,\mathcal{K}_1]} = \{e_2, e_3, e_4\}$, $\mathcal{S}^*_{[C,A,\mathcal{K}_2]} = \{e_1, e_3, e_4\}$, y $\mathcal{S}^*_{[C,A,\mathcal{K}_3]} = \{e_1, e_2, e_4\}$. Los $A_{D,i}$ son los mapeos inducidos por $(A + DC)$ en $\mathcal{X}/\mathcal{S}^*_{[C,A,\mathcal{K}_i]}$. Sean las siguientes condiciones complementarias: (i) *de no interacción*: $\mathcal{K}_i = \text{Im } B_j$, con $j \neq i$ y (ii) *de inobservabilidad de la entrada*: $\mathcal{S}^*_{[C,A,\mathcal{K}_i]} \cap \text{Im } B_i = \{0\}$. Entonces de (i) se tiene que: $B_{1,2} = B_{1,3} = B_{2,1} = B_{2,3} = B_{3,1} = B_{3,2} = 0$ y de (ii) se sigue que: $B_{4,1} = B_{4,2} = B_{4,3} = 0$. Lográndose de esta manera el desacoplamiento de fallas.

En el Capítulo 4 recordamos el procedimiento geométrico aplicado por Massoumnia para encontrar los subespacios separables a la salida que resuelven el *problema de desacoplamiento de fallas*. Para el caso dual de *desacoplamiento* (*control no interactivo*) ver [81].

3.4. Invariancias, dinámicas fijas y dinámicas libres

Existen básicamente dos maneras en las que actúa una retroalimentación amiga $F \in \mathbf{F}(\mathcal{V}^*_{[A,B,C]})$ para obtener una $(A + BF)$ invariancia de $\mathcal{V}^*_{[A,B,C]}$. La primera es por medio de una *cancelación polo-cero* y la segunda es mediante *desconexiones de entrada-salida en el diagrama de flujo de señales del sistema.*

En el caso de una *cancelación polo-cero* se dice que se obtiene una *dinámica fija*. Es *fija* en el sentido de que si se reasigna nuevamente la posición de los polos, entonces se pierde la invariancia debido a que se deja de cancelar al cero en cuestión (ver también la tesis [23]).

En el caso de una desconexión de la trayectorias, se dice que se obtiene una *dinámica libre*. Es *libre* en el sentido de que se puede reasignar nuevamente la posición de los polos sin alterar la invariancia.

3.4.1. $(A + BF) - invariancia$ de $\mathcal{V}^*_{[A,B,C]}$

En el Teorema 5.2 de Wonhan [78] se caracterizan las dinámicas libre y fija para el caso de un subespacio *(A,B)-invariante*, $\mathcal{V}^*_{[A,B,C]}$, contenido en Ker C.

La representación de estado de un sistema lineal invariante en el tiempo estrictamente propio $\Sigma(A, B, C) : \mathcal{U} \to \mathcal{Y}$ es:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \tag{3.3}$$

donde u es la entrada, y es la salida y x es el estado. Los mapeos lineales están definidos como sigue: $A : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, $B : \mathcal{U} \to \mathcal{X}$ y $C : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$. $\mathcal{X}, \mathcal{U}$ y $\mathcal{Y}$ son los espacios de estados, de entradas y de salidas respectivamente.

Teorema 8 *(Teorema 5.2 de Wonham [78]).*
Sean $\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} \subset \mathcal{X}$ el subespacio supremo (A,B)-invariante, $\mathcal{R}^*_{[A,B,C]} = \mathcal{V}^*_{[A,B,C]} \cap \mathcal{W}^*_{[\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}]}$, $F \in \mathbf{F}(\mathcal{V}^*_{[A,B,C]})$ y $A_F = (A + BF) : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$. Sean $\bar{A}_F$ el mapeo inducido por A_F en $\frac{\mathcal{X}}{\mathcal{V}^*_{[A,B,C]}}$, $\widehat{A}_F$ el mapeo inducido por $\mathcal{V}^*_{[A,B,C]}|A_F|\mathcal{V}^*_{[A,B,C]}$ en $\frac{\mathcal{V}^*_{[A,B,C]}}{\mathcal{R}^*}$ y $\widetilde{A}_F$ el mapeo restricción de A_F a $\mathcal{R}^*_{[A,B,C]}$ (ver diagramas conmutativos de la Figura 3.1). Entonces

$$\sigma \left(\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} \middle| A_F \middle| \mathcal{V}^*_{[A,B,C]} \right) = \sigma^*_F \uplus \sigma^\sharp_F$$

donde

$$\begin{aligned} \sigma^*_F &= \sigma\left(\widehat{A}_F\right) && \text{dinámica fija (independiente de } F \in \mathbf{F}(\mathcal{V}^*_{[A,B,C]})) \text{ y} \\ \sigma^\sharp_F &= \sigma\left(\widetilde{A}_F\right) && \text{dinámica libre para alguna selección de } F \in \mathbf{F}(\mathcal{V}^*_{[A,B,C]}) \ \Box \end{aligned}$$

Recordemos que:

(i) $\mathcal{V}^*_{[A,B,C]}$ es el más grande subespacio que contiene a todas las trayectorias que se hacen inobservables a la salida, mediante una retroalimentación amiga.

(i) $\mathcal{R}^*_{[A,B,C]}$ es el subespacio con dinámica libremente asignada.

(iii) $\frac{\mathcal{V}^*_{[A,B,C]}}{\mathcal{R}^*_{[A,B,C]}}$ es el subespacio con dinámica fija, entonces σ^*_F corresponde al conjunto de los valores propios que cancelan a los *ceros invariantes* del sistema (A, B, C) para obtener la $(A + BF) - invariancia$ de $\mathcal{V}^*_{[A,B,C]}$.

Ahora bien, si descomponemos al espacio de estado como sigue:

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}_0 \oplus \mathcal{X}_c \oplus \mathcal{R}^*_{[A,B,C]}$$

donde $\mathcal{X}_0$ es un subespacio complementario de $\mathcal{V}^*_{[A,B,C]}$ en $\mathcal{X}$ y $\mathcal{X}_c$ es un subespacio complementario de $\mathcal{R}^*_{[A,B,C]}$ en $\mathcal{V}^*_{[A,B,C]}$, por lo que $\mathcal{X}_0 \approx \frac{\mathcal{X}}{\mathcal{V}^*_{[A,B,C]}}$ y $\mathcal{X}_c \approx \frac{\mathcal{V}^*_{[A,B,C]}}{\mathcal{R}^*_{[A,B,C]}}$. Entonces se tiene la siguiente representación matricial (ver Figura 3.1):

$$A_F = A + BF \;=\; \begin{bmatrix} \bar{A}_F & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ X_1 & \widehat{A}_F & \mathbf{0} \\ X_2 & X_3 & \widetilde{A}_F \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} C_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X} \arrow[r, "A"] \arrow[d, "\overline{\Pi}"] & \mathcal{X} \arrow[d, "\overline{\Pi}"] \\ \frac{\mathcal{X}}{\mathcal{V}^*_{[A,B,C]}} \arrow[r, "\bar{A}_F"] & \frac{\mathcal{X}}{\mathcal{V}^*_{[A,B,C]}} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{V}^*_{[A,B,C]} \arrow[r, "\mathcal{V}^*_{[A,B,C]}|A_F|\mathcal{V}^*_{[A,B,C]}"] \arrow[d, "\widehat{\Pi}"] & \mathcal{V}^*_{[A,B,C]} \arrow[d, "\widehat{\Pi}"] \\ \frac{\mathcal{V}^*_{[A,B,C]}}{\mathcal{R}^*_{[A,B,C]}} \arrow[r, "\widehat{A}_F"] & \frac{\mathcal{V}^*_{[A,B,C]}}{\mathcal{R}^*_{[A,B,C]}} \end{tikzcd}$$

$$\overline{\Pi}A = \bar{A}_F\overline{\Pi} \qquad \widehat{\Pi}(\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} \mid A_F \mid \mathcal{V}^*_{[A,B,C]}) = \widehat{A}_F\widehat{\Pi}$$

Figura 3.1: Diagramas conmutativos relacionados a (3.4).

El bloque punteado nos muestra dónde se encuentra la *dinámica fija* y el bloque continuo nos muestra la $(A + BF) - invariancia$ obtenida de $\mathcal{V}^*_{[A,B,C]}$. Note que el bloque punteado está contenido en el bloque continuo.

3.4.2. $(A + DC) - invariancia$ de $\mathcal{W}^*_{[C,A,B]}$

Ahora enunciemos el resultado dual del Teorema 5.7 de Wonham [78]. Para esto se utiliza el subespacio $(C, A) - invariante$ $\mathcal{W}^*_{[C,A,B]}$ que contiene a Im B, con

$$D \in \underline{D}(\mathcal{W}^*_{[C,A,B]}) = \{D : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{X} \mid (A + DC)\mathcal{W}^*_{[C,A,B]} \subset \mathcal{W}^*_{[C,A,B]}\}$$

Teorema 9 *(Teorema dual del Teorema 5.7 de Wonham [78]).*
Sean $\mathcal{W}^*_{[C,A,B]} \subset \mathcal{X}$ el subespacio ínfimo (C,A)-invariante que contiene a Im B, $\mathcal{S}^* = \mathcal{V}^*_{[A,B,C]} + \mathcal{W}^*_{[C,A,B]}$, $D \in \underline{D}(\mathcal{W}^*_{[C,A,B]})$ y $A_D = (A + DC) : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$. Sean $\bar{A}_D$ el mapeo restricción de A_D en $\mathcal{W}^*_{[C,A,B]}$, $\widehat{A}_D$ el mapeo inducido por $\mathcal{S}^*|A_D|\mathcal{S}^*$ en $\frac{\mathcal{S}^*}{\mathcal{W}^*_{[C,A,B]}}$ y $\widetilde{A}_D$ el mapeo inducido por A_D en $\frac{\mathcal{X}}{\mathcal{S}^*}$ (ver diagramas conmutativos de la Figura 3.1). Entonces

$$\sigma\left(\frac{\mathcal{X}}{\mathcal{W}^*_{[C,A,B]}}\middle|A_D\middle|\frac{\mathcal{X}}{\mathcal{W}^*_{[C,A,B]}}\right) = \sigma^*_D \uplus \sigma^\sharp_D$$

donde

$$\begin{aligned}\sigma_D^* &= \sigma\left(\widehat{A}_D\right) \quad \text{dinámica fija y} \\ \sigma_D^\sharp &= \sigma\left(\widetilde{A}_D\right) \quad \text{dinámica libre para alguna selección de } D \in \underline{D}(\mathcal{W}^*)\square\end{aligned}$$

Recordemos que:

(i) $\mathcal{W}^*_{[C,A,B]}$ es el subespacio más pequeño que sigue siendo controlable, mediante una inyección de salida amiga, por lo que $\frac{\mathcal{X}}{\mathcal{W}^*}$ es el espacio cociente que contiene a todas las trayectorias del sistema que se hacen no controlables, mediante una inyección de salida amiga.

(ii) $\frac{\mathcal{X}}{\mathcal{S}^*}$ es el espacio cociente con dinámica libremente asignada.

(iii) $\frac{\mathcal{S}^*}{\mathcal{W}^*}$ es el espacio cociente con dinámica fija, entonces σ_D^* corresponde al conjunto de los valores propios que cancelan a los *ceros invariantes* del sistema (C, A, B) para obtener la *(A+DC)-invariancia* de $\mathcal{W}^*$.

Ahora bien, si descomponemos al espacio de estado como sigue:

$$\mathcal{X} = \mathcal{W}^*_{[C,A,B]} \oplus \underline{\mathcal{X}}_c \oplus \underline{\mathcal{X}}_0 \tag{3.5}$$

donde $\underline{\mathcal{X}}_0$ es un subespacio complementario de $\mathcal{S}^*$ en $\mathcal{X}$ y $\underline{\mathcal{X}}_c$ es un subespacio complementario de $\mathcal{W}^*_{[C,A,B]}$ en $\mathcal{S}^*$, por lo que $\underline{\mathcal{X}}_0 \approx \frac{\mathcal{X}}{\mathcal{S}^*}$ y $\underline{\mathcal{X}}_c \approx \frac{\mathcal{S}^*}{\mathcal{W}^*_{[C,A,B]}}$. Entonces se tiene la siguiente representación matricial (ver Figura (3.2) :

$$A_D = A + DC = \begin{bmatrix} \boxed{\bar{A}_D} & \underline{X}_1 & \underline{X}_2 \\ \mathbf{0} & \widehat{A}_D & \underline{X}_3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \widetilde{A}_D \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

La caja con líneas continuas nos muestra la $(A+DC)$-*invariancia* obtenida de $\mathcal{W}^*_{[C,A,B]}$, mientras que la caja con líneas punteadas nos muestra dónde se encuentra la *dinámica fija*[1].

Como podemos observar de esta representación matricial, a diferencia de la representación matricial (3.4) la *invariancia* y la *dinámica fija* están disjuntas en posición.

Enseguida mostramos dos ejemplos académicos que resaltan la problemática de los ceros invariantes no Hurwitz. En particular el Ejemplo 3.2 servirá de marco de referencia a lo largo de esta tesis.

[1]Note también que las matrices A_F de (3.4) y A_D de (3.6) tienen formas matricialmente transpuestas.

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{X} \arrow[r, "A"] \arrow[d, "\widetilde{\Pi}"] & \mathcal{X} \arrow[d, "\widetilde{\Pi}"] \\
\frac{\mathcal{X}}{\mathcal{S}^*_{[C,A,B]}} \arrow[r, "\widetilde{A}_D"] & \frac{X}{\mathcal{S}^*_{[C,A,B]}}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{S}^*_{[C,A,B]} \arrow[r, "\mathcal{S}^*_{[C,A,B]}|A_D|\mathcal{S}^*_{[C,A,B]}"] \arrow[d, "\widehat{\Pi}"] & \mathcal{S}^*_{[C,A,B]} \arrow[d, "\widehat{\Pi}"] \\
\frac{\mathcal{S}^*_{[C,A,B]}}{\mathcal{W}^*_{[C,A,B]}} \arrow[r, "\widehat{A}_D"] & \frac{\mathcal{S}^*_{[C,A,B]}}{\mathcal{W}^*_{[C,A,B]}}
\end{tikzcd}
$$

$$\widetilde{\Pi}A_D = \widetilde{A}_D\widetilde{\Pi} \qquad \widehat{\Pi}(\mathcal{S}^*_{[C,A,B]}|A_D|\mathcal{S}^*_{[C,A,B]}) = \widehat{A}_D\widehat{\Pi}$$

Figura 3.2: Diagramas conmutativos relacionados a (3.6).

3.4.3. Dos ejemplos ilustrativos

Ejemplo 3.1

En este ejemplo aplicamos el Teorema 8 al siguiente sistema:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & -(1-\alpha) & -(1+\alpha) & (1-\alpha) \\ 0 & -(2-\alpha) & -(1+\alpha) & (1-\alpha) \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & \alpha & -(1+\alpha) & -\alpha \end{bmatrix}}_{A} x(t) + \underbrace{\left[\begin{array}{cc} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right]}_{B} u(t), \\
y(t) &= \underbrace{\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{C} x(t).
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

De acuerdo a los algoritmos (1.3) y (1.5) efectuamos los cálculos correspondientes y obtenemos:
Ker $C = \{e_3,\ e_4\}$ y $\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} = \text{Ker } C$.
Im $B = \{e_1,\ e_2\}$ y $\mathcal{W}^*_{[C,A,B]} = \text{Im } B$.
Por lo tanto $\mathcal{R}^* = \mathcal{V}^*_{[A,B,C]} \cap \mathcal{W}^*_{[C,A,B]} = \{0\}$. Entonces en este caso no hay dinámica libre.

Para obtener una $(A + BF)$ invariancia de $\mathcal{V}^*_{[A,B,C]}$ usamos la retroalimentación:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & -(1-\alpha) & -(1+\alpha) & (1-\alpha) \\ 0 & -(1-\alpha) & -(1+\alpha) & (1-\alpha) \end{bmatrix}$$

entonces el sistema retroalimentado tiene la forma [2]:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \underbrace{\left[\begin{array}{cccc} -1 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 0 & -1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & \alpha & -(1+\alpha) & -\alpha \end{array}\right]}_{A+BF} x(t) + \underbrace{\left[\begin{array}{cc} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right]}_{B} u(t), \\
y(t) &= \underbrace{\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 0 & 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right]}_{C} x(t),
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

donde el bloque punteado asociado a la *dinámica fija* está contenido en el bloque continuo asociado a la *invariancia*.

Ejemplo 3.2

Ahora para el sistema dual observable del sistema anterior aplicamos el Teorema 9.

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \underbrace{\left[\begin{array}{cccc} -1 & 0 & 1 & -1 \\ -(1-\alpha) & -(2-\alpha) & -1 & \alpha \\ -(1+\alpha) & -(1+\alpha) & -1 & -(1+\alpha) \\ (1-\alpha) & (1-\alpha) & 0 & -\alpha \end{array}\right]}_{A} x(t) + \underbrace{\left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right]}_{L} m(t), \\
y(t) &= \underbrace{\left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{C} x(t),
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

donde, para facilitar los cálculos se han renombrado las matrices como sigue: $A^T = A$, $C^T = L$ y $L^T = C$.

De acuerdo a los algoritmos (1.3) y (1.5) efectuamos los cálculos correspondientes y obtenemos:
Ker $C = \{e_3,\ e_4\}$ y $\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} = \text{Ker } C$.
Im $L = \{e_1, e_2\}$ y $\mathcal{W}^*_{[C,A,B]} = \text{Im } L$.
Entonces $\mathcal{S}^* = \mathcal{V}^*_{[A,B,C]} + \mathcal{W}^*_{[C,A,B]} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\} = \mathcal{X}$. Como $\frac{\mathcal{X}}{\mathcal{S}^*}$ es el subespacio con dinámica libre, entonces en este caso no hay dinámica libre.

Ahora, como $\frac{\mathcal{S}^*}{\mathcal{W}^*_{[C,A,B]}}$ es el subespacio con dinámica fija y $\mathcal{W}^*_{[C,A,B]} = \{\mathcal{W}^*_{L_1}, \mathcal{W}^*_{L_2}\} = \{e_1, e_2\}$ entonces $\dim \frac{\mathcal{S}^*}{\mathcal{W}^*_{[C,A,B]}} = 2$, es decir, el sistema tiene 2 ceros invariantes.

Para obtener una $(A + D_1C)$ invariancia de $\mathcal{W}^*_{[C,A,B]}$ usamos la inyección de salida:

$$
D_1 = \begin{bmatrix} 0 & -(1-\alpha) & -(1+\alpha) & (1-\alpha) \\ 0 & -(1-\alpha) & -(1+\alpha) & (1-\alpha) \end{bmatrix}^T
$$

[2]En este caso la *(A+BF)-invariancia* de $\mathcal{V}^*_{[A,B,C]}$ es obtenida solamente por cancelación polo-cero.

entonces el sistema inyectado tiene la forma:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \underbrace{\left[\begin{array}{cccc} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & \alpha \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -1 & -(1+\alpha) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 & -\alpha \end{array}\right]}_{A_{D_1}=A+D_1C} x(t) + \underbrace{\left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right]}_{L} m(t), \\
y(t) &= \underbrace{\left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{C} x(t),
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

donde, la caja con líneas continuas representa la *invariancia*, mientras que la caja con líneas punteadas representa la *dinámica fija*.

Pero si $\alpha = -1$ entonces uno de estos ceros es no Hurwitz, por lo que su cancelación genera un modo interno inestable.

Debido a la propiedad de observabilidad, el sistema puede ser estabilizado con una inyección de salida adicional (originando la pérdida de invariancia del modo estabilizado):

$$
D_2 = \left[\begin{array}{cccc} 0 & (1-\alpha) & -(1-\alpha) & -(1-\alpha) \\ 0 & (1-\alpha) & -(1-\alpha) & -(1-\alpha) \end{array}\right]^T.
$$

Entonces el sistema inyectado con D_2 tiene la forma:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \underbrace{\left[\begin{array}{cccc} -1 & 0 & 1 & -1 \\ -(1-\alpha) & -(2-\alpha) & -1 & \alpha \\ (1-\alpha) & (1-\alpha) & -1 & -(1+\alpha) \\ (1-\alpha) & (1-\alpha) & 0 & -\alpha \end{array}\right]}_{A_{D_2}=A_{D_1}+D_2C=A+DC} x(t) + \underbrace{\left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right]}_{L} m(t), \\
y(t) &= \underbrace{\left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{C} x(t),
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

donde $D = D_1 + D_2 = \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right]^T$. Obteniéndose así, un sistema internamente estable pero parcialmente invariante, *i.e.* $\det\big(\mathrm{sI} - (A+DC)\big) = (\mathrm{s}+1)^4$ y $\mathcal{W}_1^* = A_{D_2}\mathcal{W}_1^* = \{e_1 - e_2\}$.

CAPÍTULO 4

Formulación geométrica del problema del filtro Beard-Jones para detección de fallas

En este Capítulo revisamos la solución del problema de detección de fallas por medio de un observador de estado de orden completo.

Beard [6] y Jones [34] proponen un procedimiento para diseñar un observador especial que acentúe el efecto de las fallas mediante una comparación entre la salida del sistema original con fallas y entre el observador de estado del sistema sin tomar en cuenta las fallas. La presencia de las fallas origina una señal de error que es llamado innovación (predicción de error) del observador. Este observador es diseñado de tal forma que en ausencia de fallas, errores de modelación y perturbaciones en el sistema, el vector innovación tiende exponencialmente a cero, lo cual no ocurre ante la presencia de fallas.

Beard resolvió este problema utilizando nociones de subespacios compatibles y separables a la salida. Este problema fue reformulado por Massoumnia [59] utilizando conceptos geométricos como subespacios (C,A)-invariantes. Estos nuevos conceptos conducen a algoritmos de diseño numéricamente simples.

Este problema actualmente se le conoce como la formulación geométrica del *problema del filtro Beard-Jones para detección de fallas.*

4.1. Formulación geométrica del *problema del filtro Beard-Jones para detección de fallas*

En esta sección exponemos la formulación geométrica de Massoumnia [59] para el *problema del filtro Beard-Jones para detección de fallas.*

Para esta formulación geométrica se utilizan subespacios *(C,A)-invariantes* $\mathcal{W}_i$ que contienen a Im L_i. Estos subespacios obtienen la *(A+DC)-invariancia* a través de la selección apropiada de la inyección de salida amiga D. Además, se pide que los subespacios $C\mathcal{W}_i$ sean independientes para que el *vector residual r(t)* generado por cada falla diferente sea confinado a un subespacio independiente del espacio de salida (recordar secciones 1.2.6 y 1.2.7).

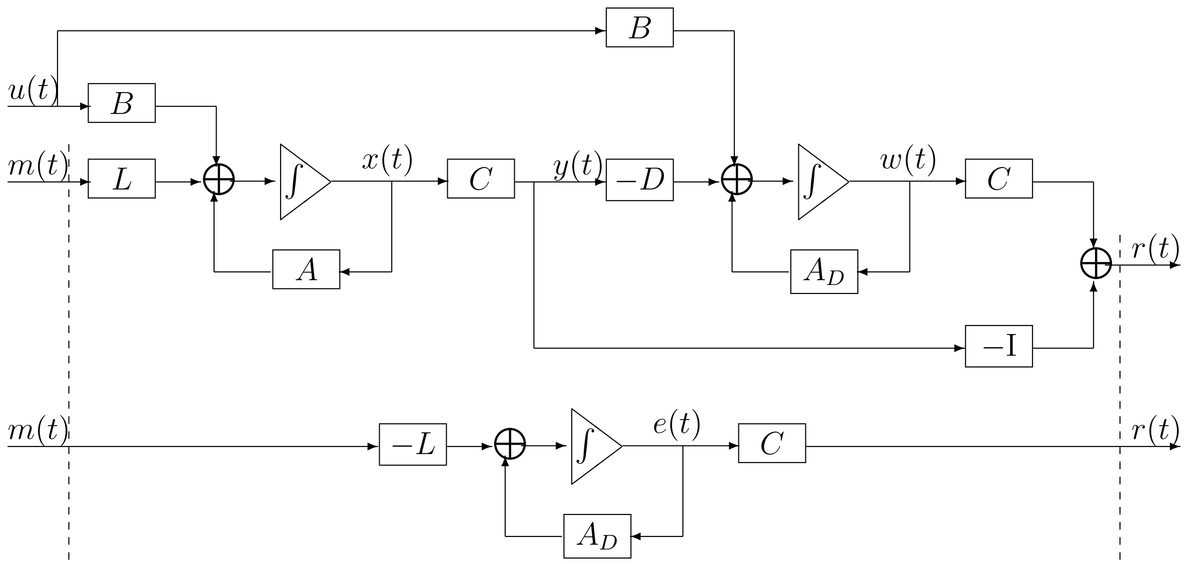

Figura 4.1: Generación de residuos, $A_D = A + DC$.

En la sección 2.3 se vio que dado el sistema lineal con fallas (compárese con (2.1)):

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Lm(t), \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \tag{4.1}$$

se construye el filtro Beard-Jones para detectar la falla (compárese con (2.2) y (2.3)):

$$\begin{aligned} \dot{w}(t) &= (A + DC)w(t) - Dy(t) + Bu(t), \\ r(t) &= Cw(t) - y(t), \end{aligned} \tag{4.2}$$

obteniéndose el siguiente error de observación (compárese (2.4))[1]:

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= (A + DC)e(t) - Lm(t), \\ r(t) &= Ce(t), \end{aligned} \tag{4.3}$$

con $L = [L_1 \dots L_i]$ (ver Figura 4.1).

El *problema del filtro Beard-Jones para detección de fallas* puede ser establecido en lenguaje geométrico como sigue:

Dados los mapeos lineales A, C y L_i, $i = 1, \dots, k$. Encontrar subespacios $(C, A)-$ *invariantes* $\mathcal{W}_i$, $i = 1, \dots, k$, para los cuales existe una inyección de salida D tal que:

$$(A + DC)\mathcal{W}_i \subset \mathcal{W}_i \quad i = 1, \dots, k. \tag{4.4}$$

$$\mathrm{Im}\ L_i \subset \mathcal{W}_i \quad i = 1, \dots, k. \tag{4.5}$$

$$C\mathcal{W}_i \cap \left(\sum_{j \neq i} C\mathcal{W}_j \right) = \{0\} \quad i = 1, \dots, k. \tag{4.6}$$

[1]En este trabajo de tesis se trabaja, sin pérdida de generalidad, son sistemas cuadrados, es decir, $\dim(\mathcal{Y}) = \dim(\mathcal{M})$, por lo que las proyecciones H_i no son necesarias.

Si existen subespacios $(C, A) - invariantes\ \ \mathcal{W}_i$, $i = 1, \cdots, k$ y una *inyección de salida amiga* D tales que satisfacen las condiciones (4.4) y (4.5), entonces cuando se presenta una falla $m_i(t) \neq 0$:

- la *dinámica del error de observación e(t)* permanece invariante dentro de un subespacio $\mathcal{W}_i$.
- el *vector residual* $r_i(t)$ es confinado a un subespacio independiente del espacio de salida $C\mathcal{W}_i$.

Siguiendo esta formulación, descomponemos al espacio de estado como sigue:

$$\mathcal{X} = (\mathcal{W}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{W}_\kappa) \oplus \mathcal{X}_c$$

donde $\mathcal{X}_c$ es cualquier subespacio complementario. Entonces el sistema (4.3) toma la siguiente forma (a modo de ejemplo seleccionamos $\kappa = 3$): [2]

$$\begin{aligned}\dot{e}(t) &= \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c} A_{D_1} & 0 & 0 & * \\ 0 & A_{D_2} & 0 & * \\ 0 & 0 & A_{D_3} & * \\ \hline 0 & 0 & 0 & A_0 \end{array}\right]}_{A_{D_1}=A+D_1C} e(t) + \underbrace{\left[\begin{array}{ccc} L_1 & 0 & 0 \\ 0 & L_2 & 0 \\ 0 & 0 & L_3 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{L} m(t), \\ r(t) &= \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c} C_1 & 0 & 0 & * \\ 0 & C_2 & 0 & * \\ 0 & 0 & C_3 & * \end{array}\right]}_{C} e(t).\end{aligned} \tag{4.7}$$

De esta manera se han desacoplado a la salida el efecto de las fallas.

Note también que se ha generado un modo no controlable A_0.

Ahora bien, si existen subespacios *(C,A)-invariantes*, $\mathcal{W}_i$, debido a la falla $m(t)$, y si además estos subespacios son *separables a la salida* (ver (4.6)) y *compatibles* (ver (4.4)), tales que satisfacen (4.5), entonces se puede hallar la inyección de salida amiga D.

Precisamente en el Lema 2 de [59] se demuestra que los subespacios *(C,A)-invariantes*, $\mathcal{W}_i$, *separables a la salida* son *compatibles*.

4.2. Solución geométrica del *problema del filtro Beard-Jones para detección de fallas*

.

El siguiente Teorema de Massoumnia [59] proporciona la condición geométrica necesaria y suficiente para la solución del *problema del filtro Beard-Jones para detección de fallas*.

[2] Donde $*$ representan valores irrelevantes en esta discusión.

Teorema 10 *[59]* Sea $\mathcal{W}_i^*$ el subespacio ínfimo de los subespacios *(C,A)-invariantes* que contienen a Im L_i. Entonces el *problema del filtro Beard-Jones para detección de fallas* tiene una solución si y sólo si

$$CW_i^* \cap \left(\sum_{j \neq i} CW_j^* \right) = \{0\}, \quad i = 1, \ldots, k\Box \tag{4.8}$$

En efecto, si descomponemos el espacio de estado como sigue (recordar (4.3)):

$$\mathcal{X} = (\mathcal{W}_1^* \oplus \cdots \oplus \mathcal{W}_\kappa^*) \oplus \underline{\mathcal{X}}_c \oplus \underline{\mathcal{X}}_0$$

donde $\mathcal{W}_1^* \oplus \cdots \oplus \mathcal{W}_\kappa^* = \mathcal{W}_{[C,A,L]}^*$. Entonces el sistema (4.9) toma la siguiente forma (seleccionamos, a modo de ejemplo, $\kappa = 3$):

$$\dot{e}(t) = \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|cc} \bar{A}_{D_1} & 0 & 0 & \underline{X}_{11} & \underline{X}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{D_2} & 0 & \underline{X}_{21} & \underline{X}_{22} \\ 0 & 0 & \bar{A}_{D_3} & \underline{X}_{31} & \underline{X}_{32} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \widehat{A}_D & \underline{X}_{33} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \widetilde{A}_D \end{array}\right]}_{A_{D_1} = A + D_1 C} e(t) + \underbrace{\left[\begin{array}{ccc} \bar{L}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{L}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{L}_3 \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right]}_{L} m(t), \tag{4.9}$$

$$r(t) = \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|cc} \bar{C}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} \\ \mathbf{0} & \bar{C}_2 & \mathbf{0} & \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{C}_3 & \underline{Y}_{31} & \underline{Y}_{32} \end{array}\right]}_{C} e(t).$$

Note que se han generado dos modos no controlables $\widehat{A}_D$ y $\widetilde{A}_D$ por la falla $m(t)$ (recordar sección 3.4.2). De estos dos modos no controlables, el primero tiene una dinámica fija (en el caso que se desee conservar la $(A + DC) - invariancia$ de $\mathcal{W}_{[C,A,L]}^*$).

Por lo que si el sistema posee algún cero no Hurwitz entonces se genera un modo inestable no controlable (recordar el Ejemplo 3.2).

A continuación retomamos el sistema del Ejemplo 3.2 del Capítulo 3 para ilustrar los conceptos expuestos arriba.

EJEMPLO 4.1.

Consideremos el siguiente sistema observable (compárese con (3.9)):

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ -(1-\alpha) & -(2-\alpha) & -1 & \alpha \\ -(1+\alpha) & -(1+\alpha) & -1 & -(1+\alpha) \\ (1-\alpha) & (1-\alpha) & 0 & -\alpha \end{bmatrix}}_{A} x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} u(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{L} m(t), \\
y(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{C} x(t).
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

Del algoritmo geométrico (1.5), obtenemos: $\mathcal{W}^*_{[C,A,L]} = \{\mathcal{W}^*_{L_1}, \mathcal{W}^*_{L_2}\} = \{e_1, e_2\}$.

Usando la inyección de salida:

$$
D_1 = \begin{bmatrix} 0 & -(1-\alpha) & -(1+\alpha) & (1-\alpha) \\ 0 & -(1-\alpha) & -(1+\alpha) & (1-\alpha) \end{bmatrix}^T
$$

sintetizamos el *observador de orden completo* (4.2) y obtenemos el sistema de la *dinámica del error de observación*:

$$
\begin{aligned}
\dot{e}(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & \alpha \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -1 & -(1+\alpha) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 & -\alpha \end{bmatrix}}_{A_{D_1}=A+D_1C} e(t) - \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{L} m(t), \\
r(t) &= \underbrace{\left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{C} e(t),
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

Para $\alpha = 1$ podemos ver que no hay problemas con los ceros. Entonces en este caso podemos aplicar el método propuesto por Massoumnia para hallar una solución al *problema de detección de fallas*. En la Figura 4.2 se muestran los resultados de una simulación MatLab–Simulink.

Si $\alpha = -1$ entonces tenemos un cero no Hurwitz.

Obsérvese que si se cancela este cero no Hurwitz se obtiene un modo interno inestable, por lo que el *observador de orden completo* (4.2) con la inyección de salida D_1 no debería ser sintetizado. En la Figura 4.3 se muestran los resultados de una simulación MatLab–Simulink.

Como el sistema es observable entonces podemos estabilizarlo con la inyección de salida adicional:

$$
D_2 = \begin{bmatrix} 0 & (1-\alpha) & -(1-\alpha) & -(1-\alpha) \\ 0 & (1-\alpha) & -(1-\alpha) & -(1-\alpha) \end{bmatrix}^T,
$$

entonces la *dinámica del error de observación* inyectado con D_2 es:

$$\begin{aligned}
\dot{e}(t) &= \underbrace{\left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 1 & -1 \\ -(1-\alpha) & -(2-\alpha) & -1 & \alpha \\ \hline (1-\alpha) & (1-\alpha) & -1 & -(1+\alpha) \\ (1-\alpha) & (1-\alpha) & 0 & -\alpha \end{array}\right]}_{A_{D_2}=A_{D_1}+D_2C=A+DC} e(t) - \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right] m(t), \\
r(t) &= \left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] e(t),
\end{aligned} \tag{4.12}$$

donde $D = D_1 + D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}^T$ y con $\det\big(\mathrm{sI} - (A+DC)\big) = (\mathrm{s}+1)^4$.

Como podemos observar en el sistema (4.12) hay pérdida de invariancia del modo estabilizado $\alpha = -1$. En la Figura 4.4 se muestran los resultados de una simulación MatLab–Simulink.

Note que:

1. El comportamiento externo, de $m(t)$ a $r(t)$, y la Matriz de Transferencia, $T_m^r(\mathrm{s})$, del sistema (4.12) son:

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{a}) \quad \begin{bmatrix} (\mathrm{p}+1)^2 & (\mathrm{p}+1)^2 \\ (1-\alpha)\mathrm{p}^2 - 2\alpha\mathrm{p} - (3-\alpha) & -2(\mathrm{p}+2-\alpha) \end{bmatrix} r(t) = \begin{bmatrix} \mathrm{p}+\alpha & \mathrm{p}+\alpha \\ (1-\alpha)\mathrm{p} - (1+\alpha) & -2 \end{bmatrix} m(t), \\
&(\mathbf{b}) \quad T_m^r(\mathrm{s}) = -C\Big(\mathrm{sI} - (A+DC)\Big)^{-1} L \\
&\qquad = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\mathrm{S}+1} & \frac{-2(1-\alpha)}{(\mathrm{S}+1)^4} \\ 0 & \frac{\mathrm{S}+\alpha}{(\mathrm{S}+1)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

2. El observador de orden completo (4.2) asociado a (4.10) es:

$$\begin{aligned}
\dot{w}(t) &= \left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 1 & -1 \\ -(1-\alpha) & -(2-\alpha) & -1 & \alpha \\ \hline (1-\alpha) & (1-\alpha) & -1 & -(1+\alpha) \\ (1-\alpha) & (1-\alpha) & 0 & -\alpha \end{array}\right] w(t) + \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{array}\right] y(t) + Bu(t), \\
r(t) &= \left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] w(t) - y(t).
\end{aligned} \tag{4.14}$$

3. De la Figura 4.2 se puede observar que el filtro Beard-Jones, con la matriz de inyección desacopladora D_1, funciona correctamente para el caso de fase mínima, es decir identifica las fallas.

4. En el caso del sistema con $\alpha = -1$ se tiene un sistema de fase no mínima, por lo que habrá problemas cuando se tengan condiciones iniciales no nulas. En la Figura 4.3 se muestra la simulación para este caso de fase no mínima, teniendo el sistema (4.10) como condición inicial: $x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$. De la Figura 4.3 se puede observar que el filtro Beard-Jones, con la matriz de inyección desacopladora D_1, no funciona para el caso de fase no mínima con condiciones iniciales no nulas. Esto es debido a que la cancelación del cero no Hurwitz genera un modo interno inestable.

5. Para el caso de fase no mínima, se puede observar de la Figura 4.4 que cuando al filtro Beard-Jones se le agrega la matriz estabilizante D_2, es decir, se aplica la matriz de inyección $D_1 + D_2$, el sistema es internamente estable (ya no existe la cancelación del cero no Hurwitz), detecta las fallas, pero no las identifica.

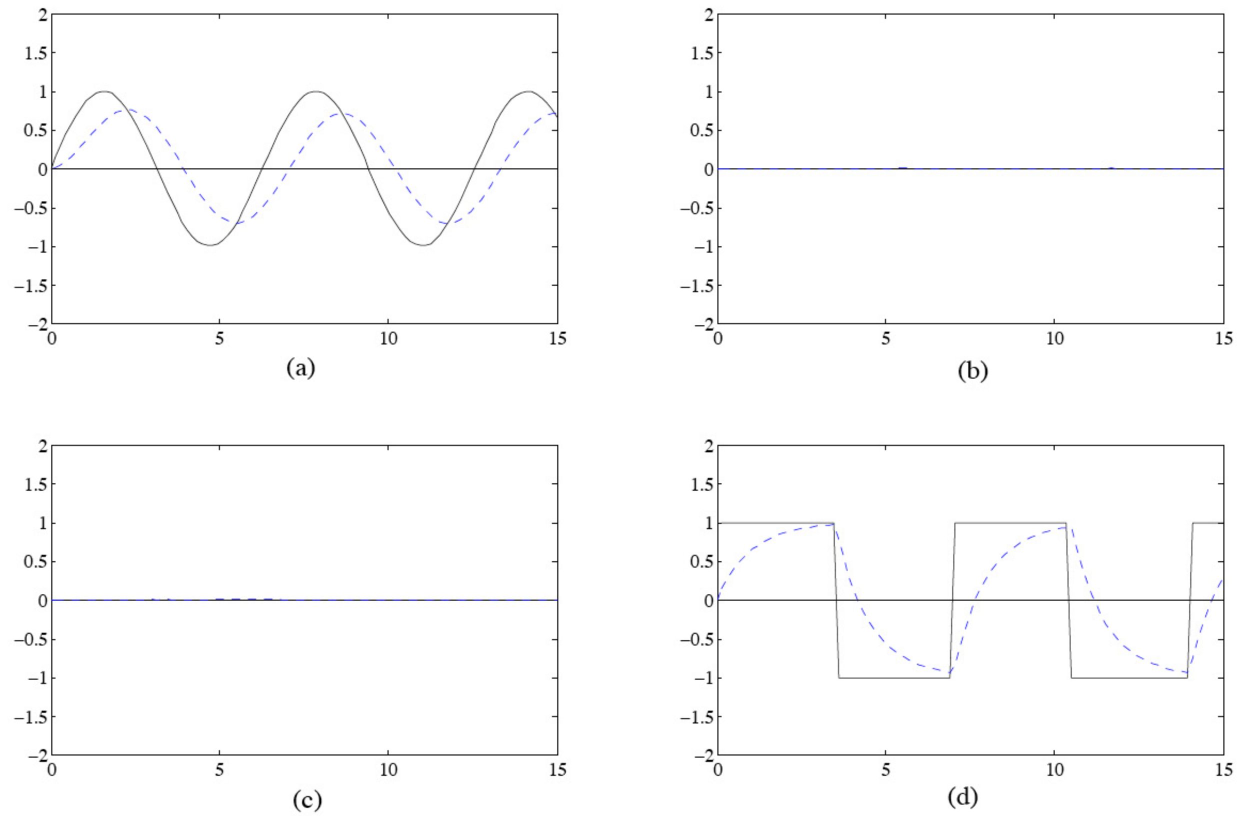

Figura 4.2: Diagramas de simulación MatLab–Simulink del sistema de fase mínima (4.10), $\alpha = 1$, con el observador de orden completo (4.2) ; siendo $A + D_1C$ la matriz del filtro Beard-Jones. (a) Residuo r_1 (linea punteada) y falla m_1 (linea continua); caso $m_1 \neq 0$ y $m_2 \equiv 0$. (b) Residuo r_2 (linea punteada) y falla m_2 (linea continua); caso $m_1 \neq 0$ y $m_2 \equiv 0$. (c) Residuo r_1 (linea punteada) y falla m_1 (linea continua); caso $m_1 \equiv 0$ y $m_2 \neq 0$. (d) Residuo r_2 (linea punteada) y falla m_2 (linea continua); caso $m_1 \equiv 0$ y $m_2 \neq 0$.

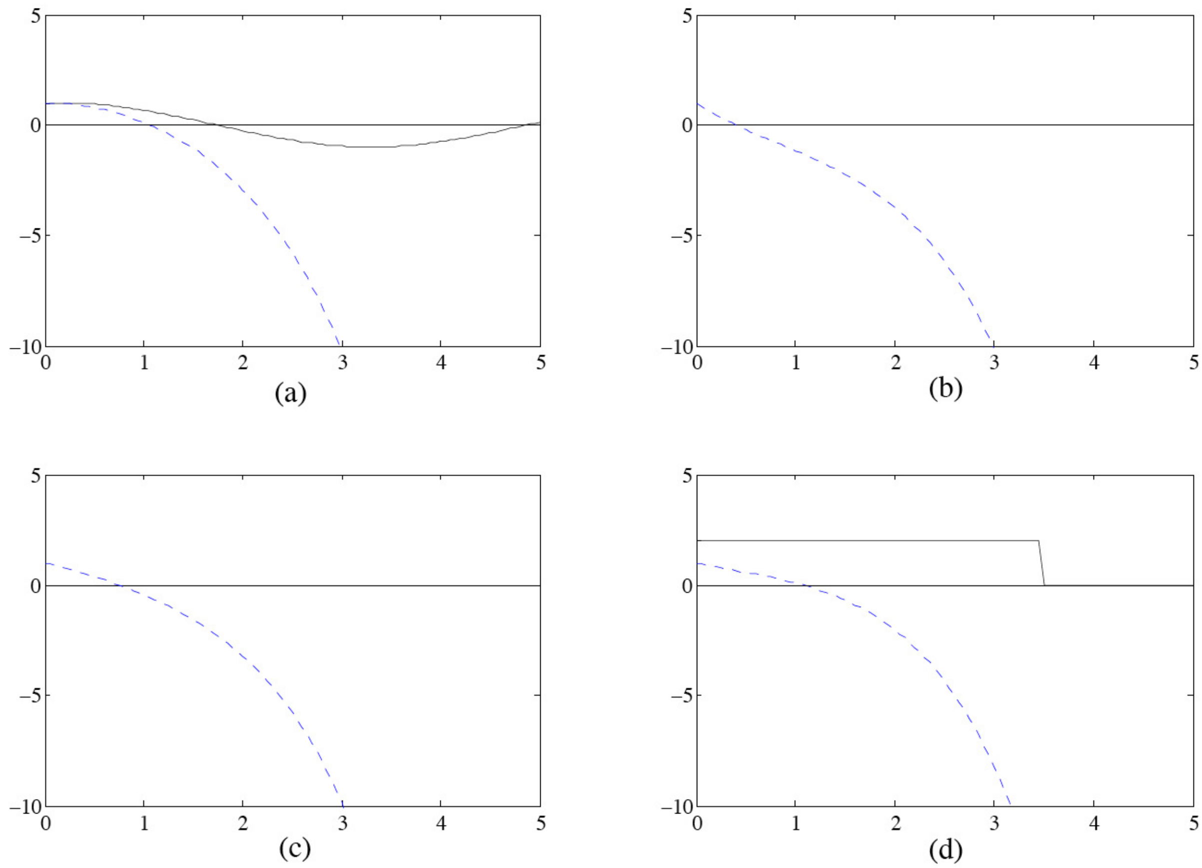

Figura 4.3: Diagramas de simulación MatLab–Simulink del sistema de fase no mínima (4.10), $\alpha = -1$, $x(0) = [1\ 1\ 1\ 1]^T$, con el observador de orden completo (4.2) ; siendo $A + D_1C$ la matriz del filtro Beard-Jones. (a) Residuo r_1 (linea punteada) y falla m_1 (linea continua); caso $m_1 \neq 0$ y $m_2 \equiv 0$. (b) Residuo r_2 (linea punteada) y falla m_2 (linea continua); caso $m_1 \neq 0$ y $m_2 \equiv 0$. (c) Residuo r_1 (linea punteada) y falla m_1 (linea continua); caso $m_1 \equiv 0$ y $m_2 \neq 0$. (d) Residuo r_2 (linea punteada) y falla m_2 (linea continua); caso $m_1 \equiv 0$ y $m_2 \neq 0$.

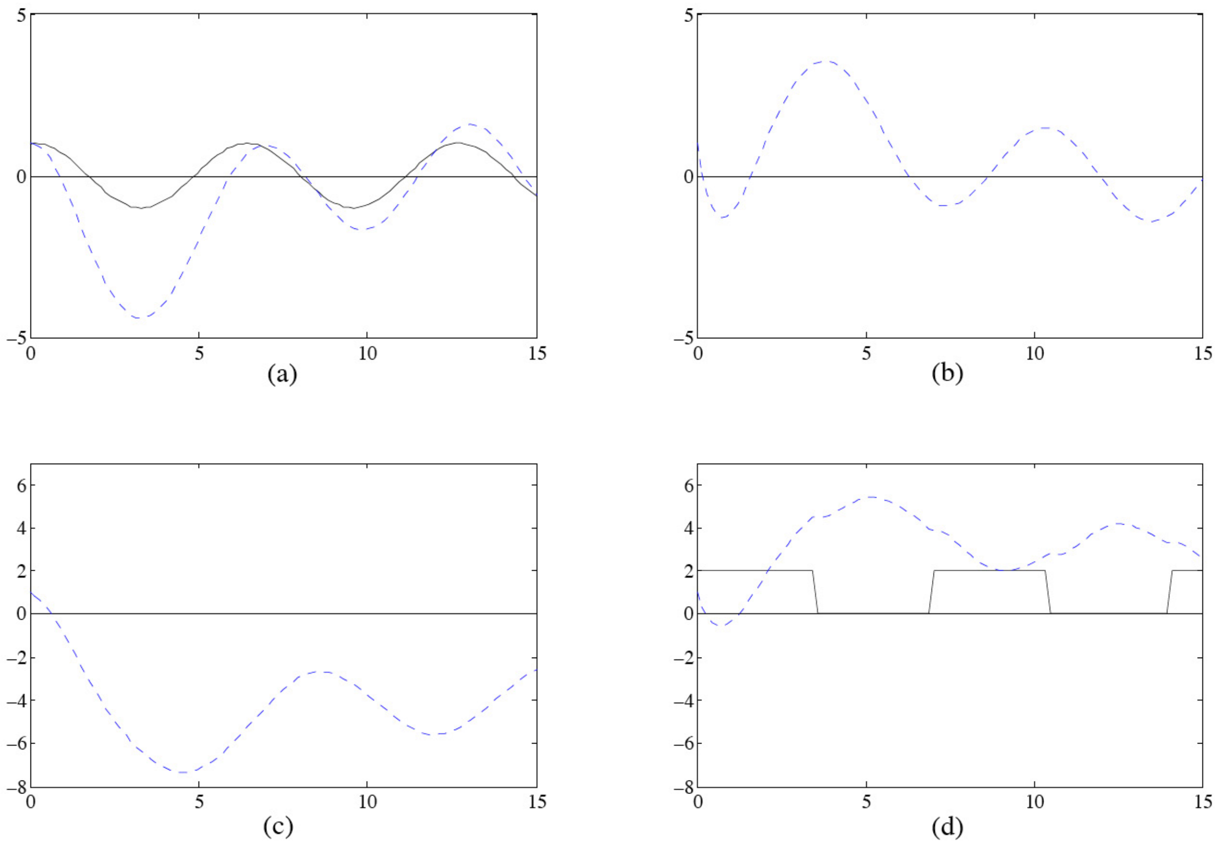

Figura 4.4: Diagramas de simulación MatLab–Simulink del sistema de fase no mínima (4.10), $\alpha = -1$, $x(0) = [1\ 1\ 1\ 1]^T$, con el observador de orden completo (4.2) ; siendo $A+(D_1+D_2)C$ la matriz del filtro Beard-Jones. (a) Residuo r_1 (linea punteada) y falla m_1 (linea continua); caso $m_1 \neq 0$ y $m_2 \equiv 0$. (b) Residuo r_2 (linea punteada) y falla m_2 (linea continua); caso $m_1 \neq 0$ y $m_2 \equiv 0$. (c) Residuo r_1 (linea punteada) y falla m_1 (linea continua); caso $m_1 \equiv 0$ y $m_2 \neq 0$. (d) Residuo r_2 (linea punteada) y falla m_2 (linea continua); caso $m_1 \equiv 0$ y $m_2 \neq 0$.

4.3. Conclusión

Como pudimos ver en el Ejemplo 4.1, si todos los ceros son Hurwitz, podemos hallar una solución al *problema de detección de fallas* aplicando la formulación geométrica desarrollado por Massoumnia [59].

Ahora bien, si existe un cero no Hurwitz al cancelarlo genera un modo interno inestable no controlable. Si el sistema es observable, entonces podemos estabilizarlo con una inyección de salida adicional D con la consecuencia de la pérdida de invariancia del modo estabilizado.

Para hallar una solución al *problema de detección de fallas*, en el caso de ceros no Hurwitz, sin que haya pérdida de invariancia de los modos estabilizados, en el Capítulo 6 proponemos un método que consiste en descomponer al sistema (4.14) como la cascada de un *sistema de polos* y un *sistema de ceros (no Hurwitz).*

CAPíTULO 5

Invertibilidad por la Izquierda

En este Capítulo estudiamos la *invertibilidad por la izquierda* en los dos dominios conocidos: dominio de la frecuencia y dominio del tiempo. Para ello primero revisamos la *invertibilidad izquierda de la Matriz de Transferencia* e *invertibilidad izquierda en el Dominio del Tiempo*. Damos la caracterización geométrica en cada caso, así como la caracterización estructural de la *invertibilidad izquierda en el Dominio del Tiempo*.

En base a estos conceptos desarrollamos nuestros principales teoremas que proporcionan las condiciones necesarias y suficientes (geométricas y estructurales) para la existencia de la *inversa izquierda en el dominio del tiempo*.

5.1. Introducción

Empecemos esta sección introductoria recordando los siguientes tres aspectos elementales de la *invertibilidad izquierda*:

Observación 11 La definición básica para *invertibilidad izquierda* es:
Dada una función

$$\begin{aligned} \varphi : Dom &\to CoDom \\ r &\mapsto \varphi(r) \end{aligned}$$

hallar (si es posible) una función

$$\begin{aligned} \psi : CoDom &\to Dom \\ v &\mapsto \psi(v) \end{aligned}$$

tal que la composición:

$$\begin{aligned} \psi \circ \varphi : Dom &\to Dom \\ r &\mapsto \psi\big(\varphi(r)\big) = r \quad \forall r \in Dom \end{aligned}$$

Observación 12 Para una función lineal φ, la existencia de una *función inversa izquierda*, ψ, es equivalente al hecho de que φ es inyectivo. Es decir:

$$\text{Ker } \varphi := \{r \in Dom \mid \varphi(r) = 0\} = \{0\}$$

Observación 13 (Teorema Fundamental del Cálculo).
La *función inversa izquierda,* ψ, de la función lineal

$$\varphi : r(t) \mapsto \int_0^t r(\tau)\mathrm{d}\tau, \quad \text{donde } r \text{ es una función continua}$$

es

$$\psi : v(t) \mapsto \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}$$

pues $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^t r(\tau)\mathrm{d}\tau = r(t)$, para toda función continua r.

De la Observación 13 nos damos cuenta de que debemos trabajar en el contexto más amplio de la teoría de los sistemas generalizados $\Sigma(\mathbb{E}, \mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C})$: $\mathcal{U} \to \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ (ver sección 1.4 del Capítulo 1):

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}\dot{x}(t) & = & \mathbb{A}x(t) + \mathbb{B}u(t) \\ y(t) & = & \mathbb{C}x(t) \end{array} \tag{5.1}$$

donde u es la entrada, y es la salida y x es la variable descriptora. Se considera que la entrada es una señal continua y suficientemente derivable con respecto al tiempo. También se considera que el modelo es válido para $t \geq 0$, es decir, las condiciones iniciales satisfacen el sistema (5.1) (condiciones iniciales consistentes).

Planteamos el siguiente problema:

Problema 14 ¿Bajo qué condiciones existe, y cómo diseñar un *sistema inverso izquierdo* para el sistema (5.1), independientemente de las condiciones iniciales de x y de la naturaleza de la entrada u?

Para resolver este problema primero analizemos la posible estructura del sistema generalizado (5.1).

Ahora bien, como nosotros estamos interesados en sistemas sin restricciones en las entradas, no tomaremos en cuenta los índices mínimos por línea, y como estamos estudiando la *invertibilidad izquierda* los índices mínimos por columna son naturalmente excluidos, puesto que el núcleo de este tipo de bloques son no nulos y entonces no son invertibles por la izquierda (ver Observación 12 y la Sección 1.4.1 del Capítulo 1).

Entonces únicamente tomamos en cuenta los *divisores elementales finitos e infinitos* los cuales caracterizan los *integradores y derivadores* respectivamente, es decir, consideremos un sistema generalizado regular.

Por otro lado, Armentano [3] estudió la controlabilidad y observabilidad de un sistema generalizado regular utilizando la forma de Wieierstrass (aquí también llamada conexión paralelo):

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ 0 & \bar{N} \end{bmatrix} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & \mathrm{I} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ -\bar{B}_2 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} \bar{C}_1 & \bar{C}_2 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned} \tag{5.2}$$

donde J es una matriz de Jordan y $\bar{N}$ es una matriz nilpotente.

Los *divisores elementales finitos* $[sI - J_i]$ se localizan (ver Sección 1.4.1): [1]

- en la restricción $[s\mathbb{E} - \mathbb{A}] \mid \mathcal{V}^*_{[X,\mathbb{E},\mathbb{A}]}$ en el dominio,
- en la restricción $\mathbb{E}\mathcal{V}^*_{[X,\mathbb{E},\mathbb{A}]} \mid [s\mathbb{E} - \mathbb{A}]$ en el codominio.

Note que la matriz de transferencia del Sistema (5.2):

$$G^{-1}(\mathrm{s})F(\mathrm{s}) = \bar{C}_1(\mathrm{sI} - J)^{-1}\bar{B}_1 - \bar{C}_2(\mathrm{s}\bar{N} - \mathrm{I})^{-1}\bar{B}_2$$

con $G(\mathrm{s}),\ F(\mathrm{s}) \in \mathbb{R}[\mathrm{s}]$, satisface el algoritmo de la división euclideana, es decir:

$$F(\mathrm{s}) = G(\mathrm{s})H(\mathrm{s}) + \bar{F}(\mathrm{s}) \quad \text{con } \deg \bar{F}(\mathrm{s}) < \deg G(\mathrm{s}) \quad \text{ó} \quad \bar{F}(\mathrm{s}) \equiv 0$$

donde $G^{-1}(\mathrm{s})\bar{F}(\mathrm{s}) = \bar{C}_1(\mathrm{sI} - J)^{-1}\bar{B}_1$ y $H(\mathrm{s}) = -\bar{C}_2(\mathrm{s}\bar{N} - \mathrm{I})^{-1}\bar{B}_2$.

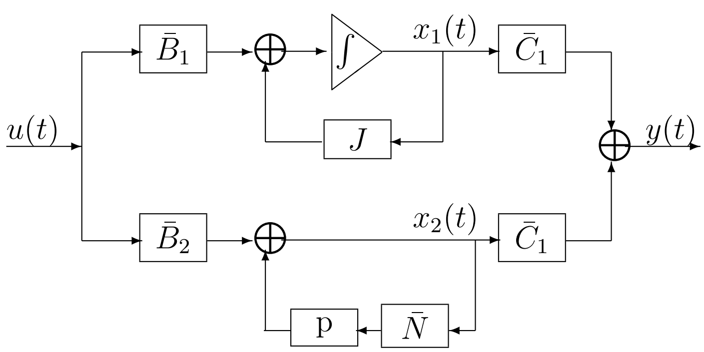

Figura 5.1: Conexión Paralela.

Aunque la forma de Wieierstrass ha sido muy útil en el estudio de varias propiedades estructurales, nosotros utilizamos aquí la siguiente descomposición alternativa (aquí llamada conexión cascada):

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} A & B\Delta \\ 0 & \mathrm{I} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ -\Gamma \end{bmatrix} u(t), \\ y(t) &= \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} x(t), \end{aligned}$$

[1] Puesto que se está considerando que el abanico $[\lambda\mathbb{E} - \mathbb{A}]$ es regular, entonces $\mathcal{X} = \mathcal{V}^*_{[X,\mathbb{E},\mathbb{A}]} \oplus \mathcal{W}^*_{[X,\mathbb{E},\mathbb{A}]}$.

donde N es una matriz nilpotente.

En este caso la matriz de transferencia es

$$G^{-1}(\mathrm{s})F(\mathrm{s}) = -C(\mathrm{sI}-A)^{-1}B\Delta(\mathrm{s}N-\mathrm{I})^{-1}\Gamma$$

la cual es expresada como el producto de dos factores, es decir:

$$F(\mathrm{s}) = F_2(\mathrm{s})F_1(\mathrm{s}) \quad \text{con } \deg F_2(\mathrm{s}) < \deg G(\mathrm{s})$$

donde $G^{-1}(\mathrm{s})F_2(\mathrm{s}) = C(\mathrm{sI}-A)^{-1}B$ y $F_1(\mathrm{s}) = -\Delta(\mathrm{s}N-\mathrm{I})^{-1}\Gamma$.

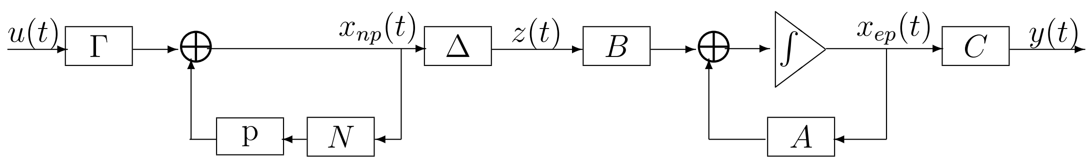

Figura 5.2: Conexión Cascada.

Esta conexión en cascada es más apropiada para el análisis de *invertibilidad izquierda* puesto que nos permite estudiar separadamente la *invertibilidad izquierda* para cada sistema, es decir, para la parte *estrictamente no propia* $F_1(\mathrm{s})$ y para la parte *estrictamente propia* $G^{-1}(\mathrm{s})F_2(\mathrm{s})$. Mientras que para la conexión paralelo, se presentan algunas dificultades técnicas debido al cálculo del Ker $[\bar{C}_1, \bar{C}_2]$.

Ahora, nos ocuparemos del estudio de la *invertibilidad izquierda* de sistemas lineales en los dominios conocidos:

- dominio de la frecuencia,
- dominio del tiempo.

Primero nos ocupamos de la *invertibilidad izquierda* en el *dominio de la frecuencia*, revisando la definición de *invertibilidad izquierda de la Matriz de Transferencia (invertibilidad izquierda MT)* así como su caracterización geométrica.

5.2. Invertibilidad izquierda MT y su caracterización geométrica

Cuando se trabaja con matrices de transferencias, la siguiente definición de *invertibilidad izquierda MT* es estándar (comparar con Observación 12).

Definición 15 Consideremos la matriz de transferencia, $T(\mathrm{s}) = \mathbb{C}(\mathrm{s}\mathbb{E}-\mathbb{A})^{-1}\mathbb{B}$, con p filas y m columnas. $T(\mathrm{s})$ es *invertible izquierda MT* si sus m columnas son funciones racionales independientes en s, es decir, si $\operatorname{rank} T(\mathrm{s}) = m$, i.e si Ker $T(\mathrm{s}) = \{0\}$.

5.2.1. Sistemas estrictamente propios

Para el caso de *sistemas estrictamente propios* $\Sigma_{ep}(A,B,C) : \mathcal{Z} \to \mathcal{X}_{ep} \to \mathcal{Y}$,

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}_{ep}(t) & = & Ax_{ep}(t) + Bz(t), \\ y(t) & = & Cx_{ep}(t), \end{array} \tag{5.3}$$

la *invertibilidad izquierda MT* fue geométricamente caracterizada por Basile y Marro [5] utilizando el subespacio supremo $(A,B)-$ *invariante* $\mathcal{V}^*_{[A,B,C]}$ contenido en Ker C, de la manera siguiente:

Teorema 16 *[5]* $T_{ep}(\mathrm{s}) = C\big(\mathrm{sI} - A\big)^{-1}B$ es *invertible a la izquierda MT* si y sólo si

$$\text{Ker } B = \{0\} \quad \text{e} \quad \text{Im } B \cap \mathcal{V}^*_{[A,B,C]} = \{0\}\Box \tag{5.4}$$

Equivalentemente, $T_{ep}(\mathrm{s})$ es *invertible a la izquierda MT* si y sólo si

$$\text{Ker } B = \{0\} \quad \text{y} \quad \mathcal{R}^*_{[A,B,C]} = \{0\}\Box \tag{5.5}$$

Una prueba alterna de esta proposición se encuentra en el apéndice de este capítulo.

5.2.2. Sistemas estrictamente no propios

Sea el sistema *estrictamente no propio* $\Sigma_{enp}(N,\Gamma,\Delta) : \mathcal{U} \to \mathcal{X}_{enp} \to \mathcal{Z}$,

$$\begin{array}{rcl} N\dot{x}_{enp}(t) & = & x_{enp}(t) - \Gamma u(t), \\ z(t) & = & \Delta x_{enp}(t), \end{array} \tag{5.6}$$

donde N es una matriz nilpotente.

A la representación (5.6) le llamaremos *forma estandar estrictamente no propia.*

La caracterización geométrica de la *invertibilidad izquierda MT* del sistema *estrictamente no propio* (5.6) es:

Teorema 17 $T_{enp}(\mathrm{s}) = -\Delta(\mathrm{s}N - \mathrm{I})^{-1}\Gamma$ es *invertible a la izquierda MT* si y sólo si

$$\text{Ker } \Gamma = \{0\} \quad \text{e} \quad \text{Im } \Gamma \cap \mathcal{V}^*_{[N,\Gamma,\Delta]} = \{0\}\Box \tag{5.7}$$

Equivalentemente, $T_{enp}(\mathrm{s})$ es *invertible a la izquierda MT* si y sólo si

$$\text{Ker } \Gamma = \{0\} \quad \text{and} \quad \mathcal{R}^*_{[N,\Gamma,\Delta]} = \{0\}\Box \tag{5.8}$$

Esta última proposición es probada en el apéndice de este capítulo.

5.2.3. Particularidades de la invertibilidad izquierda MT

Note que la Definición 15 de la *invertibilidad izquierda MT* se basa en un concepto puramente matricial y solamente puede tomar en cuenta la estructura algebraica interna del sistema. Pero esta clase de invertibilidad no toma en cuenta la manera en que interactúan las entradas con la estructura interna del sistema.

En el siguiente ejemplo mostramos la patología de la *invertibilidad izquierda MT* presente en el caso de los sistemas estrictamente propios.

EJEMPLO 5.1 (Comienzo).

Consideremos el sistema $\Sigma_{ep}(A, B, C)$:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{ep}(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A} x_{ep}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ b_0 \end{bmatrix}}_{B} z(t) \quad \text{con} \quad b_0 \neq 0, \\ y(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} x_{ep}(t). \end{aligned} \tag{5.9}$$

El comportamiento externo de $z(t)$ a $y(t)$ de este sistema está dado por la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$\mathrm{p}^2 y(t) = (\mathrm{p} + b_0) z(t) \tag{5.10}$$

y su matriz de transferencia $T_z^y(\mathrm{s})$ es:

$$T_z^y(\mathrm{s}) = \frac{\mathrm{s} + b_0}{\mathrm{s}^2}. \tag{5.11}$$

De acuerdo al Teorema 16 realizamos los cálculos correspondientes (ver algoritmo (1.3)) y obtenemos:

$$\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} = \{e_2\}\,; \quad \mathrm{Im}\; B = \{e_1 + b_0 e_2\}\,; \quad \mathrm{Ker}\; B = \{0\}; \quad \mathrm{Im}\; B \cap \mathcal{V}^*_{[A,B,C]} = \{0\}. \tag{5.12}$$

Por lo tanto el sistema (5.9) es *invertible a la izquierda MT*, y por (5.11) su *inversa izquierda MT* es:

$$T_y^{\hat{z}}(\mathrm{s}) = \frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{s} + b_0} \tag{5.13}$$

la cual es la Transformada de Laplace del sistema:

$$(\mathrm{p} + b_0)\hat{z}(t) = \mathrm{p}^2 y(t). \tag{5.14}$$

Observación 18 De (5.11) y (5.13), inmediatamente se sigue que:

$$T_z^y(\mathrm{s}) \cdot T_y^{\hat{z}}(\mathrm{s}) = \mathrm{I}.$$

Observación 19 De (5.10) y (5.14) obtenemos:

$$(\mathrm{p}+b_0)\big(\hat{z}(t)-z(t)\big)=0.$$

Entonces

$$\hat{z}(t)=z(t)+k\mathbf{e}^{-b_0 t}.$$

Observación 20 Si

$$z(t)=z(0)\mathbf{e}^{-b_0 t}, \qquad z(0)\neq 0,$$

de (5.10) obtenemos:

$$\mathrm{p}^2 y(t)=0 \quad \text{y} \quad \hat{z}(t)=0.$$

- Este ejemplo nos muestra que la *invertibilidad izquierda MT* depende de las condiciones iniciales así como de la naturaleza de la entrada z.
- De la Observación 19, necesitamos que la condición inicial k se encuentre en una vecindad del cero con un radio muy pequeño, y lo más importante, el parámetro b_0 debe ser no negativo.
- De la Observación 20 observamos que la entrada z no puede pertenecer a Ker $(\mathrm{p}+b_0)$.

En el caso de sistemas con condiciones iniciales nulas la *invertibilidad izquierda MT* puede aplicarse sin problema alguno. Como por ejemplo en el caso de sistemas lineales *estrictamente no propios.* [2]

5.3. Invertibilidad Izquierda DT

Empecemos dando la definición de la *invertibilidad a la izquierda DT*.

Definición 21 El sistema (5.1), $\Sigma(\mathbb{E},\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{C}):\mathcal{U}\to\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$, es *invertible a la izquierda DT* si

(i) Existe un sistema $\Sigma^i:\mathcal{Y}\to\mathcal{X}\to\mathcal{U}$ tal que es soluble [3] en Im Σ

(ii) $\Sigma^i\circ\Sigma=\mathrm{I}$

Σ^i se llama *inversa izquierda DT* de $\Sigma(\mathbb{E},\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{C})$.

[2]En el dominio del tiempo cuando se trabaja con derivadas ordinarias, únicamente las integrales poseen condiciones iniciales, mientras que cuando se trabaja con funciones generalizadas y derivadas generalizadas, las acciones derivativas pueden tener condiciones iniciales [21], [22]. En esta tesis se trabaja con derivadas ordinarias en el tiempo y no con las derivadas generalizadas [3].

[3]Soluble significa que para cada entrada en el espacio $\mathcal{Y}$, existe al *menos una* solución en el espacio de la variable descriptora $\mathcal{X}$.

Note que únicamente la parte *estrictamente propia* $\Sigma_{ep}(A,B,C)$ de (5.1) puede tener una *inversa izquierda DT* (ver Observación 13). Es decir, la parte *estrictamente no propia* $\Sigma_{enp}(N,\Gamma,\Delta)$ de (5.1) nunca tendrá una *inversa izquierda DT*, puesto que [4]:

$$\text{Ker } F_1(\text{p}) = \text{Ker } [-\Delta(\text{p}N - \text{I})^{-1}\Gamma] \neq \{0\}$$

entonces únicamente necesitamos estudiar la *invertibilidad izquierda DT* de $\Sigma_{ep}(A,B,C)$.

Observe que la parte *estrictamente propia* del sistema (5.1) es siempre soluble (recordar Definición 4 y Lema 5 del Capítulo 1), es decir, existe una transformación lineal $\Psi(\cdot) : \mathcal{Z} \to \mathcal{X}$ tal que $\dot{\Psi}\big(z(t)\big) = A\Psi\big(z(t)\big) + Bz(t)$; $y(t) = C\Psi\big(z(t)\big)$ para todas las entradas admisibles z.

De la sección 1.4.3 tenemos los siguientes resultados (ver Lema 6 y el Hecho 7):

Lema 22 *[8].* El sistema *estrictamente propio* (5.3) es *invertible a la izquierda DT* si y sólo si

$$\text{Ker } C\Psi(\cdot) = \{0\}.$$

Lema 23 *[8].* Si el sistema *estrictamente propio* (5.3) es *invertible a la izquierda DT* entonces *un sistema inverso izquierdo,* $\Sigma^i(\mathbb{E}_i, \mathbb{A}_i, \mathbb{B}_i, \mathbb{C}_i) : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}_i \to \mathcal{Z}$, es:

$$\begin{aligned} &(\mathbf{a}) \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \text{I} & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbb{E}_i} \dot{x}_i(t) &&= \underbrace{\begin{bmatrix} C & 0 \\ A & B \end{bmatrix}}_{\mathbb{A}_i} x_i(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} -\text{I} \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbb{B}_i} y(t), \\ &(\mathbf{b}) \quad \hat{z}(t) &&= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \text{I} \end{bmatrix}}_{\mathbb{C}_i} x_i(t), \end{aligned} \tag{5.15}$$

donde $\mathbb{E}_i$, $\mathbb{A}_i$, $\mathbb{B}_i$ y $\mathbb{C}_i$ son mapeos lineales definidos como:

$$\mathbb{E}_i : \mathcal{X}_i \to \underline{\mathcal{X}}_i, \quad \mathbb{A}_i : \mathcal{X}_i \to \underline{\mathcal{X}}_i, \quad \mathbb{B}_i : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}_{ep}, \quad \mathbb{C}_i : \mathcal{X}_i \to \mathcal{Z}$$

con $\mathcal{X}_i = \mathcal{X}_{ep} \oplus \mathcal{Z}$ y $\underline{\mathcal{X}}_i = \mathcal{Y} \oplus \mathcal{X}_{ep}$.

Este sistema *inverso izquierdo DT* es (en general) no minimal; sin embargo, puede ser fácilmente minimizado por algoritmos matriciales (ver por ejemplo Bonilla y Malabre [14]). Ver la definición de sistema minimal en el Capítulo de Preliminares.

Note sin embargo que el caso de que B sea inyectivo y de que el sistema (5.3) sea observable, entonces el sistema (5.15) es minimal. En efecto (ver Kuijper [**?**]):

(1) el rango de la matriz $[\ \mathbb{E}_i \quad \mathbb{B}_i\ ] = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & -\text{I} \\ \text{I} & 0 & 0 \end{array}\right]$ es pleno por lineas.

[4]El operador $(\text{p}N-\text{I})^{-1}$ está bien definido debido a la nilpotencia de N. En efecto $(\text{p}N-\text{I})^{-1} = -\text{I} - \Sigma_{i=1}^{n-1}(\text{p}N)^i$. De hecho, Ker $F_1(\text{p})$ es el conjunto de trayectorias que satisfacen la ecuación diferencial $F_1(\text{p})u = 0$, el cual podría ser $\{0\}$ únicamente si $F_1(\text{p})$ es un operador constante, es decir, el sistema (5.1) podría no tener parte *estrictamente no propia.*

(2) la matriz $\begin{bmatrix} \mathbb{E}_i \\ \mathbb{C}_i \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ \mathrm{I} & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{I} \end{array}\right]$ es inyectiva.

(3) la matriz $\begin{bmatrix} s\mathbb{E}_i - \mathbb{A}_i \\ \mathbb{C}_i \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc} -C & 0 \\ (s\mathrm{I} - A) & B \\ \hline 0 & \mathrm{I} \end{array}\right]$ es de rango pleno por columnas para todo número complejo s si y sólo si la matrix $\begin{bmatrix} C \\ s\mathrm{I} - A \end{bmatrix}$ también lo es. Es decir, si y sólo si $\mathcal{N} = \{0\}$.

5.3.1. Caracterización Geométrica de la invertibilidad izquierda DT

En esta sección proponemos el teorema que caracteriza geométricamente la *invertibilidad izquierda DT*.

Teorema 24 El sistema *estrictamente propio* (5.3) es *invertible a la izquierda DT* si y sólo si

$$\operatorname{Ker} B = \{0\} \quad \text{e} \quad \operatorname{Im} B \,\cap\, \left(\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} \,+\, A\mathcal{V}^*_{[A,B,C]}\right) = \{0\}\,. \tag{5.16}$$

Para probar el Teorema 24, necesitamos los siguientes dos Lemas que son probados en el apéndice de este capítulo.

Lema 25 Si $\operatorname{Im} B \,\cap\, \left(\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} \,+\, A\mathcal{V}^*_{[A,B,C]}\right) = \{0\}$ y $\operatorname{Ker} B = \{0\}$ entonces

$$y(t) = 0 \text{ implica que } z(t) = 0 \quad \forall t \geq 0.$$

Lema 26 Si $\operatorname{Ker} B = \{0\}$ entonces

$$\tilde{\mathcal{V}}^*_{[\mathcal{X}_i,\mathbb{E}_i,\mathbb{A}_i]} = \{0\} \text{ implica que } B^{-1}\left(\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} \,+\, A\mathcal{V}^*_{[A,B,C]}\right) = \{0\}.$$

Prueba del Teorema 24.

1. **Probaremos primero la suficiencia:**
   Supongamos que $\operatorname{Ker} B{=}\{0\}$ e $\operatorname{Im} B \cap \left(\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} + A\mathcal{V}^*_{[A,B,C]}\right) = \{0\}$.

   Entonces por el Lema 25, $y(t) = 0$ implica que $z(t) = 0$ $\forall\, t \geq 0$, y por el Lema 22, el sistema (5.3) es *invertible a la izquierda DT*.

2. **Probaremos ahora la necesidad:**
Si $\operatorname{Ker} B \neq \{0\}$, entonces existe una $z \neq 0$ tal que $Bz = 0$, lo cual implica que existe una $z \neq 0$ que no es observable a la salida, y así $C\operatorname{Ker} \Psi(z) \neq \{0\}$, pero esto contradice al Lemma 22. Por lo tanto $\operatorname{Ker} B = \{0\}$.

   Para probar la necesidad de la segunda condición geométrica, asumimos que el sistema (5.3) es *invertible a la izquierda DT*, entonces el sistema (5.15) es una *inversa izquierda DT*.

   Ahora bien, para que el sistema (5.15) sea una *inversa izquierda DT* del sistema *estrictamente propio* (5.3) es necesario que $\mathcal{V}^*_{[\mathcal{X}_i,\mathbb{E}_i,\mathbb{A}_i]} = \{0\}$.

   Si este no es el caso, pueden ocurrir problemas con las condiciones iniciales de los modos exponenciales (los integradores presentes en $\Sigma(\mathbb{E}_i, \mathbb{A}_i, \mathbb{B}_i, \mathbb{C}_i)$ caracterizados por $\mathcal{V}^*_{[\mathcal{X}_i,\mathbb{E}_i,\mathbb{A}_i]} = \{0\}$).

   Y por Lema 26, obtenemos la segunda condición geométrica. $\square$

Regresamos al Ejemplo 5.1.

EJEMPLO 5.1 (Continuación).
De (5.12) obtenemos:

$$\operatorname{Im} B \cap \left(\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} \ + \ A\mathcal{V}^*_{[A,B,C]}\right) = \{e_1 + b_0 e_2\} \cap \Big(\{e_2\} + \{e_1\}\Big) \neq \{0\} \tag{5.17}$$

entonces la condición geométrica (5.16) no se cumple. Y así, el sistema (5.9) no es *invertible a la izquierda DT*.

5.3.2. Caracterización Estructural de la invertibilidad izquierda DT

Ahora analizamos la caracterización estructural de la *invertibilidad izquierda DT* que es equivalente al Teorema 24. Para esto, primero extraemos la *parte maximal observable* del sistema y posteriormente revisamos algunos resultados sobre la estructura de los ceros.

A. Sistema Cociente Maximal Observable

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{X}_{ep} \arrow[r, "A"] \arrow[dl, "C"'] \arrow[dd, "\Pi"] & \mathcal{X}_{ep} \arrow[dd, "\Pi"'] & \\
\mathcal{Y} & & & \mathcal{Z} \arrow[ul, "B"'] \arrow[dl, "B_{ob}"] \\
 & \frac{\mathcal{X}_{ep}}{\mathcal{N}} \arrow[r, "A_{ob}"'] \arrow[ul, "C_{ob}"] & \frac{\mathcal{X}_{ep}}{\mathcal{N}} &
\end{tikzcd}$$

Figura 5.3: Diagrama Conmutativa

Sea $\Pi : \mathcal{X}_{ep} \to \frac{\mathcal{X}_{ep}}{\mathcal{N}}$ la proyección canónica, entonces existen mapeos únicos (ver Fig. 5.3):

$$A_{ob} : \frac{\mathcal{X}_{ep}}{\mathcal{N}} \to \frac{X_{ep}}{\mathcal{N}}, \quad B_{ob} : \mathcal{Z} \to \frac{\mathcal{X}_{ep}}{\mathcal{N}}, \quad C_{ob} : \frac{\mathcal{X}_{ep}}{\mathcal{N}} \to \mathcal{Y}$$

tales que:

$$\Pi A = A_{ob}\Pi; \quad \Pi\ B = B_{ob}; \quad C = C_{ob}\Pi \tag{5.18}$$

Teorema 27 Dado el sistema *estrictamente propio* $\Sigma_{ep}(A, B, C)$, sea el *sistema cociente estrictamente propio* $\Sigma_{ep}(A_{ob}, B_{ob}, C_{ob})$.

Entonces

$$\text{Ker } B = \{0\} \text{ y } \left(\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} + A\mathcal{V}^*_{[A,B,C]}\right) \cap \text{Im } B = \{0\}$$

si y sólo si

$$\mathcal{V}^*_{[A_{ob},B_{ob},C_{ob}]} = \{0\} \text{ y Ker } B_{ob} = \{0\}.$$

Para probar el Teorema 27 utilizaremos los siguientes Lemas probados en el apéndice de este capítulo:

Lema 28 Ker $B = \{0\}$ y $\left(\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} + A\mathcal{V}^*_{[A,B,C]}\right) \cap \text{Im } B = \{0\}$

si y sólo si

$$\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} = \mathcal{N} \quad \text{y} \quad B^{-1}\left(\mathcal{N} + A\text{Ker } C\right) = \{0\}.$$

Lema 29 Las siguientes igualdades siempre se cumplen:

1. $\mathcal{V}^*_{[A_{ob},B_{ob},C_{ob}]} = \Pi\ \mathcal{V}^*_{[A,B,C]}$.
2. $B^{-1}\left(\mathcal{N} + A\text{Ker } C\right) = B_{ob}^{-1} A_{ob}\text{Ker } C_{ob}$.

Lema 30 $\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} = \mathcal{N}$ y $B^{-1}\left(\mathcal{N} + A\text{Ker } C\right) = \{0\}$

si y sólo si

$$\mathcal{V}^*_{[A_{ob},B_{ob},C_{ob}]} = \{0\} \quad \text{y} \quad \text{Ker } B_{ob} = \{0\}.$$

Prueba del Teorema 27.

Del Lema 28 tenemos que Ker $B = \{0\}$ y $\left(\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} + A\mathcal{V}^*_{[A,B,C]}\right) \cap \text{Im } B = \{0\}$ si y sólo si $\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} = \mathcal{N}$ y $B^{-1}\left(\mathcal{N} + A\text{Ker } C\right) = \{0\}$, y del Lemma 30 si y sólo si $\mathcal{V}^*_{[A_{ob},B_{ob},C_{ob}]} = \{0\}$ y Ker $B_{ob} = \{0\}$.

B. Estructura de ceros

En el Capítulo de Preliminares recordamos cuatro subconjuntos particulares de ceros: *ceros invariantes*, *ceros de transmisión*, *ceros invariantes desacoplados en la entrada* y *ceros invariantes observables*.

El número total de *ceros invariantes observables* es:

$$\textit{cardinalidad}\ \{\text{ceros invariantes observables}\} = \dim\left(\frac{\mathcal{V}^*_{[A,B,C]}}{\mathcal{R}^*_{[A,B,C]} + \mathcal{N}}\right). \tag{5.19}$$

C. Caracterización estructural de la invertibilidad izquierda DT.

Enseguida enunciamos el Corolario que caracteriza estructuralmente la *invertibilidad izquierda DT*.

Corolario 31 El sistema *estrictamente propio* (5.3) es *invertible a la izquierda DT* si y sólo si es *invertible a la izquierda MT* y no tiene *ceros de transmisión* ni *ceros invariantes desacoplados en la entrada*.

Prueba:
Demostración de la necesidad.

Supongamos que el sistema (5.3) es *invertible a la izquierda DT*.

Entonces del Teorema 24: $\text{Ker } B = \{0\}$ e $\text{Im } B \cap \mathcal{V}^*_{[A,B,C]} = \{0\}$.

Pero esta última condición geométrica es equivalente a $\text{Im } B \cap \mathcal{R}^*_{[A,B,C]} = \{0\}$, entonces del algoritmo (1.7) obtenemos $\mathcal{R}^*_{[A,B,C]} = \{0\}$.

Como $\text{Ker } B = \{0\}$ y $\mathcal{R}^*_{[A,B,C]} = \{0\}$, entonces del Teorema 16 se concluye que el sistema (5.3) es *invertible a la izquierda MT* (recordar la equivalencia (5.5)).

Por otro lado, del Teorema 27 se obtiene: $\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} = \text{Ker } \Pi = \mathcal{N}$, lo cual implica que:

$$\dim\left(\frac{\mathcal{V}^*_{[A,B,C]}}{\mathcal{R}^*_{[A,B,C]} + \mathcal{N}}\right) = \dim\left(\frac{\mathcal{V}^*_{[A,B,C]}}{\mathcal{N}}\right) = \dim\left(\frac{\mathcal{N}}{\mathcal{N}}\right) = 0.$$

Entonces de (5.19) se sigue que no hay *ceros de transmisión* ni *ceros desacoplados en la entrada*, *i.e. no hay ceros invariantes observables*.

Demostración de la suficiencia.

Supongamos que el sistema (5.3) es *invertible a la izquierda MT* y no tiene ningún *cero invariante observable*.

Entonces de (5.5) y (5.19) se tiene que:

$$\text{Ker } B = \{0\}, \quad \mathcal{R}^*_{[A,B,C]} = \{0\} \quad \text{y} \quad \mathcal{V}^*_{[A,B,C]} = \mathcal{N}.$$

Ahora, como $\mathcal{N}$ es A-invariante, entonces $\text{Im } B \cap (\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} + A\mathcal{V}^*_{[A,B,C]}) = \text{Im } B \cap \mathcal{V}^*_{[A,B,C]}$.

Como $\mathcal{R}^*_{[A,B,C]} = \{0\}$ entonces se tiene que $\text{Im } B \cap \mathcal{V}^*_{[A,B,C]} = \{0\}$.

Por lo tanto, $\text{Ker } B = \{0\}$ e $\text{Im } B \cap (\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} + A\mathcal{V}^*_{[A,B,C]}) = \{0\}$, entonces del Teorema 24 el sistema (5.3) es *invertible a la izquierdo DT*. $\square$

Note que la *invertibilidad izquierda DT* engloba dos aspectos:

1. La estructura algebraica interna (la *invertibilidad izquierda MT*).

2. La interacción entre la entrada y la estructura interna (la no presencia de *ceros invariantes observables*).

Retomamos el Ejemplo 5.1.

EJEMPLO 5.1 (Fin).

Por el Corolario 31, el sistema (5.9) no es *invertible a la izquierda DT* debido a la presencia del *cero invariante observable* $(\mathrm{s}+b_0)$ de $T_z^y(s)$.

Ahora, en el caso de *ceros Hurwitz*, una posible solución para este problema es la descomposición del sistema (5.9) como la cascada de los siguientes sistemas lineales [5] :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \dot{\xi}_c(t) = \xi_c(t) - \begin{bmatrix} 1 \\ b_0 \end{bmatrix} z(t); \qquad v(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \xi_c(t), \tag{5.20}$$

$$\dot{\xi}_p(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xi_p(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v(t); \quad y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \xi_p(t). \tag{5.21}$$

Los comportamientos externos de los sistemas (5.20) y (5.21) son descritos por las ecuaciones diferenciales:

$$v(t) = (\mathrm{p}+b_0)z(t) \quad \text{y} \quad \mathrm{p}^2 y(t) = v(t).$$

Como el sistema (5.21) es *invertible a la izquierda DT* (pues no tiene cero observable), entonces *una inversa izquierda DT* es:

$$\hat{v}(t) = \mathrm{p}^2 y(t).$$

De esta manera, obtenemos por técnica de inversión, la entrada filtrada $v(t)$, pero no obtenemos $z(t)$.

Y el conjunto de *entradas no detectables* $z(t) \in \mathrm{Ker}\ (p+b_0)$ están compuestos por señales $z(0)\mathbf{e}^{-b_0 t}$ que decaen exponencialmente.

5.4. Conclusión

En este capítulo se ha estudiado la *invertibilidad izquierda* tanto en el dominio de la frecuencia como en el dominio del tiempo.

En el caso del dominio de la frecuencia la *invertibilidad izquierda* está relacionada únicamente con la función de transferencia del sistema (condiciones iniciales nulas). Por lo que solamente es afectada por la estructura algebraica interna del sistema.

Dado que en el dominio del tiempo las condiciones iniciales son tomadas en cuenta, entonces el aspecto funcional de la entrada es un factor importante. Es decir, las entradas que excitan los ceros observables jamás podrán ser reconstruidas por técnicas de inversión.

[5] En el siguiente Capítulo se formaliza este procedimiento.

Mostramos en nuestro ejemplo, el cual resultó ser *invertible a la izquierda MT*, que existe una entrada que no es observable a la salida, y así esta entrada no puede ser reconstruida, ni por técnica de inversión ni por técnica de observación.

Hou y Patton [37] introdujeron una noción que es muy cercana a *invertibilidad izquierda DT*, que es la llamada *observabilidad en la entrada* (ver Apéndice).

5.5. Apéndice

5.5.1. Prueba alterna del Teorema 16

$T_{ep}(\mathrm{s})$ es *invertible izquierda MT* si y sólo si

$$\mathrm{Ker}\ B = \{0\} \quad \mathrm{y} \quad \mathcal{R}^*_{[A,B,C]} = \{0\}.$$

Prueba:

Consideremos la transformada de Laplace del sistema (5.3) con condiciones iniciales ceros y Ker $B = \{0\}$.

$$\mathrm{s}x_{ep}(\mathrm{s}) = Ax_{ep}(\mathrm{s}) + Bu(\mathrm{s}); \quad y(\mathrm{s}) = Cx_{ep}(\mathrm{s}); \quad \mathrm{s} \in \mathbb{C} \tag{5.22}$$

y definimos el subespacio:

$$\mathbb{X}_{\mathcal{N}}(\mathrm{s}) = \left\{ x_{ep}(\mathrm{s}) \in \mathbb{R}^n(\mathrm{s}) \;\middle|\; y(\mathrm{s}) = 0 \right\}.$$

Note que Ker $B = \{0\}$ implica que:

$$\mathrm{Ker}\ T_{ep}(\mathrm{s}) = \{0\} \text{ si y sólo si } \mathbb{X}_{\mathcal{N}}(\mathrm{s}) = \{0\}.$$

Entonces únicamente necesitamos caracterizar $\mathbb{X}_{\mathcal{N}}(\mathrm{s})$.

1. Primero probamos que $\mathcal{R}^*_{[A,B,C]} \subset \mathbb{X}_{\mathcal{N}}(\mathrm{s})$.

   Por definición de $\mathcal{R}^*_{[A,B,C]}$ existe una ley de control

   $$u(\mathrm{s}) = Fx_{ep}(\mathrm{s}) + \bar{u}(\mathrm{s})$$

   donde $x_{ep}(\mathrm{s}) \in \mathcal{R}^*_{[A,B,C]}$ y F es una extensión de una retroalimentación amiga $\mathcal{R}^*_{[A,B,C]}$, tal que:

   $$\mathrm{s}x_{ep}(\mathrm{s}) = (A + BF)x_{ep}(\mathrm{s}) + B\bar{u}(\mathrm{s}) \quad \mathrm{y} \quad 0 = Cx(\mathrm{s})$$

   por lo tanto $x_{ep}(\mathrm{s}) \in \mathbb{X}_{\mathcal{N}}(\mathrm{s})$.

2. Ahora probamos que $\mathbb{X}_{\mathcal{N}}(\mathrm{s}) \subset \mathcal{V}^*_{[A,B,C]}$.

   Sea $x_{ep}(\mathrm{s}) \in \mathbb{X}_{\mathcal{N}}(\mathrm{s})$, entonces $Ax_{ep}(\mathrm{s}) = \mathrm{s}x_{ep}(\mathrm{s}) - Bu(\mathrm{s})$ y $x_{ep}(\mathrm{s}) \in \mathrm{Ker}\ C$, implican que:

   $$\begin{array}{rcl} x_{ep}(\mathrm{s}) & \in & \mathrm{Ker}\ C \cap A^{-1}\big(\mathrm{Ker}\ C + \mathrm{Im}\ B\big) = \mathcal{V}^2_{[A,B,C]}, \\ x_{ep}(\mathrm{s}) & \in & \mathrm{Ker}\ C \cap A^{-1}\big(\mathcal{V}^2_{[A,B,C]} + \mathrm{Im}\ B\big) = \mathcal{V}^3_{[A,B,C]}, \\ \vdots & \vdots & \\ x_{ep}(\mathrm{s}) & \in & \mathrm{Ker}\ C \cap A^{-1}\big(\mathcal{V}^n_{[A,B,C]} + \mathrm{Im}\ B\big) = \mathcal{V}^*_{[A,B,C]}. \end{array}$$

3. Por último probamos que $\mathbb{X}_{\mathcal{N}}(\mathrm{s}) \subset \mathcal{R}^*_{[A,B,C]}$.

   Sea $x_{ep}(\mathrm{s}) \in \mathbb{X}_{\mathcal{N}}(\mathrm{s})$, entonces

$$x_{ep}(\mathrm{s}) = \frac{1}{\mathrm{s}}Bu(\mathrm{s}) + \frac{1}{\mathrm{s}}Ax_{ep}(\mathrm{s}) \quad \in \mathrm{Ker}\ C,$$

   lo cual implica que

$$\begin{aligned} x_{ep}(\mathrm{s}) &= \frac{1}{\mathrm{s}}Bu(\mathrm{s}) + \frac{1}{\mathrm{s}}A\left(\frac{1}{\mathrm{s}}Bu(\mathrm{s}) + \frac{1}{\mathrm{s}}Ax_{ep}(\mathrm{s})\right), \\ &= \frac{1}{\mathrm{s}}X_1(\mathrm{s}) + \frac{1}{\mathrm{s}^2}A^2x_{ep}(\mathrm{s}) \quad \in \mathrm{Ker}\ C, \end{aligned}$$

   donde

$$X_1(\mathrm{s}) = Bu(\mathrm{s}) + \frac{1}{\mathrm{s}}ABu(\mathrm{s}) \quad \in \mathrm{Im}\ B + A\big(\mathrm{Im}\ B \cap \mathrm{Ker}\ C\big) = \mathcal{W}^2_{[C,A,B]}.$$

   Entonces se sigue que

$$\begin{aligned} x_{ep}(\mathrm{s}) &= \frac{1}{\mathrm{s}}\left(Bu(\mathrm{s}) + \frac{1}{\mathrm{s}}ABu(\mathrm{s})\right) + \frac{1}{\mathrm{s}^2}A^2\left(\frac{1}{\mathrm{s}}Bu(\mathrm{s}) + \frac{1}{\mathrm{s}}Ax_{ep}(\mathrm{s})\right) \\ &= \frac{1}{\mathrm{s}}\left(Bu(\mathrm{s}) + \frac{1}{\mathrm{s}}AX_1(\mathrm{s})\right) + \frac{1}{\mathrm{s}^3}A^3x_{ep}(\mathrm{s}) \quad \in \mathrm{Ker}\ C \end{aligned}$$

   Ahora, supongamos que para $i \in \{1, \ldots, \mu\}$:

$$\begin{aligned} x_{ep}(\mathrm{s}) &= \frac{1}{\mathrm{s}}\left(Bu(\mathrm{s}) + \frac{1}{\mathrm{s}}AX_i(\mathrm{s})\right) + \frac{1}{\mathrm{s}^{i+2}}A^{i+2}x_{ep}(\mathrm{s}) \\ &= \frac{1}{\mathrm{s}}X_{i+1}(\mathrm{s}) + \frac{1}{\mathrm{s}^{i+2}}A^{i+2}x_{ep}(\mathrm{s}) \quad \in \mathrm{Ker}\ C, \end{aligned}$$

   donde

$$X_{i+1}(\mathrm{s}) = Bu(\mathrm{s}) + \frac{1}{\mathrm{s}}AX_i(\mathrm{s}) \quad \in \mathrm{Im}\ B + A\big(\mathcal{W}^{i+1}_{[C,A,B]} \cap \mathrm{Ker}\ C\big) = \mathcal{W}^{i+2}_{[C,A,B]}.$$

   Entonces tenemos

$$\begin{aligned} x_{ep}(\mathrm{s}) &= \frac{1}{\mathrm{s}}\Bigg(Bu(\mathrm{s}) + \frac{1}{\mathrm{s}}A\Bigg(Bu(\mathrm{s}) + \frac{1}{\mathrm{s}}A\Bigg(\cdots \\ &\quad \Bigg(Bu(\mathrm{s}) + \frac{1}{\mathrm{s}}A\Bigg(Bu(\mathrm{s}) + \frac{1}{\mathrm{s}}\Big(Bu(\mathrm{s}) + \frac{1}{\mathrm{s}}A\big(Bu(\mathrm{s}) + \frac{1}{\mathrm{s}}ABu(\mathrm{s})\big)\Big)\Bigg)\Bigg)\cdots\Bigg)\Bigg)\Bigg) \\ &\quad + \frac{1}{\mathrm{s}^{\mu+3}}A^{\mu+3}x_{ep}(\mathrm{s}) \quad \in \mathrm{Ker}\ C \\ &= \frac{1}{\mathrm{s}}X_{\mu+2}(\mathrm{s}) + \frac{1}{\mathrm{s}^{\mu+3}}A^{\mu+3}x_{ep}(\mathrm{s}) \quad \in \mathrm{Ker}\ C, \end{aligned}$$

donde

$$X_{\mu+2}(\mathrm{s}) = Bu(\mathrm{s}) + \frac{1}{\mathrm{s}}AX_{\mu+1}(\mathrm{s}) \quad \in \mathrm{Im}\ B + A\big(\mathcal{W}^{\mu+2}_{[C,A,B]} \cap \mathrm{Ker}\ C\big) = \mathcal{W}^{\mu+3}_{[C,A,B]},$$

y así:

$$\begin{aligned} x_{ep}(\mathrm{s}) &= \frac{1}{\mathrm{s}}X_{n-1}(\mathrm{s}) + \frac{1}{\mathrm{s}^n}A^n x_{ep}(\mathrm{s}) \quad \in \mathrm{Ker}\ C, \\ X_{n-1}(\mathrm{s}) &= Bu(\mathrm{s}) + \frac{1}{\mathrm{s}}AX_{n-2}(\mathrm{s}) \quad \in \mathrm{Im}\ B + A\big(\mathcal{W}^{n-1}_{[C,A,B]} \cap \mathrm{Ker}\ C\big) = \mathcal{W}^{*}_{[C,A,B]}. \end{aligned}$$

Definimos ahora: $X_0(\mathrm{s}) = \frac{1}{\mathrm{s}}Bu(\mathrm{s}) \ \in \mathrm{Im}\ B = \mathcal{W}^1_{[C,A,B]}$ y note que:

$$\begin{aligned} Ax_{ep}(\mathrm{s}) &= \mathrm{s}x_{ep}(\mathrm{s}) - \mathrm{s}X_0(\mathrm{s}), \\ A^{i+1}x_{ep}(\mathrm{s}) &= \mathrm{s}^{i+1}x_{ep}(\mathrm{s}) - \mathrm{s}^i X_i(\mathrm{s}) \quad \forall\ i \in \{1, \ldots, n-2\}. \end{aligned}$$

Del Teorema de Cayley–Hamilton se obtiene:

$$\begin{aligned} x_{ep}(\mathrm{s}) &= \frac{1}{\mathrm{s}}X_{n-1}(\mathrm{s}) + \frac{1}{\mathrm{s}^n}A^n x_{ep}(\mathrm{s}) \\ &= \frac{1}{\mathrm{s}}X_{n-1}(\mathrm{s}) + \frac{1}{\mathrm{s}^n}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(\mathrm{s})A^{i-1}x_{ep}(\mathrm{s}) \\ &= \frac{1}{\mathrm{s}}X_{n-1}(\mathrm{s}) + \frac{1}{\mathrm{s}^n}\left(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{s}^{i-1}\alpha_i(\mathrm{s})x_{ep}(\mathrm{s}) - \sum_{i=3}^{n}\mathrm{s}^{i-2}\alpha_i(\mathrm{s})X_{i-2}(\mathrm{s}) - \mathrm{s}\alpha_2(\mathrm{s})X_0(\mathrm{s})\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{a_i(\mathrm{s})}{\delta(\mathrm{s})}X_{i-1}(\mathrm{s}) \quad \in \mathcal{W}^{*}_{[C,A,B]}, \end{aligned}$$

donde $\alpha_i(\mathrm{s}),\ a_i(\mathrm{s}),\ \delta(\mathrm{s})\ \in \mathbb{R}[\mathrm{s}]$.

Por lo tanto $x_{ep}(\mathrm{s}) \in \mathcal{R}^{*}_{[A,B,C]}$.

5.5.2. Prueba del Teorema 17

$T_{enp}(\mathrm{s})$ es *una matriz de transferencia invertible por la izquierda* si y sólo si

$$\mathrm{Ker}\ \Gamma = \{0\} \quad \text{and} \quad \mathcal{R}^{*}_{[N,\Gamma,\Delta]} = \{0\}. \tag{5.23}$$

Prueba:

Consideremos la transformada de Laplace del sistema (5.6) con condiciones iniciales ceros y Ker $\Gamma = \{0\}$.

$$\mathrm{s}Nx_{enp}(\mathrm{s}) = x(\mathrm{s}) - \Gamma u(\mathrm{s}); \quad z(\mathrm{s}) = \Delta x_{enp}(\mathrm{s}) \tag{5.24}$$

y definimos el subespacio:

$$\mathbb{X}_{\mathcal{N}}(\mathrm{s}) = \big\{x_{enp}(\mathrm{s}) \in \mathbb{R}^n(\mathrm{s}) \ \big|\ z(\mathrm{s}) = 0\big\}.$$

Note que Ker $\Gamma = \{0\}$ implica que:

$$\text{Ker } T_{enp}(\mathrm{s}) = \{0\} \text{ si y sólo si } \mathbb{X}_{\mathcal{N}}(\mathrm{s}) = \{0\}$$

entonces sólo necesitamos caracterizar a $\mathbb{X}_{\mathcal{N}}(\mathrm{s})$.

1. Primero probamos que $\mathcal{R}^*_{[N,\Gamma,\Delta]} \subset \mathbb{X}_{\mathcal{N}}(\mathrm{s})$.

   Por definición de $\mathcal{R}^*_{[N,\Gamma,\Delta]}$ existe una ley de control

   $$u(\mathrm{s}) = \mathrm{s}F x_{enp}(\mathrm{s}) + \bar{u}(\mathrm{s})$$

   donde $x_{enp}(\mathrm{s}) \in \mathcal{R}^*_{[N,\Gamma,\Delta]}$ y F es la extensión de una retroalimentación amiga de $\mathcal{R}^*_{[N,\Gamma,\Delta]}$, tal que:

   $$\mathrm{s}(N + \Gamma F)x_{enp}(\mathrm{s}) = x_{enp}(\mathrm{s}) - \Gamma\bar{u}(\mathrm{s}), \quad 0 = \Delta x_{enp}(\mathrm{s}).$$

   Entonces $x_{enp}(\mathrm{s}) \in \mathbb{X}_{\mathcal{N}}(\mathrm{s})$.

2. Ahora probamos que $\mathbb{X}_{\mathcal{N}}(\mathrm{s}) \subset \mathcal{V}^*_{[N,\Gamma,\Delta]}$.

   Sea $x_{enp}(\mathrm{s}) \in \mathbb{X}_{\mathcal{N}}(\mathrm{s})$, entonces $N x_{enp}(\mathrm{s}) = \frac{1}{\mathrm{s}} x_{enp}(\mathrm{s}) - \frac{1}{\mathrm{s}}\Gamma u(\mathrm{s})$ y $x_{enp}(\mathrm{s}) \in \text{Ker } \Delta$, implica que:

   $$\begin{array}{rcl} x_{enp}(\mathrm{s}) & \in & \text{Ker } \Delta \cap N^{-1}\big(\text{Ker } \Delta + \text{Im } \Gamma\big) = \mathcal{V}^2_{[N,\Gamma,\Delta]}, \\ x_{enp}(\mathrm{s}) & \in & \text{Ker } \Delta \cap N^{-1}\big(\mathcal{V}^2_{[N,\Gamma,\Delta]} + \text{Im } \Gamma\big) = \mathcal{V}^3_{[N,\Gamma,\Delta]}, \\ \vdots & \vdots & \\ x_{enp}(\mathrm{s}) & \in & \text{Ker } \Delta \cap N^{-1}\big(\mathcal{V}^n_{[N,\Gamma,\Delta]} + \text{Im } \Gamma\big) = \mathcal{V}^*_{[N,\Gamma,\Delta]}. \end{array}$$

3. Finalmente probamos que $\mathbb{X}_{\mathcal{N}}(\mathrm{s}) \subset \mathcal{R}^*_{[N,\Gamma,\Delta]}$.
   Sea $x_{enp}(\mathrm{s}) \in \mathbb{X}_{\mathcal{N}}(\mathrm{s})$. Entonces:

   $$x_{enp}(\mathrm{s}) = \Gamma u(\mathrm{s}) + \mathrm{s}N x_{enp}(\mathrm{s}) \ \in \text{Ker } \Delta$$

   implica que

   $$\begin{array}{rcl} x_{enp}(\mathrm{s}) & = & \Gamma u(\mathrm{s}) + \mathrm{s}N\Big(\Gamma u(\mathrm{s}) + \mathrm{s}N x_{enp}(\mathrm{s})\Big) \\ & = & X_1(\mathrm{s}) + \mathrm{s}^2 N^2 x_{enp}(\mathrm{s}) \ \in \text{Ker } \Delta \end{array}$$

   donde

   $$X_1(\mathrm{s}) = \Gamma u(\mathrm{s}) + N\Gamma u(\mathrm{s}) \quad \in \text{Im } \Gamma + N\big(\text{Im } \Gamma \cap \text{Ker } \Delta\big) = \mathcal{W}^2_{[\Delta,N,\Gamma]}.$$

   Entonces se sigue que

   $$\begin{array}{rcl} x_{enp}(\mathrm{s}) & = & \Big(\Gamma u(\mathrm{s}) + \mathrm{s}N\Gamma u(\mathrm{s})\Big) + \mathrm{s}^2 N^2\Big(\Gamma u(\mathrm{s}) + \mathrm{s}N x_{enp}(\mathrm{s})\Big) \\ & = & \Gamma u(\mathrm{s}) + \mathrm{s}N X_1(\mathrm{s}) + \mathrm{s}^3 N^3 x_{enp}(\mathrm{s}) \quad \in \text{Ker } \Delta. \end{array}$$

Supongamos que para $i \in \{1, \ldots, \mu\}$ se tiene:

$$\begin{aligned} x_{enp}(\mathrm{s}) &= \Big(\Gamma u(\mathrm{s}) + \mathrm{s}NX_i(\mathrm{s})\Big) + \mathrm{s}^{i+2}N^{i+2}x_{enp}(\mathrm{s}) \\ &= X_{i+1}(\mathrm{s}) + \mathrm{s}^{i+2}N^{i+2}x_{enp}(\mathrm{s}) \quad \in \mathrm{Ker}\ \Delta, \end{aligned}$$

donde

$$X_{i+1}(\mathrm{s}) = \Gamma u(\mathrm{s}) + \mathrm{s}NX_i(\mathrm{s}) \quad \in \mathrm{Im}\ \Gamma + N\Big(\mathcal{W}^{i+1}_{[\Delta,N,\Gamma]} \cap \mathrm{Ker}\ \Delta\Big) = \mathcal{W}^{i+2}_{[\Delta,N,\Gamma]}.$$

De esta forma se tiene

$$\begin{aligned} x_{enp}(\mathrm{s}) &= \Bigg(\Gamma u(\mathrm{s}) + \mathrm{s}N\Bigg(\Gamma u(\mathrm{s}) + \mathrm{s}N\Bigg(\cdots \\ &\quad \Bigg(\Gamma u(\mathrm{s}) + \mathrm{s}N\Bigg(\Gamma u(\mathrm{s}) + \mathrm{s}N\Big(\Gamma u(\mathrm{s}) + \mathrm{s}N\big(\Gamma u(\mathrm{s}) + \mathrm{s}N\Gamma u(\mathrm{s})\big)\Big)\Bigg)\Bigg)\cdots\Bigg)\Bigg)\Bigg) \\ &\quad + \mathrm{s}^{\mu+3}N^{\mu+3}x_{enp}(\mathrm{s}) \quad \in \mathrm{Ker}\ \Delta \\ &= X_{\mu+2}(\mathrm{s}) + \mathrm{s}^{\mu+3}N^{\mu+3}x_{snp}(\mathrm{s}) \quad \in \mathrm{Ker}\ \Delta, \end{aligned}$$

donde

$$X_{\mu+2}(\mathrm{s}) = \Gamma u(\mathrm{s}) + \mathrm{s}NX_{\mu+1}(\mathrm{s}) \quad \in \mathrm{Im}\ \Gamma + N\Big(\mathcal{W}^{\mu+2}_{[\Delta,N,\Gamma]} \cap \mathrm{Ker}\ \Delta\Big) = \mathcal{W}^{\mu+3}_{[C_{snp},N,\Gamma]}.$$

Y así (recordemos que N es una matriz nilpotente):
$x_{enp}(\mathrm{s}) = X_{n-1}(\mathrm{s}) + \mathrm{s}^n N^n x_{enp}(\mathrm{s}) = X_{n-1}(\mathrm{s})$, donde

$$X_{n-1}(\mathrm{s}) = \Gamma u(\mathrm{s}) + \mathrm{s}NX_{n-2}(\mathrm{s}) \quad \in \mathrm{Im}\ \Gamma + \mathrm{s}N\Big(\mathcal{W}^{n-1}_{[\Delta,N,\Gamma]} \cap \mathrm{Ker}\ \Delta\Big) = \mathcal{W}^{*}_{[C_{snp},N,\Gamma]}.$$

Por lo tanto $x_{enp}(\mathrm{s}) \ \in \mathcal{R}^*_{[N,\Gamma,\Delta]}$.

Con el objetivo de abreviar la escritura en la prueba de los siguientes lemas no escribimos "(t)" en las funciones del tiempo.

5.5.3. Prueba del Lema 25

Haciendo $y = 0$ en (5.3) se obtiene $\dot{x}_{ep} = Ax_{ep} + Bz$ y $0 = Cx_{ep}$.

Probamos en tres pasos que: $x_{ep}, \dot{x}_{ep} \ \in \mathcal{V}^*_{[A,B,C]}$.

1. Primero probemos que:
   $x_{ep}, \dot{x}_{ep} \ \in \mathcal{V}^2_{[A,B,C]}$ y $\ddot{x}_{ep} \ \in \mathcal{V}^1_{[A,B,C]}$.

   Como $Cx_{ep} = 0$ entonces $C\dot{x}_{ep} = 0$ y $C\ddot{x}_{ep} = 0$.

Por lo tanto

$$x_{ep},\ \dot{x}_{ep},\ \ddot{x}_{ep}\ \in \text{Ker } C = \mathcal{V}^1_{[A,B,C]}.$$

Entonces

$\dot{x}_{ep} = Ax_{ep} + Bz\ \in \mathcal{V}^1_{[A,B,C]}$ implica que:

$$x_{ep}\ \in \mathcal{V}^1_{[A,B,C]} \cap A^{-1}\left(\mathcal{V}^1_{[A,B,C]} + \text{Im } B\right) = \mathcal{V}^2_{[A,B,C]}$$

y

$\ddot{x}_{ep} = A\dot{x}_{ep} + B\dot{z}\ \in \mathcal{V}^1_{[A,B,C]}$ implica que:

$$\dot{x}_{ep}\ \in \mathcal{V}^1_{[A,B,C]} \cap A^{-1}\left(\mathcal{V}^1_{[A,B,C]} + \text{Im } B\right) = \mathcal{V}^2_{[A,B,C]}.$$

2. Ahora probemos que:
   Si $x_{ep}\ \in \mathcal{V}^{\mu}_{[A,B,C]}$ y $x^{(i)}_{ep}\ \in \mathcal{V}^{\mu+1-i}_{[A,B,C]}$ para $i \in \{1, \cdots, \mu\}$, entonces

   $x_{ep}\ \in \mathcal{V}^{\mu+1}_{[A,B,C]}$ y ${x_{ep}}^{(i)}\ \in \mathcal{V}^{\mu+2-i}_{[A,B,C]}$ para $i \in \{1, \cdots, \mu\}$.

   Sea $\dot{x}_{ep} = Ax_{ep} + Bz\ \in \mathcal{V}^{\mu}_{[A,B,C]}$ entonces:

   $$x_{ep}\ \in \mathcal{V}^{\mu}_{[A,B,C]} \cap A^{-1}\left(\mathcal{V}^{\mu}_{[A,B,C]} + \text{Im } B\right) = \mathcal{V}^{\mu+1}_{[A,B,C]}.$$

   Como $Cx_{ep} = 0$ implica que $C{x_{ep}}^{(\mu+1)} = 0$, entonces

   $$C{x_{ep}}^{(\mu+1)} = C(A{x_{ep}}^{(\mu)} + Bz^{(k)}) = 0$$

   lo cual implica que

   $$A{x_{ep}}^{(\mu)} + Bz^{(\mu)}\ \in \text{Ker } C.$$

   Se sigue que

   $${x_{ep}}^{(\mu)}\ \in \mathcal{V}^1_{[A,B,C]} \cap A^{-1}\left(\mathcal{V}^1_{[A,B,C]} + \text{Im } B\right) = \mathcal{V}^2_{[A,B,C]}.$$

   Por otro lado, supongamos que:
   ${x_{ep}}^{(j)},\ {x_{ep}}^{(j+1)}\ \in \mathcal{V}^{\mu+1-j}_{[A,B,C]}$ para $j \in \{\mu-1, \cdots, 1\}$. Entonces:

   $${x_{ep}}^{(j+1)} = A{x_{ep}}^{(j)} + Bz^{(j)}\ \in \mathcal{V}^{\mu+1-j}_{[A,B,C]}$$

   y así

   $${x_{ep}}^{(j)}\ \in \mathcal{V}^{\mu+1-j}_{[A,B,C]} \cap A^{-1}(\mathcal{V}^{\mu+1-j}_{[A,B,C]} + \text{Im } B) = \mathcal{V}^{\mu+2-j}_{[A,B,C]}.$$

3. De los primeros dos puntos, obtenemos:

   $$x_{ep},\ \dot{x}_{ep}\ \in \mathcal{V}^*_{[A,B,C]}.$$

Ahora, como $x_{ep}, \dot{x}_{ep} \in \mathcal{V}^*_{[A,B,C]}$, se tiene que

$$Bz = \dot{x}_{ep} - Ax_{ep}\ \in\ \text{Im } B \cap \left(\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} + A\mathcal{V}^*_{[A,B,C]}\right) = \{0\},$$

lo cual implica que $z \in \text{Ker } B$. Ahora bien, puesto que Ker $B = \{0\}$, se sigue que $z = 0$.

5.5.4. Prueba del Lema 26

1. Para probar el Lema, primero necesitamos demostrar que:

$$\mathcal{V}^*_{[\mathcal{X}_i,\mathbb{E}_i,\mathbb{A}_i]} = \Big\{ \left[x_1^T\ x_2^T\right]^T \in \mathcal{X}_i \mid x_1 \in \mathcal{V}^*_{[A,B,C]}, \quad x_2 \in B^{-1}\left(\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} + A\mathcal{V}^*_{[A,B,C]}\right) \text{ y } \Pi_* B x_2 = -\Pi_* A x_1 \Big\}, \tag{5.25}$$

donde $\Pi_* : \mathcal{X} \to \frac{\mathcal{X}}{\mathcal{V}^*_{[A,B,C]}}$ es la proyección canónica.

Del primer paso del algoritmo de $\mathcal{V}^*_{[\mathcal{X}_i,\mathbb{E}_i,\mathbb{A}_i]}$, se obtiene:

$$\mathcal{V}^1_{[\mathcal{X}_i,\mathbb{E}_i,\mathbb{A}_i]} = \mathbb{A}_i^{-1}\mathbb{E}_i\mathcal{V}^0_{[\mathcal{X}_i,\mathbb{E}_i,\mathbb{A}_i]} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ A & B \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathcal{V}^0_{[A,B,C]} \end{bmatrix}.$$

Se sigue que $x_1,\ x_2$ tales que:

$$Cx_1 = 0 \text{ y } Ax_1 + Bx_2 \in \mathcal{V}^0_{[A,B,C]}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} x_1 &\in \text{Ker } C \cap A^{-1}\left(\mathcal{V}^0_{[A,B,C]} + \text{Im } B\right) = \mathcal{V}^1_{[A,B,C]} \quad \text{y} \\ x_2 &\in B^{-1}\left(\mathcal{V}^0_{[A,B,C]} + AV^1_{[A,B,C]}\right). \end{aligned}$$

Además, $\Pi_0 B x_2 = -\Pi_0 A x_1$, donde $\Pi_0 : \mathcal{X} \to \frac{X}{\mathcal{V}^0_{[A,B,C]}}$ es la proyección canónica (esta primera proyección es trivial pues $\mathcal{V}^0_{[A,B,C]} = \mathcal{X}$).
Entonces:

$$\mathcal{V}^1_{[\mathcal{X}_i,\mathbb{E}_i,\mathbb{A}_i]} = \Big\{ \left[x_1^T\ x_2^T\right]^T \in \mathcal{X}_i : \ x_1 \in \mathcal{V}^1_{[A,B,C]}, \quad x_2 \in B^{-1}\left(\mathcal{V}^0_{[A,B,C]} + A\mathcal{V}^1_{[A,B,C]}\right) \text{ y } \Pi_0 B x_2 = -\Pi_0 A x_1 \Big\},$$

$$\mathbb{E}_i\mathcal{V}^1_{[\mathcal{X}_i,\mathbb{E}_i,\mathbb{A}_i]} = \{0\} \oplus \mathcal{V}^1_{[A,B,C]}.$$

Para el $\mu - th$ paso del algoritmo de $\mathcal{V}^*_{[\mathcal{X}_i,\mathbb{E}_i,\mathbb{A}_i]}$, procedemos como sigue:

Supongamos que (con $k \in \{1, \cdots, \mu\}$):

$$\begin{aligned}
&\mathcal{V}^k_{[\mathcal{X}_i,\mathbb{E}_i,\mathbb{A}_i]} = \\
&\left\{ \left[x_1^T \ x_2^T\right]^T \in \mathcal{X}_e : x_1 \in \mathcal{V}^k_{[A,B,C]}, \quad x_2 \in B^{-1}\left(\mathcal{V}^{k-1}_{[A,B,C]} + A\mathcal{V}^k_{[A,B,C]}\right) \text{ y} \right. \\
&\left. \Pi_{k-1} B x_2 = -\Pi_{k-1} A x_1 \right\}, \\
&\mathbb{E}_i \mathcal{V}^k_{[\mathcal{X}_i,\mathbb{E}_i,\mathbb{A}_i]} = \{0\} \oplus \mathcal{V}^k_{[A,B,C]},
\end{aligned} \tag{5.26}$$

donde $\Pi_{k-1} : \mathcal{X} \to \frac{\mathcal{X}}{\mathcal{V}^{k-1}_{[A,B,C]}}$ es la proyeción canónica.

$$\mathcal{V}^{\mu+1}_{[\mathcal{X}_i,\mathbb{E}_i,\mathbb{A}_i]} = \mathbb{A}_i^{-1}\mathbb{E}_i\mathcal{V}^{\mu}_{[\mathcal{X}_i,\mathbb{E}_i,\mathbb{A}_i]} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ A & B \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathcal{V}^{\mu}_{[A,B,C]} \end{bmatrix}.$$

Así existen x_1, x_2 tales que: $Cx_1 = 0$ y $Ax_1 + Bx_2 \in \mathcal{V}^{\mu}_{[A,B,C]}$.
Por lo tanto

$$\begin{aligned}
x_1 &\in \operatorname{Ker} C \cap A^{-1}\left(\mathcal{V}^{\mu}_{[A,B,C]} + \operatorname{Im} B\right) = \mathcal{V}^{\mu+1}_{[A,B,C]}, \\
x_2 &\in B^{-1}\left(\mathcal{V}^{\mu}_{[A,B,C]} + A\mathcal{V}^{\mu+1}_{[A,B,C]}\right).
\end{aligned}$$

Además $\Pi_\mu B x_2 = -\Pi_\mu A x_1$, donde $\Pi_\mu : \mathcal{X} \to \frac{\mathcal{X}}{\mathcal{V}^{\mu}_{[A,B,C]}}$ es la proyección canónica.

De esta forma tenemos que (5.26) se cumple $\forall\ k > 0$, lo cual prueba (5.25).

2. Ahora probemos que:

$\mathcal{V}^*_{[\mathcal{X}_i,\mathbb{E}_i,\mathbb{A}_i]} = \{0\}$ implica que $B^{-1}\left(\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} + A\mathcal{V}^*_{[A,B,C]}\right) = \{0\}$,

lo cual es equivalente a probar que:

$B^{-1}\left(\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} + A\mathcal{V}^*_{[A,B,C]}\right) \neq \{0\}$ implica que $\mathcal{V}^*_{[\mathcal{X}_i,\mathbb{E}_i,\mathbb{A}_i]} \neq \{0\}$.

Como $B^{-1}\left(\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} + A\mathcal{V}^*_{[A,B,C]}\right) \neq \{0\}$ entonces existe $x_2 \neq 0$ tal que:

$$x_2 \in B^{-1}\left(\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} + A\mathcal{V}^*_{[A,B,C]}\right).$$

Entonces

$$Bx_2 \neq 0 \quad \text{y} \quad Bx_2 \in \operatorname{Im} B \cap \left(\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} + A\mathcal{V}^*_{[A,B,C]}\right) \subset \left(\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} + A\mathcal{V}^*_{[A,B,C]}\right),$$

por lo que existen $-x_1$, $x_v \in \mathcal{V}^*_{[A,B,C]}$, tales que: $Bx_2 = x_v - Ax_1$.
Así

$$\Pi_* B x_2 = -\Pi_* A x_1.$$

Por lo tanto existen $x_1 \neq 0,\ x_2 \neq 0$ tales que:

$$x_1 \in \mathcal{V}^*_{[A,B,C]} \quad \text{y} \quad x_2 \in B^{-1}\left(\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} + A\mathcal{V}^*_{[A,B,C]}\right),$$

satisfaciendo $\Pi_* B x_2 = -\Pi_* A x$. De esta forma obtenemos que

$$\mathcal{V}^*_{[\mathcal{X}_i,\mathbb{E}_i,\mathbb{A}_i]} \neq \{0\}.$$

5.5.5. Prueba del Lema 28

1. Primero probemos que:

$$\left(\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} + A\mathcal{V}^*_{[A,B,C]}\right) \cap \mathrm{Im}\ B = \left(\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} + A\mathrm{Ker}\ C\right) \cap \mathrm{Im}\ B.$$

Del algoritmo (1.3) obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} + A\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} &= V^*_{[A,B,C]} + A\mathrm{Ker}\ C \cap \left(\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} + \mathrm{Im}\ B\right) \\
&= (\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} + A\mathrm{Ker}\ C) \cap \left(\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} + \mathrm{Im}\ B\right) \\
\left(\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} + A\mathcal{V}^*_{[A,B,C]}\right) \cap \mathrm{Im}\ B &= \left(\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} + A\mathrm{Ker}\ C\right) \cap \mathrm{Im}\ B.
\end{aligned}$$

2. Ahora probemos que:

$$\text{Si } \left(\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} + A\mathrm{Ker}\ C\right) \cap \mathrm{Im}\ B = \{0\} \text{ entonces } \mathcal{V}^*_{[A,B,C]} = \mathcal{N}.$$

Sea $x \in A\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} = A\mathrm{Ker}\ C \cap \left(\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} + \mathrm{Im}\ B\right)$.
Por lo tanto existen $c \in \mathrm{Ker}\ C,\ v \in \mathcal{V}^*_{[A,B,C]}$ y $b \in \mathrm{Im}\ B$ tales que:

$$x = Ac = v + b.$$

Se sigue que

$$Ac - v = b \in \left(\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} + A\mathrm{Ker}\ C\right) \cap \mathrm{Im}\ B = \{0\}$$

y $Ac - v = 0$, es decir:

$$x = Ac = v \in \left(\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} \cap A\mathrm{Ker}\ C\right).$$

Por lo tanto

$$\left(\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} \cap A\mathrm{Ker}\ C\right) \subset A\mathrm{Ker}\ C \cap \left(\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} + \mathrm{Im}\ B\right) \subset \left(\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} \cap A\mathrm{Ker}\ C\right).$$

tenemos

$$A\mathrm{Ker}\ C \cap \left(\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} + \mathrm{Im}\ B\right) = \mathcal{V}^*_{[A,B,C]} \cap A\mathrm{Ker}\ C$$

y como

$$A\mathrm{Ker}\ C \cap \left(\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} + \mathrm{Im}\ B\right) = A\mathcal{V}^*_{[A,B,C]},$$

se tiene que

$$A\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} = \mathcal{V}^*_{[A,B,C]} \cap A\text{Ker } C.$$

Por lo tanto

$$A\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} \subset \mathcal{V}^*_{[A,B,C]}.$$

Ahora como $\mathcal{N}$ es el máximo subespacio $A - invariante$ contenido en el núcleo de C y además $\mathcal{N} \subset \mathcal{V}^*_{[A,B,C]}$, se obtiene el resultado.

3. Probar que:

   Si Ker $B = \{0\}$ y $(\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} + A\text{Ker } C) \cap \text{Im } B = \{0\}$ entonces

   $B^{-1}(\mathcal{N} + A\text{Ker } C) = \{0\}$.

   Se tiene

$$\begin{array}{rcl}
\left(\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} + A\text{Ker } C\right) \cap \text{Im } B &=& \{0\}, \\
BB^{-1}\left(\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} + A\text{Ker } C\right) &=& \{0\}, \\
B^{-1}BB^{-1}\left(\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} + A\text{Ker } C\right) &=& B^{-1}\{0\}, \\
B^{-1}\left(\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} + A\text{Ker } C\right) + \text{Ker } B &=& \text{Ker } B, \\
B^{-1}\left(\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} + A\text{Ker } C\right) &=& \{0\}, \\
B^{-1}\left(\mathcal{N} + A\text{Ker } C\right) &=& \{0\}.
\end{array}$$

4. Probar que:

   Si $\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} = \mathcal{N}$ y $B^{-1}(\mathcal{N} + A\text{Ker } C) = \{0\}$ entonces

   $\left(\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} + A\mathcal{V}^*_{[A,B,C]}\right) \cap \text{Im } B = \{0\}$.

   De los puntos 1 y 2 tenemos que:

$$\begin{array}{rcl}
\left(\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} + A\mathcal{V}^*_{[A,B,C]}\right) \cap \text{Im } B &=& \left(\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} + A\text{Ker } C\right) \cap \text{Im } B \\
&=& (\mathcal{N} + A\text{Ker } C) \cap \text{Im } B \\
&=& BB^{-1}(\mathcal{N} + A\text{Ker } C) \\
&=& B\{0\} \\
&=& \{0\}.
\end{array}$$

5. Por último, note que:

   Si $B^{-1}(\mathcal{N} + A\text{Ker } C) = \{0\}$ entonces Ker $B = \{0\}$.

5.5.6. Prueba del Lema 29

1. Primero observemos que (ver (1.3) y (5.18)):

   (a) $\mathcal{V}^0_{[A_{ob},B_{ob},C_{ob}]} = \frac{\mathcal{X}}{\mathcal{N}} = \Pi\mathcal{X} = \Pi\mathcal{V}^0_{[A,B,C]}$.

   (b) Ker $C = \Pi^{-1}$Ker C_{ob}. Entonces
   Π Ker $C = \Pi\ \Pi^{-1}$Ker $C_o b = (\text{Im }\Pi) \cap \text{Ker } C_{ob} = \frac{\mathcal{X}}{\mathcal{N}} \cap \text{Ker } C_{ob} = \text{Ker } C_{ob}$.

   (c) Im $B_{ob} = B_{ob}\ \mathcal{Z} = \Pi\ B\ \mathcal{Z} = \Pi$ Im B.

2. Ahora probemos que $V^*_{[A_{ob},B_{ob},C_{ob}]} = \Pi\mathcal{V}^*_{[A,B,C]}$.

   Supongamos que $\mathcal{V}^\mu_{[A_{ob},B_{ob},C_{ob}]} = \Pi\mathcal{V}^\mu_{[A,B,C]}$ entonces

$$
\begin{aligned}
\mathcal{V}^{\mu+1}_{[A_{ob},B_{ob},C_{ob}]} &= \text{Ker } C_{ob} \cap A_{ob}^{-1}\left(\mathcal{V}^\mu_{[A_{ob},B_{ob},C_{ob}]} + \text{Im } B_{ob}\right) \\
&= \Pi \text{ Ker } C \cap A_{ob}^{-1}\left(\Pi\mathcal{V}^\mu_{[A,B,C]} + \Pi \text{ Im } B\right) \\
&= \Pi \text{ Ker } C \cap \frac{\mathcal{X}}{\mathcal{N}}\ \cap\ A_{ob}^{-1}\Pi\left(\mathcal{V}^\mu_{[A,B,C]} + \text{Im } B\right) \\
&= \Pi \text{ Ker } C \cap \text{Im } \Pi \cap A_{ob}^{-1}\left(\Pi\mathcal{V}^\mu_{[A,B,C]} + \text{Im } B\right) \\
&= \Pi \text{ Ker } C \cap \Pi\ \Pi^{-1}A_{ob}^{-1}\left(\Pi\mathcal{V}^\mu_{[A,B,C]} + \text{Im } B\right) \\
&= \Pi \text{ Ker } C \cap \Pi\left(A_{ob}\Pi\right)^{-1}\Pi\left(\mathcal{V}^\mu_{[A,B,C]} + \text{Im } B\right) \\
&= \Pi \text{ Ker } C \cap \Pi\left(\Pi A\right)^{-1}\Pi\left(\mathcal{V}^\mu_{[A,B,C]} + \text{Im } B\right) \\
&= \Pi \text{ Ker } C \cap \Pi A^{-1}\Pi^{-1}\Pi\left(\mathcal{V}^\mu_{[A,B,C]} + \text{Im } B\right) \\
&= \Pi \text{ Ker } C \cap \Pi A^{-1}\left(\mathcal{V}^\mu_{[A,B,C]} + \text{Im } B + \text{Ker } \Pi\right) \\
&= \Pi \text{ Ker } C \cap \Pi A^{-1}\left(\mathcal{V}^\mu_{[A,B,C]} + \text{Im } B + \mathcal{N}\right) \\
&= \Pi \text{ Ker } C \cap \Pi A^{-1}\left(\mathcal{V}^\mu_{[A,B,C]} + \text{Im } B\right) \\
&= \Pi\ \left(\text{Ker } C + \mathcal{N}\right)\ \cap\ \Pi A^{-1}\left(\mathcal{V}^\mu_{[A,B,C]} + \text{Im } B\right) \\
&= \Pi\ \left(\Pi^{-1}\Pi \text{ Ker } C\right)\ \cap\ \Pi A^{-1}\left(\mathcal{V}^\mu_{[A,B,C]} + \text{Im } B\right) \\
&= \Pi\ \left(\Pi^{-1}\Pi \text{ Ker } C \cap A^{-1}(\mathcal{V}^\mu_{[A,B,C]} + \text{Im } B)\right) \\
&= \Pi\ \left(\text{Ker } C \cap A^{-1}(\mathcal{V}^\mu_{[A,B,C]} + \text{Im } B)\right) \\
&= \Pi\mathcal{V}^{\mu+1}_{[A,B,C]}.
\end{aligned}
$$

   Por lo tanto $V^*_{[A_{ob},B_{ob},C_{ob}]} = \Pi\mathcal{V}^*_{[A,B,C]}$.

3. Por último demostremos que: $B^{-1}(\mathcal{N} + A\text{Ker } C) = B_{ob}^{-1}A_{ob}\text{Ker } C_{ob}$.

Se tiene que:

$$\begin{array}{rcl} B^{-1}(\mathcal{N} + A\text{Ker } C) & = & B^{-1}(\text{Ker } \Pi + A\text{Ker } C) \\ & = & B^{-1}(\Pi^{-1}\Pi A\text{Ker } C) \\ & = & B^{-1}\Pi^{-1}\Pi A\text{Ker } C \\ & = & (\Pi B)^{-1}\ (\Pi A)\text{Ker } C \\ & = & B_{ob}^{-1}A_{ob}\Pi\text{Ker } C \\ & = & B_{ob}^{-1}A_{ob}\text{Ker } C_{ob}. \end{array}$$

5.5.7. Prueba del Lema 30

1. Probaremos primero la necesidad:

   Como $\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} = \mathcal{N}$ y $B^{-1}(\mathcal{N} + A\text{Ker } C) = \{0\}$, entonces del Lema 29, obtenemos:

   - $V^*_{[A_{ob},B_{ob},C_{ob}]} = \Pi\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} = \Pi\mathcal{N} = \{0\}$.
   - $\text{Ker } B_{ob} = \text{Ker } \Pi\ B = B^{-1}\text{Ker } \Pi = B^{-1}\mathcal{N}\ \subset\ B^{-1}(\mathcal{N} + A\text{Ker } C) = \{0\}$.

   Por lo tanto
   $$V^*_{[A_{ob},B_{ob},C_{ob}]} = \{0\} \quad \text{y} \quad \text{Ker } B_{ob} = \{0\}.$$

2. Ahora probaremos la suficiencia:

   Se tiene que $V^*_{[A_{ob},B_{ob},C_{ob}]} = \{0\}$ por lo que
   $$\Pi^{-1}\Pi\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} = \Pi^{-1}\{0\},$$
   que es equivalente a
   $$\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} + \text{Ker } \Pi = \text{Ker } \Pi.$$
   Es decir,
   $$\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} + \mathcal{N} = \mathcal{N}.$$
   Puesto que $\mathcal{N} \subset \mathcal{V}^*_{[A,B,C]}$, entonces tenemos
   $$\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} = \mathcal{N}.$$
   Por otro lado

   $V^*_{[A_{ob},B_{ob},C_{ob}]} = \text{Ker } C_{ob} \cap A_{ob}^{-1}(V^*_{[A_{ob},B_{ob},C_{ob}]} + \text{Im } B_{ob})$ implica que:
   $$\{0\} = \text{Ker } C_{ob} \cap A_{ob}^{-1}\text{Im } B_{ob}.$$
   Entonces
   $$A_{ob}\{0\} = A_{ob}\text{Ker } C_{ob} \cap \text{Im } B_{ob},$$
   y así
   $$\begin{array}{rcl} \{0\} & = & B_{ob}\ B_{ob}^{-1}A_{ob}\text{Ker } C_{ob} \\ B_{ob}^{-1}\{0\} & = & B_{ob}^{-1}(B_{ob}\ B_{ob}^{-1}A_{ob}\text{Ker } C_{ob}) \\ \text{Ker } B_{ob} & = & B_{ob}^{-1}A_{ob}\text{Ker } C_{ob} + \text{Ker } B_{ob} \\ \{0\} & = & B_{ob}^{-1}A_{ob}\text{Ker } C_{ob} \\ & = & B^{-1}(\mathcal{N} + A\text{Ker } C) \end{array}$$
   Por lo tanto $B^{-1}(\mathcal{N} + A\text{Ker } C) = \{0\}$.

5.5.8. Observabilidad de la entrada

Hou y Patton [37] introdujeron la llamada *observabilidad de la entrada*[6].

En ese artículo ([37]) la *observabilidad de la entrada* es caracterizada en forma matricial por su Teorema 1 y establecen como una condición necesaria y suficiente para la *observabilidad de la entrada*, la siguiente igualdad (en esta tesis $D = 0$):

$$\sigma\left(\begin{bmatrix} \lambda \mathrm{I} - A & -B \\ C & D \end{bmatrix}\right) = \sigma\left(\begin{bmatrix} \lambda \mathrm{I} - A \\ C \end{bmatrix}\right) \tag{5.27}$$

donde $\sigma(\lambda M - N)$ denota el conjunto de eigenvalores finitos de la matriz abanico $\lambda M - N$ (estos son los divisores elementales finitos expuestos en la Sección 5.1).

Pero la condición (5.27) no es necesaria y suficiente como se afirma en ese artículo, sino únicamente necesaria.

Para mostrar esto, consideremos el siguiente ejemplo:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u, \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x. \end{aligned} \tag{5.28}$$

La primera entrada u_1, está asociada al subespacio no observable $\{e_2\}$, y la segunda entrada u_2, está ligada a y_2 por la ecuación diferencial ordinaria $\ddot{y}_2 = \dot{u}_2$.

Es claro que este sistema no puede ser *invertible a la izquierda DT* ni la entrada es observable.

Calculando los subespacios del Teorema 24, se tiene:

$$\mathrm{Ker}\ B = \{0\} \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}\ B \cap (\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} + A\mathcal{V}^*_{[A,B,C]}) = \{e_2,\ e_3\} \neq \{0\},$$

los cuales implican que este sistema no es *invertible a la izquierda DT*.

Consideremos las siguientes matrices usadas en el Teorema 1 de Hou y Patton [37]:

$$M_1(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda \mathrm{I} - A & -B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

[6] Diferente de la noción (débil) de *observabilidad de la entrada* usada por Massoumnia [60] que corresponde a: B inyectivo e $\mathrm{Im}\ B \cap \mathcal{N} = \{0\}$.

$$M_2(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda \mathrm{I} - A \\ C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Los *rangos normales* de estas dos matrices son:

$$\text{rango normal } M_1(\lambda) = 5 \quad \text{y} \quad \text{rango normal } M_2(\lambda) = 4.$$

Entonces

$$\text{rango}M_1(\lambda) : \begin{cases} \lambda = 0 \Rightarrow \text{rango}M_1 = 4 < 5 \\ \lambda \neq 0 \Rightarrow \text{rango}M_1 = 5 = 5 \end{cases}$$

$$\text{rango}M_2(\lambda) : \begin{cases} \lambda = 0 \Rightarrow \text{rango}M_1 = 3 < 4 \\ \lambda \neq 0 \Rightarrow \text{rango}M_1 = 4 = 4 \end{cases}$$

los cuales implican que:

$$\sigma(M_1) = \{0\} = \sigma(M_2).$$

El Teorema 1 de [37] dice que en el sistema (5.28) la entrada es observable.

Esta contradicción es debido a que la condición (5.27) es únicamente necesaria pero no suficiente.

Hou y Patton [37] deben agregar la condición de *invertibilidad izquierda MT*, es decir, deben agregar la condición $\mathcal{R}_B^* = \{0\}$ (ver (5.5) y nuestro Corolario 31). En efecto, en el Ejemplo Académico (5.28) se tiene un rango igual a 1 y no igual a 2, *i.e.* el número de entradas; y es precisamente la entrada que pertenece a $\mathcal{R}_{[A,B,C]}^* = \{0\}$ la que causa problemas.

CAPíTULO 6

Separación de polos y ceros de un sistema estrictamente propio

En este Capítulo formalizamos el procedimiento aplicado al ejemplo 5.1 del Capítulo anterior. Es decir, la descomposición de un sistema *estrictamente propio* $\Sigma(A, B, C)$ como la conección en cascada de los dos siguientes sistemas:

1. Un *sistema estrictamente no propio*, Σ_{ceros}, conteniendo todos los ceros del sistema, el cual es *invertible a la izquierda MT*.

2. Un *sistema estrictamente propio*, Σ_{polos}, conteniendo todos los polos del sistema y sin ningún cero finito, el cual es *invertible a la izquierda DT*.

De aquí en adelante, cuando hablemos de ceros nos estamos refiriendo a los *ceros invariantes observables*.

6.1. Forma Dual de Brunovsky

Consideremos el sistema *estrictamente propio* observable[1] $\Sigma_{ep}(A, B, C) : \mathcal{Z} \to \mathcal{X}_{ep} \to \mathcal{Y}$:

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}_{ep}(t) & = & Ax_{ep}(t) + Bz(t) \\ y(t) & = & Cx_{ep}(t) \end{array} \tag{6.1}$$

donde el mapeo $B : \mathcal{Z} \longrightarrow \mathcal{X}_{ep}$ es inyectivo y el mapeo $C : \mathcal{X}_{ep} \longrightarrow \mathcal{Y}$ es suprayectivo.

Del Teorema Dual de Brunovsky [20] existen una matriz inyección de salida K y dos cambios de bases T y S, tales que:

$$\begin{array}{rcl} \widehat{A}_K & = & T^{-1}(A - KC)T = MDB\{\widehat{A}_{K,1}, \cdots, \widehat{A}_{K,\eta}\}, \\ \widehat{C} & = & SCT = MDB\{\widehat{C}_1, \cdots, \widehat{C}_\eta\}, \\ \widehat{B} & = & T^{-1}B = \begin{bmatrix} \widehat{B}_1 \\ \cdots \\ \widehat{B}_\eta \end{bmatrix}. \end{array} \tag{6.2}$$

[1]Si el sistema (6.1) no es observable, entonces consideremos el sistema cociente de la Sección 5.3

donde MDB significa Matriz Diagonal por Bloques y

$$\widehat{A}_{K,i} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdot & 0 \\ \vdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \vdots \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & 0 \end{bmatrix}_{\kappa_i \times \kappa_i} ; \; \widehat{C}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{1\times\kappa_i} ; \; \widehat{B}_i = \begin{bmatrix} b^i_{1,1} & \cdots & b^i_{1,\eta} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ b^i_{\kappa_i,1} & \cdots & b^i_{\kappa_i,\eta} \end{bmatrix} \tag{6.3}$$

donde $i \in \{1, \ldots, \eta\}$ y las κ_i son los *índices de observabilidad* tales que:

- $\kappa_l \geq \kappa_2 \geq \cdots \geq \kappa_\eta \geq 0$,
- $\Sigma_{i=1}^{\eta} \kappa_i = n$.

Definimos las siguientes matrices:

$$\begin{array}{rcl} N_c & = & T\widehat{A}_K^T T^{-1}, \\ \Upsilon & = & T(\mathrm{I} - \widehat{A}_K \widehat{A}_K^T)T^{-1}, \\ \widehat{\Upsilon} & = & MDB\{\widehat{\Upsilon}_1, \cdots, \widehat{\Upsilon}_\eta\}, \\ \widehat{\Upsilon}_i^T & = & \begin{bmatrix} 0 & \cdot & \cdots & \cdot & 0 & 1 \end{bmatrix}_{1\times\kappa_i}. \end{array} \tag{6.4}$$

Note que:

1) N_c es una matriz nilpotente con índice de nilpotencia κ_1.

2) $\mathrm{Im}\ N_c = T\mathrm{Im}\ \widehat{A}_K^T = T\mathrm{Ker}\ \widehat{C} = \mathrm{Ker}\ C$.

3) $\mathrm{I} - AN_c = \mathrm{I} - (A - KC)N_c = T(\mathrm{I} - T^{-1}(A - KC)T\widehat{A}_K^T)T^{-1} = \Upsilon$.

4) $\mathrm{I} - \widehat{A}_K \widehat{A}_K^T = \widehat{\Upsilon}\widehat{\Upsilon}^T$ y $\Upsilon = T\widehat{\Upsilon}\widehat{\Upsilon}^T T^{-1}$.

6.2. Separación de ceros y polos

Lema 32 Sea el sistema *estrictamente propio* $\Sigma_{ep}(A, B, C)$ (6.1) *invertible a la izquierda MT*, con B y C matrices inyectiva y suprayectiva, respectivamente. Entonces el sistema (6.1) es externamente equivalente[2] a la cascada de *sistema estrictamente no propio de ceros* y *sistema estrictamente propio de polos*:

$$\Sigma_{ceros}(N_c, B, \Upsilon_c) \;:\; N_c\dot{\xi}_c(t) = \xi_c(t) - Bz(t); \quad v(t) = \Upsilon_c \xi_c(t), \tag{6.5}$$

$$\Sigma_{polos}(A, \Upsilon_p, C) \;:\; \dot{\xi}_p(t) = A\xi_p(t) + \Upsilon_p v(t); \quad y(t) = C\xi_p(t), \tag{6.6}$$

donde $\Upsilon_c = \widehat{\Upsilon}^T T^{-1}$ y $\Upsilon_p = T\hat{\Upsilon}$.

Más aún, el sistema $\Sigma_{polos}(A, \Upsilon_p, C)$ es *invertible a la izquierda DT* y el sistema $\Sigma_{ceros}(N_c, B, \Upsilon_c)$ es *invertible a la izquierda MT*.

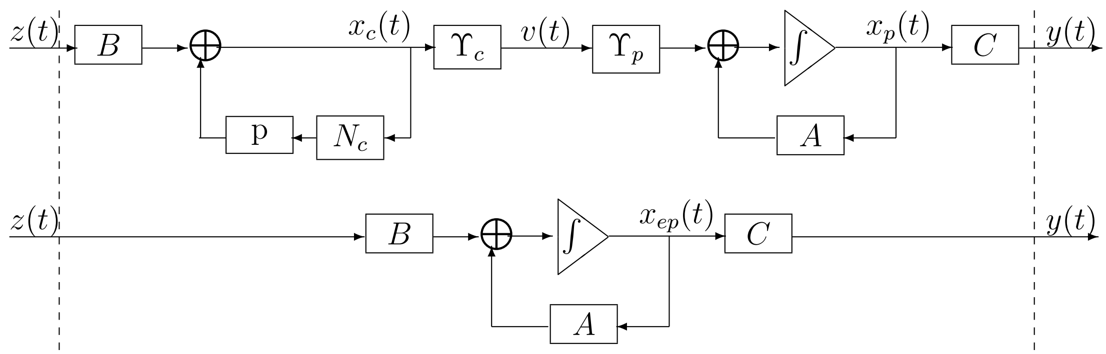

Figura 6.1: Separación de ceros.

Prueba:

En esta prueba se supondrá que el sistema (6.1) es observable. De lo contrario se puede cocientar al sistema, por el subespacio inobservable $\mathcal{N}$, como se hizo en la Sección 5.3.2.A.

1. Primero demostraremos la *equivalencia externa*.

   El siguiente sistema es externamente equivalente al sistema (6.1):

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{I} & 0 \\ \hline 0 & N \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \dot{x}(t) \\ \dot{\bar{x}}(t) \end{array}\right] &= \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{I} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x(t) \\ \bar{x}(t) \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c} B \\ \hline -B \end{array}\right] u(t), \\ z(t) &= \left[\begin{array}{c|c} C & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x(t) \\ \bar{x}(t) \end{array}\right]. \end{aligned} \tag{6.7}$$

   Ahora, premultiplicando al sistema (6.7) por $\left[\begin{array}{c|c} \mathrm{I} & \mathrm{I} \\ \hline 0 & \mathrm{I} \end{array}\right]$ y definiendo

$$\left[\begin{array}{c} x_{ep}(t) \\ x_c(t) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{I} & -N \\ \hline 0 & \mathrm{I} \end{array}\right]^{-1} \left[\begin{array}{c} x(t) \\ \bar{x}(t) \end{array}\right],$$

   obtenemos (6.5)-(6.6).

2. Ahora probamos que para el sistema $\Sigma_{polos}(A, \Upsilon_p, C)$ se cumple la *invertibilidad izquierda DT*.

   Como el subespacio supremo $(A, \Upsilon_p) -$ *invariante* contenido en Ker C es invariante bajo cambio de bases T y S y bajo la matriz de inyección de salida K, entonces

$$\mathcal{V}^*_{[A,\Upsilon_p,C]} = \mathcal{V}^*_{[\widehat{A}_K,\widehat{\Upsilon},\widehat{C}]}$$

   y calculando el algoritmo (1.3) para las matrices (6.2) y (6.3) obtenemos:

$$\mathcal{V}^*_{[\widehat{A}_K,\widehat{\Upsilon},\widehat{C}]} = \{0\}$$

   lo cual implica que $\Sigma_{polos}(A, \Upsilon_p, C)$ es *invertible a la izquierda DT*.

[2] *Equivalencia externa* (ver [75]) significa preservación del comportamiento externo, *i.e.* el mismo conjunto de trayectorias posible para todas las señales de entradas y salidas.

3. Finalmente demostraremos que el sistema $\Sigma_{ceros}(N_c, B, \Upsilon_c)$ es *invertible izquierdo MT*:

   Para esto definamos las siguientes matrices de transferencia asociadas a los sistemas (6.1), (6.2) y (6.5):

$$T_z^y(\mathrm{s}) = C(\mathrm{sI} - A)^{-1}B \quad ; \quad \widehat{T}_z^{\bar{y}}(\mathrm{s}) = \widehat{C}(\mathrm{sI} - \widehat{A}_K)^{-1}\widehat{B}$$
$$S_z^v(\mathrm{s}) = -\widehat{\Upsilon}^T(\mathrm{s}\widehat{A}_K^T - \mathrm{I})^{-1}\widehat{B} = -\Upsilon^T(\mathrm{s}N_c - \mathrm{I})^{-1}B$$

   Dado que: rank $T_z^y(\mathrm{s})$ = rank $\widehat{T}_z^{\bar{y}}(\mathrm{s})$, entonces la *invertibilidad izquierda MT* de $S_z^v(\mathrm{s})$ se probará mostrando que $\widehat{T}_z^{\bar{y}}(\mathrm{s})$ y $S_z^v(\mathrm{s})$ estan relacionadas por una matriz invertible.

   Consideremos el caso particular de $\eta = 3$, $\kappa_1 = 3$, $\kappa_2 = 2$ y $\kappa_3 = 1$. Los parámetros de Markov son:

$$\widehat{C}\widehat{B} = \begin{bmatrix} b_{1,1}^1 & b_{1,2}^1 & b_{1,3}^1 \\ b_{1,1}^2 & b_{1,2}^2 & b_{1,3}^2 \\ b_{1,1}^3 & b_{1,2}^3 & b_{1,3}^3 \end{bmatrix} \quad ; \quad \widehat{\Upsilon}^T\widehat{B} = \begin{bmatrix} b_{3,1}^1 & b_{3,2}^1 & b_{3,3}^1 \\ b_{2,1}^2 & b_{2,2}^2 & b_{2,3}^2 \\ b_{1,1}^3 & b_{1,2}^3 & b_{1,3}^3 \end{bmatrix}$$
$$\widehat{C}\widehat{A}_K\widehat{B} = \begin{bmatrix} b_{2,1}^1 & b_{2,2}^1 & b_{2,3}^1 \\ b_{2,1}^2 & b_{2,2}^2 & b_{2,3}^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \widehat{\Upsilon}^T\widehat{A}_K^T\widehat{B} = \begin{bmatrix} b_{2,1}^1 & b_{2,2}^1 & b_{2,3}^1 \\ b_{1,1}^2 & b_{1,2}^2 & b_{1,3}^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\widehat{C}(\widehat{A}_K)^2\widehat{B} = \begin{bmatrix} b_{3,1}^1 & b_{3,2}^1 & b_{3,3}^1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \widehat{\Upsilon}^T(\widehat{A}_K^T)^2\widehat{B} = \begin{bmatrix} b_{1,1}^1 & b_{1,2}^1 & b_{1,3}^1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\widehat{C}(\widehat{A}_K)^3\widehat{B} = 0 \quad ; \quad \widehat{\Upsilon}^T(\widehat{A}_K^T)^3\widehat{B} = 0$$

   Entonces:

$$\widehat{T}_z^{\bar{y}}(\mathrm{s}) = \begin{bmatrix} \left(b_{1,1}^1 + \frac{1}{\mathrm{s}}b_{2,1}^1 + \frac{1}{\mathrm{s}^2}b_{3,1}^1\right) & \left(b_{1,2}^1 + \frac{1}{\mathrm{s}}b_{2,2}^1 + \frac{1}{\mathrm{s}^2}b_{3,2}^1\right) & \left(b_{1,3}^1 + \frac{1}{\mathrm{s}}b_{2,3}^1 + \frac{1}{\mathrm{s}^2}b_{3,3}^1\right) \\ \left(b_{1,1}^2 + \frac{1}{\mathrm{s}}b_{2,1}^2\right) & \left(b_{1,2}^2 + \frac{1}{\mathrm{s}}b_{2,2}^2\right) & \left(b_{1,3}^2 + \frac{1}{\mathrm{s}}b_{2,3}^2\right) \\ b_{1,1}^3 & b_{1,2}^3 & b_{1,3}^3 \end{bmatrix}$$
$$S_z^v(\mathrm{s}) = \frac{1}{\mathrm{s}}\begin{bmatrix} \left(\mathrm{s}^2b_{1,1}^1 + \mathrm{s}b_{2,1}^1 + b_{3,1}^1\right) & \left(\mathrm{s}^2b_{1,2}^1 + \mathrm{s}b_{2,2}^1 + b_{3,2}^1\right) & \left(\mathrm{s}^2b_{1,3}^1 + \frac{1}{\mathrm{s}}b_{2,3}^1 + b_{3,3}^1\right) \\ \left(\mathrm{s}b_{1,1}^2 + b_{2,1}^2\right) & \left(\mathrm{s}b_{1,2}^2 + b_{2,2}^2\right) & \left(\mathrm{s}b_{1,3}^2 + b_{2,3}^2\right) \\ b_{1,1}^3 & b_{1,2}^3 & b_{1,3}^3 \end{bmatrix}$$

   Esto es:

$$S_z^v(\mathrm{s}) = \frac{1}{\mathrm{s}}\begin{bmatrix} \mathrm{s}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{s} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\widehat{T}_z^{\bar{y}}(\mathrm{s})$$

   Lo cual implica:

$$\text{rank } S_z^v(\mathrm{s}) = \text{rank } \widehat{T}_z^{\bar{y}}(\mathrm{s}) = \text{rank } T_z^y(\mathrm{s})$$

   Por lo que la *invertibilidad izquierda MT* de $T_z^y(\mathrm{s})$ implica la *invertibilidad izquierda MT* de $S_z^v(\mathrm{s})$. El caso general se prueba de la misma manera.□

En el Apéndice A de este Capítulo se expone una versión geométrica de la cual se deduce la versión matricial que exponemos aquí.

Ahora, utilizando el Lema 32 procedemos a resolver el Ejemplo 4.1 del Capítulo 4 cuando en el sistema de la *dinámica del error de observación* (4.12) se presenta un cero no Hurwitz con $\alpha = -1$.

Ejemplo 6.1.

Consideremos el siguiente sistema estrictamente propio $\Sigma_{ep}(A, B, C)$ (comparar con (4.12) haciendo $\alpha = -1$):

$$\begin{aligned} \dot{x}_{ep}(t) &= \underbrace{\left[\begin{array}{rr|rr} -1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -3 & -1 & -1 \\ \hline 2 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{A} x_{ep}(t) + \underbrace{\left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right]}_{B} z(t), \\ y(t) &= \underbrace{\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{C} x_{ep}(t). \end{aligned} \tag{6.8}$$

El comportamiento externo de $z(t)$ a $y(t)$ de este sistema y su matriz de transferencia $T_z^y(\mathrm{s})$, son:

$$\begin{aligned} &(\mathbf{a}) \quad \begin{bmatrix} (\mathrm{p}+1)^2 & (\mathrm{p}+1)^2 \\ 2(\mathrm{p}+2)(\mathrm{p}-1) & -2(\mathrm{p}+3) \end{bmatrix} y(t) = \begin{bmatrix} (\mathrm{p}-1) & (\mathrm{p}-1) \\ 2\mathrm{p} & -2 \end{bmatrix} z(t), \\ &(\mathbf{b}) \quad T_z^y(\mathrm{s}) = C\big(\mathrm{sI} - A\big)^{-1} B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\mathrm{S}+1} & \frac{-4}{(\mathrm{S}+1)^4} \\ 0 & \frac{\mathrm{S}-1}{(\mathrm{S}+1)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{6.9}$$

Note que la segunda fila tiene un cero interconectado en $\mathrm{s} = 1$, por lo que para desacoplar a $T_z^y(\mathrm{s})$ necesariamente tiene que ser cancelado $(\mathrm{s} - 1)$, ver [82].

Para obtener la *forma canónica de Brunovsky* del sistema (6.8) y separar el *subespacio inobservable* $\mathcal{N}$, definimos:

$$\bar{x}_{ep}(t) = T_{ob}^{-1} x_{ep}(t), \qquad \bar{z}(t) = U_{ob}^{-1} z(t) \qquad \text{y} \qquad \bar{y}(t) = S_{ob} y(t)$$

donde

$$T_{ob} = \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad U_{ob} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad S_{ob} = \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

Con estas matrices de cambio de bases, el sistema (6.8) toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_{ep}(t) &= \widehat{A}\bar{x}_{ep}(t) + \widehat{B}\bar{z}(t), \\ \bar{y}(t) &= \widehat{C}\bar{x}_{ep}(t), \end{aligned} \tag{6.10}$$

donde

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}) \quad \widehat{A} &= T_{ob}^{-1}AT_{ob} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 1 \\ -6 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \\ (\mathbf{b}) \quad \widehat{B} &= T_{ob}^{-1}BU_{ob} &= \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} -1 \\ 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}} \end{bmatrix}. \\ (\mathbf{c}) \quad \widehat{C} &= S_{ob}CT_{ob} &= \begin{bmatrix} \boxed{1 \quad 0} & 0 \quad 0 \\ 0 \quad 0 & \boxed{1 \quad 0} \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{6.11}$$

Note que $\mathcal{N} = \{0\}$.

Para obtener la forma canónica (6.2), (6.3) necesitamos la inyección de salida $\widehat{K} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}^T$ y la matriz de cambio de base T es simplemente la matriz identidad. En efecto:

$$\widehat{A}_K = \widehat{A} - \widehat{K}\widehat{C} = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}} \end{bmatrix},$$

$$\Upsilon = \mathrm{I} - \widehat{A}_K\widehat{A}_K^T = \widehat{\Upsilon}\widehat{\Upsilon}^T = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} \end{bmatrix}.$$

Por lo que (recuerde que $T = \mathrm{I}$):

$$
\begin{aligned}
&(\mathbf{a}) \qquad N_c = \widehat{A}_K^T = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{matrix}} \end{bmatrix}. \\
&(\mathbf{b}) \qquad \widehat{\Upsilon} = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}} \end{bmatrix} \\
&(\mathbf{c}) \qquad \widehat{\Upsilon}_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \widehat{\Upsilon}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
\tag{6.12}
$$

Así, obtenemos la siguiente *separación polo-cero* (ver (6.5) y (6.6)):

$$
\begin{aligned}
\Sigma_{ceros} \quad : \quad & \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{N_c} \dot{\xi}_c(t) = \xi_c(t) - \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\widehat{B}} \bar{z}(t), \\
& \upsilon(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\widehat{\Upsilon}_c} \xi_c(t),
\end{aligned}
\tag{6.13}
$$

$$
\begin{aligned}
\Sigma_{polos} \quad : \quad & \dot{\xi}_p(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 1 \\ -6 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{\widehat{A}} \xi_p(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\widehat{\Upsilon}_p} \upsilon(t), \\
& \bar{y}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\widehat{C}} \xi_p(t).
\end{aligned}
\tag{6.14}
$$

Note que:

- El comportamiento externo de $\bar{z}(t)$ a $\upsilon(t)$ del sistema Σ_{ceros} y su matriz de transferencia

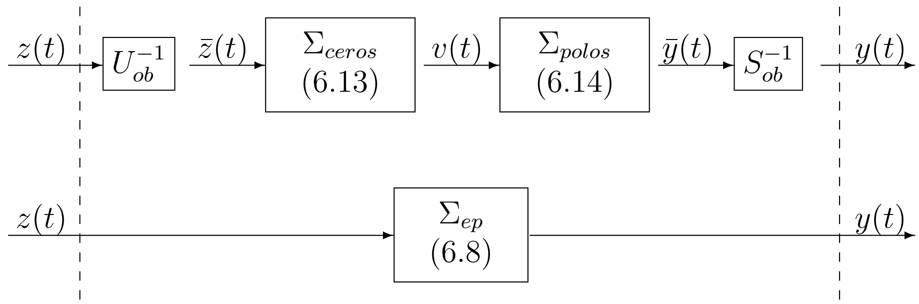

Figura 6.2: Separación de polos y ceros del sistema (6.8)

$T_{\bar{z}}^{v}(\mathrm{s})$ son:

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{a}) \quad v(t) &= \begin{bmatrix} -(\mathrm{p}-1) & 0 \\ 0 & (\mathrm{p}+1) \end{bmatrix} \bar{z}(t), \\
(\mathbf{b}) \quad T_{\bar{z}}^{v}(\mathrm{s}) &= -\widehat{\Upsilon}_c\big(N_c\mathrm{s}-\mathrm{I}\big)^{-1}\widehat{B} = \begin{bmatrix} -(\mathrm{s}-1) & 0 \\ 0 & (\mathrm{s}+1) \end{bmatrix}.
\end{aligned}
\tag{6.15}
$$

- El comportamiento externo de $v(t)$ a $\bar{y}(t)$ del sistema Σ_{polos} y su matriz de transferencia $T_{v}^{\bar{y}}(\mathrm{s})$ son:

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{a}) \quad & \begin{bmatrix} (\mathrm{p}+1)^2 & 0 \\ 2(\mathrm{p}+3) & (\mathrm{p}+1)^2 \end{bmatrix} \bar{y}(t) = v(t), \\
(\mathbf{b}) \quad & T_{v}^{\bar{y}}(\mathrm{s}) = \widehat{C}(\mathrm{sI}-\widehat{A})^{-1}\widehat{\Upsilon}_p = \begin{bmatrix} \frac{1}{(\mathrm{S}+1)^2} & 0 \\ \frac{-2(\mathrm{S}+3)}{(\mathrm{S}+1)^4} & \frac{1}{(\mathrm{S}+1)^2} \end{bmatrix}.
\end{aligned}
\tag{6.16}
$$

- De (6.15) y (6.16) se obtienen:

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} (\mathrm{p}+1)^2 & 0 \\ 2(\mathrm{p}+3) & (\mathrm{p}+1)^2 \end{bmatrix} \bar{y}(t) &= \begin{bmatrix} -(\mathrm{p}-1) & 0 \\ 0 & (\mathrm{p}+1) \end{bmatrix} \bar{z}(t), \\
\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathrm{p}+1)^2 & 0 \\ 2(\mathrm{p}+3) & (\mathrm{p}+1)^2 \end{bmatrix} S_{ob} y(t) &= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -(\mathrm{p}-1) & 0 \\ 0 & (\mathrm{p}+1) \end{bmatrix} U_{ob}^{-1} z(t), \\
\begin{bmatrix} (\mathrm{p}+1)^2 & (\mathrm{p}+1)^2 \\ 2(\mathrm{p}+2)(\mathrm{p}-1) & -2(\mathrm{p}+3) \end{bmatrix} y(t) &= \begin{bmatrix} (\mathrm{p}-1) & (\mathrm{p}-1) \\ 2\mathrm{p} & -2 \end{bmatrix} z(t),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S_{ob}^{-1}\, T_{v}^{\bar{y}}(\mathrm{s})\, T_{\bar{z}}^{v}(\mathrm{s})\, U_{ob}^{-1} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{(\mathrm{S}+1)^2} & 0 \\ \frac{-2(\mathrm{S}+3)}{(\mathrm{S}+1)^4} & \frac{1}{(\mathrm{S}+1)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -(\mathrm{s}-1) & 0 \\ 0 & (\mathrm{s}+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\mathrm{S}+1} & \frac{-4}{(\mathrm{S}+1)^4} \\ 0 & \frac{\mathrm{S}-1}{(\mathrm{S}+1)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= T_{z}^{y}(\mathrm{s})
\end{aligned}
$$

Comparar con (6.9).

- Las formas de Smith–McMillan de las matrices de transferencia $T_z^y(\mathrm{s})$, $T_{\bar{z}}^v(\mathrm{s})$ y $T_v^{\bar{y}}(\mathrm{s})$:

$$\begin{aligned}
T_z^y(\mathrm{s}) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ (\mathrm{s}-1)(\mathrm{s}+1)^2 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{(\mathrm{S}+1)^4} & 0 \\ 0 & (\mathrm{s}-1)(\mathrm{s}+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}(\mathrm{s}+1)^3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
T_{\bar{z}}^v(\mathrm{s}) &= \begin{bmatrix} -(\mathrm{s}-1) & 0 \\ 0 & (\mathrm{s}+1) \end{bmatrix} \\
T_v^{\bar{y}}(\mathrm{s}) &= \begin{bmatrix} \big(4+(\mathrm{s}-1)(\mathrm{s}+3)\big) & -\frac{1}{8}(\mathrm{s}-1) \\ -2(\mathrm{s}+3) & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{(\mathrm{S}+1)^4} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{8}(\mathrm{s}-1)(\mathrm{s}+1)^2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Note que la información suministrada por la forma de Smith–McMillan de $T_z^y(\mathrm{s})$ es la union de los ceros de la forma de Smith–McMillan de $T_{\bar{z}}^v(\mathrm{s})$ y del polo de la forma de Smith–McMillan de $T_v^{\bar{y}}(\mathrm{s})$.

6.3. Conclusión

En este Capítulo se demostró que un sistema *estrictamente propio* observable es externamente equivalente a la cascada de dos sistemas: en un sistema *estrictamente propio de polos* y en un sistema *estrictamente no propio de ceros*. También se demostró que el sistema *estrictamente propio de polos* es *invertible a la izquierda DT* y que el sistema *estrictamente no propio de ceros* es *invertible a la izquierda MT*. Posteriormente aplicamos este resultado de separación de polos y ceros al desacoplamiento de fallas.

6.4. Apéndice A. Versión geométrica de la separación de ceros y polos de un sistema estrictamente propio

Consideremos el sistema *estrictamente propio*, el cual asumimos que es observable:

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}(t) & = & Ax(t) + Bz(t), \\ y(t) & = & Cx(t), \end{array} \tag{6.17}$$

donde z es la entrada, y es la salida y x es el estado. Los mapeos lineales están definidas como $A : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$, $B : \mathcal{Z} \longrightarrow \mathcal{X}$ y $C : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$, donde $\mathcal{X}$ es un *espacio Euclidiano* de dimensión n, $\mathcal{Z}$ y $\mathcal{Y}$ son espacios lineales con $\dim \mathcal{Y} = p$.

Sea Q un isomorfismo [3] entre $\mathcal{X}$ y su dual $\mathcal{X}'$, es decir:

$$\begin{aligned} Q : \mathcal{X} &\longrightarrow \mathcal{X}' \\ x &\longmapsto Qx = x'. \end{aligned}$$

Denotamos el *producto interno* como $\langle Qs, r\rangle \in \mathbb{R} \;\; \forall \; s, r \in \mathcal{X}$.

Entonces el Teorema Dual de Brunovsky [20] puede ser establecido como:

Teorema 33 . *Teorema Dual de Brunovsky.*
Dado el sistema lineal (6.17) existe un mapeo *inyección de salida* $K : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{X}$, donde $(\mathcal{X}_1, ..., \mathcal{X}_\eta)$ son η subespacios no nulos de $\mathcal{X}$, $(\mathcal{Y}_1, ..., \mathcal{Y}_\eta)$ son η subespacios no nulos de $\mathcal{Y}$, tales que:

i) $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \oplus ... \oplus \mathcal{X}_\eta$.

ii) $A_K \mathcal{X}_i \subset \mathcal{X}_i, \quad i = 1, ..., \eta,$ donde $A_K = A - KC$.

iii) $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_1 \oplus ... \oplus \mathcal{Y}_\eta$.

iv) $\mathcal{Y}_i = C\mathcal{X}_i, \quad i = 1, ..., \eta$.

Además existen $\kappa_1, ..., \kappa_\eta \in \mathbb{Z}^+$, $e_i \in \mathcal{X}_i$, $i = 1, ..., \eta$, tales que $(A_{K,i} = \mathcal{X}_i \mid A \mid \mathcal{X}_i)$ y $(C_i = \mathcal{Y}_i \mid C \mid \mathcal{X}_i)$:

v) $\kappa_1 \geq \kappa_2 \geq ... \geq \kappa_\eta$ y $\sum_{i=1}^{\eta} \kappa_i = n$.

vi) $\{A_{K,i}^{\kappa_i - 1} e_i, ..., A_{K,i} e_i, e_i\}$ son bases ortonormales de $\mathcal{X}_i \;\; i = 1, ..., \eta$.

vii) $A_{K,i}^{\kappa_i} = 0, \quad i = 1, ..., \eta$.

viii) $\mathrm{Ker}\; C_i A_{K,i}^{(j-1)} = \bigoplus_{k=1, k\neq j}^{\kappa_i} A_{K,i}^{\kappa_i - k}\{e_i\}, \;\; i = 1, ..., \eta, \quad j = 1, ..., \kappa_i$.

[3] En el Lemma 21 se precisa este isomorfismo

De este teorema podemos ver que existen una matriz inyección de salida Ky dos cambios de bases T y S tales que:

$$\begin{aligned}\hat{A}_K &= T^{-1}(A-KC)T = MDB\{\hat{A}_{K,1},\cdots,\hat{A}_{K,\eta}\},\\ \hat{C} &= SCT = MDB\{\hat{C}_1,\cdots,\hat{C}_\eta\},\end{aligned}$$

$$\hat{A}_{K,i} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdot & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot\\ 0 & \cdot & \cdot & \cdots & 0 & 1\\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0\end{bmatrix}_{\kappa_i\times\kappa_i} \quad ; \quad \hat{C}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdots & \cdot & 0\end{bmatrix}_{1\times\kappa_i}$$

Sea $N:\mathcal{X}'\longrightarrow\mathcal{X}'$ el operador adjunto de A_K.

Definimos los dos siguientes mapeos como:

$$\begin{aligned}\langle Qs,\ A_K r\rangle &= \langle NQs,\ r\rangle \quad \forall s,r\in\mathcal{X} && (6.18)\\ \Gamma_K &= Q^{-1}-A_K Q^{-1}N && (6.19)\end{aligned}$$

Los dos siguientes lemas son probados en el Apéndice B de este capítulo:

Lema 34 Sea $e_i'\in\mathcal{X}_i'$ definida como:

$$e_i' = QA_{K,i}^{\kappa_i-1}e_i. \tag{6.20}$$

Entonces

$$\{e_i', N_i e_i',\cdots,N_i^{\kappa_i-1}e_i'\} \tag{6.21}$$

son bases de $\mathcal{X}_i'$. Más aún, si el isomorfismo $Q:\mathcal{X}\longrightarrow\mathcal{X}'$ es definido como[4]:

$$A_{K,i}^{\kappa_i-j}e_i \longmapsto N_i^{j-1}e_i',\ j=1,\cdots,\kappa_i \tag{6.22}$$

entonces estas bases son ortonormales, es decir:

1) N es un operador nilpotente con índice de nilpotencia κ_1.

2) Im $N = Q$Ker C.

3) $\Gamma_K = Q^{-1}-AQ^{-1}N$.

Lema 35 Las siguientes igualdades son satisfechas:

$$\begin{aligned}\text{Ker } C &= \bigoplus_{i=1}^{\eta}\bigoplus_{k=2}^{\kappa_i}A_{K,i}^{\kappa_i-k}\{e_i\}. && (6.23)\\ \text{Im } \Gamma_K &= \bigoplus_{i=1}^{\eta}\{e_i\}. && (6.24)\\ A_{K,i}^{-1}\{e_i\} &= A_{K,i}^{\kappa_i-1}\{e_i\},\ i\in\{1,\cdots,\eta\}. && (6.25)\end{aligned}$$

[4]Las N_i son operadores adjuntos de $A_{K,i}$.

Proposición 36 El sistema (6.17) es externamente equivalente a:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= A\xi(t) + \Gamma_K \bar{\xi}(t); \quad y(t) = C\xi(t), & (6.26) \\ N\dot{\bar{\xi}}(t) &= \bar{\xi}(t) - QBw(t), & (6.27) \end{aligned}$$

con $\xi \in \mathcal{X}$ y $\bar{\xi} \in \mathcal{X}'$.

Además, el subespacio supremo (A, Γ_K)-invariante contenido en Ker C, $\mathcal{V}^*_{[A,\Gamma_K,C]}$ is nulo.

Ahora bien, como el subespacio $\mathcal{V}^*_{[A,\Gamma_K,C]}$ es invariante bajo la acción de inyección de salida, entonces puede ser también calculado del algoritmo:

$$\mathcal{V}^0_{[A,\Gamma_K,C]} = \mathcal{X}; \quad \mathcal{V}^{\mu+1}_{[A,\Gamma_K,C]} = \text{Ker } C \cap A_K^{-1}\left(\mathcal{V}^{\mu}_{[A,\Gamma_K,C]} + \text{Im } \Gamma_K\right) \tag{6.28}$$

con $\Gamma_K = Q^{-1} - A_K Q^{-1} N$.

Prueba de la Proposición 36:

A. El siguiente sistema es externamente equivalente a (6.17):

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{I} & 0 \\ \hline 0 & NQ \end{array}\right] \dot{\tilde{x}} &= \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & Q \end{array}\right] \tilde{x} + \left[\begin{array}{c} B \\ \hline -QB \end{array}\right] w \\ y &= \left[\begin{array}{c|c} C & 0 \end{array}\right] \tilde{x} \end{aligned} \tag{6.29}$$

con $\tilde{x} = \left[\begin{array}{cc} x^T & \bar{x}^T \end{array}\right]^T$ y $x, \bar{x} \in \mathcal{X}$.

Premultiplicando (6.29) por $\left[\begin{array}{c|c} \mathrm{I} & Q^{-1} \\ \hline 0 & \mathrm{I} \end{array}\right]$ y definiendo $\tilde{\xi} = \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{I} & -Q^{-1}N \\ \hline 0 & \mathrm{I} \end{array}\right]^{-1} \tilde{x}$, obtenemos (6.26)-(6.27).

B. La segunda parte de esta proposición es probada en 3 pasos:

B.1) Primero probamos que:

$$\mathcal{V}^{\mu}_{[A,\Gamma_K,C]} = \bigoplus_{i=1}^{\eta} \bigoplus_{k=\mu+1}^{\kappa_i} A_{K,i}^{\kappa_i - k}\{e_i\}, \quad \mu \in \{0, 1, \cdots, \kappa_\eta - 1\}. \tag{6.30}$$

De (6.28) y (6.23) tenemos que (6.30) se cumple para $\mu \in \{0, 1\}$.

Si (6.30) se cumple para $\mu = \nu$ con $0 \leq \nu < \kappa_\eta - 1$, entonces de (6.28) (ver

(6.23), (6.24) y (6.25)) tenemos que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}^{\nu+1}_{[A,\Gamma_K,C]} &= \text{Ker } C \cap A_K^{-1}\left(\mathcal{V}^{\nu}_{[A,\Gamma_K,C]} + \text{Im } \Gamma_K\right)\\
&= \text{Ker } C \cap A_K^{-1}\mathcal{V}^{\nu}_{[A,\Gamma_K,C]}\\
&= \text{Ker } C \cap A_K^{-1} \bigoplus_{i=1}^{\eta} \bigoplus_{k=\nu+1}^{\kappa_i} A_{K,i}^{\kappa_i-k}\{e_i\}\\
&= \text{Ker } C \cap \bigoplus_{i=1}^{\eta} A_{K,i}^{-1} \bigoplus_{k=\nu+1}^{\kappa_i} A_{K,i}^{\kappa_i-k}\{e_i\}\\
&= \text{Ker } C \cap \bigoplus_{i=1}^{\eta}\Big(\bigoplus_{k=\nu+2}^{\kappa_i} A_{K,i}^{\kappa_i-k}\{e_i\} + A_{K,i}^{-1}\{e_i\}\Big)\\
&= \text{Ker } C \bigoplus_{i=1}^{\eta}\Big(\big(\bigoplus_{k=\nu+2}^{\kappa_i} A_{K,i}^{\kappa_i-k}\{e_i\}\big)\oplus\big(A_{K,i}^{\kappa_i-1}\{e_i\}\big)\Big)\\
&= \bigoplus_{i=1}^{p} \bigoplus_{k=\nu+2}^{\kappa_i} A_{K,i}^{\kappa_i-k}\{e_i\}.
\end{aligned}$$

B.2) Ahora probamos que:

$$\mathcal{V}^{\kappa_\mu}_{[A,\Gamma_K,C]} = \bigoplus_{i=1}^{\mu-1} \bigoplus_{k=\kappa_{\mu+1}}^{\kappa_i} A_{K,i}^{\kappa_i-k}\{e_i\},\ \mu \in \{\eta, \eta-1, \cdots, 2\}. \tag{6.31}$$

De (6.28) y (6.30) obtenemos (ver 6.23, 6.24, 6.25):

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}^{\kappa_\eta}_{[A,\Gamma_K,C]} &= \text{Ker } C \cap A_K^{-1}\left(\mathcal{V}^{\kappa_\eta-1}_{[A,\Gamma_K,C]} + \text{Im } \Gamma_K\right)\\
&= \text{Ker } C \cap A_K^{-1}\mathcal{V}^{\kappa_\eta-1}_{[A,\Gamma_K,C]}\\
&= \text{Ker } C \cap \Big(\bigoplus_{i=1}^{\eta} \bigoplus_{k=\kappa_\eta}^{\kappa_i} A_{K,i}^{\kappa_i-k-1}\{e_i\} + A_{K,\eta}^{-1}\{e_\eta\}\Big)\\
&= \text{Ker } C \cap \Big(\big(\bigoplus_{i=1}^{\eta-1} \bigoplus_{k=\kappa_\eta+1}^{\kappa_i} A_{K,i}^{\kappa_i-k}\{e_i\} + A_{K,i}^{\kappa_i-1}\{e_i\}\big) + A_{K,\eta}^{\kappa_\eta-1}\{e_\eta\}\Big)\\
&= \text{Ker } C \cap \bigoplus_{i=1}^{\eta-1} \bigoplus_{k=\kappa_\eta+1}^{\kappa_i} A_{K,i}^{\kappa_i-k}\{e_i\}\\
&= \bigoplus_{i=1}^{\eta-1} \bigoplus_{k=\kappa_\eta+1}^{\kappa_i} A_{K,i}^{\kappa_i-k}\{e_i\}.
\end{aligned}$$

Si (6.31) se cumple para $\mu = \nu$ con $\eta \geq \nu > 2$ entonces (ver (6.23), (6.24) y

(6.25)):

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}^{\kappa_\nu+1}_{[A,\Gamma_K,C]} &= \text{Ker } C \cap A_K^{-1}\Big(\bigoplus_{i=1}^{\nu-1} \bigoplus_{k=\kappa_\nu+1}^{\kappa_i} A_{K,i}^{\kappa_i-k}\{e_i\} + \bigoplus_{i=1}^{\eta}\{e_i\}\Big) \\
&= \text{Ker } C \cap \Big(\bigoplus_{i=1}^{\nu-1} \bigoplus_{k=\kappa_\nu+1}^{\kappa_i} A_{K,i}^{\kappa_i-k-1}\{e_i\} + \bigoplus_{i=1}^{\eta} A_{K,i}^{-1}\{e_i\}\Big) \\
&= \text{Ker } C \cap \Big(\bigoplus_{i=1}^{\nu-1} \bigoplus_{k=\kappa_\nu+2}^{\kappa_i} A_{K,i}^{\kappa_i-k}\{e_i\} + A_{K,i}^{\kappa_i-1}\{e_i\} + \\
&\quad \bigoplus_{i=1}^{\eta} A_{K,i}^{\kappa_i-1}\{e_i\}\Big) \\
&= \text{Ker } C \cap \bigoplus_{i=1}^{\nu-1} \bigoplus_{k=\kappa_\nu+2}^{\kappa_i} A_{K,i}^{\kappa_i-k}\{e_i\} \\
&= \bigoplus_{i=1}^{\nu-1} \bigoplus_{k=\kappa_\nu+2}^{\kappa_i} A_{K,i}^{\kappa_i-k}\{e_i\}.
\end{aligned}$$

B.3) Finalmente probamos que:

$$\mathcal{V}^{\kappa_1}_{[A,\Gamma_K,C]} = \{0\}. \tag{6.32}$$

De (6.28) y (6.31) obtenemos (ver (6.23), (6.24) y (6.25)):

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}^{\kappa_2}_{[A,\Gamma_K,C]} &= \bigoplus_{k=\kappa_2+1}^{\kappa_1} A_{K,1}^{\kappa_1-k}\{e_1\} \\
\mathcal{V}^{\kappa_2+1}_{[A,\Gamma_K,C]} &= \text{Ker } C \cap A_K^{-1}\Big(\bigoplus_{k=\kappa_2+1}^{\kappa_1} A_{K,1}^{\kappa_1-k}\{e_1\} + \bigoplus_{i=1}^{\eta}\{e_1\}\Big) \\
&= \bigoplus_{k=\kappa_2+2}^{\kappa_1} A_{K,1}^{\kappa_1-k}\{e_1\}.
\end{aligned}$$

Y obtenemos iteractivamente:

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}^{\kappa_1-1}_{[A,\Gamma_K,C]} &= \{e_1\}, \\
\mathcal{V}^{\kappa_1}_{[A,\Gamma_K,C]} &= \{0\}.
\end{aligned}$$

6.5. Apéndice B
Pruebas de los Lemas 34 y 35 del Apéndice A

- Sea $\mathcal{X}$ un espacio euclideano finito dimensional con $\mathcal{X} \approx \mathbb{R}^n$.

- Sea $\mathcal{X}'$ el espacio dual de $\mathcal{X}$, es decir, $\mathcal{X}' \approx \mathcal{X}$. Existe un isomorfismo $Q : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}'$ tal que $\forall x' \in \mathcal{X}'$ existe un único $x \in \mathcal{X}$ tal que: $x' = Qx$.
- Existe un producto interno entre $\mathcal{X}$ y $\mathcal{X}'$ $(s, r, t \in \mathcal{X};\ \alpha \in \mathbb{R})$

$$(Qs, r) : \mathcal{X}' \times \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R},$$

tal que

a) $(Qs, r) = (Qr, s)$.

b) $(Qs, \alpha r) = \alpha(Qs, r)$.

c) $(Qs, r + t) = (Qs, r) + (Qs, t)$.

d) $(Qr, r) \geq 0$ y $(Qr, r) = 0$ si y sólo si $r = 0$.

- Existe siempre $\{e_1, ..., e_n\} \subset \mathcal{X}$, tal que:

a) Es una base de $\mathcal{X}$ (es linealmente independiente y expande a $\mathcal{X}$).

b) Es ortonormal: $(Qe_i, e_i) = 1)$ y $(Qe_i, e_j) = 0,\ i \neq j,$ con $i, j \in \{1, ..., n\})$.

- Operador Adjunto $A^* : \mathcal{X}' \longrightarrow \mathcal{X}'$ de $A : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$

$$(Qs,\ Ar) = (A^*Qs,\ r), \quad \forall r, s \in \mathcal{X}.$$

6.5.1. Prueba del Lema 34

1. Primero probemos que los conjuntos $\{e_i', N_i e_i', \cdots, N_i^{\kappa_i - 1} e_i'\}$ son bases de $\mathcal{X}_i'$, $i = 1, \cdots, \eta$.

   Para esto, sean $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_{\kappa_i - 1} \in \mathbb{R}$, tales que:

$$\alpha_0 e_i' + \alpha_1 N_i e_i' + \cdots + \alpha_{\kappa_i - 1} N_i^{\kappa_i - 1} e_i' = 0.$$

   Entonces para toda $x \in \mathcal{X}_i$

$$\alpha_0 \langle e_i',\ x\rangle + \alpha_1 \langle N_i e_i',\ x\rangle + \cdots + \alpha_{\kappa_i - 1} \langle N_i^{\kappa_i - 1} e_i',\ x\rangle = 0,$$

   es decir, $\forall x \in \mathcal{X}_i tenemos$

$$\alpha_0 \langle QA_{K,i}^{\kappa_i - 1} e_i,\ x\rangle + \alpha_1 \langle QA_{K,i}^{\kappa_i - 1} e_i,\ A_{K,i} x\rangle + \cdots + \alpha_{\kappa_i - 1} \langle QA_{K,i}^{\kappa_i - 1} e_i,\ A_{K,i}^{\kappa_i - 1} x\rangle = 0.$$

   Tomando x igual a $A_{K,i}^{\kappa_i - 1} e_i, \cdots, A_{K,i} e_i$ y e_i obtenemos

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_{\kappa_i - 1} = 0.$$

   Por lo tanto los conjuntos $\{e_i', N_i e_i', \cdots, N_i^{\kappa_i - 1} e_i'\}$ son bases de $\mathcal{X}_i'$.

2. Ahora probaremos la ortonormalidad de las bases.
   De (6.22) tenemos que:

$$\begin{aligned}\langle N_i^j e_i^{'},\ Q^{-1}N_i^k e_i^{'}\rangle &= \langle N_i^j e_i^{'},\ A_{K,i}^{\kappa_i-1-k}e_i\rangle\\ &= \langle e_i^{'},\ A_{K,i}^{\kappa_i-1+(j-k)}e_i\rangle\\ &= \langle QA_{K,i}^{\kappa_i-1}e_i,\ A_{K,i}^{\kappa_i-1+(j-k)}e_i\rangle.\end{aligned}$$

   Si $j=k$ entonces $\langle N_i^j e_i^{'},\ Q^{-1}N_i^k e_i^{'}\rangle = 1$.

   Si $j>k$ entonces $k-1+(j-k)\geq \kappa_i$, es decir, $A_{K,i}^{k-1+(j-k)}=0$ y $\langle N_i^j e_i^{'},\ Q^{-1}N_i^k e_i^{'}\rangle = 0$.

   Si $j<k$ entonces $\kappa_i-1+(j-k)<\kappa_i-1$, es decir, $\kappa_i-1+(j-k)\neq\kappa_i-1$ entonces

   $\langle N_i^j e_i^{'},\ Q^{-1}N_i^k e_i^{'}\rangle = 0$.

3. Ahora probaremos las tres últimas afirmaciones:
   Para la primera:

$$\begin{aligned}\langle N^{\kappa_1}Qs,r\rangle &= \langle Qs,A_K^{\kappa_1}r\rangle \qquad \forall s,r\in\mathcal{X}\\ &= \langle Qs,0r\rangle\\ &= 0\langle Qs,r\rangle\\ &= 0 \qquad \forall s,r\in\mathcal{X},\end{aligned}$$

   por lo tanto N es nilpotente con índice de nilpotencia κ_1.

   Para la segunda:
   (Ver los puntos vii y viii del Teorema 33 and (6.22)):

$$\begin{aligned}Q\text{Ker } C_i &= Q\{A_{K,i}^{\kappa_i-2}e_i,\cdots,A_{K,i}e_i,\ e_i\}\\ &= \{N_ie_i^{'},\cdots,N_i^{\kappa_i-2}e_i^{'},\ N_i^{\kappa_i-1}e_i^{'}\}\\ &= \{N_ie_i^{'},\cdots,N_i^{\kappa_i-2}e_i^{'},\ N_i^{\kappa_i-1}e_i^{'},\ N_i^{\kappa_i}e_i^{'}\}\\ &= N_i\{e_i^{'},\cdots,N_i^{\kappa_i-3}e_i^{'},\ N_i^{\kappa_i-2}e_i^{'},\ N_i^{\kappa_i-1}e_i^{'}\}\\ &= N_i\mathcal{X}_i^{'}\\ &= \text{Im } N_i.\end{aligned}$$

   Por lo tanto tenemos

$$\text{Im } N = QC.$$

   Para la tercera:

   Se tiene de (6.19) que: $\Gamma_K = Q^{-1}-(A-KC)Q^{-1}N$. Entonces $\Gamma_K = Q^{-1}-AQ^{-1}N$.

6.5.2. Prueba del Lema 35

1. (6.23) se sigue directamente del punto 8 del Teorema 33.

2. Veamos el efecto de cada término de la base de $\mathcal{X}_i'$ sobre el mapeo Γ_K.

   De (6.19), (6.20) y (6.21) obtenemos para $j = 0, 1, \cdots, \kappa_i - 2$:

$$\begin{aligned}
\Gamma_K N_i^j e_i' &= \Big(Q^{-1} - A_{K,i} Q^{-1} N_i\Big) N_i^j e_i' \\
&= Q^{-1} N_i^j e_i' - A_{K,i} Q^{-1} N_i^{j+1} e_i' \\
&= A_{K,i}^{\kappa_i - j - 1} e_i - A_{K,i} A_{K,i}^{\kappa_i - j - 2} e_i \\
&= 0 \quad i \in \{1, \cdots, \eta\}.
\end{aligned}$$

   Para $j = \kappa_i - 1$, obtenemos de (6.19), (6.20), (6.21) y el punto 1 del Lema 34:

$$\begin{aligned}
\Gamma_K N_i^{\kappa_i - 1} e_i' &= \Big(Q^{-1} - A_{K,i} Q^{-1} N_i\Big) N_i^{\kappa_i - 1} e_i' \\
&= Q^{-1} N_i^{\kappa_i - 1} e_i' \\
&= e_i \quad i \in \{1, \cdots, \eta\}.
\end{aligned}$$

   Así se obtiene $\operatorname{Im} \Gamma_K = \bigoplus_{i=1}^{\eta} \{e_i\}$.

3. Sea $x \in A_{K,i}^{-1}\{e_i\}$ entonces existen $\beta, \alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_{\kappa_i - 1} \in \mathbb{R}$ tales que (ver puntos vi y vii del Teorema 33):

$$x = \alpha_0 e_i + \alpha_1 A_{K,i} e_i + \cdots + \alpha_{\kappa_i - 1}^{\kappa_i - 1} e_i \quad \text{y} \quad A_{K,i} x = \beta e_i,$$

   es decir,

$$\alpha_0 A_{K,i} e_i + \alpha_1 A_{K,i}^2 e_i + \cdots + \alpha_{\kappa_i - 2}^{\kappa_i - 1} e_i = \beta e_i.$$

   Esto implica que $\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_{\kappa_i - 2} = \beta = 0$, y así:

$$x = \alpha_{\kappa_i - 1} A_{K,i}^{\kappa_i - 1} e_i \ \in \ A_{K,i}^{\kappa_i - 1}\{e_i\}.$$

   Por otro lado, sea $x \in A_{K,i}^{\kappa_i - 1}\{e_i\}$ entonces existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $x = \beta A_{K,i}^{\kappa_i - 1} e_i$ y esto implica que

$$A_{K,i} x = \beta A_{K,i}^{\kappa_i} e_i = 0 \ \in \{e_i\},$$

   y así

$$x \in A_{K,i}^{-1}\{e_i\}.$$

CAPíTULO 7

Desacoplamiento de fallas con estabilidad interna

En este Capítulo mostramos a través de un ejemplo que cuando el sistema *estrictamente propio* $\Sigma_{ep}(z)$ es observable, es posible sintetizar un *filtro desacoplador de la entrada* cuya función es identificar la falla.

7.1. Introducción

Consideremos el sistema *estrictamente propio con fallas* $\Sigma_{ep}(A,[B,L],C) : \mathcal{U} \oplus \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Lm(t), \\ y(t) &= Cx(t). \end{aligned}$$

Se plantea el siguiente problema:

Problema 37 -¿Bajo qué condiciones la falla $m(t)$ puede ser desacoplada y reconstruida, para todo tiempo $t > 0$?

Como vimos en las Secciones 2.3.1 y el Capítulo 4, este problema es resuelto por Massoumnia [59], proponiendo un *generador residual* basado en la técnica de observabilidad, utilizando subespacios $(C, A) - invariantes$ en el observador de estado de orden completo. Al igual que en el Problema de desacoplamiento de perturbaciones cuando se trabajan con sistemas de fase no mínima se generan modos inestables al obtener los subespacios $(A + DC) - invariantes$ mediante la cancelación de los ceros no Hurwitz (recordar Ejemplo 4.1).

Entonces, cuando se presentan ceros no Hurwitz, deseamos hallar una solución al *problema de detección de fallas* sin cancelar los ceros no Hurwitz. Es decir, solamente se hacen invariantes los modos asociados a los ceros Hurwitz.

Con respecto a los modos asociados a los ceros no Hurwitz nos conformamos con solamente desacoplarlos y no con obtener su invariancia.

7.2. Desacoplamiento de la entrada

En el Lema 32 se demostró que un sistema observable, $\Sigma_{ep}(A, B, C)$, con el mapeo de entradas B inyectivo y el mapeo de salidas C sobreyectivo puede ser descompuesto como la cascada de un sistema *estrictamente no propio* Σ_{ceros} *invertible izquierdo MT* y un sistema *estrictamente propio* Σ_{polos} *invertible izquierdo DT*.

Por lo que para desacoplar las entradas del sistema $\Sigma_{ep}(A, B, C)$ se siguen los pasos siguientes:

Paso 1. Primero descomponemos el sistema *estrictamente propio* (6.1), $\Sigma_{ep}(z)$, como la cascada de un sistema $\Sigma_{ceros}(z)$ *invertible izquierda MT*, que contienen todos los ceros del sistema, y un sistema $\Sigma_{polos}(v)$ *invertible izquierdo DT*, que contienen todos los polos del sistema y ningún cero (ver Lema 32 del Capítulo 6).

Paso 2. Debido a la *invertibilidad izquierda DT* del sistema $\Sigma_{polos}(v)$, entonces existe al menos un sistema inverso izquierdo Σ^i (por ejemplo el propuesto en el Lema 23 del Capítulo 5) tal que se satisface $\Sigma^i\big(\Sigma_{polos}(v)\big) = v$, no importando las condiciones iniciales del sistema $\Sigma_{polos}(v)$ ni la naturaleza de la entrada v.

Paso 3. Ahora, la *invertibilidad izquierda MT* del sistema $\Sigma_{zeros}(z)$ implica que se puede aplicar un sistema cuya matriz de transferencia coincide con la *inversa izquierda TM*, es decir, $\Big(T_z^v(\mathrm{s})\Big)^{-1}$. Pero esto únicamente se puede hacer para sistemas de fase mínima. En el caso general solamente se busca el *desacoplamiento de la entrada*, el cual es obtenido con la aplicación de la *adjunta izquierda MT*, $\Big(T_z^v(\mathrm{s})\Big)^a = \det T_z^v(\mathrm{s})\Big(T_z^v(\mathrm{s})\Big)^{-1}$, en lugar de la *inversa izquierda MT*.

Este procedimiento es ilustrado continuando el Ejemplo 6.1.

Ejemplo 7.1

Paso 1:

En el Ejemplo 6.1 ya se procedió a separar al sistema estrictamente propio (6.8) en la cascada de dos sistemas: un sistema estrictamente no propio de ceros (6.13) y un sistema estrictamente propio de polos (sin ningún cero) (6.14) (ver Figura 6.2).

Paso 2:

Dado que el *sistema de polos* (6.14) es *invertible a la izquiera DT*, procedemos a sintetizar el *inverso izquierdo DT* propuesto en el Lema 23. Para esto, identificamos al *sistema cociente* *maximal observable* (ver (6.11) y (6.12)):

$$
\begin{aligned}
\dot{\hat{\xi}}_p(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 1 \\ -6 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{\widehat{A}} \hat{\xi}_p(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\widehat{\Upsilon}_p} \upsilon(t), \qquad (7.1) \\
\bar{y}(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\widehat{C}} \hat{\xi}_p(t). \qquad (7.2)
\end{aligned}
$$

Sustituyendo las matrices $\widehat{A}$, $\widehat{C}$ y $\widehat{\Upsilon}$ en el sistema inverso (5.15), se obtiene el siguiente sistema:

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{a}) \quad & \underbrace{\left[\begin{array}{cccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{\mathbb{E}_i} \dot{x}_i(t) = \underbrace{\left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{\mathbb{A}_i} x_i(t) + \underbrace{\left[\begin{array}{cc} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right]}_{\mathbb{B}_i} \bar{y}(t). \qquad (7.3) \\
(\mathbf{b}) \quad & \hat{\upsilon}(t) = \underbrace{\left[\begin{array}{cccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{\mathbb{C}_i} x_i(t).
\end{aligned}
$$

Con el fin de obtener la forma estandar estrictamente no propia (recordar (5.6)), premultiplicamos a (5.15.a) por T_i y hacemos el cambio de variable:

$$\widehat{x}_i(t) = T_r^{-1}\, x_i(t),$$

donde $T_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $T_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Entonces obtenemos el sistema *inverso izquierdo DT* del sistema (7.1):

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \dot{\widehat{x}}_i(t) = \widehat{x}_i(t) + \left[\begin{array}{rr} -1 & 0 \\ -2 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 \\ -2 & -2 \\ 0 & -1 \end{array}\right] \bar{y}(t), \tag{7.4}$$

$$\widehat{\upsilon}(t) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \widehat{x}_i(t).$$

El comportamiento externo de $\bar{y}(t)$ a $\widehat{\upsilon}(t)$ de este sistema y su matriz de transferencia $T_{\bar{y}}^{\widehat{\upsilon}}(\mathrm{s})$ son:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}) \quad \widehat{\upsilon}(t) &= \begin{bmatrix} (\mathrm{p}+1)^2 & 0 \\ 2(\mathrm{p}+3) & (\mathrm{p}+1)^2 \end{bmatrix} \bar{y}(t), \\ (\mathbf{b}) \quad T_{\bar{y}}^{\widehat{\upsilon}}(\mathrm{s}) &= \begin{bmatrix} (\mathrm{s}+1)^2 & 0 \\ 2(\mathrm{s}+3) & (\mathrm{s}+1)^2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{7.5}$$

Entonces por (6.16.a) y (7.5.a) obtenemos:

$$\widehat{\upsilon}(t) = \begin{bmatrix} (\mathrm{p}+1)^2 & 0 \\ 2(\mathrm{p}+3) & (\mathrm{p}+1)^2 \end{bmatrix} \bar{y}(t) = \upsilon(t). \tag{7.6}$$

En este punto hemos reconstruido exactamente la entrada υ del sistema de polos (6.14), esto es:

$$\Sigma^i\Big(\Sigma_{polos}(\upsilon)\Big) \equiv \upsilon.$$

Paso 3:

Ahora bien, dado que el sistema estrictamente no propio de ceros (6.13) posee ceros no Hurwitz, entonces no podemos aplicarle su inversa matricial izquierda. Por lo que es más recomendable obtener su matriz adjunta.

Consideremos el comportamiento externo del sistema estrictamente no propio de ceros (6.13) (ver (6.15.a) y recordar que $\bar{z}(t) = U_{ob}^{-1} z(t)$):

$$\begin{aligned} \upsilon(t) = \begin{bmatrix} -(\mathrm{p}-1) & 0 \\ 0 & (\mathrm{p}+1) \end{bmatrix} \bar{z}(t) &= \begin{bmatrix} -(\mathrm{p}-1) & 0 \\ 0 & (\mathrm{p}+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} z(t), \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(\mathrm{p}-1) & -\frac{1}{2}(\mathrm{p}-1) \\ \frac{1}{2}(\mathrm{p}+1) & -\frac{1}{2}(\mathrm{p}+1) \end{bmatrix}}_{M(\mathrm{p})} z(t). \end{aligned}$$

Para obtener el *sistema adjunto* Σ^a, procedemos a calcular la adjunta de la matriz $M(p)$:

$$\mathrm{Adj}\ M(\mathrm{p}) = \mathrm{Adj} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(\mathrm{p}-1) & -\frac{1}{2}(\mathrm{p}-1) \\ \frac{1}{2}(\mathrm{p}+1) & -\frac{1}{2}(\mathrm{p}+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(\mathrm{p}+1) & \frac{1}{2}(\mathrm{p}-1) \\ -\frac{1}{2}(\mathrm{p}+1) & -\frac{1}{2}(\mathrm{p}-1) \end{bmatrix}. \tag{7.7}$$

Entonces el *sistema adjunto* Σ^a es (recuerde (7.5. a) y que $\bar{y}(t) = S_{ob}y(t)$):

$$\widehat{z}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(\mathrm{p}+1) & \frac{1}{2}(\mathrm{p}-1) \\ -\frac{1}{2}(\mathrm{p}+1) & -\frac{1}{2}(\mathrm{p}-1) \end{bmatrix}}_{\text{Adj } M(\mathrm{p})} \widehat{v}(t). \tag{7.8}$$

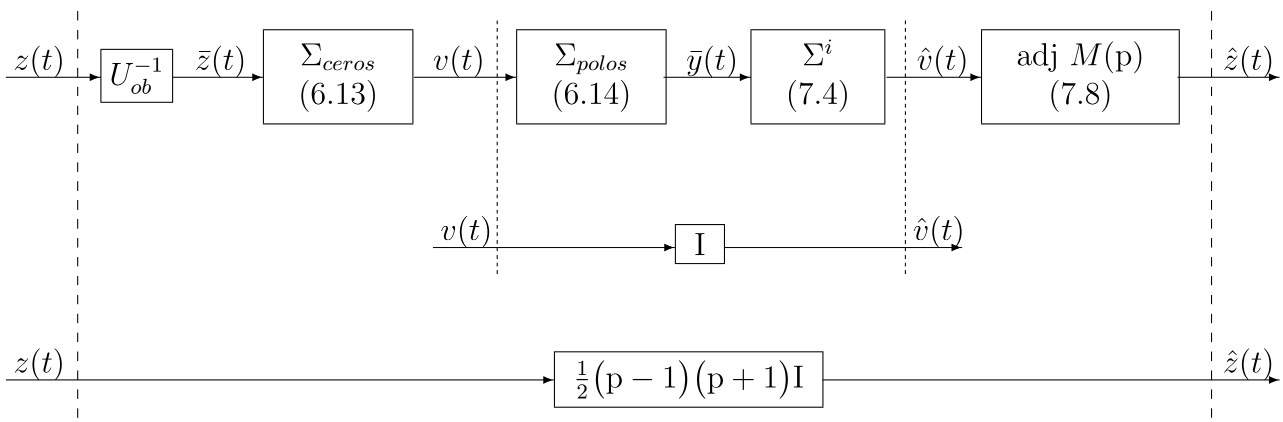

Figura 7.1: Desacoplamiento de la entrada $z(t)$ del sistema (6.8)

Notemos que (7.5) y (7.8) implican:

$$\begin{aligned} \widehat{z} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(\mathrm{p}+1) & \frac{1}{2}(\mathrm{p}-1) \\ -\frac{1}{2}(\mathrm{p}+1) & -\frac{1}{2}(\mathrm{p}-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathrm{p}+1)^2 & 0 \\ 2(\mathrm{p}+3) & (\mathrm{p}+1)^2 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}}_{S_{ob}} y(t), \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\big(\mathrm{p}^3+\mathrm{p}^2-\mathrm{p}+3\big) & 2 \\ \big(\mathrm{p}^2+2\mathrm{p}-1\big) & \frac{1}{2}\big(\mathrm{p}^3+3\mathrm{p}^2+3\mathrm{p}-3\big) \end{bmatrix} y(t). \end{aligned} \tag{7.9}$$

Que también se puede expresar como:

$$\widehat{z} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4}(\mathrm{p}-1) \\ \frac{1}{2}\mathrm{p} & -\frac{1}{4}(\mathrm{p}-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathrm{p}+1)^2 & (\mathrm{p}+1)^2 \\ 2(\mathrm{p}+2)(\mathrm{p}-1) & -2(\mathrm{p}+3) \end{bmatrix} y(t).$$

De (6.9) se sigue que:

$$\begin{aligned} \widehat{z} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4}(\mathrm{p}-1) \\ \frac{1}{2}\mathrm{p} & -\frac{1}{4}(\mathrm{p}-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathrm{p}-1) & (\mathrm{p}-1) \\ 2\mathrm{p} & -2 \end{bmatrix} z(t), \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\mathrm{p}-1)(\mathrm{p}+1) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(\mathrm{p}-1)(\mathrm{p}+1) \end{bmatrix} z(t). \end{aligned}$$

Esto es,

$$\hat{z}_1(t) = \frac{1}{2}(\mathrm{p}-1)(\mathrm{p}+1)z_1(t), \quad \hat{z}_2(t) = \frac{1}{2}(\mathrm{p}-1)(\mathrm{p}+1)z_2(t). \tag{7.10}$$

7.3. Desacoplamiento de fallas con estabilidad

Ahora podemos responder el Problema 37. La respuesta es dada por las condiciones del Teorema 10 del Capítulo 4. De acuerdo con Wonham [78], únicamente la *parte buena* de $\mathcal{W}^*_{[C,A,L]}$, es decir, la parte que excluye los ceros no Hurwitz, puede hacerse $(A + DC)$ invariante. Con respecto a la *parte mala* de $\mathcal{W}^*_{[C,A,L]}$, que es la relacionada con los ceros no Hurwitz, no hay que invertirla exactamente si no solamente desacoplar la entrada.

Ilustremos esto continuando el Ejemplo 4.1 del Capítulo 4.

EJEMPLO 7.2

Comparando el sistema (6.8) con (4.12), para $\alpha = -1$, obtenemos de los Ejemplos 6.1 y 7.1 el siguiente *desacoplador de fallas* (ver (7.9)):

$$\begin{aligned}
\widehat{m}(t) &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(\mathrm{p}+1) & \frac{1}{2}(\mathrm{p}-1) \\ -\frac{1}{2}(\mathrm{p}+1) & -\frac{1}{2}(\mathrm{p}-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathrm{p}+1)^2 & 0 \\ 2(\mathrm{p}+3) & (\mathrm{p}+1)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} r(t) \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(\mathrm{p}^3+\mathrm{p}^2-\mathrm{p}+3\right) & 2 \\ \left(\mathrm{p}^2+2\mathrm{p}-1\right) & \frac{1}{2}\left(\mathrm{p}^3+3\mathrm{p}^2+3\mathrm{p}-3\right) \end{bmatrix} r(t) \qquad (7.11) \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4}(\mathrm{p}-1) \\ \frac{1}{2}\mathrm{p} & -\frac{1}{4}(\mathrm{p}-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathrm{p}+1)^2 & (\mathrm{p}+1)^2 \\ 2(\mathrm{p}+2)(\mathrm{p}-1) & -2(\mathrm{p}+3) \end{bmatrix} r(t).
\end{aligned}$$

En efecto, de (7.11) y (4.13 .a) obtenemos:

$$\widehat{m}_1(t) = \frac{1}{2}(\mathrm{p}-1)(\mathrm{p}+1)m_1(t), \quad \widehat{m}_2(t) = \frac{1}{2}(\mathrm{p}-1)(\mathrm{p}+1)m_2(t) \qquad (7.12)$$

Así, combinando (7.11) con (4.14) obtenemos el siguiente *detector desacoplador de fallas*:

$$\widehat{m}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(\mathrm{p}+1)(\mathrm{p}^2+1) & -(1+\mathrm{p}) \\ -\mathrm{p}(\mathrm{p}+1) & -\frac{1}{2}(\mathrm{p}+1)(\mathrm{p}^2+2\mathrm{p}-1) \end{bmatrix} y(t) + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(\mathrm{p}^2-3) \\ -\frac{1}{2}(\mathrm{p}^2-2\mathrm{p}-1) \end{bmatrix} u(t) \qquad (7.13)$$

Note que:

1. De (7.12) vemos que el sistema (7.13) detecta todas las fallas que están fuera de Ker $(\mathrm{p}-1)(\mathrm{p}+1)$. La función de transferencia entre la falla m y la salida del detector $\widehat{m}$ es:
$$\widehat{m}(\mathrm{s}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\mathrm{s}-1)(\mathrm{s}+1) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(\mathrm{s}-1)(\mathrm{s}+1) \end{bmatrix} m(\mathrm{s}) \qquad (7.14)$$

2. Para implementar el filtro impropio (7.13) se propone el siguiente filtro:
$$(\mathrm{p}+1)^3\overline{m}(t) = \widehat{m}(t) \qquad (7.15)$$

Por lo que de (7.13) y (7.15) se obtiene el siguiente filtro propio detector de fallas:

$$\dot{\xi}_1(t) = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xi_1(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} y(t) + \begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} u(t) \tag{7.16}$$

$$\dot{\xi}_2(t) = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xi_2(t) + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} y(t) + \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{bmatrix} u(t) \tag{7.17}$$

$$\overline{m}(t) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \xi_1(t) \\ \hline \xi_2(t) \end{array}\right] - \frac{1}{2} y(t) \tag{7.18}$$

Siendo la función de transferencia entre la falla m y la salida del detector $\overline{m}$ igual a:

$$\overline{m}(\mathrm{s}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\frac{(\mathrm{S}-1)(\mathrm{S}+1)}{(\mathrm{S}+1)^3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\frac{(\mathrm{S}-1)(\mathrm{S}+1)}{(\mathrm{S}+1)^3} \end{bmatrix} m(s) \tag{7.19}$$

3. En las Figuras 7.2 y 7.3 se muestran resultados de simulación MatLab–Simulink cuando se aplica el *detector desacoplador de fallas* (7.16)–(7.18) al sistema de fase no mínima (4.10) ($\alpha = -1$) con condición inicial $x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$. De estas figuras se puede observar que el *detector desacoplador de fallas* continua identificando correctamente las fallas; aunque se tiene una dinámica un poco más lenta debido a los integradores incorporados.

4. En la Figura 7.4 se muestra el comportamiento del *detector desacoplador de fallas* (7.16)–(7.18) cuando las fallas pertenecen a Ker (p − 1), esto es, cuando excitan al cero no Hurwitz del *detector desacoplador de fallas*. Como era de esperarse, estas fallas excitadoras de ceros son imperceptibles para el *detector desacoplador de fallas*.

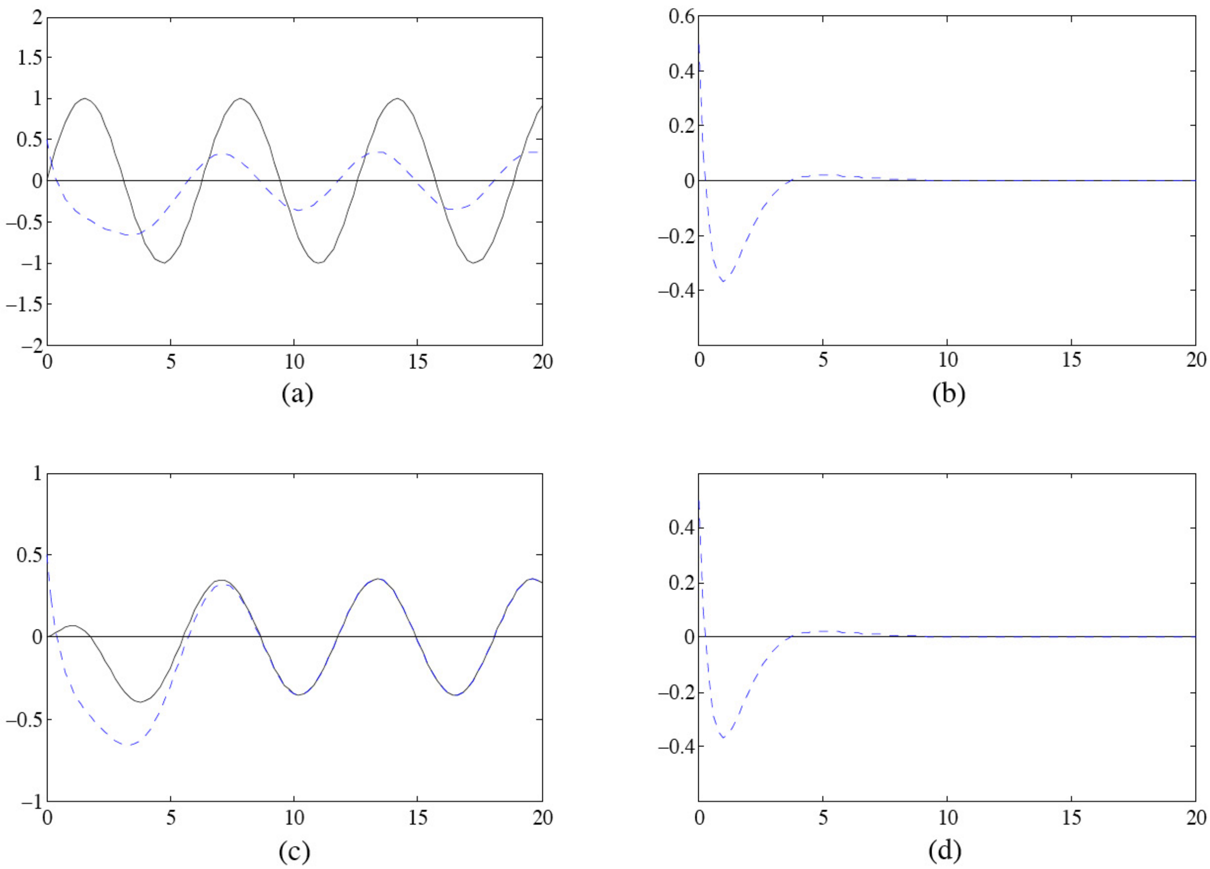

Figura 7.2: Diagramas de simulación MatLab–Simulink del sistema de fase no mínima (4.10), $\alpha = -1$, $x(0) = [1\ 1\ 1\ 1]^T$, con el *detector desacoplador de fallas* (7.16)–(7.18); caso $m_1 \neq 0$ y $m_2 \equiv 0$. (a) Salida $\overline{m}_1$ del filtro (7.16)–(7.18) (linea punteada) y falla m_1 (linea continua). (b) Salida $\overline{m}_2$ del filtro (7.16)–(7.18) (linea punteada) y falla m_2 (linea continua). (c) $\overline{m}_1$ obtenida tanto a través del filtro (7.16)–(7.18) (linea punteada) como a través de la función de transferencia (7.19) (linea continua). (d) $\overline{m}_2$ obtenida tanto a través del filtro (7.16)–(7.18) (linea punteada) como a través de la función de transferencia (7.19) (linea continua).

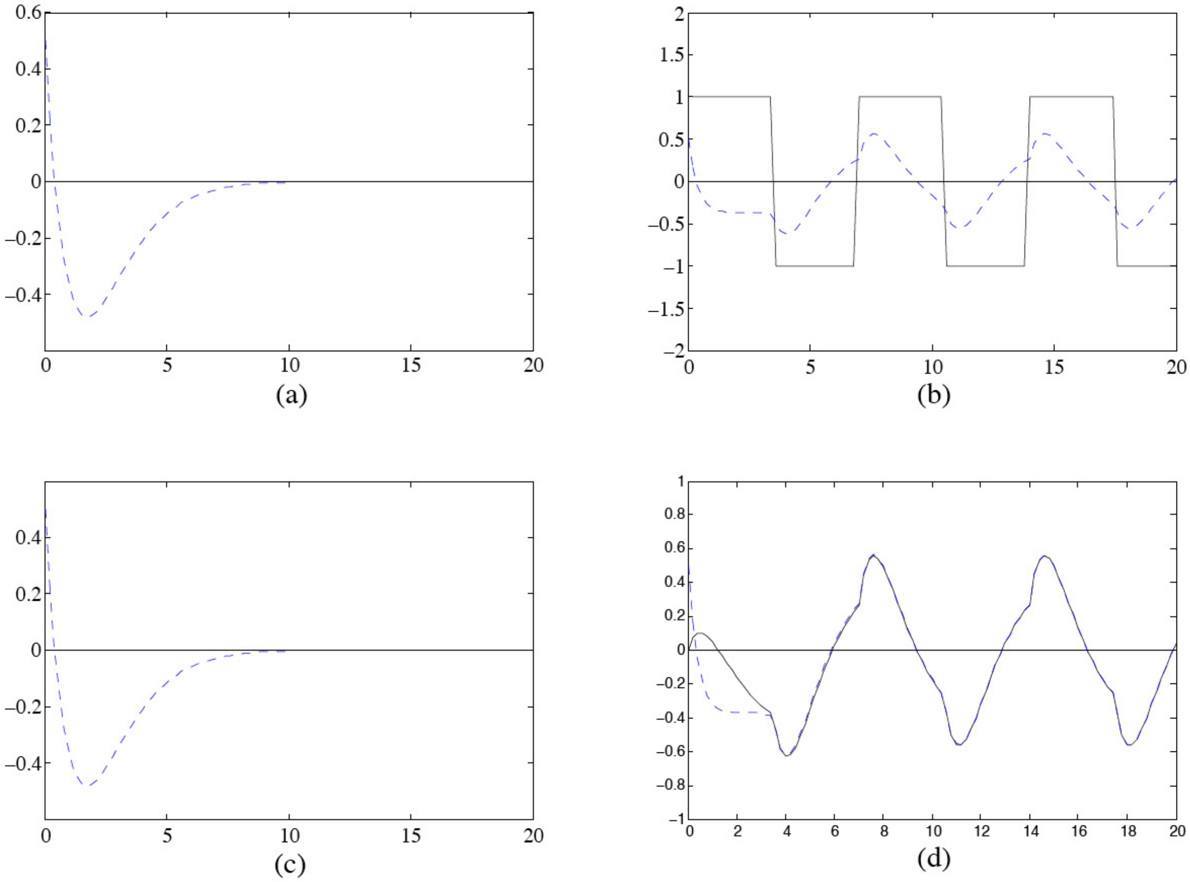

Figura 7.3: Diagramas de simulación MatLab–Simulink del sistema de fase no mínima (4.10), $\alpha = -1$, $x(0) = [1\ 1\ 1\ 1]^T$, con el *detector desacoplador de fallas* (7.16)–(7.18); caso $m_1 \equiv 0$ y $m_2 \neq 0$. (a) Salida $\overline{m}_1$ del filtro (7.16)–(7.18) (linea punteada) y falla m_1 (linea continua). (b) Salida $\overline{m}_2$ del filtro (7.16)–(7.18) (linea punteada) y falla m_2 (linea continua). (c) $\overline{m}_1$ obtenida tanto a través del filtro (7.16)–(7.18) (linea punteada) como a través de la función de transferencia (7.19) (linea continua). (d) $\overline{m}_2$ obtenida tanto a través del filtro (7.16)–(7.18) (linea punteada) como a través de la función de transferencia (7.19) (linea continua).

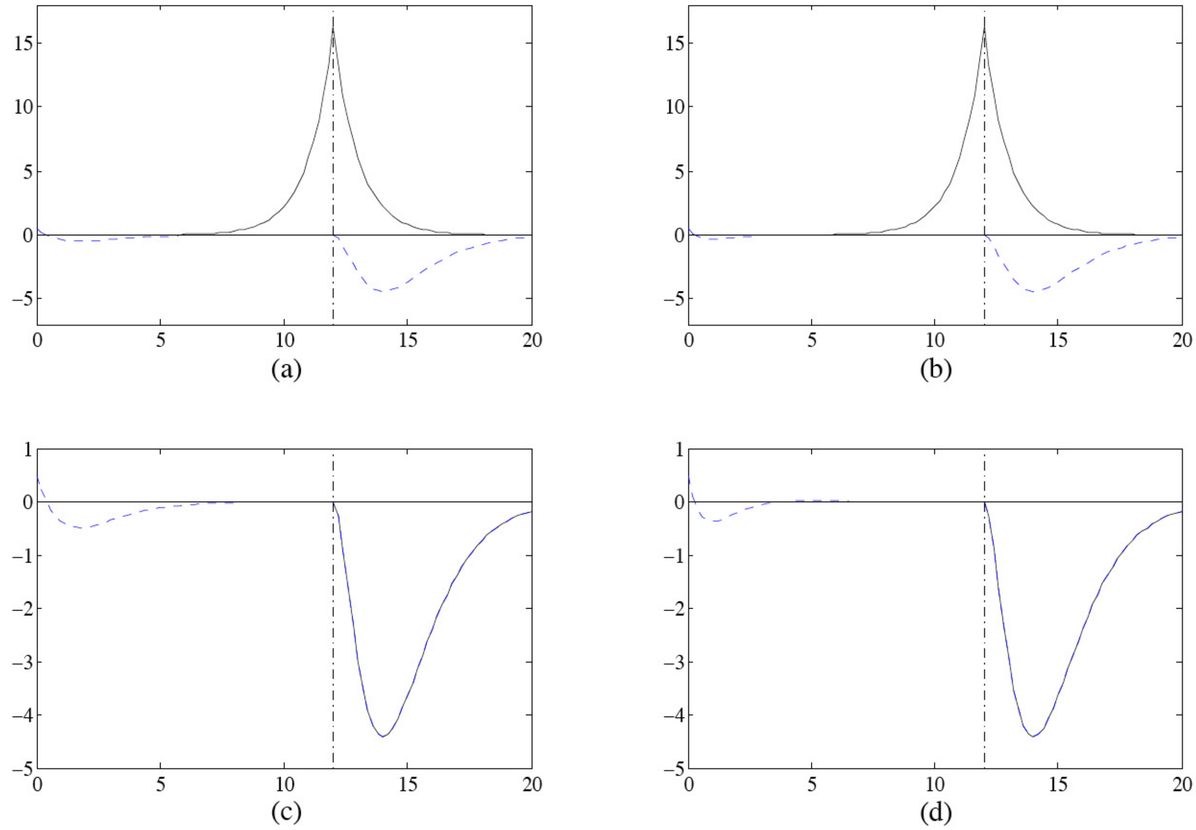

Figura 7.4: Diagramas de simulación MatLab–Simulink del sistema de fase no mínima (4.10), $\alpha = -1$, $x(0) = [1\ 1\ 1\ 1]^T$, con el *detector desacoplador de fallas* (7.16)–(7.18). En esta simulación $m_1(t) = m_2(t) = 0{,}0001\mathbf{e}^t$ para $t \in [0,\ 12]$ y $m_1(t) = m_2(t) = 0{,}0001\mathbf{e}^{-(t-24)}$ para $t \in (12,\ 20]$ (la linea vertical punteada marca la transición en $t = 12$). (a) Salida $\overline{m}_1$ del filtro (7.16)–(7.18) (linea punteada) y falla m_1 (linea continua). (b) Salida $\overline{m}_2$ del filtro (7.16)–(7.18) (linea punteada) y falla m_2 (linea continua). (c) $\overline{m}_1$ obtenida tanto a través del filtro (7.16)–(7.18) (linea punteada) como a través de la función de transferencia (7.19) (linea continua). (d) $\overline{m}_2$ obtenida tanto a través del filtro (7.16)–(7.18) (linea punteada) como a través de la función de transferencia (7.19) (linea continua).

7.4. Conclusión

En este Capítulo se mostró cómo proceder cuando el sistema posee ceros no Hurwitz en la trayectoria entre la falla y la salida del observador de orden completo que se usa en la detección de la falla.

La solución propuesta consistió en separar al sistema de dinámica del error en un sistema estrictamente propio de polos y en un sistema estrictamente no propio de ceros. Entonces se aplica una inversa izquierda DT al sistema de polos y mediante la matriz adjunta se desacopla al sistema de ceros.

CAPíTULO 8

Método alternativo de desacoplamiento de fallas de sistemas de fase mínima

La principal contribución de este trabajo de tesis ha sido proporcionar una metodología para tratar el desacoplamiento de fallas en presencia de ceros no Hurwitz. En efecto, al igual que en el problema de desacoplamiento de perturbaciones separar los casos de sistemas de fase mínima y no mínima (ver Capítulos 4.3 y 5.6 de [78]), también es necesario hacer esta separación en el problema de desacoplamiento de fallas.

En una etapa inicial de este trabajo de tesis, se estudió un método para desacoplar fallas basado en el sistema inverso izquierdo. Este es un método alternativo para resolver el problema de desacoplamiento de fallas para sistemas de fase mínima.

En este Capítulo se aborda un problema sobre detección e identificación de fallas a través de un ejemplo que consiste de un sistema de flujo que consta de cuatro tanques hidráulicos interconectados. Este sistema es afectado por dos clases de fallas: fugas en los tanques y taponamientos en los ductos. Estas dos clases de fallas son consideradas como entradas desconocidas que afectan el sistema monitoreado.

Para reconstruir estas entradas desconocidas se utiliza el método de detección basado en el sistema inverso izquierdo del sistema monitoreado. Este método produce un filtro detector derivativo el cual es implementado vía aproximación exponencial.

Posteriormente se hace una comparación entre este filtro y el detector clásico llamado observador de estado de orden completo (generador residual). Esta comparación se lleva a cabo simulando el sistema monitoreado en la plataforma Matlab^{TM}+Simulink^{TM} cuando se presentan las fallas.

8.1. Introducción

En esta sección se presenta el sistema de flujo. Primero mostramos el modelo no lineal que caracteriza las fallas, posteriormente se muestra el sistema linealizado y por último el sistema lineal con fallas.

A. El modelo no lineal

Consideremos el sistema de flujo descrito en la Figura 8.1. El modelo no lineal (ver [30]) de este sistema está dado por :

$$
\begin{aligned}
\dot{h}_1(t) &= -\tfrac{a\sqrt{2g}}{A_T}\sqrt{h_1(t)-h_2(t)}+\tfrac{1}{A_T}u(t)\\
\dot{h}_2(t) &= \tfrac{a\sqrt{2g}}{A_T}\sqrt{h_1(t)-h_2(t)}-\tfrac{a\sqrt{2g}}{A_T}\sqrt{h_2(t)-h_3(t)}\\
\dot{h}_3(t) &= \tfrac{a\sqrt{2g}}{A_T}\sqrt{h_2(t)-h_3(t)}-\tfrac{a\sqrt{2g}}{A_T}\sqrt{h_3(t)-h_4(t)}\\
\dot{h}_4(t) &= \tfrac{a\sqrt{2g}}{A_T}\sqrt{h_3(t)-h_4(t)}-\tfrac{a\sqrt{2g}}{A_T}\sqrt{h_4(t)},
\end{aligned}
\tag{8.1}
$$

donde g es la aceleración gravitacional, A_T el área de la sección transversal de los tanques, a el área de la sección transversal de los ductos, h_i es el nivel de referencia, q_i es el flujo de salida y v_i es la velocidad de salida.

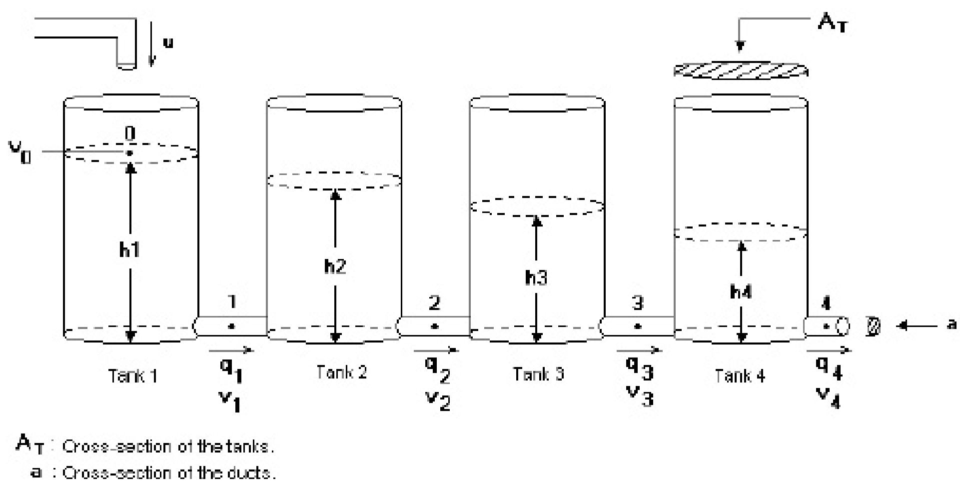

Figura 8.1: Sistema de flujo.

B. Caracterización de las fallas

El sistema de flujo puede presentar 8 posible fallas: *fuga* en el i-ésimo tanque, representado por $L_i m_i(t)$, $i=1,2,3,4$, y *taponamiento* en el i-ésimo tanque representado por $L_{i+4}m_{i+4}(t)$, $i=1,2,3,4$.

Los *modos de fallas* son modelados como:

Fugas en los tanques:

$$m_i(t) = -\left(\widetilde{a}_i/A_T\right)\left[2g\left(h_i - x_i\right)\right]^{1/2},\ i=1,2,3,4$$

Taponamientos en los ductos:

$$
\begin{aligned}
m_{i+4}(t) &= a_i^*\left[2g\left(h_i-h_{i+1}\right)\right]^{1/2},\ i=1,2,3\\
m_8(t) &= a_4^*\left(2gh_4\right)^{1/2}
\end{aligned}
$$

donde $\widetilde{a}_i$ denota el área del orificio en el i-ésimo tanque, x_i denota la altura de la fuga en el i-ésimo tanque, a_i^* denota la reducción en la sección transversal del i-ésimo ducto por taponamiento.

Las correspondientes *firmas de fallas* se muestran en el Cuadro 8.1.

i	1	2	3	4
L_i	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
i	5	6	7	8
L_i	$\begin{bmatrix} 1/A_T \\ -1/A_T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1/A_T \\ -1/A_T \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/A_T \\ -1/A_T \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/A_T \end{bmatrix}$

Cuadro 8.1: Firmas de fallas del sistema de flujo.

Observación 38 *Note que la fuga en el i-ésimo tanque queda completamente caracterizado por el área del orificio $\widetilde{a}_i$ y la correspondiente altura x_i. Obviamente que en las aplicaciones prácticas el correspondiente modo de falla $m_i(t)$ es desconocido pues es sumamente difícil implementar un procedimiento para obtener el area $\widetilde{a}_i$ y la altura x_i. Con respecto a los taponamientos la situación es la misma.*

Observación 39 *Como L_4 y L_8 son linealmente dependientes, las fallas 4 y 8 no se pueden aislar una de la otra y por tanto no se pueden identificar.*

Observación 40 *En lo que sigue asumimos que la altura $h_2(t)$ no es medible.*

C. El sistema linealizado

El sistema no lineal (8.1) es linealizado alrededor de un punto de equilibrio obtenido a través de la entrada constante $u(t)$. Para esto se toman como parámetros del sistema los siguientes valores:

$$A_T = 500cm^2, \quad a = 2.54cm^2, \quad u(t) = 277.8cm^3/sec, \quad g = 981cm/sec^2$$

La aproximación correspondiente a un sistema lineal invariante en el tiempo es:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= 0.04558 \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0.001 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned} \tag{8.2}$$

D. El sistema lineal con fallas

Supongamos que se presentan únicamente dos fugas: tanque 3 y tanque 4, es decir, $m_3(t) \neq 0$ y $m_4(t) \neq 0$, y las correspondientes *firmas de fallas* son:

$$L_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \; L_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

entonces el *sistema lineal con fallas* tiene la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= 0.04558 \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0.001 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} m(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned} \tag{8.3}$$

8.2. Detección e identificación de fallas utilizando el sistema inverso izquierdo DT

En esta sección aplicaremos la *técnica de inversión por la izquierda* para reconstruir el vector de falla $m(t) = \begin{bmatrix} m_1(t) & m_2(t) \end{bmatrix}^T$. Para ello primero reescribimos el sistema (8.3) en la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= 0.04558 \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0.001 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} m(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y(t) \\ u(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{8.4}$$

Si hacemos $\begin{bmatrix} y(t) \\ u(t) \end{bmatrix} = 0$ obtenemos $\begin{bmatrix} m(t) \\ u(t) \end{bmatrix} = 0$, entonces el sistema (8.3) es *Invertible por la Izquierda en DT*, y por el Corolario 31 , la matriz de transferencia $T(s)$ del sistema (8.3) es *Invertible por la Izquierda* y no tiene *ceros de transmisión* ni *ceros invariantes desacoplados en la entrada*. Entonces la falla $m(t)$ del sistema (8.3) puede ser reconstruida por *técnica de inversión por la izquierda*.

Como rank $\left[C^T\ A^TC^T\ (A^T)^2C^T\ (A^T)^3C^T\right]^T = 4$ entonces el sistema (8.2) es observable, y por tanto el sistema inverso izquierdo es minimal bajo equivalencia externa (ver Capítulo 1 de Preliminares).

Un sistema inverso por la izquierda del sistema implícito de (8.3) es:

$$\left[\begin{array}{cccc|cc} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ \hline 1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0 \end{array}\right]\dot{\xi}(t) = \left[\begin{array}{cccc|cc} 1&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ \hline -0.0456&0.0456&0&0&0&0\\ 0.0456&-0.0912&0.0456&0&0&0\\ 0&0.0456&-0.0912&0.0456&1&0\\ 0&0&0.0456&0.0912&0&0 \end{array}\right]\xi(t) \ + \tag{8.5}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1&0&0&0\\ 0&-1&0&0\\ 0&0&-1&0\\ \hline 0&0&0&0.001\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{array}\right]\begin{bmatrix} y\,(t)\\ u\,(t)\end{bmatrix}; \quad \widetilde{m}(t) = \left[\begin{array}{cccc|cc} 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&1 \end{array}\right]\xi(t)$$

donde $\dot{\xi}(t), \xi(t), m(t), \widetilde{m}(t)$.

Observación 41 *El sistema (8.5) tiene más ecuaciones que variables (i.e. el sistema tiene siete ecuaciones descriptoras y seis variables descriptoras), entonces hay una restrición interna (ver [29]) que en este caso es internamente satisfecho por el sistema mismo. Y así, no es necesario incluir una fila extra en el reconstructor cuadrado.*

Entonces la inversa izquierda (8.5) puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{cc|cc} 0&0&0&0\\ 1&0&0&0\\ \hline 0&0&0&0\\ 0&0&1&0 \end{array}\right]\dot{\omega}(t) &= \left[\begin{array}{cc|cc} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ \hline 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{array}\right]\omega(t) + \left[\begin{array}{ccc} 1&-1&0\\ 0&0&0\\ \hline 0&0&-1\\ 0&0&0 \end{array}\right]y(t) \\ \widetilde{m}(t) &= \left[\begin{array}{cc|cc} 0&1&0&0\\ 0&0&0&1 \end{array}\right]\omega(t) + 0.0456\begin{bmatrix} -1&2&-1\\ 0&-1&-2 \end{bmatrix}y(t) \ + \\ &\quad \begin{bmatrix} 0.001\\ 0 \end{bmatrix}u(t) \end{aligned} \tag{8.6}$$

Para implementar el reconstructor no propio (8.6) en el problema de detección e identificación de fallas, es necesario obtener primero una aproximación exponencial.

Utilizando la técnica desarrollada en [65] se obtiene la siguiente aproximación exponencial:

$$
\begin{aligned}
\dot{\widetilde{x}}(t) &= \left[\begin{array}{cc|cc} -\frac{1}{\epsilon} & 1 & 0 & 0 \\ -\epsilon & -\beta & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -\frac{1}{\epsilon} & 1 \\ 0 & 0 & -\epsilon & -\beta \end{array}\right] \widetilde{x}(t) + \left[\begin{array}{ccc} -\frac{1}{\epsilon} & \frac{1}{\epsilon} & 0 \\ -\epsilon & \epsilon & 0 \\ \hline 0 & 0 & \frac{1}{\epsilon} \\ 0 & 0 & \epsilon \end{array}\right] y(t) \\
\widetilde{m}(t) &= \left[\begin{array}{cc|cc} -\frac{1}{\epsilon} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\epsilon} & 0 \end{array}\right] \widetilde{x}(t) + \left[\begin{array}{ccc} -\frac{1}{\epsilon} & \frac{1}{\epsilon} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\epsilon} \end{array}\right] y(t) + 0.0456 \left[\begin{array}{ccc} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{array}\right] y(t) \; + \\
&\quad \left[\begin{array}{c} 0.001 \\ 0 \end{array}\right] u(t)
\end{aligned} \tag{8.7}
$$

donde el número positivo ϵ es muy pequeño y es escogido de tal manera para garantizar la aproximación de la acción derivativa que caracteriza el inverso izquierdo (8.6), mientras que el número positivo β es escogido de tal forma para garantizar la convergencia de la aproximación exponencial.

8.3. Detección e identificación de fallas via generación de residuos

En esta sección nos ocupamos del problema sobre detección e identificación de fallas para el sistema con fallas (8.3) utilizando la *formulación geométrica del PFDFBJ*.

Las fallas son detectadas e identificadas hallando la proyección de la salida $r(t)$ del observador de estado:

$$
\begin{aligned}
\dot{w}(t) &= (A + DC)w(t) - Dy(t) + Bu(t) \\
r(t) &= Cw(t) - y(t)
\end{aligned} \tag{8.8}
$$

Como el par (C, A) es observable, entonces del algoritmo CAISA obtenemos:

$$\mathcal{W}_1^* = \text{Im } L_1 \; ; \; \mathcal{W}_2^* = \text{Im } L_2$$

entonces

$$
\begin{aligned}
C\mathcal{W}_1^* &= C\text{Im } L_1 = \text{Im } \left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \end{array}\right]^T \\
C\mathcal{W}_2^* &= C\text{Im } L_2 = \text{Im } \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \end{array}\right]^T
\end{aligned}
$$

por lo tanto

$$C\mathcal{W}_1^* \cap C\mathcal{W}_2^* = \{0\}$$

Entonces por el Teorema 5 de la sección 2.2.5 existe una solución para el *PFDFBJ*.

Y de la sección 2.2.6 tenemos que *la matriz de ganancia* D del observador (8.8) está dada por:

$$D = -Al(Cl)^{-1}$$

$l = [l_3, l_4] = [A^{\mu_3} L_3, A^{\mu_4} L_4]$, donde μ_3 y μ_4 son los números enteros más pequeños tales que $CA^{\mu_3} L_3 \neq 0$ y $CA^{\mu_4} L_4] \neq 0$. En este caso $\mu_3 = \mu_4 = 0$.

Por lo tanto l=$[l_3, l_4] = [L_3, L_4] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, entonces $Cl = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y

$$D = 0.0456 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Tomando $\mathcal{W}_3 = \mathcal{W}_3^*$ y $\mathcal{W}_4 = \mathcal{W}_4^*$, se tiene que:

$$\begin{aligned} (A + DC)\mathcal{W}_3 &= \text{Im} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \subset \mathcal{W}_3 \\ (A + DC)\mathcal{W}_4 &= \text{Im} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \subset \mathcal{W}_4 \\ \text{Im } L_3 &\subset \mathcal{W}_3 \\ \text{Im } L_4 &\subset \mathcal{W}_4 \\ C\mathcal{W}_3 \cap C\mathcal{W}_4 &= \{0\} \end{aligned}$$

Como la matriz D y los subespacios $\mathcal{W}_3$ y$\mathcal{W}_4$ satisfacen las condiciones geométricas (4.4), (4.5) y (4.6) entonces el residuo $r(t)$ generado por cada falla diferente es confinado a un subespacio independiente del espacio de salida $\mathcal{Y}$.

Como $C\mathcal{W}_3 = \text{Im} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $C\mathcal{W}_4 = \text{Im} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, entonces el espacio de salidas es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ y

$$(C\mathcal{W}_3 \oplus C\mathcal{W}_4)^\perp = \{0\}$$

Sean $r_3(t)$ y $r_4(t)$ los residuos generados por cada falla $m_3(t)$ y $m_4(t)$ respectivamente. Entonces

- $r_3(t) \in C\mathcal{W}_3$ y $r_4(t) \in C\mathcal{W}_4$
- $r(t) = r_3(t) + r_4(t)$
- $r(t) \in C\mathcal{W}_3 \oplus C\mathcal{W}_4$

Sean $H_3 : \mathcal{Y} \longrightarrow C\mathcal{W}_3$ y $H_4 : \mathcal{Y} \longrightarrow C\mathcal{W}_4$ las proyecciones de $r_3(t)$ y $r_4(t)$ sobre cada subespacio de salida $C\mathcal{W}_3$ y $C\mathcal{W}_4$ respectivamente, cuyas representantes matriciales son:

$$\overline{H}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \overline{H}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

8.4. Comparaciones y simulaciones

En esta sección comparamos el reconstructor aproximado (8.7) con el observador de estado de orden completo (8.8). Para ello, implementamos el reconstructor de modos de fallas en la plataforma MatLab–Simulink para simular el sistema monitoreado cuando se presentan las fallas.

Para la detección e identificación de fallas escogimos como el primer modo de falla $m_3(t)$ una función escalón de amplitud igual a 2, iniciando a los 8 segundos. Para el segundo modo de falla $m_4(t)$ escogimos una función seno defasado de amplitud igual a 1, iniciando también a los 8 segundos.

Como podemos ver las Figuras 8.2 y 8.3 la detección y aislamiento de falla utilizando la técnica de invertibilidad por la izquierda tiene un comportamiento muy preciso. Es decir, los modos de fallas son reconstruidos de una manera casi fidedigna. Para el reconstructor fijamos el parámetro de precisión $\epsilon = 1/50$ y el parámetro de convergencia $\beta = 10$. Note en la Figura 8.3 la leve oscilación del segundo modo de falla reconstruido. Esta oscilación puede ser minimizada incrementando el valor de β.

En cuanto a la detección y aislamiento de fallas basado en un observador de estado, podemos ver en la Figura 8.4 cómo el primer modo de falla es detectado e identificado. En la Figura 8.5 se muestra el residuo correspondiente al segundo modo de falla.

En la comparación de ambos métodos, podemos ver la ventaja de la técnica basada en la invertibilidad por la izquierda, pues este método además de proporcionar la detección e identificación de los modos de fallas, también reconstruye estos modos.

Otra ventaja de la técnica de reconstrucción es que no está restringido por las condiciones iniciales del sistema monitoreado, pues con un valor conveniente de β los efectos de las condiciones iniciales no aparecen a la salida del reconstructor, mientras que la técnica basada en el observador de estado depende de la condición $e(0) = w(0) - x(0)$.

Eliminando las condiciones iniciales (bajo algunas restricciones estructurales) es posible obtener un observador de estado estable (se puede verificar fácilmente que el generador residual de nuestro ejemplo es inestable), sin embargo, en la técnica basado en la reconstrucción no hay restricción de estabilidad debido al lazo abierto involucrado en esta técnica.

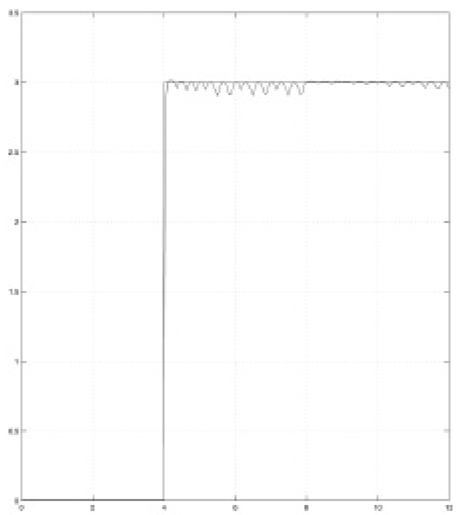

Figura 8.2

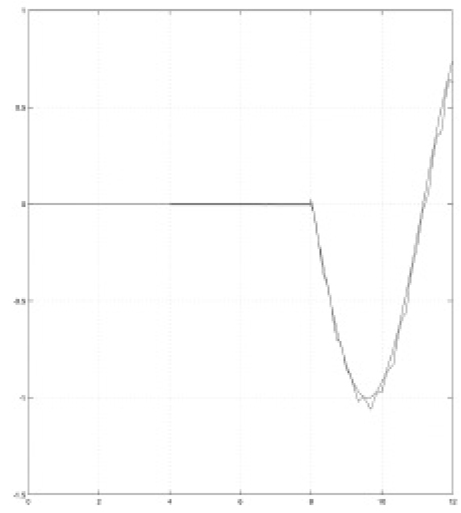

Figura 8.3

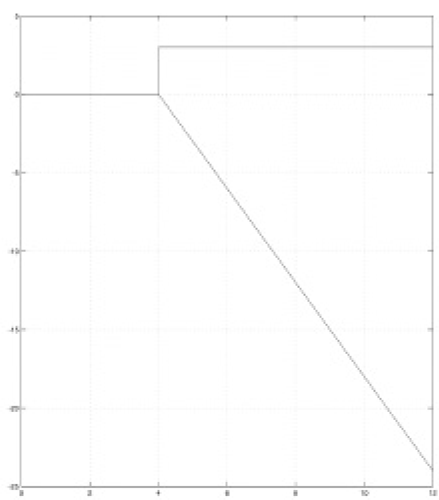

Figura 8.4

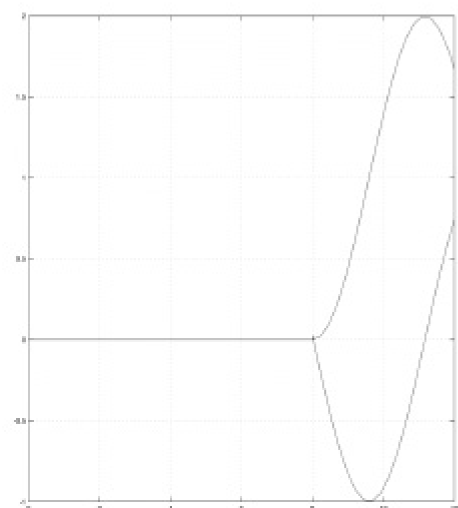

Figura 8.5

8.5. Conclusión

Hemos ilustrado la detección e identificación de fallas considerando estas fallas como entradas desconocidas (modos de fallas) reconstruidas. Se utilizó un reconstructor que es una aproximación exponencial del sistema inverso izquierdo no propio del sistema monitoreado. Comparamos este reconstructor con un filtro generador de residuos y mostramos que la técnica de reconstrucción de entradas desconocidas ofrece ciertas ventajas: principalmente, la independencia del inversor con respecto a las condiciones iniciales del sistema monitoreado y por otra parte, la estabilidad no aparece como restricción en el problema.

Estas ventajas caracterizan a este enfoque de detección en comparación con el método basado en la utilización de observadores de estado (generación de residuos).

Conclusiones y Perspectivas

En esta tesis vimos que cuando todos los ceros de un sistema estrictamente propio son Hurwitz, podemos hallar una solución al *problema de detección de fallas* aplicando la formulación geométrica desarrollado por Massoumnia [59]. Pero si existe un cero no Hurwitz, al cancelarlo genera un modo interno inestable no controlable. Si el sistema es observable, entonces podemos estabilizarlo con una inyección de salida adicional con la consecuencia de la pérdida de invariancia del modo estabilizado.

Para hallar una solución al *problema de detección de fallas*, en el caso de ceros no Hurwitz, sin que haya pérdida de invariancia de los modos estabilizados, desarrollamos un método que consiste en descomponer al sistema estrictamente propio como la cascada de un sistema *estrictamente propio de polos* y en un sistema *estrictamente no propio de ceros (no Hurwitz)*.

Este resultado de separación de polos y ceros se aplicó al problema de desacoplamiento de fallas. Para ello primero se demostró que el sistema *estrictamente propio de polos* es *invertible a la izquierda DT* y que el sistema *estrictamente no propio de ceros* es *invertible a la izquierda MT*.

En el caso del dominio de la frecuencia la *invertibilidad izquierda* está relacionada únicamente con la Función de Transferencia del sistema (condiciones iniciales nulas). Por lo que solamente es afectada por la estructura algebraica interna del sistema.

Dado que en el dominio del tiempo las condiciones iniciales son tomadas en cuenta, entonces el aspecto funcional de la entrada es un factor importante. Es decir, las entradas que excitan los ceros observables jamás podrán ser reconstruidas por técnicas de inversión.

Mostramos a través de un ejemplo, el cual resultó ser *invertible a la izquierda MT*, que existe una entrada que no es observable a la salida, y así esta entrada no puede ser reconstruida, ni por técnica de inversión ni por técnica de observación.

Entonces debido a esto, se aplica una inversa izquierda DT al sistema de polos y mediante la matriz adjunta se desacopla al sistema de ceros.

Aportaciones

Las principales aportaciones de este trabajo son:

- Se definió la invertibilidad izquierda en el dominio del tiempo y se caracterizó geométrica y estructuralmente.
- Se dio la equivalencia del sistema original a la conexión en cascada de un sistema de ceros y un sistema de polos, es decir:

1. Un *sistema estrictamente propio de polos* que contiene todos los polos del sistema y ningún cero, teniendo la propiedad de invertibilidad a la izquierda en el dominio del tiempo.
2. Un *sistema estrictamente no propio de ceros (no Hurwitz)* cuya Matriz de Transferencia es invertible a la izquierda.

- Diagonalización del desacoplador de fallas conservando los ceros no Hurwitz.

Publicaciones

Los artículos publicados con respecto a este trabajo de tesis se encuentran en los apéndices de esta tesis. Enseguida se expone un resumen de cada uno de ellos:

Figueroa M., M.Bonilla, M. Malabre and J.C Martínez G. *On Failure Detection by Inversion Techniques*. **43rd IEEE Conference on Decision and Control. December, 2004. Bahamas EEUU**

En este artículo se considera el problema de detección y reconstrucción de fallas para sistemas lineales invariantes en el tiempo, con soluciones generalizados basados sobre la inversa izquierda del sistema inicial. Como la condición inicial del estado del sistema observado no puede ser cero, la condición clásica para invertibilidad por la izquierda de funciones de transferencias no es suciente para nuestro propósito.

Los teoremas principales proporcionan las condiciones, geométricas y estructurales, necesarias y sucientes para la existencia de un sistema inverso por la izquierda. Con estos teoremas se diseña un detector y reconstructor de fallas.

Se da un contraejemplo para ilustrar que la propiedad clásica de invertibilidad por la izquierda no es suciente cuando el modo de falla corresponde a un cero invariante.

Bonilla M., M.Figueroa and M.Malabre. *Time Domain Left Invertibility: Application to Failure Detection*. **2nd IFAC SYMPOSIUM on SYSTEM, STRUCTURE and CONTROL. December 8-10, 2004. Oaxaca, México**

En este artículo se considera el problema de recobrar a la salida, para todo tiempo $t \geq 0$, una entrada desconocida, con las condiciones iniciales no necesariamente nulas. En este caso la invertibilidad izquierda de funciones de transferencia no es suficiente.

Se proporcionan las condiciones necesarias y suficientes para la inversión por la izquierda cuando se trabaja en el dominio del tiempo.

M. Bonilla, M.Malabre and M.Figueroa G. *Time Domain Right Invertibility*. **2006 American Control Conference. Silver AnniversaryACC. Minneapolis, Minnesota USA. June 14-16, 2006**

Dos poderosas herramientas utilizadas en la Teoría de Sistemas para síntesis y análisis son el sistema inverso derecho y el sistema inverso izquierdo (en el caso de que existan).

El sistema inverso derecho es usado en control, por ejemplo, para seguir señales de referencia, mientras que el sistema inverso izquierdo es usado para observación, por ejemplo, para reconstruir señales particulares que se presentan en el sistema.

En este artículo se estudia la invertibilidad derecha en el dominio del tiempo. Para esto primero se revisan los principales resultados sobre la invertibilidad derecha desde dos puntos de vista: dominio en el tiempo y la función de transferencia.

Por último se consideran las dualidades entre invertibilidad derecha e invertibilidad izquierda y se dan las condiciones estructurales bajo las cuales se presentan estas dualidades.

M.Bonilla E., M.Figueroa G. and M.Malabre. *Solving the Diophantine Equation by State Space Inversion Techniques: An illustrative Example*. **2006 American Control Conference. Silver Anniversary ACC. Minneapolis, Minnesota USA. June 14-16, 2006**

Uno de los problemas básicos de control es el relacionado con la asignación de polos. La solución de este problema por retroalimentación de estado es muy simple cuando se trabaja en el Espacio de Estados. En el caso de retroalimentación a la salida, el problema es usualmente abordado con los enfoques Polinomial y de Factorización. En el enfoque Polinomial este problema se resuelve con la solución de una Ecuación Diofantina, y en el enfoque de Factorización también se necesita resolver una Ecuación Diofantina, pero en el anillo de funciones racionales propias estables.

El uso de la Ecuación Diofantina para resolver problemas de control en los enfoques Polinomial y de Factorización es muy útil, pero cuando se trata de hallar una solución particular no es siempre directo, particularmente en el enfoque de Factorización.

En este artículo se propone la síntesis de un procedimiento para resolver la Ecuación Diofantina en el enfoque de Factorización basado en la técnica de inversión en el espacio de estados. Para claricar las ideas principales que se encuentran detrás de esta técnica de inversiíon, este aníalisis se limita a un ejemplo ilustrativo.

M. Figueroa G., J. C. Martínez G., M. Bonilla E. and M. Malabre. *Illustrating an inverse-based failure detection and identification technique based on reconstruction of unknown inputs*. **17th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems. July 24-28, 2006, Kyoto, Japan**

En este artículo se aborda un problema sobre detección e identicación de fallas a través de un ejemplo que consiste de un sistema de flujo que consta de cuatro tanques hidráulicos interconectados. Este sistema es afectado por dos clases de fallas: fugas en los tanquesy taponamientos en los ductos. Estas dos clases de fallas son consideradas como entradas desconocidas que afectan el sistema monitoreado.

Para reconstruir estas entradas desconocidas se utiliza el método de detección basado en el sistema inverso izquierdo del sistema monitoreado. Este método produce un filtro detector derivativo el cual es implementado vía aproximación exponencial.

Posteriormente se hace una comparación entre este filtro y el detector clásico llamado observador de estado de orden completo (generador residual). Esta comparación se lleva a cabo simulando el sistema monitoreado en la plataforma Matlab TM+Simulink TM cuando se presentan las fallas.

M. Bonilla E., M. Figueroa G., M. Malabre and J.C Martínez G. *Input Decoupling by Left Invertibility Techniques: Failure Decoupling Problem with Stability* **(SOMETIDO)**

En este artículo se aborda el Problema de Desacoplamiento de Fallas, el cual consiste en hacer un desacoplamiento en las trayectorias de entrada-salida del observador de estado. Se resuelve el Problema de Desacoplamiento de Fallas restringido a la conservación de estabilidad, es decir, para el caso cuando se presentan ceros no Hurwitz.

Perspectivas

Unas perspectivas posibles de este trabajo de tesis son las siguientes:

1. La relajación de las condiciones encontradas para resolver el problema parcial de *desacoplamiento de fallas*.

2. El estudio de la posible utilidad de los resultados duales, expuestos en este trabajo de tesis, en la teoría de sistemas de control.

3. Estudiar un filtro detector dinámico cuya existencia requiere de la satisfacción de ciertas condiciones necesarias y suficientes basadas en propiedades de rango de ciertas matrices de transferencia, a diferencia de resultados ya clásicos basados en la estructura al infinito del sistema en cuestión. Este es un problema dual del problema de desacoplamiento de bloques por precompensación. Hautus y Heymann [54] dieron la solución general de este problema para el caso de precompensación dinámica sin la restricción de controlabilidad del par (A,B). Posteriormente Malabre y Torres [55] desarrollaron un trabajo para la precompensación en el caso general utilizando conceptos geométricos y propiedades de la matriz sistema. Para el problema dual la no restricción de controlabilidad del par (A,B) implica la no restricción de observabilidad del par (A,C). Entonces tendremos un filtro detector más general que un observador de estado, pues para el diseño de este observador es necesario que el par (A,C) sea observable.

Bibliografía

[1] **Aling, H. and J.M. Schumacher (1984).** *A nine-fold canonical decomposition for linear systems.* International Journal of Control, 39(4), pp.779-805.

[2] **Aplevich J.D. (1981).** *Time-Domain Input-Output Representations of Linear Systems.* Automatica, Vol.17, No.3, pp.509-522.

[3] **Armentano, V.A. (1986).** *The pencil* $(sE - A)$ *and controllability-observability for generalized linear systems: a geometric approach.* SIAM Journal on Control and Optimization, 24(4),pp.616-638.

[4] **A. S. Willsky (1976).** *A survey of design methods for failure detection in dynamic systems.* Automatica, Vol.12, pp.601-611.

[5] **Basile, G. and G. Marro (1992).** *Controlled and Conditioned Invariants in Linear System Theory.* Prentice Hall.

[6] **Beard, R.V. (1971).** *Failure accommodation in linear systems through self–reorganization.* Ph.D. dissertation, Dep. Aeronautics and Astronautics, Mass. Inst. Technol., Cambridge, MA, Feb. 1971.

[7] **Bernhard, P.(1982).** *On singular implicit dynamical systems.* SIAM Journal on Control and Optimization, 20(5), pp.612-633.

[8] **Bonilla, M. and M.Malabre (1990).** *One side invertibility for implicit descriptions.* In 29th Conference on Decision and Control, pp.3601-3602.

[9] **Bonilla, M. and M.Malabre (1991).** *Variable Structure Systems via Implicit Descriptions.* lst European Control Conference, Grenoble France, 2-5 July.

[10] **Bonilla, M. and M.Malabre (1994).** *Geometric Characterization of Lewis's Structure Algorithm.* Circuits, Systems and Signal Processing, special issue on "Implicit and Robust Systems", 13(2-3), pp.255-272.

[11] **Bonilla, M. and M.Malabre (1993).** *External Reachability (Reachability with Pole Assignment by P.D. Feedback) for Implicit Descriptions.* Kybernetica Vol. 29 No.5, pp. 449-510, 1993.

[12] **Bonilla M y Malabre M (1995).** *Geometric Minimization under External Equivalence for Implicit Descriptions.* Automatica, Vol. 31, No. 6, pp. 897-901, 11995.

[13] **Bonilla, M. and M.Malabre (1997).** *Structural Matrix Minimization Algorithm for Implicit Descriptions*. Automatica, 33(4), pp.705-710.

[14] **Bonilla, M., M.Malabre and M.Fonseca (1997).** *On the approximation of non-proper control laws*. Int. J. Control, Vol. 68, No.4, pp.775-796.

[15] **Bonilla M and Malabre M (1999).** *Necessary and Sufficient Conditions for Disturbance Decoupling with Stability Using PID Control Laws*. IEEE Transactions On Automatic Control, Vol. 44, No.6, pp.1311-1315.

[16] **Bonilla M and Malabre M (2000).** *Proportional and Derivative State Feedback Decoupling of Linear Systems*. IEEE-TAC, Vol. 45, No. 4, pp. 730-733, 2000.

[17] **Bonilla M and Malabre M (2000).** *More about non square implicit descriptions for modelling and Control*. Proceedings of the 39th IEEE CDC, pp.3642-3647. Sydney Australia, December 12-15, 2000.

[18] **Bonilla M and Malabre M (2001).** *Structural Conditions for Disturbance Decoupling with Stability using proportional and Derivative Control Laws*. IEEE-TAC, Vol. 46, No. 1, pp. 160-165, 2001.

[19] **Bonilla M and Malabre M (2003).** *On the control of linear systems having internal variations*. Automatica 39(2003) 1989-1996.

[20] **Brunovsky P.(1970).** *A classification of linear controllable systems*. Kybernetika, Vol. 6, pp. 173-188.

[21] **Campbell, S.L. (1982).** Singular Systems of Differential Equations II. Pitman.

[22] **Cobb, D. (1984).** *Controllability, Observability and Duality in Singular Systems*. IEEE Transactions on Automatic Control. AC-29(12), pp.1076–1082.

[23] **Cheang Wong Julia Angélica (1994).** *Uso de derivadores (y aproximaciones) para asignar polos y rechazar perturbaciones a la salida en sistemas lineales invariantes en el tiempo*. Tesis de Maestría en Ciencias de Ingeniería Eléctrica. CINVESTA-IPN.

[24] **Figueroa, M., M. Bonilla, M. Malabre and J.C. Martínez (2004).** *On failure detection by inversion techniques*. Submitted to: 43rd Conference on Decision and Control.

[25] **Fliess (1989).** *Geometric interpretation of the zeros and of the hidden modes of a constant linear system via a renewed realization theory*. Proc. IFAC Workshop on System Structure and Control: State Space and Polynomial Methods, September, Prague, 209-213.

[26] **Fliess (1990).** *Some basic structural properties of generalized linear systems*. Systems and Control Letters 15, pp.391-396.

[27] **Francis, B.A. and W.M. Wonham (1975)**. *The role of transmission zeros in linear multivariable regulators*. International Journal of Control, 22, pp.657–681.

[28] **Frankowska H. (1990).** *On Controllability and Observability of Implicit Systems.* Systems and Control Letters 14, pp.219-225.

[29] **Gantmacher, F.R. (1977).** *The Theory of Matrices.* Vol. II, New York: Chelsea.

[30] **W. Ge and C.Z. Fang (1989).** *Extended robust observation approach for failure isolation.* Int. J. Control, vol. 49, no. 5.

[31] **Geerts T. (1993).** *Invariant subspaces and invertibility properties for singular systems: The general case.* Linear Algebra and its Applications, vol. 183, pp. 61-88.

[32] **Geerts T. (1993).** *Solvability conditions, consistency, and weak consistency for linear differential-algebraic equations and time-invariant singular systems: The general case.* Linear Algebra and its Applications, vol. 181, pp. 111-130.

[33] **Grimm J. (1984).** *Application de la Théorie des Systèmes Implicites à l'Inversion des Systèmes* Proc. 6th Internat. Conf. on Analysis and Optimization of Systèmes, Lecture Notes in Control and Inform. Sci y 63, pp. 142-156., 1984.

[34] **H. L. Jones (1973).** *Failure detection in linear systems.* Ph.D. dissertation, Dep. Aeronautics and Astronautics, Mass. Inst. Technol., Cambridge, MA, Agosto 1973.

[35] **Hirschorn (1979).** *Invertibility of nonlinear control systems.* SIAM J. Control Opt.17, pp.289-297.

[36] **Hirschorn (1979).** *Invertibility for multivariable nonlinear control systems.* IEEE Trans. Aut. Contr. AC-24, pp.855-865.

[37] **Hou, M. and R.J. Patton (1998).** *Input Observability and Input Reconstruction.* Automatica, 34(6), pp.789-794.

[38] **Isermann, R. (1984)**. *Process fault detection based on modeling and estimatio methods–A survey.* Automatica, 20, pp.387-404.

[39] **Isermann, R. (2004)**. *Model-based fault detection and diagnosis-status and applications.* Plenary lecture 16^th IFAC Symposium on Automatic Control Aerospace, 14-18 June, 2004. St. Petersburg, Russia.

[40] **Jones, H.L. (1973).** *Failure detection in linear systems.* Ph.D. dissertation, Dep. Aeronautics and Astronautics, Mass. Inst. Technol., Cambridge, MA, Aug. 1973.

[41] **Kucera, Zagalak P. (1988).** *Towards a Fondamental Theorem of State Feedback for Singular Systems.* Automatica, Vol. 24, No.5, pp.653-658

[42] **Kuijper, Schumacher J.M. (1990).** *Realization of Autoregressive Equations in Pencil and Descriptor Form.* SIAM J. Control and Optimization Vol. 28, No.5, pp.1162-1189, September 1990.

[43] **Kuijper, M. (1992).** *Descriptor representations without direct feedthrough term.* Automatica, 28, pp.633-637.

[44] **Kuijper, M. (1992).** *First-order representations of linear systems.* PhD thesis, Katholieke Univresiteit Brabant, Amsterdam.

[45] **Lebret, G., and Loiseau, J.J. (1994).** *Proportional and proportional-derivative canonical forms for descriptor systems with outputs.* Automatica, 30(5), 847-864.

[46] **Lewis F.L (1983).** *Inversion of descriptor systems.* Proc. Acc, San Francisco, June, 1153-1158.

[47] **Lewis F.L (1986).** *A Survey of Linear Singular Systems.* Circuits, Systems and Signal Proc., Vol.5, No.1, pp.3-36.

[48] **Lewis F.L., Beauchamp G. (1987).** *Computation of subspaces for singular systems.* Proc. MTNS'87, Phoenix, June.

[49] **Lewis, F.L. (1992).** *A tutorial on the geometric analysis of linear time-invariant implicit systems.* Automatica, 28(1), pp.119-137.

[50] **Lizarzaburu (1978).** *Les systemes inverses et leur application aux problems de decouplage* These pour obtenir le diplome de Doctorat de 3iemé Cycle.

[51] **Loiseau J.J. (1985).** *Some geometric considerations about the Kronecker normal form.* INT.J. Control, 42, 6, 1411-1431.

[52] **Luenberger D.G. (1978).** *Time-Invariant Descriptor Systems* Automatica, 14, 473-480.

[53] **MacFarlane, A.G.J. and N. Karcanias (1976).** *Poles and zeros of linear multivariable systems: a survey of the algebraic, geometric and complex-variable theory.* International Journal of Control, 24, pp.33-74.

[54] **M. L. J. Hautus and M. Heymann (1983).** *Linear feedback decoupling Transfer function analysis.* IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.28, pp.823-832.

[55] **M. Malabre and J. Torres (2005).** *Block Decoupling by Precompensation Revisited.* Sometido.

[56] **Malabre M, 1989.** *On infinite zeros for generalized systems.* MTNS'89, Amsterdam, June 1989.

[57] **Malabre M, 1989.** *Generalized Linear Systems: Geometric and Structural Approaches.* Linear Algebra and its Applications. Vol. 122/123/124 pp. 591-621.

[58] **Malabre M, Rabah R. 1989.** *Zeros at Infinity for Infinite Dimensional Systems.* MTNS'89, Amsterdam, June 1989.

[59] **M.A. Massoumnia (1986).** *A Geometric Approach to the Synthesis of Failure Detection Filters.* IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.31, pp.839-846.

[60] **Massoumnia, M.A., G.C. Verghese, and A.S. Wilsky (1989).** *Failure Detection and Identification*. IEEE Transactions on Automatic Control, 34(3), pp.316-321.

[61] **Moog C. H. (1988).** *Nonlinear Decoupling and Structure at Infinity*. Math. Control Signals Systems 1 (3): 257-268.

[62] **Morse, A.S., 1973.** *SIAMJ. Control, 11, 446; 1976, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems Vol. 131 (Berlin: Springer-Verlag), pp. 61-74.*

[63] **Niemann H.H., Saberi A., Stoorvogel A.A., and Sannuti P. (1999).** *Exact, almost and delayed fault detection - An observer based approach*. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 4(4),pp. 215-238.

[64] **Ozcaldiran K. (1986).** *A Geometric Characterization of the Reachable and Controllable Subspaces of Descriptor Systems*. Circuits, Systems and Signal Processing, Vol. 5, No. 1, pp. 37-48.

[65] **Pacheco J., Bonilla M. and Malabre M. (2003).** *Proper Exponential Approximation for Non Proper Compensators: The MIMO Case*. 42nd IEEE CDC, pp.110-115. Maui Hawaii, December 9-12.

[66] **Rosenbrock, H.H. (1970).** *State-Space and Multivariable Theory*. London: Nelson.

[67] **Saberi A., Stoorvogel A.A., Sannuti P. and Niemann H.H. (2000)** *Fundamental problems in fault detection and identification*. International Journal of Robust and Nonlinear Control, Vol. 10, pp.1209-1236.

[68] **Schumacher, J. M. (1988)** *Transformations of linear systems under external equivalence*. Linear Algebra App., 102, 1-34.

[69] **Silverman L.M. (1969).** *Inversión of multivariable linear systems.* IEEE Trans on Automat. Contr., AC-14, 3, 270-276.

[70] **Silverman L.M., Kitapci A. (1983).** *System Structure at infinity*. Systems and Control Letters, 3, pp.123-131, 1983.

[71] **Singh S.N. (1981).** *A modified algorithm for invertibility in nonlinear systems.* IEEE Trans. Aut. Contr. AC-26, pp. 595-598.

[72] **Tan S., Vanderwalle J. (1988).** *Inversion of Singular Systems*. IEEE TCS, Vol. 35, No.5, pp.538-587, May 1988.

[73] **Verghese G. C., Lévy B.C., Kailath T. (1981).** *A Generalized State-Space for Singular Systems*. IEEE. Trans. Automat. Control, Vol. AC-26, No.4, pp.811-831.

[74] **Willems J.C. (1982).** *Almost invariant subspaces: An approach to high gain feedback design-Part II: almost conditionally invariant subspaces*. IEEE Trans. Automat. Contr., vol.AC-27, pp. 1071-1084, Oct. 1982.

[75] **Willems J.C. (1983).** *Input-output and state space representations of finite-dimensional linear time-invariant systems.* Linear Algebra and its Applications, Vol 50, pp.581-608.

[76] **Willsky, A.S. (1976).** *A survey of design methods for failure detection in dynamic systems.* Automatica, 12, pp.601-611.

[77] **Wong, K.T. (1974).** *The eigenvalue problem $\lambda Tx + Sx$.*. Journal of Differential Equations, 1, pp.270-281.

[78] **Wonham, W.M. (1985).** *Linear Multivariable Control: A Geometric Approach.* 3rd ed.. Springer-Verlag. New York.

[79] **Yip E.L., Sincovec R.F. (1981).** *Solvability, Controllabillity and Observability of continuos descriptor systems.* IEEE Trans. Automat. Control, Vol. AC-26, No.3, pp.702-707.

[80] **M. L. J. Hautus and M. Heymann (1978).** *Linear feedback. An algebraic approach.* SIAM Journal on Control and Optimization, Vol. 7, pp. 50-63.

[81] **J. W. Grizzle and A. Isidori (1989).** *Block Noninteracting Control with Stability via Static State Feedback.* Mathematics of Control, Signals, and Systems, Vol. 2, pp. 315-341.

[82] **Jean-François CAMART (2000).** *Contribution à l'étude des contraintes structurelles du rejet de pertubation at du découplage : résolutions exactes et atttténuations optimales* . Thèse de DOCTORAT de l'Université de Nantes, France, 30 de novembre.

Apéndice A

Figueroa M., Bonilla M., Malabre M. and Martínez J.C

On Failure Detection by Inversion Techniques.

43rd IEEE Conference on Decision and Control. December, 2004. Bahamas EEUU.

43rd IEEE Conference on Decision and Control
December 14-17, 2004
Atlantis, Paradise Island, Bahamas

On Failure Detection by Inversion Techniques

M. Figueroa G., M. Bonilla E., M. Malabre and J.C. Martínez G.

***Abstract*— This paper considers the failure detection and reconstruction problem, for linear time invariant systems, with generalized solutions based on left inverse techniques.**

NOTATION

Script capitals $\mathcal{V}, \mathcal{W}, \ldots$, denote linear spaces with elements $v, w, \ldots$; when $\mathcal{V} \subset \mathcal{W}$, $\frac{\mathcal{W}}{\mathcal{V}}$ or $\mathcal{W}/\mathcal{V}$ stands for the quotient space $\mathcal{W}$ modulo $\mathcal{V}$; the external direct sum of some given spaces $\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_r$ is written as $\mathcal{X}_1 \oplus \cdots \mathcal{X}_r$. Given a linear map $X{:}\mathcal{V} \to \mathcal{W}$, Im $X = X\mathcal{V}$ denotes its image, Ker X denotes its kernel, $X^{-1}\mathcal{T}$ the inverse image of $\mathcal{T}$ by the linear map (possibly not invertible) X. Given a time variable $x(t)$, we denote the first and second time derivatives by $\dot{x}$, $\ddot{x}$ respectively; for derivatives of higher orders, say $i > 2$, we write $x^{(i)}$ ($i - th$ times).

I. INTRODUCTION

In this paper we are interested in model-based fault detection and isolation techniques, and we are particularly concerned by observer-based fault detection synthesized using inversion techniques. We tackle here the deterministic linear time-invariant case when applying generalized observers. These filters detect (actuator) failures modeled as unknown inputs (failure modes) and we are concerned by direct reconstruction of the fault vector. Since the solvability conditions for the existence of observer-based detectors are very restrictive (constraints in terms of separability of certain vector subspaces, see for instance Massoumnia [11]), some less restrictive alternatives have been recently considered by the fault detection research community. These alternatives are mainly focused in almost direct reconstruction of the fault vector with an arbitrary high level of accuracy (measured in terms of a certain norm, see for instance Niemann *et al* [12]) and Saberi *et al* [15]). Failure detection and estimation is highly simplified through the use of left inverses. This is the new point of view that we propose in this contribution. Since our objective is to recover (at any time t) the information on the failure input from the output (and control input) signal(s), we first revisit the context of left invertibility and characterize (both geometrically and in a structural way) the time domain (TD) left invertibility. Based on this, the necessary and sufficient conditions for the generalized filter (based on inversion) that we propose for exact reconstruction, are simple and the synthesis procedure is based on the use of derivators. In Section II we state the problem, Section III is devoted to some preliminaries. In Section IV we solve it, and in Section V we give equivalent structural characterizations, connected with the invariant zeros due to the failure input. Section VI proposes a complementary treatment when undesirable observable zeros occur due to the failure input. Section VII is devoted to conclusions.

M. Figueroa G. is preparing her PhD thesis under the co-direction of J.C. Martínez G. and M. Bonilla E. She is sponsored by CONACyT–México. mfigueroa@ctrl.cinvestav.mx.

M. Bonilla E. and J.C. Martínez G. work at LAFMAA–CINVESTAV-IPN, Departamento de Control Automático. MEXICO. mbonilla@cinvestav.mx. martinez@ctrl.cinvestav.mx.

M. Malabre works at LAFMAA–IRCCyN, Institut de Recherche en Communications et Cybernétique de Nantes, CNRS UMR 6597, FRANCE. Michel.Malabre@irccyn.ec-nantes.fr.

II. PROBLEM STATEMENT

Let us consider the following state space description

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Lm(t) \quad ; \quad y(t) = Cx(t) \qquad (1)$$

where u is the input, y is the output, x is the state and m is a given failure. The linear maps are defined as $A{:}\mathcal{X} \to \mathcal{X}$, $B : \mathcal{U} \to \mathcal{X}$, $L : \mathcal{M} \to \mathcal{X}$ and $C : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$; where $\mathcal{X}$, $\mathcal{U}$, $\mathcal{M}$ and $\mathcal{Y}$ are the state, input, failure and output spaces. In this paper we solve the following problem:

Problem 1: –Under which conditions can the failure $m(t)$ be detected and reconstructed, at any time t, using a generalized (non proper) filter based on inversion techniques?

To answer this question let us rewrite the state space description (1) in the following implicit description form: $\Sigma(\mathbb{E}, \mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}) : \mathcal{M} \oplus \mathcal{U} \to \mathcal{Y} \oplus \mathcal{U}$

$$\mathbb{E}\dot{\eta}(t) = \mathbb{A}\eta(t) + \mathbb{B}v(t) \quad ; \quad \bar{y}(t) = \mathbb{C}\eta(t) \qquad (2)$$

where $\mathbb{E} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$, $\mathbb{B} = \begin{pmatrix} L & B \\ 0 & -I \end{pmatrix}$, $\mathbb{C} = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$. Our new input is $v = \begin{pmatrix} m^T & u^T \end{pmatrix}^T$ and our new output is $\bar{y} = \begin{pmatrix} y^T & u^T \end{pmatrix}^T$; the descriptor variable is $\eta = \begin{pmatrix} x^T & u^T \end{pmatrix}^T$.

III. PRELIMINARIES

A. Transfer Function Matrix Left Invertibility

When dealing with a *transfer function matrix* (*TFM*) the following definition for *left invertibility* is standard:

Definition 2: Let us consider a *transfer function matrix*, $T(\mathrm{s}) = C(\mathrm{sI} - A)^{-1}L$, with p rows and m columns. $T(\mathrm{s})$ is *TFM left invertible* if and only if its m columns are independent as rational functions of s, namely if and only if rank $T(\mathrm{s}) = m$.

This *transfer function matrix left invertibility* was geometrically characterized by Basile and Marro (see [3]) using the supremal (A, L) invariant subspace contained in Ker C, $\mathcal{V}_L^* = \sup\{\mathcal{V} \subset \text{Ker } C \mid A\mathcal{V} \subset \mathcal{V} + \text{Im } L\}$ [18], which is the limit of the non increasing algorithm

$$\mathcal{V}_L^0 = \mathcal{X} \ , \quad \mathcal{V}_L^{\mu+1} = \text{Ker } C \cap A^{-1}(\mathcal{V}_L^\mu + \text{Im } L) \qquad (3)$$

Theorem 3: [3] $T(s)$ is *TFM left invertible* if and only if:

$$\text{Ker } L = \{0\} \quad \text{and} \quad \text{Im } L \cap \mathcal{V}_L^* = \{0\} \tag{4}$$

Let us note that the geometric characterization (4) is also equivalent to the following one:

$$\text{Ker } L = \{0\} \quad \text{and} \quad \mathcal{R}_L^* = \{0\} \tag{5}$$

where $\mathcal{R}_L^*$ is the supremal controllability subspace contained in Ker C (see [18] for more details), which is the limit of

$$\mathcal{R}_L^0 = \{0\} \quad ; \quad \mathcal{R}_L^{\mu+1} = \mathcal{V}_L^* \cap (A\mathcal{R}_L^\mu + \text{Im } L) \tag{6}$$

B. Zero Structure

In the 70's, pioneered by the work of Rosenbrock [14], there was a great interest about the zero structure of linear multivariable systems (see for example [10] and [7]). Later, Aling and Schumacher [1] proposed a complete geometric characterization of the zeros structures.

In this paper we shall be concerned with two particular subsets of the invariant zeros, namely the *transmission zeros* and the *input decoupling invariant zeros* (see [1]).

From [1], the total number of *transmission zeros* and *input decoupling invariant zeros*, here called *observable invariant zeros* (for shortness), is given by:

$$\#\ observable\ invariant\ zeros\ = \dim(\mathcal{V}_L^*/(\mathcal{R}_L^* + \mathcal{N})) \tag{7}$$

where $\mathcal{N} = \cap_{i=0}^{n-1} A^{-i}\text{Ker } C$ is the unobservable subspace.

C. Time Domain Left Invertibility

Since we work in the *time domain* (*TD*) framework, we take the following definition for *left invertibility*:

Definition 4: Let us consider a solvable[1] implicit system $\Sigma(F, G, H, D) : \mathcal{U} \to \mathcal{Y}$:

$$F\dot{x}(t) = Gx(t) + Hu(t) \quad ; \quad y(t) = Dx(t) \tag{8}$$

This system is called *TD left invertible* if and only if (i) there exists a system $\Sigma^i : \mathcal{Y} \to \mathcal{U}$ such that it is solvable in Im Σ and (ii) $\Sigma^i \circ \Sigma = I$. Σ^i is called a *TD left inverse* of Σ.

Fact 5: [5] If the implicit system (8) is solvable, then there exists a linear transformation $\Psi(\cdot) : \mathcal{U} \to \mathcal{X}$ solution of (8), namely: $F\dot{\Psi}(u(t)) = G\Psi(u(t)) + Hu(t)$ and $y(t) = D\Psi(u(t))$, for all admissible inputs u.

Lemma 6: [5] The implicit description (8) is *TD left invertible* if and only if Ker $D\Psi(\cdot) = \{0\}$.

Lemma 7: [5] If the implicit description (8) is *TD left (right) invertible* then one left (right) inverse system, $\Sigma^i : \mathcal{Y} \to \mathcal{U}$, it is the following:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ F & 0 \end{pmatrix}\dot{\xi}(t) &= \begin{pmatrix} D & 0 \\ G & H \end{pmatrix}\xi(t) + \begin{pmatrix} -\mathrm{I} \\ 0 \end{pmatrix}y(t) \\ w(t) &= \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I} \end{pmatrix}\xi(t) \end{aligned} \tag{9}$$

[1]Solvable means that for each input, $u \subset \mathcal{U}$, there exists *at least one* solution for the descriptor variable $x \in \mathcal{X}$.

D. Exponential modes

We know from Gantmacher [8] that for any pencil $[\lambda F - G]$, with $F : \mathcal{X} \to \underline{\mathcal{X}}$ and $G : \mathcal{X} \to \underline{\mathcal{X}}$, there exist bases of $\mathcal{X}$ and $\underline{\mathcal{X}}$ such that its associated block diagonal matrix (known as the Kronecker decomposition) is composed of four types of blocks, namely: (i) finite elementary divisors, (ii) infinite elementary divisors, (iii) column minimal indices, and (iv) row minimal indices.

The finite and infinite elementary divisors correspond to the proper (differential equations) and the non-proper (derivators) parts, respectively, of the system. The column and row minimal indices correspond respectively to the existence of degrees of freedom (more unknowns than equations) and to the null part of the system (state contributions which are always zero). In the particular case of regular systems, $\mathcal{X} \approx \underline{\mathcal{X}}$ and $det[\lambda F - G] \neq 0$, there only exist finite and infinite elementary divisors.

Wong [17] and Bernhard [4] have geometrically characterized the finite elementary divisors through the maximal (F, G) invariant subspace, $\mathcal{V}_{\mathcal{X},0}^* = \sup\{\mathcal{V} \subset \mathcal{X} \mid G\mathcal{V} \subset F\mathcal{V}\}$, which is the limit of the algorithm: $\mathcal{V}_{\mathcal{X},0}^0 = \mathcal{X}$, and $\mathcal{V}_{\mathcal{X},0}^{\mu+1} = G^{-1}F\mathcal{V}_{\mathcal{X},0}^\mu$. If λ is a finite-zero of the pencil $[\lambda F - G]$, there then exists an exponential mode characterized by a vector $v \in \mathcal{V}_{\mathcal{X},0}^*$ such that $Gv = \lambda Fv$.

Armentano [2] has geometrically characterized the global Kronecker decomposition. In the case of a regular pencil the finite elementary divisors $[\lambda I - J_i]$ (J_i being the corresponding Jordan matrices) are located in the restriction of $[\lambda F - G]$ to $\mathcal{V}_{\mathcal{X},0}^*$ in the domain and to $F\mathcal{V}_{\mathcal{X},0}^*$ in the codomain.

E. Particular Case

Let us consider the above results to system (2):

1) System (2) is *TD left invertible* if and only if $\bar{y}(t) = 0$, for all $t \geq 0$, implies $u(t) = 0$ and $m(t) = 0, \forall\, t \geq 0$.
2) If (2) is *TD left invertible* then a *TD left inverse* is

$$\mathbb{E}_i\dot{\xi}(t) = \mathbb{A}_i\xi(t) + \mathbb{B}_i\bar{y}(t) \quad ; \quad z(t) = \mathbb{C}_i\xi(t) \tag{10}$$

where $\mathbb{E}_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbb{A}_i = \begin{pmatrix} C & 0 & 0 \\ A & L & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}$, $\mathbb{B}_i = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & B \\ 0 & -I \end{pmatrix}$ and $\mathbb{C}_i = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}$. The maps are defined as: $\mathbb{E}_i : \mathcal{X}_e \to \underline{\mathcal{X}}_e$, $\mathbb{A}_i : \mathcal{X}_e \to \underline{\mathcal{X}}_e$, $\mathbb{B}_i : \mathcal{U}_e \to \mathcal{X}_e$ and $\mathbb{C}_i : \mathcal{X}_e \to \mathcal{Y}_e$; where $\mathcal{X}_e = \mathcal{X} \oplus \mathcal{M} \oplus \mathcal{U}$, $\underline{\mathcal{X}}_e = \mathcal{Y} \oplus \mathcal{X} \oplus \mathcal{U}$, $\mathcal{U}_e = \mathcal{Y} \oplus \mathcal{U}$, and $\mathcal{Y}_e = \mathcal{M} \oplus \mathcal{U}$.
3) If system (1) is observable then (10) is minimal under external equivalence (see [9]): (i) The matrix $\begin{pmatrix} \mathbb{E}_i & \mathbb{B}_i \end{pmatrix}$ is epic, (ii) the matrix $\begin{pmatrix} \mathbb{E}_i \\ \mathbb{C}_i \end{pmatrix}$ is monic and (iii) $\begin{pmatrix} \lambda\mathbb{E}_i - \mathbb{A}_i \\ \mathbb{C}_i \end{pmatrix}$ has full column rank for all

complex number λ if and only if this holds for matrix $\begin{pmatrix} C \\ \lambda I - A \end{pmatrix}$, namely: if and only if $\mathcal{N} = \{0\}$ [2]

4) Related with system (10) is the supremal $(\mathbb{E}_i, \mathbb{A}_i)$ invariant subspace, $\tilde{\mathcal{V}}^*_{\mathcal{X}_e,0} = \sup\left\{\tilde{\mathcal{V}} \subset \mathcal{X}_e | \mathbb{A}_i \tilde{\mathcal{V}} \subset \mathbb{E}_i \tilde{\mathcal{V}}\right\}$, which is the limit of the non increasing algorithm:

$$\tilde{\mathcal{V}}^0_{\mathcal{X}_e,0} = \mathcal{X}_e \quad ; \quad \tilde{\mathcal{V}}^{\mu+1}_{\mathcal{X}_e,0} = \mathbb{A}_i^{-1} \mathbb{E}_i \tilde{\mathcal{V}}^{\mu}_{\mathcal{X}_e,0}$$

5) Let us note that a necessary condition for (10) to be a *TD left inverse* of (2) is that $\tilde{\mathcal{V}}^*_{\mathcal{X}_e,0} = \{0\}$. Indeed, if this is not the case, problems occur with the initial conditions for the exponential modes (integrators), characterized by $\tilde{\mathcal{V}}^*_{\mathcal{X}_e,0}$ (*cf.* [2]) and in general $\Sigma^i(\Sigma(\cdot))$ will not be the identity operator.

IV. Solution to the Failure Detection Problem using Inversion Techniques

Theorem 8: Given a state description (1) then its associated implicit system (2) is *TD left invertible* and so, the failure detection problem by inversion techniques is solvable, if and only if Ker $L = \{0\}$ and Im $L \cap (\mathcal{V}^*_L + A\mathcal{V}^*_L) = \{0\}$. In order to prove Theorem 8 we need the two following Lemmas proved in the Appendix:

Lemma 9: If Im $L \cap (\mathcal{V}^*_L + A\mathcal{V}^*_L) = \{0\}$ and Ker L=$\{0\}$ then $\bar{y}(t) = 0$ implies $u(t) = 0$ and $m(t) = 0$, $\forall\ t \geq 0$.

Lemma 10: If Ker L=$\{0\}$ then $L^{-1}(\mathcal{V}^*_L + A\mathcal{V}^*_L) = \{0\}$ if $\tilde{\mathcal{V}}^*_{\mathcal{X}_e,0} = \{0\}$.

Proof: (Theorem 8)

1) **Let us first prove the sufficiency:** For this let us suppose that Ker L=$\{0\}$ and Im $L \cap (\mathcal{V}^*_L + A\mathcal{V}^*_L) = \{0\}$. Then by Lemma 9 we have that $u(t) = 0$ and $m(t) = 0$ $\forall$ $t \geq 0$, and thus, system (2) is *TD left invertible*.

2) **Let us now prove the necessity:** If Ker $L \neq \{0\}$ there then exists a $m \neq 0$ such that $Lm = 0$ which implies that there exists a non zero failure which is non observable at the output, and so, it is impossible to detect it. Therefore L has to be a monic map.

In order to prove the necessity of the second geometric condition, let us assume that system (2) is *TD left invertible*, then system (10) is one *TD left inverse*. If system (10) is a *TD left inverse* then it has no exponential modes, and thus $\tilde{\mathcal{V}}^*_{\mathcal{X}_e,0} = \{0\}$. Therefore by Lemma 10, we get the second geometric condition. ■

Our generalized solution to the Failure Detection problem then amounts to using the generalized system (10) (which indeed is a left inverse of (2) when the condition of the Theorem are fulfilled) where the first output reconstructs the failure signal. Procedures for implementing the derivative actions present in (10) can be found *e.g.* in [13].

In the next Section, we propose alternative conditions which are equivalent to those of Theorem 8 and which allow us to give a nice structural characterization of this result.

[2]If $\mathcal{N} \neq \{0\}$, we can work with the system quotiented by $\mathcal{N}$.

V. Maximal Observable Quotient System

Let $\Pi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}/\mathcal{N}$ be the canonical projection, then there exist unique maps $(\bar{A}, \bar{L}, \bar{C})$ such that:

$$\Pi A = \bar{A}\Pi \quad ; \quad \Pi L = \bar{L} \quad ; \quad C = \bar{C}\Pi \qquad (11)$$

Let $\overline{\mathcal{V}}^*_L$ be the supremal $(\bar{A}, \bar{L})$ invariant subspace contained in Ker $\bar{C}$, namely $\overline{\mathcal{V}}^*_L = \sup\{\overline{\mathcal{V}}_L \subset \text{Ker } \bar{C} \mid \bar{A}\overline{\mathcal{V}}_L \subset \overline{\mathcal{V}}_L + \text{Im } \bar{L}\}$; which is the limit of the following non increasing algorithm (for $\mu \geq 0$):

$$\overline{\mathcal{V}}^0_L = \mathcal{X}/\mathcal{N}, \quad \overline{\mathcal{V}}^{\mu+1}_L = \text{Ker } \bar{C} \cap \bar{A}^{-1}\left(\overline{\mathcal{V}}^{\mu}_L + \text{Im } \bar{L}\right) \quad (12)$$

Theorem 11: Given the system defined by the maps (A, L, C), let the quotient system be defined by the maps $(\bar{A}, \bar{L}, \bar{C})$. Then $(\mathcal{V}^*_L + A\mathcal{V}^*_L) \cap \text{Im}L = \{0\}$ and Ker $L = \{0\}$ if and only if $\overline{\mathcal{V}}^*_L = \{0\}$ and Ker $\bar{L} = \{0\}$.

To prove Theorem 11 we need the three following Lemmas proved in the Appendix:

Lemma 12: $(\mathcal{V}^*_L + A\mathcal{V}^*_L) \cap \text{Im}L = \{0\}$ and Ker $L = \{0\}$ if and only if $\mathcal{V}^*_L = \mathcal{N}$ and $L^{-1}(\mathcal{N} + A\text{Ker } C) = \{0\}$.

Lemma 13: The following equalities are always satisfied:

1) $\overline{\mathcal{V}}^*_L = \Pi\mathcal{V}^*_L$
2) $L^{-1}(\mathcal{N} + A\text{Ker } C) = \bar{L}^{-1}\bar{A}\text{Ker } \bar{C}$.

Lemma 14: $\mathcal{V}^*_L = \mathcal{N}$ and $L^{-1}(\mathcal{N} + A\text{Ker } C) = \{0\}$ if and only if $\overline{\mathcal{V}}^*_L = \{0\}$ and Ker $\bar{L} = \{0\}$.

Proof: (Theorem 11)

From Lemma 12, $(\mathcal{V}^*_L + A\mathcal{V}^*_L) \cap$ Im $L = \{0\}$ and Ker $L = \{0\}$ hold if and only if $\mathcal{V}^*_L = \mathcal{N}$ and $L^{-1}(\mathcal{N} + A\text{Ker } C) = \{0\}$, and from Lemma 14 if and only if $\overline{\mathcal{V}}^*_L = \{0\}$ and Ker $\bar{L} = \{0\}$. ■

Corollary 15: Given a state description (1) then its associated implicit system (2) is *TD left invertible* if and only if (1) is *TFM left invertible* w.r.t. m and it has neither *transmission zeros*, nor *input decoupling invariant zeros* w.r.t. m.

Proof:

1) Let us first suppose that (2) is *TD left invertible*. Then Theorem 8 implies that Ker $L = \{0\}$ and Im $L \cap \mathcal{V}^*_L = \{0\}$. This last condition is equivalent to Im $L \cap \mathcal{R}^*_L = \{0\}$, and from algorithm (6) we get $\mathcal{R}^*_L = \{0\}$. Since Ker $L = \{0\}$ and $\mathcal{R}^*_L = \{0\}$, we conclude from Theorem 3 that (1) is *TFM left invertible* w.r.t. m (recall the equivalence (5)).

On the other hand, from Theorem 11 we get: $\mathcal{V}^*_L =$ Ker Π $= \mathcal{N}$, which implies: $\dim(\mathcal{V}^*_L/(\mathcal{R}^*_L + \mathcal{N})) = \dim(\mathcal{V}^*_L/\mathcal{N})$ $= \dim(\mathcal{N}/\mathcal{N}) = \{0\}$. And then, from (7), there are neither *transmission zeros* nor *input decoupling invariant zeros* w.r.t. m, *i.e. no observable invariant zeros*.

2) Let us suppose that (1) is *TFM left invertible* w.r.t. m and it does not have any *observable invariant zero*. Then from (5) and (7) we have that Ker $L = \{0\}$, $\mathcal{R}^*_L = \{0\}$, and $\mathcal{V}^*_L = \mathcal{N}$.

Now since $\mathcal{N}$ is an A–invariant subspace: Im $L \cap (\mathcal{V}^*_L + A\mathcal{V}^*_L) =$ Im $L \cap \mathcal{V}^*_L$. Since $\mathcal{R}^*_L = \{0\}$ we have: Im $L \cap \mathcal{V}^*_L$ $= \{0\}$. Therefore, Ker $L = \{0\}$ and Im $L \cap (\mathcal{V}^*_L + A\mathcal{V}^*_L)$ $= \{0\}$; and thus, Theorem 8 implies that (2) is *TD left invertible*. ■

VI. Systems with Observable Zeros

Let us consider the following illustrative example:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ b_0 \end{pmatrix} m(t) \\ y(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x(t) \end{aligned}$$

with $b_0 \neq 0$. The external behavior of this system is given by the following ordinary differential equation:

$$\ddot{y}(t) = u(t) + \dot{m}(t) + b_0 m(t)$$

It is obvious that the failure $m(t) = m_0 e^{-b_0 t}$ can not be detected at the output even if it is not bounded ($b_0 < 0$).

Let us compute the algorithms involved in Theorem 8 (e_i stands for the $i-th$ vector of the canonical basis, i.e. having a 1 in its $i-th$ coordinate and 0 in the other ones): Im $L = \{e_1 + b_0 e_2\}$ and Ker $C = \{e_2\} = \mathcal{V}_L^1$, then $\mathcal{V}_L^1 +$ Im $L = \{e_2\} + \{e_1 + b_0 e_2\} = \{e_1, e_2\}$. This implies: $A^{-1}(\mathcal{V}_L^1 + \text{Im } L) = A^{-1}\{e_1, e_2\} = \{e_1, e_2\}$, and thus $\mathcal{V}_L^2 = \{e_2\} \cap \{e_1, e_2\} = \{e_2\} = \mathcal{V}_L^1$; that is to say: $\mathcal{V}_L^* = \{e_2\}$ and $A\mathcal{V}_L^* = \{e_1\}$. Therefore $\mathcal{V}_L^* + A\mathcal{V}_L^* = \{e_1, e_2\}$. Furthermore:

$$\text{Im } L \cap (\mathcal{V}_L^* + A\mathcal{V}_L^*) = \text{Im } L \neq \{0\}$$

And then as expected, there is at least one failure which can not be detected by inversion techniques. Note however that Im $L \cap \mathcal{V}_L^* = \{0\}$ (*i.e.* the *TFM* from m to y is *left invertible*).

In this example the second condition of Theorem 8 is not satisfied because of the existence of a zero in the transfer function, T_m^y, between the failure m and the output y.

Note that, in the case of a minimum phase (i.e. with Hurwitz zeros) transfer function, T_m^y, we can still do something. Indeed, let us decompose the original system (1) as the cascade of two linear systems, namely:

$$\begin{aligned} \Sigma_2: \quad \bar{m}(t) &= G_m(\mathrm{p}) m(t) \\ \Sigma_1: \quad F(\mathrm{p}) y(t) &= G_u(\mathrm{p}) u(t) + \bar{m}(t) \end{aligned}$$

where p is the derivative operator d/dt and F, G_u, and G_m are polynomials matrices in the variable p. Thus the transmission zeros of T_m^y are taken into account in system Σ_2 and Σ_1 does not have any transmission zero related to $\bar{m}$. In this way, we can obtain a left inverse of Σ_1 (if Σ_1 satisfies the geometric conditions of Theorem 8); the output issued from the left inverse will be the failure m filtered by the matrix polynomial $G_m(\mathrm{p})$.

Note that in case of having a failure satisfying $G_m(\mathrm{p}) m(t) = 0$, we are not able to observe it through the left inverse. But as we have assumed Hurwitz transmission zeros, this failure exponentially tends to zero.

We next show the extension for multivariable systems.

A. Zero Separation

Let us consider the following observable system[3]

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Lm(t) \quad ; \quad y(t) = Cx(t) \quad (13)$$

with $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^p$, L monic, and C epic. From the dual of the Brunovsky's Theorem [6] there exist an output injection matrix K and two changes of bases T and S such that:[4]

$$\hat{A}_K = T^{-1}(A - KC)T = DBM\{\hat{A}_{K,1}, \cdots, \hat{A}_{K,p}\} \quad (14)$$

$$\hat{C} = SCT = DBM\{\hat{C}_1, \cdots, \hat{C}_p\} \quad (15)$$

$$\hat{A}_{K,i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix}_{\kappa_i \times \kappa_i} \quad (16)$$

$$\hat{C}_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdots & \cdot & 0 \end{pmatrix}_{p \times \kappa_i} \quad (17)$$

where, for $i \in \{1, \cdots, p\}$ the κ_i are the *observability indices* ($\kappa_1 \geq \kappa_2 \geq \cdots \geq \kappa_p \geq 0$ and $\sum_{i=1}^{p} \kappa_i = n$).

Let us next define the following matrices:

$$N = T\hat{A}_K^T T^{-1} \quad ; \quad \Gamma = T(\mathrm{I} - \hat{A}_K \hat{A}_K^T)T^{-1} \quad (18)$$

Let us note that:

1) The matrix N is nilpotent with nilpotent index κ_1,
2) Im $N = T$Im $\hat{A}_K^T = T$Ker $\hat{C} =$ Ker C,
3) $\mathrm{I} - AN = \mathrm{I} - (A - KC)N = T(\mathrm{I} - T^{-1}(A - KC)T\hat{A}_K^T)T^{-1} = \Gamma$.

We then have the following result:

Fact 16: System (13) is externally equivalent[5] to:

$$\dot{\xi}(t) = A\xi(t) + Bu(t) + \Gamma\bar{\xi}(t) \; ; \quad y(t) = C\xi(t) \quad (19)$$

$$N\dot{\bar{\xi}}(t) = \bar{\xi}(t) - Lm(t) \quad (20)$$

Moreover, the supremal (A, Γ)–invariant subspace contained in Ker C, $\mathcal{V}_\Gamma^*$, is null.

Proof: (13) is externally equivalent to:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I} & 0 \\ \hline 0 & N \end{array}\right) \dot{\tilde{x}} &= \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{I} \end{array}\right) \tilde{x} + \left(\begin{array}{c|c} B & L \\ \hline 0 & -L \end{array}\right) \begin{pmatrix} u \\ m \end{pmatrix} \\ y &= \begin{pmatrix} C \mid 0 \end{pmatrix} \tilde{x} \end{aligned} \quad (21)$$

with $\tilde{x} = \begin{pmatrix} x^T & \bar{x}^T \end{pmatrix}^T$. Premultiplying (21) by $\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I} & \mathrm{I} \\ \hline 0 & \mathrm{I} \end{array}\right)$ and defining $\tilde{\xi} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I} & -N \\ \hline 0 & \mathrm{I} \end{array}\right)^{-1} \tilde{x}$, we get (19)-(20).

Since $\mathcal{V}_\Gamma^*$ is invariant under T, S, and K, it can be also computed from: $\mathcal{V}_\Gamma^0 = \mathcal{X}$ and $\mathcal{V}_\Gamma^{\mu+1} =$ Ker $\hat{C} \cap \hat{A}_K^{-1}(\mathcal{V}_\Gamma^\mu + \hat{\Gamma})$; with $\hat{\Gamma} = \mathrm{I} - \hat{A}_K \hat{A}_K^T$. From (16) and (17), we get: $\mathcal{V}_\Gamma^* = \{0\}$. ■

Coming back to our illustrative example, we get:

$$\begin{aligned} \Sigma_2: \quad \bar{m}(t) &= b_0 m(t) + \dot{m}(t) \\ \Sigma_1: \quad \ddot{y}(t) &= u(t) + \bar{m}(t) \end{aligned}$$

One state space realization (A_1, B_1, L_1, C_1) of Σ_1 is:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \bar{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \bar{m}(t) \\ y(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \bar{x}(t) \end{aligned}$$

[3] If not, we just have to consider the quotient system as in Section V.

[4] DBM stands for Diagonal Block Matrix.

[5] *External equivalence* (see [16]) means preservation of the external behaviour, *i.e.* the same overall set of possible trajectories for all the input and output signals.

And in this case we get $\mathcal{V}^*_{L_1} = A_1\mathcal{V}^*_{L_1} = \{0\}$. Therefore, our left inverse takes the following form:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \dot{\xi}(t) &= \xi(t) + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ u(t) \end{pmatrix} \\ z(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xi(t) \end{aligned}$$

We can verify that $z = \ddot{y} - u = \bar{m}$; of course we have to satisfy that $b_0 > 0$, in order to have a minimum phase system (see [13] for practical realizations).

VII. Concluding Remarks

- We have proposed in this paper necessary and sufficient conditions for detecting failures by inversion techniques.
- It has to be pointed out that we are working in the time domain and thus initial conditions play an important role. As shown on our example, which is *TFM left invertible*, there indeed exists a failure which is not detectable at the output, and thus which cannot be detected, neither by inversion techniques, nor by any observation techniques.
- In the literature, it is usual to only ask for observability of the system in order to detect the failure by observers. But the failure is not a state, it is an external input. And so, the failure can be undetectable at the output, even in an observable system: as shown here, this is typically the case for a failure exciting a transmission zero.
- The condition given by Massoumnia [11] when applied on our example is CL invertible, which in turn is equivalent to Ker $\Pi L = \{0\}$, where $\Pi : \mathcal{X} \to \mathcal{X}/\mathcal{V}^*_L$ is the canonical projection. That is to say, Ker $\Pi L = L^{-1}$Ker $\Pi = L^{-1}\mathcal{V}^*_L = \{0\}$, namely Im $L \cap \mathcal{V}^*_L = \{0\}$. However, as previously pointed out, the failure dynamics which excite the transmission zeros satisfy this condition but they are not detectable at the output.

References

[1] **Aling H., Schumacher J.M.** A nine-fold canonical decomposition for linear systems. *International Journal of Control*, 39(4), 779-805, 1984.

[2] **Armentano, V.A.** The pencil $(sE - A)$ and controllability-observability for generalized linear systems: a geometric approach. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 24, 4, 1986.

[3] **Basile G. and Marro G.** Controlled and Conditioned Invariants in Linear System Theory. Prentice Hall, 1992.

[4] **Bernhard, P.** On singular implicit dynamical systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 24, 612-633, 1982.

[5] **Bonilla M., Malabre M.** *Solvability and one side invertibility for implicit descriptions*. Proceedings of the 29th Conference on Decision and Control. Honolulu, Hawaii. December 1990.

[6] **Brunovsky P.** A classification of linear controllable systems. *Kybernetika*, Vol. 6, pp. 173-188, 1970.

[7] **Francis B.A., Wonham W.M.** The role of transmission zeros in linear multivariable regulators. *International Journal of Control*, 22, 657-681, 1975.

[8] **Gantmacher F.R.** The Theory of Matrices. Vol. II, New York: Chelsea, 1977.

[9] **Kuijper, M.** Descriptor representations without direct feedthrough term. *Automatica*, 28, 633-637, 1992.

[10] **MacFarlane A.G.J., Karcanias N.** Poles and zeros of linear multivariable systems: a survey of the algebraic, geometric and complex-variable theory. *International Journal of Control*, 24, 33-74, 1976.

[11] **Massoumnia M.A.** A geometric Approach to the synthesis of failure detection filters. *IEEE Transaction on Automatic Control*, AC-31, No. 9, pp. 839-846, 1986.

[12] **Niemann H.H., Saberi A., Stoorvogel A.A., and Sannuti P.** Exact, almost and delayed fault detection - An observer based approach. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Vol. 4, No. 4, pp. 215-238, 1999.

[13] **Pacheco J., Bonilla M. and Malabre M.** *Proper Exponential Approximation for Non Proper Compensators: The MIMO Case.* 42nd IEEE CDC, pp.110-115. Maui Hawaii, December 9-12, 2003.

[14] **Rosenbrock, H.H.** State–Space and Multivariable Theory. London: Nelson, 1970.

[15] **Saberi A., Stoorvogel A.A., Sannuti P. and Niemann H.H.** Fundamental problems in fault detection and identification. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Vol. 10, pp. 1209-1236, 2000.

[16] **Willems J.C.** Input–output and state space representations of finite–dimensional linear time–invariant systems. *Linear Algebra and its Applications*, Vol 50, 581-608, 1983.

[17] **Wong, K.T.** The eigenvalue problem $\lambda Tx + Sx$.,1974. *Journal of Differential Equations*, 1, 270-281.

[18] **Wonham, W. Murray** Linear Multivariable Control: A Geometric Approach. Springer Verlag, 3rd Ed., 1985.

Appendix

Proof: (Lemma 9)
$\bar{y} = 0$ in (2) implies: $u = 0$, $\dot{x} = Ax + Lm$ and $0 = Cx$. [6]

We are going to prove in three steps that x, $\dot{x} \in \mathcal{V}^*_L$.

1) **Let us first prove that x, $\dot{x} \in \mathcal{V}^2_L$ and $\ddot{x} \in \mathcal{V}^1_L$:** Since $Cx = 0$ we get $C\dot{x} = 0$ and $C\ddot{x} = 0$, which imply $x, \dot{x}, \ddot{x} \in$ Ker $C = \mathcal{V}^1_L$. Then $\dot{x} = Ax + Lm \in \mathcal{V}^1_L$ implies that $x \in \mathcal{V}^1_L \cap A^{-1}\left(\mathcal{V}^1_L + \text{Im } L\right) = \mathcal{V}^2_L$. And $\ddot{x} = A\dot{x} + L\dot{m} \in \mathcal{V}^1_L$ implies that $\dot{x} \in \mathcal{V}^1_L \cap A^{-1}\left(\mathcal{V}^1_L + \text{Im } L\right) = \mathcal{V}^2_L$.

2) **Let us next prove that if $x \in \mathcal{V}^k_L$ and $x^{(i)} \in \mathcal{V}^{k+1-i}_L$ for $i \in \{1, \cdots, k\}$ then $x \in \mathcal{V}^{k+1}_L$ and $x^{(i)} \in \mathcal{V}^{k+2-i}_L$ for $i \in \{1, \cdots, k\}$:** Indeed, if $\dot{x} = Ax + Lm \in \mathcal{V}^k_L$ then $x \in \mathcal{V}^k_L \cap A^{-1}\left(\mathcal{V}^k_L + \text{Im } L\right) = \mathcal{V}^{k+1}_L$. Since $Cx = 0$ implies $Cx^{(k+1)} = 0$, we get $Cx^{(k+1)} = C(Ax^{(k)} + Lm^{(k)}) = 0$, which implies: $Ax^{(k)} + Lm^{(k)} \in$ Ker C and then $x^{(k)} \in \mathcal{V}^1_L \cap A^{-1}\left(\mathcal{V}^1_L + \text{Im } L\right) = \mathcal{V}^2_L$. On the other hand, let us suppose that: $x^{(j)}, x^{(j+1)} \in \mathcal{V}^{k+1-j}_L$ for $j \in \{k-1, \cdots, 1\}$, then $x^{(j+1)} = Ax^{(j)} + Lm^{(j)} \in \mathcal{V}^{k+1-j}_L$, and thus $x^{(j)} \in \mathcal{V}^{k+1-j}_L \cap A^{-1}(\mathcal{V}^{k+1-j}_L + \text{Im } L) = \mathcal{V}^{k+2-j}_L$.

3) **From the first two items, we get x, $\dot{x} \in \mathcal{V}^*_L$.** Since x, $\dot{x} \in \mathcal{V}^*_L$, we get $Lm = \dot{x} - Ax \in \text{Im } L \cap (\mathcal{V}^*_L + A\mathcal{V}^*_L) = \{0\}$, which implies $m \in$ Ker $L = \{0\}$. ■

Proof: (Lemma 10)

To prove the Lemma, we first need to show that (where $\Pi_* : \mathcal{X} \to \frac{\mathcal{X}}{\mathcal{V}^*_L}$ is the canonical projection):

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{V}}^*_{\mathcal{X}_e,0} = \Big\{ \begin{pmatrix} x_1^T & x_2^T & 0 \end{pmatrix}^T \in \mathcal{X}_e : \ x_1 \in \mathcal{V}^*_L, \\ x_2 \in L^{-1}\left(\mathcal{V}^*_L + A\mathcal{V}^*_L\right) \ \& \ \Pi_* L x_2 = -\Pi_* A x_1 \Big\} \end{aligned} \tag{22}$$

Indeed for the first step of the algorithm of $\tilde{\mathcal{V}}^*_{\mathcal{X}_e,0}$, we get: $\tilde{\mathcal{V}}^1_{\mathcal{X}_e,0} = \mathbb{A}_i^{-1}\mathbb{E}_i\tilde{\mathcal{V}}^0_{\mathcal{X}_e,0} = \begin{pmatrix} C & 0 & 0 \\ A & L & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{V}^0_L \\ 0 \end{pmatrix}$. This

[6] For shortness, we do not write "(t)" in the considered time functions.

implies that there exist vectors $\begin{pmatrix} x_1^T & x_2^T & x_3^T \end{pmatrix}^T$, such that: $Cx_1 = 0$, $Ax_1 + Lx_2 \in \mathcal{V}_L^0$ and $x_3 = 0$.
Then $x_1 \in \text{Ker } C \cap A^{-1}\left(\mathcal{V}_L^0 + \text{Im } L\right) = \mathcal{V}_L^1$, $x_2 \in L^{-1}\left(\mathcal{V}_L^0 + A\mathcal{V}_L^1\right)$ and $x_3 = 0$. Satisfying $\Pi_0 Lx_2 = -\Pi_0 Ax_1$, where $\Pi_0 : \mathcal{X} \to \frac{\mathcal{X}}{\mathcal{V}_L^0}$ is the canonical projection (this first projection is trivial since $\mathcal{V}_L^0 = \mathcal{X}$); namely: $\tilde{\mathcal{V}}_{\mathcal{X}_e,0}^1 = \{(x_1^T\ x_2^T\ 0)^T \in \mathcal{X}_e :\ x_1 \in \mathcal{V}_L^1,\ x_2 \in L^{-1}(\mathcal{V}_L^0 + A\mathcal{V}_L^1)$ & $\Pi_0 Lx_2 = -\Pi_0 Ax_1\}$ and $\mathbb{E}_i\tilde{\mathcal{V}}_{\mathcal{X}_e,0}^1 = \{0\} \oplus \mathcal{V}_L^1 \oplus \{0\}$.
For the $\mu-th$ step of the algorithm of $\tilde{\mathcal{V}}_{\mathcal{X}_e,0}^*$, let us assume that (with $k \in \{1, \cdots, \mu\}$):

$$\begin{array}{l} \tilde{\mathcal{V}}_{\mathcal{X}_e,0}^k = \{\begin{pmatrix} x_1^T & x_2^T & 0 \end{pmatrix}^T \in \mathcal{X}_e :\ x_1 \in \mathcal{V}_L^k, \\ \quad x_2 \in L^{-1}\left(\mathcal{V}_L^{k-1} + A\mathcal{V}_L^k\right) \ \&\ \Pi_{k-1}Lx_2 = -\Pi_{k-1}Ax_1\} \\ \mathbb{E}_i\tilde{\mathcal{V}}_{\mathcal{X}_e,0}^k = \{0\} \oplus \mathcal{V}_L^k \oplus \{0\} \end{array} \tag{23}$$

where $\Pi_{k-1} : \mathcal{X} \to \frac{\mathcal{X}}{\mathcal{V}_L^{k-1}}$ is the canonical projection. Then: $\tilde{\mathcal{V}}_{\mathcal{X}_e,0}^{\mu+1} = \mathbb{A}_i^{-1}\mathbb{E}_i\tilde{\mathcal{V}}_{\mathcal{X}_e,0}^\mu = \begin{pmatrix} C & 0 & 0 \\ A & L & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{V}_L^\mu \\ 0 \end{pmatrix}$. This implies that there exist vectors $\begin{pmatrix} x_1^T & x_2^T & x_3^T \end{pmatrix}^T$ such that: $Cx_1 = 0$, $Ax_1 + Lx_2 \in \mathcal{V}_L^\mu$, and $x_3 = 0$. Then $x_1 \in \text{Ker } C \cap A^{-1}(\mathcal{V}_L^\mu + \text{Im } L) = \mathcal{V}_L^{\mu+1}$, $x_2 \in L^{-1}(\mathcal{V}_L^\mu + A\mathcal{V}_L^{\mu+1})$ and $x_3 = 0$. Satisfying $\Pi_\mu Lx_2 = -\Pi_\mu Ax_1$, where $\Pi_\mu : \mathcal{X} \to \frac{\mathcal{X}}{\mathcal{V}_L^\mu}$ is the canonical projection. And thus (23) is true $\forall\ k > 0$, which proves (22).

We are now in position to prove that $\tilde{\mathcal{V}}_{\mathcal{X}_e,0}^* = \{0\}$ implies $L^{-1}\left(\mathcal{V}_L^* + A\mathcal{V}_L^*\right) = \{0\}$, which is equivalent to prove that $L^{-1}\left(\mathcal{V}_L^* + A\mathcal{V}_L^*\right) \neq \{0\}$ implies that $\tilde{\mathcal{V}}_{\mathcal{X}_e,0}^* \neq \{0\}$: Indeed if $L^{-1}\left(\mathcal{V}_L^* + A\mathcal{V}_L^*\right) \neq \{0\}$ there then exists $x_2 \in L^{-1}\left(\mathcal{V}_L^* + A\mathcal{V}_L^*\right)$, $x_2 \neq 0$. Then $Lx_2 \neq 0$ and $Lx_2 \in \text{Im } L \cap \left(\mathcal{V}_L^* + A\mathcal{V}_L^*\right) \subset \left(\mathcal{V}_L^* + A\mathcal{V}_L^*\right)$; this implies that $\exists\ -x_1, x_v \in \mathcal{V}_L^*$, such that: $Lx_2 = x_v - Ax_1$, and thus, $\Pi_* Lx_2 = -\Pi_* Ax_1$. Then $\exists \begin{pmatrix} x_1^T & x_2^T & 0 \end{pmatrix}^T \neq 0$ such that $x_1 \in \mathcal{V}_L^*, x_2 \in L^{-1}\left(\mathcal{V}_L^* + A\mathcal{V}_L^*\right)$ and satisfying $\Pi_* Lx_2 = -\Pi_* Ax$, namely $\tilde{\mathcal{V}}_{\mathcal{X}_e,0}^* \neq \{0\}$. ■

Proof: Lemma 12.
1) **Let us first prove that $\text{Im } L \cap \left(\mathcal{V}_L^* + A\mathcal{V}_L^*\right) = \left(\mathcal{V}_L^* + A\text{Ker } C\right) \cap \text{Im } L$:** Indeed, from (3) we get $\mathcal{V}_L^* + A\mathcal{V}_L^* = \mathcal{V}_L^* + A\text{Ker } C \cap \left(\mathcal{V}_L^* + \text{Im}L\right) = \left(\mathcal{V}_L^* + A\text{Ker } C\right) \cap \left(\mathcal{V}_L^* + \text{Im}L\right)$, and then $\text{Im}L \cap \left(\mathcal{V}_L^* + A\mathcal{V}_L^*\right) = \left(\mathcal{V}_L^* + A\text{Ker } C\right) \cap \text{Im}L$, which implies the result.
2) **Let us next prove that if $\left(\mathcal{V}_L^* + A\text{Ker } C\right) \cap \text{Im } L = \{0\}$ then $\mathcal{V}_L^* = \mathcal{N}$:** Since $A\mathcal{V}_L^* = A\text{Ker } C \cap \left(\mathcal{V}_L^* + \text{Im}L\right)$, let $x \in A\text{Ker } C \cap \left(\mathcal{V}_L^* + \text{Im}L\right)$. Then $\exists\ c \in \text{Ker } C, v \in \mathcal{V}_L^*$ and $b \in \text{Im}L$ such that $x = Ac = v + b$, which implies $Ac - v = b \in \left(\mathcal{V}_L^* + A\text{Ker } C\right) \cap \text{Im}L = \{0\}$. That is to say $Ac - v = 0$. Namely $x = Ac = v \in \left(\mathcal{V}_L^* \cap A\text{Ker } C\right)$. And thus $\left(\mathcal{V}_L^* \cap A\text{Ker } C\right) \subset A\text{Ker } C \cap \left(\mathcal{V}_L^* + \text{Im}L\right) \subset \left(\mathcal{V}_L^* \cap A\text{Ker } C\right)$. Therefore $A\text{Ker } C \cap \left(\mathcal{V}_L^* + \text{Im}L\right) = \mathcal{V}_L^* \cap A\text{Ker } C$. And since $A\mathcal{V}_L^* = A\text{Ker } C \cap \left(\mathcal{V}_L^* + \text{Im}L\right)$ we get $A\mathcal{V}_L^* = \mathcal{V}_L^* \cap A\text{Ker } C$, which implies: $A\mathcal{V}_L^* \subset \mathcal{V}_L^*$. Now since $\mathcal{N}$ is the largest A–invariant subspace contained in $\text{Ker } C$ and $\mathcal{N} \subset \mathcal{V}_L^*$, we get the result.
3) **Let us next prove that if $\text{Ker } L = \{0\}$ and $\left(\mathcal{V}_L^* + A\text{Ker } C\right) \cap \text{Im } L = \{0\}$ then $L^{-1}\left(\mathcal{N} + A\text{Ker } C\right) = \{0\}$:** Indeed (recall that $\mathcal{V}_L^* = \mathcal{N}$): $\left(\mathcal{V}_L^* + A\text{Ker } C\right) \cap \text{Im}L = \{0\} \Leftrightarrow LL^{-1}\left(\mathcal{V}_L^* + A\text{Ker } C\right) = \{0\}$, then $L^{-1}LL^{-1}\left(\mathcal{V}_L^* + A\text{Ker } C\right) = L^{-1}\{0\} \Leftrightarrow L^{-1}\left(\mathcal{V}_L^* + A\text{Ker } C\right) + \text{Ker } L = \text{Ker } L$, then $L^{-1}\left(\mathcal{V}_L^* + A\text{Ker } C\right) = \{0\} \Leftrightarrow L^{-1}\left(\mathcal{N} + A\text{Ker } C\right) = \{0\}$. Therefore, the result is satisfied.
4) **Let us next prove that if $\mathcal{V}_L^* = \mathcal{N}$ and $L^{-1}\left(\mathcal{N} + A\text{Ker } C\right) = \{0\}$ then $\left(\mathcal{V}_L^* + A\mathcal{V}_L^*\right) \cap \text{Im } L = \{0\}$:** From item 1) and item 2) we have: $\left(\mathcal{V}_L^* + A\mathcal{V}_L^*\right) \cap \text{Im}L = \left(\mathcal{V}_L^* + A\text{Ker } C\right) \cap \text{Im}L = \left(\mathcal{N} + A\text{Ker } C\right) \cap \text{Im}L = LL^{-1}\left(\mathcal{N} + A\text{Ker } C\right) = L\{0\} = \{0\}$.
5) **Let us finally note that if $L^{-1}\left(\mathcal{N} + A\text{Ker } C\right) = \{0\}$ then $\text{Ker } L = \{0\}$.** ■

Proof: Lemma 13.
Let us first not that (recall (12) and (11)):
1) $\overline{\mathcal{V}}_L^0 = \frac{\mathcal{X}}{\mathcal{N}} = \Pi\mathcal{X} = \Pi\mathcal{V}_L^0$
2) $\text{Ker } C = \Pi^{-1}\text{Ker } \bar{C}$, then $\Pi\text{Ker } C = \Pi\Pi^{-1}\text{Ker } \bar{C} = (\text{Im } \Pi) \cap \text{Ker } \bar{C} = \frac{\mathcal{X}}{\mathcal{N}} \cap \text{Ker } \bar{C} = \text{Ker } \bar{C}$.
3) $\text{Im } \bar{L} = \bar{L}\mathcal{M} = \Pi L\mathcal{M} = \Pi\text{Im } L$.

Let us now prove that $\overline{\mathcal{V}}_L^* = \Pi\mathcal{V}_L^*$: For this let us suppose that $\overline{\mathcal{V}}_L^\mu = \Pi\mathcal{V}_L^\mu$, then $\overline{\mathcal{V}}_L^{\mu+1} = \text{Ker } \bar{C} \cap \bar{A}^{-1}(\overline{\mathcal{V}}_L^\mu + \text{Im}\bar{L}) = \Pi\text{Ker } C \cap \bar{A}^{-1}(\Pi\mathcal{V}_L^\mu + \Pi\text{Im } L) = \Pi\text{Ker } C \cap \frac{\mathcal{X}}{\mathcal{N}} \cap \bar{A}^{-1}\Pi(\mathcal{V}_L^\mu + \text{Im } L) = \Pi\text{Ker } C \cap \text{Im } \Pi \cap \bar{A}^{-1}\Pi(\mathcal{V}_L^\mu + \text{Im } L) = \Pi\text{Ker } C \cap \Pi\Pi^{-1}\bar{A}^{-1}\Pi(\mathcal{V}_L^\mu + \text{Im } L) = \Pi\text{Ker } C \cap \Pi\left(\bar{A}\Pi\right)^{-1}\Pi(\mathcal{V}_L^\mu + \text{Im}L) = \Pi\text{Ker } C \cap \Pi\left(\Pi A\right)^{-1}\Pi(\mathcal{V}_L^\mu + \text{Im } L) = \Pi\text{Ker } C \cap \Pi A^{-1}\Pi^{-1}\Pi(\mathcal{V}_L^\mu + \text{Im } L) = \Pi\text{Ker } C \cap \Pi A^{-1}(\mathcal{V}_L^\mu + \text{Im } L + \text{Ker } \Pi) = \Pi\text{Ker } C \cap \Pi A^{-1}(\mathcal{V}_L^\mu + \text{Im } L + \mathcal{N}) = \Pi\text{Ker } C \cap \Pi A^{-1}(\mathcal{V}_L^\mu + \text{Im } L) = \Pi\left(\text{Ker } C + \mathcal{N}\right) \cap \Pi A^{-1}(\mathcal{V}_L^\mu + \text{Im } L) = \Pi(\Pi^{-1}\Pi\text{Ker } C) \cap \Pi A^{-1}(\mathcal{V}_L^\mu + \text{Im } L) = \Pi\left(\Pi^{-1}\Pi\text{Ker } C \cap A^{-1}(\mathcal{V}_L^\mu + \text{Im } L)\right) = \Pi\left(\text{Ker } C \cap A^{-1}(\mathcal{V}_L^\mu + \text{Im } L)\right) = \Pi\mathcal{V}_L^{\mu+1}$. Therefore $\overline{\mathcal{V}}_L^* = \Pi\mathcal{V}_L^*$.

Let us now prove that $L^{-1}\left(\mathcal{N} + A\text{Ker } C\right) = \bar{L}^{-1}\bar{A}\text{Ker } \bar{C}$: $L^{-1}\left(\mathcal{N} + A\text{Ker } C\right) = L^{-1}\left(\text{Ker } \Pi + A\text{Ker } C\right) = L^{-1}\left(\Pi^{-1}\Pi A\text{Ker } C\right) = L^{-1}\Pi^{-1}\Pi A\text{Ker } C = \left(\Pi L\right)^{-1}\left(\Pi A\right)\text{Ker } C = \bar{L}^{-1}\bar{A}\Pi\text{Ker } C = \bar{L}^{-1}\bar{A}\text{Ker } \bar{C}$. ■

Proof: Lemma 14.
Let us first prove the necessity: Since $\mathcal{V}_L^* = \mathcal{N}$ and $L^{-1}\left(\mathcal{N} + A\text{Ker } C\right) = \{0\}$, then from Lemma (13), $\overline{\mathcal{V}}_L^* = \Pi\mathcal{V}_L^* = \Pi\mathcal{N} = \{0\}$. Therefore $\overline{\mathcal{V}}_L^* = \{0\}$. Now $\text{Ker } \bar{L} = \text{Ker } \Pi L = L^{-1}\text{Ker } \Pi = L^{-1}\mathcal{N} \subset L^{-1}\left(\mathcal{N} + A\text{Ker } C\right) = \{0\}$. Therefore $\text{Ker } \bar{L} = \{0\}$.
Let us now prove the sufficiency: $\overline{\mathcal{V}}_L^* = \{0\} \Rightarrow \Pi^{-1}\Pi\mathcal{V}_L^* = \Pi^{-1}\{0\} \Leftrightarrow \mathcal{V}_L^* + \text{Ker } \Pi = \text{Ker } \Pi \Leftrightarrow \mathcal{V}_L^* + \mathcal{N} = \mathcal{N}$. Since $\mathcal{N} \subset \mathcal{V}_L^*$, then $\mathcal{V}_L^* = \mathcal{N}$. On the other hand, $\overline{\mathcal{V}}_L^* = \text{Ker } \bar{C} \cap \bar{A}^{-1}\left(\overline{\mathcal{V}}_L^* + \text{Im } \bar{L}\right) \Rightarrow \{0\} = \text{Ker } \bar{C} \cap \bar{A}^{-1}\text{Im } \bar{L} \Rightarrow \bar{A}\{0\} = \bar{A}\text{Ker } \bar{C} \cap \text{Im } \bar{L}$, then $\{0\} = \bar{L}\bar{L}^{-1}\bar{A}\text{Ker } \bar{C} \Rightarrow \bar{L}^{-1}\{0\} = \bar{L}^{-1}\bar{L}\bar{L}^{-1}\bar{A}\text{Ker } \bar{C} \Leftrightarrow \text{Ker } \bar{L} = \bar{L}^{-1}\bar{A}\text{Ker } \bar{C} + \text{Ker } \bar{L}$, then $\{0\} = L^{-1}A\text{Ker } C = L^{-1}\left(\mathcal{N} + A\text{Ker } C\right)$. Therefore $L^{-1}\left(\mathcal{N} + A\text{Ker } C\right) = \{0\}$. ■

Apéndice B

Bonilla M., Figueroa M. and Malabre M.

Time Domain Left Invertibility: Application to Failure Detection.

2nd IFAC SYMPOSIUM on SYSTEM, STRUCTURE and CONTROL. December 8-10, 2004. Oaxaca, México.

2nd Symposium on System, Structure and Control, Oaxaca, 2004

TIME DOMAIN LEFT INVERTIBILITY: APPLICATION TO FAILURE DETECTION

Moisés Bonilla Estrada [*,1]
Maricela Figueroa Garcia [**,2] **Michel Malabre** [***,1]

[*] *CINVESTAV-IPN, Control Automático. AP 14-740. México 07000, MEXICO. mbonilla@cinvestav.mx.*
[**] *PhD student of J.C. Martínez and M. Bonilla at CINVESTAV-IPN. mfigueroa@ctrl.cinvestav.mx.*
[***] *IRCCyN, B.P. 92101, 44321 NANTES, Cedex 03, FRANCE. Michel.Malabre@irccyn.ec-nantes.fr.*

Abstract: We consider here the problem of recovering from the output alone, and at any time $t \geq 0$, the (unknown) input, with initial conditions not necessarily equal to zero. In this case *left invertibility of transfer functions* is not sufficient.

NOTATION

Script capitals $\mathcal{V},\mathcal{W},\ldots,$ denote linear spaces with elements $v, w, \ldots$; when $\mathcal{V} \subset \mathcal{W}$, $\frac{\mathcal{W}}{\mathcal{V}}$ or $\mathcal{W}/\mathcal{V}$ stands for the quotient space $\mathcal{W}$ modulo $\mathcal{V}$; the external direct sum of some given spaces $\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_r$ is written as $\mathcal{X}_1 \oplus \cdots \mathcal{X}_r$. Given a map $X{:}\mathcal{V} \to \mathcal{W}$, Im $X = X\mathcal{V}$ denotes its image, Ker X denotes its kernel, $X^{-1}\mathcal{T}$ the inverse image of $\mathcal{T}$ by the linear map (possibly not invertible) X. X^T denotes the transpose of matrix X. e_i stands for the vector having a 1 in its $i-th$ coordinate and 0 in the other ones. $\{v_1, \ldots v_k\}$ stands for the subspace generated by the vectors $v_1, \ldots v_k$. $\dot{x}$ and $\ddot{x}$ denote the first and second time derivatives of x, $x^{(i)}$ is used for higher orders derivatives. p and s stand for d/dt and the Laplace variable, respectively.

1. INTRODUCTION

Two powerful tools usually used in System Theory for synthesis and analysis are (when they exist) the *right inverse* and the *left inverse systems*. A *right inverse system* is used to control (*e.g.* to reject disturbances), while a *left inverse system* is used to observe (*e.g.* to reconstruct particular signals present in the system).

In this paper, we study of the *left inverse systems* with applications to the failure detection problem (see Figueroa *et al*. (2004)). We want to solve:

Problem 1. Let us consider the following state space description, $\Sigma(A, \Gamma, C)$: $\mathcal{W} \to \mathcal{Y}$:

$$\dot{x} = Ax + \Gamma w \quad ; \quad y = Cx \tag{1}$$

where w is the input, y is the output and x is the state. The linear maps are defined as $A{:}\mathcal{X} \to \mathcal{X}$, $\Gamma : \mathcal{W} \to \mathcal{X}$, and $C : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$; where $\mathcal{X}$, $\mathcal{W}$, and $\mathcal{Y}$ are the state, input, and output spaces.

Under which conditions does there exist, and, then, how to design a *left inverse system* for (1), independent of both: the initial conditions of x and the nature of input w.

2. LEFT INVERSE

Remark 2. :

R1 The basic definition for *left invertibility* is: Given a function $f : Dom \to CoDom$, $r \mapsto f(r)$, find (if possible) a function $g : CoDom \to Dom$, $v \mapsto g(v)$, such that the composite function $g \circ f : Dom \to Dom$, $r \mapsto g(f(r))$, is the identity function I. Namely: $g(f(r)) = r$ for all $r \in Dom$.

[1] Lab. Franco–Mexicain d'Automatique Appliquée.
[2] Sponsored by CONACyT–México

R2 For a linear function f, the existence of a *left inverse function*, g, is equivalent to the fact that f has to be monic. Namely: $\mathrm{Ker}\ f(\cdot) := \{r \in \mathit{Dom} \mid f(r) = 0\} = \{0\}$.

R3 From the fundamental Theorem of *Calculus*: The *left inverse function*, g, of the linear function $f : r(t) \mapsto \int_0^t r(\tau)\mathrm{d}\tau$ is: $g : v(t) \mapsto \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}$, since $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^t r(\tau)\mathrm{d}\tau = r(t)$, for all integrable variable r.

In the study of Linear Time Invariant Systems, there are basically two *domains*. Namely, the *frequency domain* and the *time domain*. In the following two sub-sections we recall some useful results about *left invertibility* in each *domain*.

2.1 Transfer Function Matrix Left Invertibility

When dealing with a *transfer function matrix* (*TFM*), the following definition for *left invertibility* is standard (*c.f.* with Remark 2:*R2*):

Definition 3. Let us consider a *transfer function matrix*, $T(\mathrm{s}) = C(\mathrm{sI} - A)^{-1}\Gamma$, with p rows and m columns. $T(\mathrm{s})$ is *TFM left invertible* if and only if its m columns are independent as rational functions of s, namely if and only if rank $T(\mathrm{s}) = m$, *viz*, if and only if $\mathrm{Ker}\ T(\mathrm{s}) = \{0\}$.

This *TFM left invertibility* was geometrically characterized by Basile and Marro (1992) using the supremal (A, Γ) invariant subspace contained in Ker C, $\mathcal{V}_\Gamma^* = \sup\{\mathcal{V} \subset \mathrm{Ker}\ C \mid A\mathcal{V} \subset \mathcal{V} + \mathrm{Im}\ \Gamma\}$ (Wonham 1985), which is the limit of:

$$\mathcal{V}_\Gamma^0 = \mathcal{X}\ , \quad \mathcal{V}_\Gamma^{\mu+1} = \mathrm{Ker}\ C \cap A^{-1}\left(\mathcal{V}_\Gamma^\mu + \mathrm{Im}\ \Gamma\right) \tag{2}$$

Theorem 4. (Basile and Marro 1992) $T(\mathrm{s})$ is *TFM left invertible* if and only if:

$$\mathrm{Ker}\ \Gamma = \{0\} \quad \text{and} \quad \mathrm{Im}\ \Gamma \cap \mathcal{V}_\Gamma^* = \{0\} \tag{3}$$

Let us note that the geometric characterization (3) is also equivalent to the following one:

$$\mathrm{Ker}\ \Gamma = \{0\} \quad \text{and} \quad \mathcal{R}_\Gamma^* = \{0\} \tag{4}$$

where $\mathcal{R}_\Gamma^*$ is the supremal (A, Γ) controllability subspace contained in Ker C (see Wonham (1985) for more details), which is the limit of

$$\mathcal{R}_\Gamma^0 = \{0\} \quad ; \quad \mathcal{R}_\Gamma^{\mu+1} = \mathcal{V}_\Gamma^* \cap (A\mathcal{R}_\Gamma^\mu + \mathrm{Im}\ \Gamma) \tag{5}$$

In order to show the specificity of *TFM left inverses*, let us consider the following example:

Example 5. (Start) Let us consider the system:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ \gamma_0 \end{bmatrix} w \quad ; \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \tag{6}$$

with $\gamma_0 \neq 0$*. The external behavior of this system is given by the ordinary differential equation:*

$$\mathrm{p}^2 y = (\mathrm{p} + \gamma_0)w \tag{7}$$

and its Transfer Function Matrix, $T_w^y(\mathrm{s})$*, is:*

$$T_w^y(\mathrm{s}) = (\mathrm{s} + \gamma_0)/\mathrm{s}^2 \tag{8}$$

The information involved in Theorem 4 is:

$\mathrm{Im}\ \Gamma = \{e_1 + \gamma_0 e_2\}$ *and* $\mathrm{Ker}\ C = \{e_2\} = \mathcal{V}_\Gamma^1$*, then* $\mathcal{V}_\Gamma^1 + \mathrm{Im}\ \Gamma = \{e_2\} + \{e_1 + \gamma_0 e_2\} = \{e_1, e_2\}$*. This implies:* $A^{-1}(\mathcal{V}_\Gamma^1 + \mathrm{Im}\ \Gamma) = A^{-1}\{e_1, e_2\} = \{e_1, e_2\}$*, and thus* $\mathcal{V}_\Gamma^2 = \{e_2\} \cap \{e_1, e_2\} = \{e_2\} = \mathcal{V}_\Gamma^1$*; then:*

$$\mathcal{V}_\Gamma^* = \{e_2\} \quad \textit{and} \quad \mathrm{Im}\ \Gamma = \{e_1 + \gamma_0 e_2\} \tag{9}$$

$$\mathrm{Ker}\ \Gamma = \{0\} \quad \textit{and} \quad \mathrm{Im}\ \Gamma \cap \mathcal{V}_\Gamma^* = \{0\} \tag{10}$$

Therefore, system (6) is TFM left invertible. *Indeed, from (8) its* TFM left inverse, $T_y^{\hat{w}}(\mathrm{s})$*, is:*

$$T_y^{\hat{w}}(\mathrm{s}) = \mathrm{s}^2/(\mathrm{s} + \gamma_0) \tag{11}$$

which is the Laplace transform of the system:

$$(\mathrm{p} + \gamma_0)\hat{w} = \mathrm{p}^2 y \tag{12}$$

Remark 6. :

R1 From (8) and (11) : $T_w^y(\mathrm{s}) \cdot T_y^{\hat{w}}(\mathrm{s}) = \mathrm{I}$, but

R2 From (7) and (12) : $(\mathrm{p} + \gamma_0)(\hat{w} - w) = 0$. Which implies: $\hat{w} = w + ke^{-\gamma_0 t}$, moreover

R3 If: $w = w(0)e^{-\gamma_0 t}$, with $w(0)$ non zero, then from (7) we get: $y = 0$, and thus $\hat{w} = 0$.

And thus, the TFM invertibility *depends on initial conditions as well as on the nature of* w*.*

*Indeed, from Remark 6:**R2**, we need that the initial condition* k *be in a neighborhood of zero with a very small radius. And, which is more important, the parameter* γ_0 *must be non negative. Furthermore, from Remark 6:**R3**, the input* w *cannot belong to* $\mathrm{Ker}\ (\mathrm{p} + \gamma_0)$*.*

2.2 Time Domain Left Invertibility

As illustrated in Remark 2:**R3**, a state space description usually has non proper *left inverses*. We then have to work in the more general framework of *implicit systems* (see for example Lewis (1992)). In the *time domain* (*TD*), we take the following definition for *left invertibility* (*c.f.* Remark 2:**R1**):

Definition 7. The system (1), $\Sigma(A, \Gamma, C)$, is called *TD left invertible* if and only if: (i) there exists a system $\Sigma^i : \mathcal{Y} \to \mathcal{W}$ such that it is solvable[3] in Im Σ and (ii) $\Sigma^i \circ \Sigma = I$.
Σ^i is called a *TD left inverse* of Σ.

[3] Solvable means that for each input in $\mathcal{Y}$, there exists *at least one* solution in $\mathcal{X}$.

Note that, for the solvable implicit system (1), $\mathrm{I}\dot{x} = Ax + \Gamma u$ and $y = Cx$, there exists a linear transformation $\Psi(\cdot)$: $\mathcal{W} \to \mathcal{X}$, such that: $\mathrm{I}\dot{\Psi}(w) = A\Psi(w) + \Gamma w$ and $y = C\Psi(w)$, for all admissible inputs w. Bonilla and Malabre (1990) stated the following results (*c.f.* Remark 2:**R2**):

Lemma 8. (Bonilla and Malabre 1990) The implicit description (1) is *TD left invertible* if and only if Ker $C\Psi(\cdot) = \{0\}$.

Lemma 9. (Bonilla and Malabre 1990) If the implicit description (1) is *TD left invertible* then one left inverse system, $\Sigma^i : \mathcal{Y} \to \mathcal{W}$, is: [4]

$$\mathbb{E}_i\dot{\xi} = \mathbb{A}_i\xi + \mathbb{B}_i y \quad ; \quad \hat{w} = \mathbb{C}_i\xi \tag{13}$$

where $\mathbb{E}_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathrm{I} & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbb{A}_i = \begin{bmatrix} C & 0 \\ A & \Gamma \end{bmatrix}$, $\mathbb{B}_i = \begin{bmatrix} -\mathrm{I} \\ 0 \end{bmatrix}$ and $\mathbb{C}_i = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{I} \end{bmatrix}$. In this case the linear maps are defined as: $\mathbb{E}_i : \mathcal{X}_e \to \underline{\mathcal{X}}_e$, $\mathbb{A}_i : \mathcal{X}_e \to \underline{\mathcal{X}}_e$, $\mathbb{B}_i : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ and $\mathbb{C}_i : \mathcal{X}_e \to \mathcal{W}$; where $\mathcal{X}_e = \mathcal{X} \oplus \mathcal{W}$ and $\underline{\mathcal{X}}_e = \mathcal{Y} \oplus \mathcal{X}$.

Let us note that, if Γ is monic and if (1) is observable then the proposed *TD left inverse* (13) is minimal under external equivalence (see Kuijper (1992)). Indeed, (i) the matrix $\begin{bmatrix} \mathbb{E}_i & \mathbb{B}_i \end{bmatrix}$ is epic, (ii) the matrix $\begin{bmatrix} \mathbb{E}_i \\ \mathbb{C}_i \end{bmatrix}$ is monic and (iii) $\begin{bmatrix} \lambda\mathbb{E}_i - \mathbb{A}_i \\ \mathbb{C}_i \end{bmatrix}$ has full column rank for all complex number λ if and only if this holds for matrix $\begin{bmatrix} C \\ \lambda\mathrm{I} - A \end{bmatrix}$, namely: if and only if $\mathcal{N} = \{0\}$; where $\mathcal{N}$ is the unobservable subspace of the $(A,\ C)$ pair, *i.e.*: $\mathcal{N} = \cap_{i=0}^{n-1} A^{-i}\mathrm{Ker}\ C$.

2.2.1. Exponential modes We know from Gantmacher (1977) that for any pencil $[\lambda F - G]$, with $F : \mathcal{X} \to \underline{\mathcal{X}}$ and $G : \mathcal{X} \to \underline{\mathcal{X}}$, there exist bases of $\mathcal{X}$ and $\underline{\mathcal{X}}$ such that its associated block diagonal matrix (known as the Kronecker decomposition) is composed of four types of blocks, namely: (i) finite elementary divisors, (ii) infinite elementary divisors, (iii) column minimal indices, and (iv) row minimal indices.

The finite and infinite elementary divisors correspond to the proper (differential equations) and the non-proper (derivators) parts, respectively, of the system. The column and row minimal indices correspond respectively to the existence of degrees of freedom (more unknowns than equations) and to the null part of the system (state contributions which are always zero). In the particular case of regular systems, F and G square, and $det[\lambda F - G] \neq 0$, there only exist finite and infinite elementary divisors.

Wong (1974) and Bernhard (1982) have geometrically characterized the finite elementary divisors through the maximal (F, G) invariant subspace, $\mathcal{V}^*_{\mathcal{X},0} = \sup\{\mathcal{V} \subset \mathcal{X}\ |G\mathcal{V} \subset F\mathcal{V}\}$, which is the limit of the algorithm: $\mathcal{V}^0_{\mathcal{X},0} = \mathcal{X}$, and $\mathcal{V}^{\mu+1}_{\mathcal{X},0} = G^{-1}F\mathcal{V}^{\mu}_{\mathcal{X},0}$. If λ is a finite-zero of the pencil $[\lambda F - G]$, there then exists an exponential mode characterized by a vector $v \in \mathcal{V}^*_{\mathcal{X},0}$ such that $Gv = \lambda F v$.

Armentano (1986) has geometrically characterized the global Kronecker decomposition. In the case of a regular pencil the finite elementary divisors $[\lambda\mathrm{I} - J_i]$ (J_i being the corresponding Jordan matrices) are located in the restriction of $[\lambda F - G]$ to $\mathcal{V}^*_{\mathcal{X},0}$ in the domain and to $F\mathcal{V}^*_{\mathcal{X},0}$ in the codomain.

Related with system (13) is the supremal $(\mathbb{E}_i, \mathbb{A}_i)$ invariant subspace, $\tilde{\mathcal{V}}^*_{\mathcal{X}_e,0} = \sup\{\tilde{\mathcal{V}} \subset \mathcal{X}_e | \mathbb{A}_i\tilde{\mathcal{V}} \subset \mathbb{E}_i\tilde{\mathcal{V}}\}$, which is the limit of the non increasing algorithm:

$$\tilde{\mathcal{V}}^0_{\mathcal{X}_e,0} = \mathcal{X}_e \quad ; \quad \tilde{\mathcal{V}}^{\mu+1}_{\mathcal{X}_e,0} = \mathbb{A}_i^{-1}\mathbb{E}_i\tilde{\mathcal{V}}^{\mu}_{\mathcal{X}_e,0}$$

Let us note that a necessary condition for (13) to be a *TD left inverse* of (1) is that $\tilde{\mathcal{V}}^*_{\mathcal{X}_e,0} = \{0\}$. Indeed, if this is not the case, problems occur with the initial conditions for the exponential modes (integrators), characterized by $\tilde{\mathcal{V}}^*_{\mathcal{X}_e,0}$ (*cf.* Armentano (1986)) and in general $\Sigma^i(\Sigma(\cdot))$ will not be the identity operator.

3. GEOMETRIC CHARACTERIZATION OF *TD LEFT INVERTIBILITY*

In this Section we propose a geometric characterization of *TD Left Invertibility.*

Theorem 10. The state description (1) is *TD left invertible* if and only if

$$\mathrm{Ker}\ \Gamma = \{0\} \quad \text{and} \quad \mathrm{Im}\ \Gamma \cap (\mathcal{V}^*_\Gamma + A\mathcal{V}^*_\Gamma) = \{0\} \tag{14}$$

In order to prove Theorem 10, we need the following two Lemmas: [5]

Lemma 11. (Figueroa *et al.* 2004) If $\mathrm{Im}\ \Gamma \cap (\mathcal{V}^*_\Gamma + A\mathcal{V}^*_\Gamma) = \mathrm{Ker}\ \Gamma = \{0\}$ then $y = 0$ implies $w = 0$, for all $t \geq 0$.

Lemma 12. (Figueroa *et al.* 2004) If Ker $\Gamma = \{0\}$ then: $\Gamma^{-1}(\mathcal{V}^*_\Gamma + A\mathcal{V}^*_\Gamma) = \{0\}$ if $\tilde{\mathcal{V}}^*_{\mathcal{X}_e,0} = \{0\}$.

[4] This *left inverse* is (in general) non minimal; however it can be easily minimized by matricial algorithms (see for example Bonilla and Malabre (1997)). A procedure can be found in (Bonilla and Malabre 1994). In that paper also is considered right invertibility.

[5] See Lemmas 9 and 10 of Figueroa *et al.* (2004) with $L = \Gamma$, $u = 0$ and $m = w$.

Proof of Theorem 10

Let us first prove the sufficiency: For this let us suppose that Ker $\Gamma=\{0\}$ and Im $\Gamma \cap (\mathcal{V}_\Gamma^* + A\mathcal{V}_L^*) = \{0\}$. Then by Lemma 11, $y = 0$ implies $w = 0 \; \forall \; t \geq 0$, and thus, from Lemma 8 the system (1) is *TD left invertible*.

Let us now prove the necessity: If Ker $\Gamma \neq \{0\}$ there then exists a $w \neq 0$ such that $\Gamma w = 0$ which implies that there exists a non zero w which is non observable at the output, and so, Ker $C\Psi(w) \neq \{0\}$. Therefore Γ has to be monic.

In order to prove the necessity of the second geometric condition, let us assume that system (1) is *TD left invertible*, then system (13) is one *TD left inverse*. If system (13) is a *TD left inverse* then it has no exponential modes, and thus $\tilde{\mathcal{V}}^*_{\mathcal{X}_e,0} = \{0\}$. Therefore by Lemma 12, we get the second geometric condition. □

Let us come back to Example 5

Example 13. (Continued) From (9) we get:

$$\begin{aligned}\text{Im } \Gamma \cap (\mathcal{V}_\Gamma^* + A\mathcal{V}_\Gamma^*) &= \{e_1 + \gamma_0 e_2\} \cap (\{e_2\} + \{e_1\}) \\ &\neq \{0\} \qquad (15)\end{aligned}$$

then, the geometric condition (14) is not satisfied. And thus, system (6) is not TD left invertible*.*

4. STRUCTURAL CHARACTERIZATION OF *TD LEFT INVERTIBILITY*

In this Section, we give a structural characterization of *TD Left Invertibility* which is equivalent to those of Theorem 10. For this, we first extract a maximal observable part of the system, and we next recall some results about the zero structure.

4.1 Maximal Observable Quotient System

Let $\Pi : \mathcal{X} \to \mathcal{X}/\mathcal{N}$ be the canonical projection, there then exist unique maps $(\bar{A}, \bar{\Gamma}, \bar{C})$ such that:

$$\Pi A = \bar{A}\Pi \;\; ; \quad \Pi\Gamma = \bar{\Gamma} \;\; ; \quad C = \bar{C}\Pi \qquad (16)$$

Let $\overline{\mathcal{V}}_\Gamma^*$ be the supremal $(\bar{A}, \bar{\Gamma})$ invariant subspace contained in Ker $\bar{C}$, namely $\overline{\mathcal{V}}_\Gamma^* = \sup\{\overline{\mathcal{V}}_\Gamma \subset \text{Ker } \bar{C} \mid \bar{A}\overline{\mathcal{V}}_\Gamma \subset \overline{\mathcal{V}}_\Gamma + \text{Im } \bar{\Gamma}\}$; which is the limit of the non increasing algorithm (for $\mu \geq 0$):

$$\overline{\mathcal{V}}_\Gamma^0 = \mathcal{X}/\mathcal{N}, \quad \overline{\mathcal{V}}_\Gamma^{\mu+1} = \text{Ker } \bar{C} \cap \bar{A}^{-1}\left(\overline{\mathcal{V}}_\Gamma^\mu + \text{Im } \bar{\Gamma}\right) \qquad (17)$$

Theorem 14. Given the system defined by the maps (A, Γ, C), let the quotient system be defined by the maps $(\bar{A}, \bar{\Gamma}, \bar{C})$. Then $(\mathcal{V}_\Gamma^* + A\mathcal{V}_\Gamma^*) \cap \text{Im } \Gamma = \{0\}$ and Ker $\Gamma = \{0\}$ if and only if $\overline{\mathcal{V}}_\Gamma^* = \{0\}$ and Ker $\bar{\Gamma} = \{0\}$.

To prove Theorem 14 we need three Lemmas:[6]

Lemma 15. (Figueroa *et al.* 2004) $(\mathcal{V}_\Gamma^* + A\mathcal{V}_\Gamma^*) \cap$ Im $\Gamma = \{0\}$ and Ker $\Gamma = \{0\}$ if and only if $\mathcal{V}_\Gamma^* = \mathcal{N}$ and $\Gamma^{-1}(\mathcal{N} + A\text{Ker } C) = \{0\}$.

Lemma 16. (Figueroa *et al.* 2004)

(1) $\overline{\mathcal{V}}_\Gamma^* = \Pi\mathcal{V}_\Gamma^*$
(2) $\Gamma^{-1}(\mathcal{N} + A\text{Ker } C) = \bar{\Gamma}^{-1}\bar{A}\text{Ker } \bar{C}$.

Lemma 17. (Figueroa *et al.* 2004) $\mathcal{V}_\Gamma^* = \mathcal{N}$ and $\Gamma^{-1}(\mathcal{N} + A\text{Ker } C) = \{0\}$ if and only if $\overline{\mathcal{V}}_\Gamma^* = \{0\}$ and Ker $\bar{\Gamma} = \{0\}$.

Proof of Theorem 14 From Lemma 15, $(\mathcal{V}_\Gamma^* + A\mathcal{V}_\Gamma^*) \cap \text{Im } \Gamma = \{0\}$ and Ker $\Gamma = \{0\}$ hold if and only if $\mathcal{V}_\Gamma^* = \mathcal{N}$ and $\Gamma^{-1}(\mathcal{N} + A\text{Ker } C) = \{0\}$, and from Lemma 17 if and only if $\overline{\mathcal{V}}_\Gamma^* = \{0\}$ and Ker $\bar{\Gamma} = \{0\}$. □

4.2 Zero Structure

In the 70's, pioneered by the work of Rosenbrock (1970), there was a great interest about the zero structure of linear multivariable systems (see for example MacFarlane and Karcanias (1976) and Francis and Wonham (1975)). Later, Aling and Schumacher (1984) proposed a complete geometric characterization of the zeros structures.

In this paper we shall be concerned with two particular subsets of the invariant zeros, namely the *transmission zeros* and the *input decoupling invariant zeros* (see Aling and Schumacher (1984) for complements).

From (Aling and Schumacher 1984), the total number of *transmission zeros* and *input decoupling invariant zeros*, here called *observable invariant zeros* (for shortness), is:

$$\#\textit{ obs. inv. zeros } = \dim \frac{\mathcal{V}_L^*}{\mathcal{R}_L^* + \mathcal{N}} \qquad (18)$$

4.3 Structural Characterization

Corollary 18. The state description (1) is *TD left invertible* if and only if it is *TFM left invertible* and it has neither *transmission zeros*, nor *input decoupling invariant zeros*.

PROOF.

Let us first suppose that (1) is *TD left invertible*.

Then Theorem 10 implies that Ker $\Gamma = \{0\}$ and Im $\Gamma \cap \mathcal{V}_\Gamma^* = \{0\}$. This last geometric condition

[6] See Lemmas 12, 13 and 14 of Figueroa *et al.* (2004) with $L = \Gamma$, $\bar{L} = \bar{\Gamma}$ and $\mathcal{M} = \mathcal{W}$.

is equivalent to $\mathrm{Im}\,\Gamma \cap \mathcal{R}^*_\Gamma = \{0\}$, and from algorithm (5) we get $\mathcal{R}^*_\Gamma = \{0\}$. Since $\mathrm{Ker}\,\Gamma = \{0\}$ and $\mathcal{R}^*_\Gamma = \{0\}$, we conclude from Theorem 4 that (1) is *TFM left invertible* (recall the equivalence (4)).
On the other hand, from Theorem 14 we get: $\mathcal{V}^*_\Gamma = \mathrm{Ker}\,\Pi = \mathcal{N}$, which implies: $\dim(\mathcal{V}^*_\Gamma/(\mathcal{R}^*_\Gamma + \mathcal{N})) = \dim(\mathcal{V}^*_\Gamma/\mathcal{N}) = \{0\}$. And then, from (18), there are neither *transmission zeros* nor *input decoupling invariant zeros*, *i.e. no observable invariant zeros.*

Let us suppose that (1) is *TFM left invertible* and it does not have any *observable invariant zero.*

Then from (4) and (18), we have $\mathrm{Ker}\,\Gamma = \{0\}$, $\mathcal{R}^*_\Gamma = \{0\}$, and $\mathcal{V}^*_\Gamma = \mathcal{N}$. Now, since $\mathcal{N}$ is A–invariant, we get: $\mathrm{Im}\,\Gamma \cap (\mathcal{V}^*_\Gamma + A\mathcal{V}^*_\Gamma) = \mathrm{Im}\,\Gamma \cap \mathcal{V}^*_\Gamma$. Since $\mathcal{R}^*_\Gamma = \{0\}$ we have: $\mathrm{Im}\,\Gamma \cap \mathcal{V}^*_\Gamma = \{0\}$. Therefore, $\mathrm{Ker}\,\Gamma = \{0\}$ and $\mathrm{Im}\,\Gamma \cap (\mathcal{V}^*_\Gamma + A\mathcal{V}^*_\Gamma) = \{0\}$; and thus, Theorem 10 implies that (1) is *TD left invertible.* □

Let us come back to Example 13

Example 19. (End) In view of Corollary 18, we realize that system (6) is not TD left invertible *due to the presence of the* observable zero $(s + \gamma_0)$ *(see (7)). One possible solution to overcome this can be, for example, to decompose (6) as the cascade of the following linear systems:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\dot{\zeta} = \zeta + \begin{bmatrix} -1 \\ -\gamma_0 \end{bmatrix} w \quad ; \quad \bar{w} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\zeta \qquad (19)$$

$$\dot{\xi} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\xi + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\bar{w} \quad ; \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\xi \qquad (20)$$

Indeed, the external behaviours of (19) and (20) are, respectively, described by the ordinary differential equations: $\bar{w} = (\mathrm{p} + \gamma_0)w$ *and* $\mathrm{p}^2 y = \bar{w}$. *System (20) is* TD left invertible*, (it has no* observable zero*), one* TD left inverse *being:* $\hat{w} = \mathrm{p}^2 y$. *And in this way, we can obtain, by inversion techniques, the filtered input* $\bar{w}$, *but not* w.

5. APPLICATION TO FAILURE DETECTION

Let us consider the following system [7].

$$\dot{x} = Ax + Bu + Lm \quad ; \quad y = Cx \qquad (21)$$

where u is the input, y is the output, x is the state and m is a given failure. The linear maps are defined as $A{:}\mathcal{X} \to \mathcal{X}$, $B : \mathcal{U} \to \mathcal{X}$, $L : \mathcal{M} \to \mathcal{X}$ and $C : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$; where $\mathcal{X}$, $\mathcal{U}$, $\mathcal{M}$ and $\mathcal{Y}$ are the state, input, failure and output spaces.
To reconstruct m (Saberi *et al.* 2000), using inversion techniques , let us rewrite (21) as:

$$\dot{x} = Ax + \begin{bmatrix} L & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m \\ u \end{bmatrix} \; ; \; \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ 0 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{I} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m \\ u \end{bmatrix} \qquad (22)$$

[7] See also (Figueroa *et al.* 2004)

In section 2 we have pointed out that *left invertibility* is equivalent to monicity (*c.f* Remark 2 **R2** and Lemma 8). Then, (22) will be left invertible if and only if $\begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} = 0$ implies that $\begin{bmatrix} m \\ u \end{bmatrix} = 0$. That is to say, $\dot{x} = Ax + Lm$ and $0 = Cx$, imply that $m = 0$. This is equivalent to ask *TD left invertibility* of (1), with $\Gamma = L$ and $w = m$. We then have the following Corollary (c.f Theorem 10, Theorem 14 and Corollary 18).

Corollary 20. The failure m of system (21) can be reconstructed by left inversion techniques if and only if $C(s\mathrm{I} - A)^{-1}L$ is *TFM left invertible* and it has neither transmission zeros, nor input decoupling invariant zeros.

To get a TD left inverse, let us rewrite (21) as:

$$\dot{x} = Ax + \begin{bmatrix} L & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m \\ u \end{bmatrix} \; ; \; y = Cx \qquad (23)$$

Then (in case of *TD left invertibility*) we get from Lemma 9 the failure reconstructor *c.f.* (13)).

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathrm{I} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}\dot{\xi} &= \begin{bmatrix} C & \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \\ A & \begin{bmatrix} L & B \end{bmatrix} \end{bmatrix}\xi + \begin{bmatrix} -\mathrm{I} \\ 0 \end{bmatrix} y \\ \begin{bmatrix} \hat{m} \\ \hat{u} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & \begin{bmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ 0 & \mathrm{I} \end{bmatrix} \end{bmatrix}\xi \end{aligned} \qquad (24)$$

and since $\hat{u} \equiv u$ we get

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathrm{I} & 0 \end{bmatrix}\dot{\xi} &= \begin{bmatrix} C & 0 \\ A & L \end{bmatrix}\xi + \begin{bmatrix} -\mathrm{I} & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} \\ \hat{m} &= \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{I} \end{bmatrix}\xi \end{aligned} \qquad (25)$$

6. CONCLUDING REMARKS

We have proposed in this paper necessary and sufficient conditions for *left inversion* when working in the *time domain.*

We have pointed out that in the time domain the initial conditions play an important role for *left invertibility.* As shown on our example, which is *TFM left invertible*, there indeed exists an input which is not observable at the output, and thus which cannot be reconstructed, neither by inversion techniques, nor by any observation techniques.

In Hou and Patton (1998) is introduced a notion which is very close to *TD left invertibility*, namely, the one called *input observability* [8]. In that paper the *input observability* is characterized in a matricial way by their Theorem 1, where is stated as a necessary and sufficient condition for *input*

[8] Different from the (weaker) notion of *input observability* used in Massoumnia *et al* (1989) which corresponds to: Γ monic and $\mathrm{Im}\,\Gamma \cap \mathcal{N} = \{0\}$.

observability the following equality (in our paper $D = 0$ and $\Gamma = B$):

$$\sigma\left(\begin{bmatrix} \lambda \mathrm{I} - A & -B \\ C & D \end{bmatrix}\right) = \sigma\left(\begin{bmatrix} \lambda \mathrm{I} - A \\ C \end{bmatrix}\right) \qquad (26)$$

where $\sigma(\lambda M - N)$ denotes the set of the finite eigenvalues of the pencil $\lambda M - N$ (these are the finite elementary divisors recalled in Section 2.2.1). But this condition is only necessary and not sufficient. Indeed, let us consider the example:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&1 \\ 0&0&0&0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0&0 \\ 1&0 \\ 0&1 \\ 0&0 \end{bmatrix} u \quad ; \quad y = \begin{bmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&0&1&0 \end{bmatrix} x \qquad (27)$$

The first input, u_1, is associated to the non observable subspace $\{e_2\}$, and the second input, u_2, is linked to y_2 by the ordinary differential equation $\ddot{y}_2 = \dot{u}_2$. It is clear that this system can not be neither *TD left invertible* nor *input observable*.

Computing the subspaces involved in Theorem 10:

Ker $\Gamma = \{0\}$ & Im $\Gamma \cap (\mathcal{V}_\Gamma^* + A\mathcal{V}_\Gamma^*) = \{e_2,\, e_3\} \neq \{0\}$

which implies the non *TD left invertibility*.

Let us consider the pencils used in Theorem 1 of Hou and Patton (1998), namely $M_1(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda \mathrm{I} - A & -B \\ C & D \end{bmatrix}$ and $M_2(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda \mathrm{I} - A \\ C \end{bmatrix}$. The *normal-ranks* of these two pencils are: *normal-rank*$(M_1(\lambda)) = 5$ and *normal-rank*$(M_2(\lambda)) = 4$. Then:

$$\mathrm{rank} M_1(\lambda) : \begin{cases} \lambda = 0 \Rightarrow \mathrm{rank} M_1 = 4 < 5 \\ \lambda \neq 0 \Rightarrow \mathrm{rank} M_1 = 5 = 5 \end{cases}$$

$$\mathrm{rank} M_2(\lambda) : \begin{cases} \lambda = 0 \Rightarrow \mathrm{rank} M_1 = 3 < 4 \\ \lambda \neq 0 \Rightarrow \mathrm{rank} M_1 = 4 = 4 \end{cases}$$

Which implies that: $\sigma(M_1) = \{0\} = \sigma(M_2)$, and then Theorem 1 of (Hou and Patton 1998) says that system (27) is *input observable*. This contradiction arrives since condition (26) is only necessary and not sufficient. Hou and Patton (1998) have to add the condition of *TFM invertibility*, namely to add the condition $\mathcal{R}_B^* = \{0\}$ (see (4) and our Corollary 18). Indeed, in this academic example, (27) has a rank equal to 1 and not 2, *i.e.* the number of inputs; and it is precisely the input belonging to $\mathcal{R}_B^* = \{0\}$ which makes problems.

REFERENCES

Aling, H. and J.M. Schumacher (1984). A nine-fold canonical decomposition for linear systems. *International Journal of Control*, **39(4)**, 779–805.

Armentano, V.A. (1986). The pencil $(sE - A)$ and controllability-observability for generalized linear systems: a geometric approach. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **24(4)**, 616–638.

Basile, G. and G. Marro (1992). *Controlled and Conditioned Invariants in Linear System Theory.* Prentice Hall.

Bernhard, P. (1982) On singular implicit dynamical systems. *SIAM Journal on Control and Optimization.* **20(5)**, 612–633.

Bonilla, M. and M. Malabre (1990). One side invertibility for implicit descriptions. In: *29th Conference on Decision and Control.* pp. 3601–3602.

Bonilla, M. and M. Malabre (1994). Geometric Characterization of Lewis's Structure Algorithm. *Circuits, Systems and Signal Processing, special issue on "Implicit and Robust Systems"* **13(2-3)**, 255–272.

Bonilla, M. and M. Malabre (1997). Structural Matrix Minimization Algorithm for Implicit Descriptions. *Automatica* **33(4)**, 705–710.

Francis, B.A. and W.M. Wonham (1975). The role of transmission zeros in linear multivariable regulators. *International Journal of Control*, **22**, 657–681.

Figueroa, M., M. Bonilla, M. Malabre and J.C. Martínez (2004). On failure detection by inversion techniques. To be presented at the *43rd Conference on Decision and Control.*

Gantmacher, F.R. (1977). The Theory of Matrices. Vol. II, *New York: Chelsea.*

Hou, M. and R.J. Patton (1998). Input Observability and Input Reconstruction, *Automatica*, **34(6)**, 789–794.

Kuijper, M. (1992). Descriptor representations without direct feedthrough term. *Automatica*, **28**, 633–637.

Lewis, F.L. (1992). A tutorial on the geometric analysis of linear time-invariant implicit systems. *Automatica* **28(1)**, 119–137.

MacFarlane, A.G.J. and N. Karcanias (1976). Poles and zeros of linear multivariable systems: a survey of the algebraic, geometric and complex-variable theory. *International Journal of Control*, **24**, 33–74.

Massoumnia M.A., G.C. Verghese, and A.S. Wilsky (1989). Failure Detection and Identification. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **34(3)**, 316–321.

Rosenbrock, H.H. (1970). State–Space and Multivariable Theory. *London: Nelson.*

Saberi A., Stoorvogel A.A., Sannuti P. and Niemann H.H. Fundamental problems in fault detection and identification. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Vol. 10, pp. 1209-1236.

Wong, K.T. (1974). The eigenvalue problem $\lambda Tx + Sx$.,1974. *Journal of Differential Equations*, **1**, 270–281.

Wonham, W.M. (1985). *Linear Multivariable Control: A Geometric Approach.* 3rd ed.. Springer–Verlag. New York.

Apéndice C

M. Bonilla, M.Malabre and M.Figueroa G.

Time Domain Right Invertibility.

2006 American Control Conference. Silver Anniversary ACC. Minneapolis, Minnesota USA. June 14-16, 2006.

Proceedings of the 2006 American Control Conference
Minneapolis, Minnesota, USA, June 14-16, 2006

Time Domain Right Invertibility

M. Bonilla E.*, M. Malabre† and M. Figueroa G.‡
*LAFMAA–CINVESTAV-IPN, Control Automático. MEXICO. mbonilla@cinvestav.mx
†LAFMAA–IRCCyN, CNRS UMR 6597, FRANCE. Michel.Malabre@irccyn.ec-nantes.fr
‡PhD student of J.C. Martínez and M. Bonilla. Sponsored by CONACyT–México. mfigueroa@ctrl.cinvestav.mx

***Abstract*— Generalized systems (also called implicit, descriptor, ...) usually offer more possibilities for solving control and observation problems. In this context, we use an important tool of System Theory, namely *right invertible systems*. In this paper we consider some possible dualizations results on *time domain left invertibility* and point out which duality holds. We give a necessary condition for *time domain right invertibility*.**

Index Terms— **Linear systems, inversion techniques, geometric approach, structural properties, implicit systems**

Notation

Script capitals $\mathcal{V}$,$\mathcal{W}, \ldots$, denote linear spaces with elements $v, w, \ldots$; the external direct sum of some given spaces $\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_r$ is written as $\mathcal{X}_1 \oplus \cdots \mathcal{X}_r$. Given a linear map $X : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$, Im $X = X\mathcal{V}$ denotes its image, Ker X denotes its kernel, $X^{-1}\mathcal{T}$ the inverse image of $\mathcal{T}$ by the linear map (possibly not invertible) X, and $X' : \mathcal{W}' \to \mathcal{V}'$ is its dual map. In the case of a given matrix X, we denote by X^T its transpose matrix. e_i stands for the $i-th$ vector of the canonical basis, i.e. having a 1 in its $i-th$ coordinate and 0 in the other ones. $\{v_1, \ldots v_k\}$ stands for the subspace generated by the vectors $v_1, \ldots v_k$. Given a time variable $x(t)$, we denote the first and second time derivatives by $\dot{x}$, $\ddot{x}$ respectively; p and s stand for the derivative operator $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ and the Laplace complex variable respectively.

I. Introduction

Two powerful tools usually used in System Theory for synthesis and analysis are (when they exist) the *right inverse* or the *left inverse systems*. A *right inverse system* is used to control (*e.g.* to track reference signals), while a *left inverse system* is used to observe (*e.g.* to reconstruct particular signals present in the system).

Recently in [8], [9], we have studied, from a time domain point of view, the left inversion problem of strictly proper systems described by the state space realization $\Sigma(A, B, C)$: $\mathcal{U} \to \mathcal{Y}$:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad ; \quad y(t) = Cx(t) \tag{1}$$

where u is the input, y is the output and x is the state. The linear maps are defined as $A : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, $B : \mathcal{U} \to \mathcal{X}$, and $C : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$; where $\mathcal{X}$, $\mathcal{U}$, and $\mathcal{Y}$ are the state, input, and output spaces.

We have proposed structural conditions for synthesizing *left inverse systems*. Due to initial conditions, the obtained conditions for the time domain are more restricted than the ones for the transfer function approach [8], [2]. We have shown that the transfer function approach is not adequate for problems related with the temporal reconstruction of unknown exogenous signals (*e.g.* fault detection problem [10], [11], [9]).

The objective of this contribution is to study *right inversion* from a time domain point of view. For this, we briefly recall in Section II the principal results of *left invertibilty* from both points of view: *time domain* and *transfer function approach*. In Section III we consider dualities between *left* and *right invertibility* and give structural conditions for it to hold. In Section IV we conclude.

Let us finish this Introductory Section recalling the following two useful results:

Lemma 1.1 (Bonilla and Malabre [4]): Let the following implicit description $\Sigma(\mathbb{E}, \mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C})$: $\mathcal{U} \to \mathcal{Y}$:

$$\mathbb{E}\dot{x}(t) = \mathbb{A}x(t) + \mathbb{B}u(t) \quad ; \quad y(t) = \mathbb{C}x(t) \tag{2}$$

be solvable; that is to say: there exists a linear transformation, $\Psi(\cdot) : \mathcal{U} \to \mathcal{X}$, satisfying: $\mathbb{E}\dot{\Psi}(u(t)) = \mathbb{A}\Psi(u(t)) + \mathbb{B}u(t)$. Then:

1) $\Sigma(\mathbb{E}, \mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C})$ is *left invertible* if and only if Ker $C\Psi(\cdot) = \{0\}$.
2) $\Sigma(\mathbb{E}, \mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C})$ is *right invertible* if and only if Im $C\Psi(\cdot) = \mathcal{Y}$.

Lemma 1.2 (Bonilla and Malabre [4]): If the implicit description $\Sigma(\mathbb{E}, \mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C})$ is *left invertible* (*right invertible*) then one left inverse system (right inverse system), Σ^{ℓ} : $\mathcal{Y} \to \mathcal{U}$ ($\Sigma^{r} : \mathcal{Y} \to \mathcal{U}$), is:[1]

$$\mathbb{E}_i\dot{\xi} = \mathbb{A}_i\xi + \mathbb{B}_i\hat{y} \quad ; \quad \hat{u} = \mathbb{C}_i\xi \tag{3}$$

where $\mathbb{E}_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathbb{E} & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbb{A}_i = \begin{bmatrix} \mathbb{C} & 0 \\ \mathbb{A} & \mathbb{B} \end{bmatrix}$, $\mathbb{B}_i = \begin{bmatrix} -\mathrm{I} \\ 0 \end{bmatrix}$ and $\mathbb{C}_i = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{I} \end{bmatrix}$. In this case the linear maps are defined as: $\mathbb{E}_i : \mathcal{X}_e \to \underline{\mathcal{X}}_e$, $\mathbb{A}_i : \mathcal{X}_e \to \underline{\mathcal{X}}_e$, $\mathbb{B}_i : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ and $\mathbb{C}_i : \mathcal{X}_e \to \mathcal{U}$; where $\mathcal{X}_e = \mathcal{X} \oplus \mathcal{U}$ and $\underline{\mathcal{X}}_e = \mathcal{Y} \oplus \mathcal{X}$.

II. Left Inverse

In order to tackle the *left inversion* concept, in [8] we have payed attention to the following Remark:

Remark 2.1: Let us recall that:

1) The basic definition for *left invertibility* is: Given a function $f : Dom \to CoDom$, $r \mapsto f(r)$, find (if possible) a function $g : CoDom \to Dom$, $v \mapsto g(v)$, such that the composite function $g \circ f : Dom$

[1]For *left invertibility*: $\hat{y} = y$ and for *right invertibility*: $\hat{u} = u$.

$\to$ *Dom*, $r \mapsto g(f(r))$, is the identity function I. Namely: $g(f(r)) = r$ for all $r \in Dom$.

2) For a linear function f, the existence of a *left inverse function*, g, is equivalent to the fact that f has to be monic. Namely: Ker $f(\cdot) := \{r \in Dom \mid f(r) = 0\} = \{0\}$.
3) From the fundamental Theorem of *Calculus*: The *left inverse function*, g, of the linear function $f : r(t) \mapsto \int_0^t r(\tau)\mathrm{d}\tau$ is: $g : v(t) \mapsto \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}$, since $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^t r(\tau)\mathrm{d}\tau = r(t)$, for all continuous variable r.

We have considered *left invertibility* in the two basic *domains* of the Linear Time Invariant Systems, namely, the *frequency domain* and the *time domain*.

A. Transfer function matrix left invertibility

In the *transfer function matrix* (*TFM*) *domain*, the following definition for *left invertibility* is standard:

Definition 2.2: Let us consider a *transfer function matrix*, $T(\mathrm{s}) = C(\mathrm{sI} - A)^{-1}B$, with p rows and m columns. $T(\mathrm{s})$ is *TFM left invertible* if its m columns are independent as rational functions of s, namely if and only if rank $T(\mathrm{s}) = m$, *viz*, if and only if Ker $T(\mathrm{s}) = \{0\}$.

This *TFM left invertibility* was geometrically characterized by Basile and Marro [2] using the supremal (A, B) (or controlled) invariant subspace contained in Ker C (see for example [13], [2]):

$$\mathcal{V}^* = \sup\{\mathcal{V} \subset \text{Ker } C \mid A\mathcal{V} \subset \mathcal{V} + \text{Im } B\}$$

which is the limit of:

$$\mathcal{V}^0 = \mathcal{X}\ , \quad \mathcal{V}^{\mu+1} = \text{Ker } C \cap A^{-1}(\mathcal{V}^\mu + \text{Im } B) \qquad (4)$$

Theorem 2.3 (Basile and Marro [2]): $T(\mathrm{s})$ is *TFM left invertible* if and only if:

$$\text{Ker } B = \{0\} \quad \text{and} \quad \text{Im } B \cap \mathcal{V}^* = \{0\} \qquad (5)$$

We have shown in [8], [9] that this transfer function approach is not adequate for problems related with the temporal reconstruction of unknown inputs, *e.g* the fault reconstruction problem. For this we have considered the following illustrative example:

Example 2.4: (Start) Let us consider the system:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} u \quad ; \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \qquad (6)$$

with $|\gamma_1| + |\gamma_2| \neq 0$. *The external behaviour of this system is given by the ordinary differential equation:*

$$\mathrm{p}^2 y = (\gamma_1 \mathrm{p} + \gamma_2)u \qquad (7)$$

and its Transfer Function Matrix, $T_u^y(\mathrm{s})$, *is:*

$$T_u^y(\mathrm{s}) = (\gamma_1 \mathrm{s} + \gamma_2)/\mathrm{s}^2 \qquad (8)$$

Let us compute the information involved in Theorem 2.3:

$\gamma_1 = 0$: Im $B = \{e_2\}$ *and* Ker $C = \{e_2\} = \mathcal{V}^1$. *Then:* $\mathcal{V}^2 = \{e_2\} \cap A^{-1}\{e_2\} = \{e_2\} \cap \{e_1\} = \{0\}$; *namely:*

$$\mathcal{V}^* = \{0\} \quad \textit{and} \quad \text{Im } B = \{e_2\} \qquad (9)$$

$\gamma_1 \neq 0$: Im $B = \{e_1 + \gamma_0 e_2\}$, *with* $\gamma_0 = \gamma_2/\gamma_1$, *and* Ker $C = \{e_2\} = \mathcal{V}^1$. *Then:* $\mathcal{V}^2 = \{e_2\} \cap A^{-1}\{e_1, e_2\} = \{e_2\}$; *namely:*

$$\mathcal{V}^* = \{e_2\} \quad \textit{and} \quad \text{Im } B = \{e_1 + \gamma_0 e_2\} \qquad (10)$$

And thus, for any γ_1 *and* γ_2*:*

$$\text{Ker } B = \{0\} \quad \textit{and} \quad \text{Im } B \cap \mathcal{V}^* = \{0\} \qquad (11)$$

Therefore, system (6) is TFM left invertible. *Indeed, from (8) its* TFM left inverse, $T_y^{u^*}(\mathrm{s})$, *is:*

$$T_y^{u^*}(\mathrm{s}) = \mathrm{s}^2/(\gamma_1 \mathrm{s} + \gamma_2) \qquad (12)$$

which is the Laplace transform of the system:

$$(\gamma_1 \mathrm{p} + \gamma_2)u^* = \mathrm{p}^2 y \qquad (13)$$

Remark 2.5: Let us note that:

1) *From (8) and (12):* $T_y^{u^*}(\mathrm{s}) \cdot T_u^y(\mathrm{s}) = \mathrm{I}$, *but*
2) *From (7) and (13) (for the case* $\gamma_1 \neq 0$*):* $(\mathrm{p} + \gamma_0)(u^* - u) = 0$. *Which implies:* $u^* = u + k e^{-\gamma_0 t}$, *moreover*
3) *If:* $u = u(0)e^{-\gamma_0 t}$, *with* $u(0)$ *non zero, then from (7) we get:* $y = 0$, *and thus* $u^* = 0$.

And so, the invertibility *in the time domain depends on initial conditions as well as on the nature of* u. *Indeed, from Remark 2.5-2, we need that the initial condition* k *be in a neighborhood of zero with a very small radius; and, which is more important, the parameter* γ_0 *must be non negative. Furthermore, from Remark 2.5-3, the input* u *cannot belong to* Ker $(\mathrm{p} + \gamma_0)$.

B. Time domain left invertibility

In the *time domain (TD)*, we have adopted the following definition:

Definition 2.6 (Bonilla, Figueroa and Malabre [8]): The system (1), $\Sigma(A, B, C)$, is called *TD left invertible* if: (i) there exists a system $\Sigma^\ell : \mathcal{Y} \to \mathcal{U}$ such that it is solvable[2] in Im Σ and (ii) $\Sigma^\ell \circ \Sigma = I$.
Σ^ℓ is called a *TD left inverse* of Σ.
Note that, for the solvable implicit system (1), $\mathrm{I}\dot{x} = Ax + Bu$ and $y = Cx$, there exists always the linear transformation $\Psi(\cdot)$: $\mathcal{U} \to \mathcal{X}$, $u(t) \mapsto \int_0^t \mathrm{e}^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\mathrm{d}\tau$, such that: $\mathrm{I}\dot{\Psi}(u) = A\Psi(u) + Bu$ and $y = C\Psi(u)$, for all admissible inputs u.
In [8] *TD left invertibility* was geometrically characterized as follows:

Theorem 2.7 (Bonilla, Figueroa and Malabre [8]): The state description (1) is *TD left invertible*, namely

$$0 = C\int_0^t \mathrm{e}^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\mathrm{d}\tau \;\Rightarrow\; u(\tau) = 0,\ \forall \tau \in (0, t) \qquad (14)$$

if and only if

$$\text{Ker } B = \{0\} \quad \text{and} \quad \text{Im } B \cap (\mathcal{V}^* + A\mathcal{V}^*) = \{0\} \qquad (15)$$

[2]Solvable means that for each input in $\mathcal{Y}$, there exists *at least one* solution in $\mathcal{X}$.

This Theorem leads to the following structural characterization:

Corollary 2.8 (Bonilla, Figueroa and Malabre [8]): The state description (1) is *TD left invertible* if and only if it is *TFM left invertible* and it has neither *transmission zeros*, nor *input decoupling invariant zeros*.

We have shown in [8], [9] that this *time domain approach* is well adapted to the unknown inputs reconstruction problem. For this we have considered the following illustrative example:

Example 2.9: (Example 2.4 Continued)

- *From (10) we get:*

$$\begin{aligned}\text{Im } B \cap (\mathcal{V}^* + A\mathcal{V}^*) &= \\ &= \{e_1 + \gamma_0 e_2\} \cap (\{e_2\} + \{e_1\}) \neq \{0\} \quad (16)\end{aligned}$$

  then, the geometric condition (15) is not satisfied. And thus, system (6) is not TD left invertible.

- *In view of Corollary 2.8, we realize that system (6) (for the case $\gamma_1 \neq 0$) is not* TD left invertible *due to the presence of the* observable zero $(\mathrm{s} + \gamma_0)$ *(see (7)). One possible solution to overcome this can be, for example, to decompose (6) as the cascade of the following linear systems:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \dot{\zeta} = \zeta + \begin{bmatrix} -\gamma_1 \\ -\gamma_2 \end{bmatrix} u \quad ; \quad w = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \zeta \quad (17)$$

$$\dot{\xi} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xi + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w \quad ; \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \xi \quad (18)$$

  Indeed, the external behaviours of (17) and (18) are, respectively, described by the ordinary differential equations: $w = \gamma_1(\mathrm{p} + \gamma_0)u$ and $\mathrm{p}^2 y = w$. System (18) is TD left invertible, *(it has no* observable zero*), one* TD left inverse *being: $\hat{w} = \mathrm{p}^2 y$. In this way, we can obtain, by inversion techniques, the filtered input w, but not u.*

III. Right Inverse

With respect to the *right invertibility* notion, we consider the following Remark:

Remark 3.1: Let us recall that:

1) The basic definition for *right invertibility* is: *Given a function f : $Dom \to CoDom$, $r \mapsto f(r)$, find $(if\ possible)$ a function g : $Dom \to CoDom$, $q \mapsto g(q)$, such that the composite function $f \circ g$: $CoDom \to CoDom$, $q \mapsto f(g(q))$, is the* identity function I. *Namely: $f(g(q)) = q$ for all $q \in CoDom$.*
2) For a linear function f, the existence of a *right inverse function*, g, is equivalent to the fact that f has to be epic. Namely: $\forall q \in CoDom\ \exists\ r \in Dom$ such that $f(r) = q$.
3) The linear function g is a *right inverse function* of the linear function f, if and only if, f is a *left inverse function* of g; indeed in both cases: $f(g(q)) = q$ for all $q \in CoDom$.

A. Transfer Function Matrix Right Invertibility

In the *transfer function matrix* (*TFM*) *domain*, the following definition for *right invertibility* is standard:

Definition 3.2: Let us consider a *transfer function matrix*, $T(\mathrm{s}) = C(\mathrm{sI} - A)^{-1}B$, with p rows and m columns. $T(\mathrm{s})$ is *TFM right invertible* if and only if its p rows are independent as rational functions of s, namely if and only if rank $T(\mathrm{s}) = p$, *viz*, if and only if Ker $T^T(\mathrm{s}) = \{0\}$. Since:

$$T^T(\mathrm{s}) = B^T(\mathrm{sI} - A^T)^{-1}C^T$$

Basile and Marro [2] geometrically characterized the *transfer function matrix right invertibility* by using the dual of $\mathcal{V}^*$, namely the infimal (C, A) (or conditioned) invariant subspace containing Im B (see for example [13], [2]):

$$\mathcal{S}_* = \inf\{\mathcal{S} \supset \text{Im } B \mid \mathcal{S} \subset A\mathcal{S} + \text{Im } B\}$$

which is the limit of:

$$\mathcal{S}^0 = \{0\}\ , \quad \mathcal{S}^{\mu+1} = \text{Im } B + A\,(\mathcal{S}^{\mu} \cap \text{Ker } C) \qquad (19)$$

Theorem 3.3: [2] $T(\mathrm{s})$ is *TFM right invertible* if and only if:

$$\text{Im } C = \mathcal{Y} \quad \text{and} \quad \text{Ker } C + \mathcal{S}_* = \mathcal{X} \qquad (20)$$

B. Time Domain Right Invertibility

In the *time domain* we adopt the following definition:

Definition 3.4: A linear system $\Sigma : \mathcal{U} \to \mathcal{Y}$, is called *TD right invertible* if (i) there exists a system $\Sigma^r : \mathcal{Y} \to \mathcal{U}$ such that it is solvable[3] in Im Σ and (ii) $\Sigma \circ \Sigma^r = I$. Σ^r is called a *TD right inverse* of Σ.

Following the duality:

$$(A, B, C, \text{Im } B, \text{Ker } C) \leftrightarrow (A^T, C^T, B^T, \text{Im } C^T, \text{Ker } B^T) \qquad (21)$$

found in the *transfer function domain*, one could think that the geometric condition for *TD right inversion* is the dual condition of (15), namely:

$$\text{Im } C = \mathcal{Y} \quad \text{and} \quad \text{Ker } C + \left(\mathcal{S}_* \cap A^{-1}\mathcal{S}_*\right) = \mathcal{X} \qquad (22)$$

Indeed, for the case of the linear system (1), one could think that the *TD right invertibility* of system $\Sigma(A, B, C)$ is equivalent to the *TD left invertibility* of its dual system $\Sigma'(A', C', B')$. But, as we show hereafter, that is *completely wrong* since the duality has to be tackled from a functional point of view and not from a vector space point of view.

C. Time Domain Duality

In view of Remark 3.1-3 a given linear system $\Sigma : \mathcal{U} \to \mathcal{Y}$ is *TD right invertible* if and only if any of its *TD right inverses* is *TD left invertible*, and in particular its *TD right inverse* $\Sigma^r : \mathcal{Y} \to \mathcal{U}$:

$$\dot{\xi} = A_r \xi + B_r y^* \quad ; \quad u = C_r \xi \qquad (23)$$

is *TD left invertible*

[3]Solvable means that for each input in the space $\mathcal{Y}$, there exists *at least one* solution in the descriptor variable space $\mathcal{X}$.

Now, from Theorem 2.7 the *TD right inverse system*, (23), is *TD left invertible* if and only if:

$$\text{Ker } B_r = \{0\} \quad \text{and} \quad \text{Im } B_r \cap (\mathcal{V}_r^* + A_r\mathcal{V}_r^*) = \{0\} \quad (24)$$

where $\mathcal{V}_r^*$ is the limit of the non increasing algorithm:

$$\mathcal{V}_r^0 = \mathcal{X} \ , \quad \mathcal{V}_r^{\mu+1} = \text{Ker } C_r \cap A_r^{-1}(\mathcal{V}_r^\mu + \text{Im } B_r) \quad (25)$$

If (23) is *TD left invertible* then one *TD left inverse system* is the system $\Sigma : \mathcal{U} \to \mathcal{Y}$ (*cf.* Lemma 1.2):

$$\begin{aligned} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathrm{I} & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbb{E}} \dot{x} &= \underbrace{\begin{bmatrix} C_r & 0 \\ A_r & B_r \end{bmatrix}}_{\mathbb{A}} x + \begin{bmatrix} -\mathrm{I} \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{I} \end{bmatrix} x \end{aligned} \quad (26)$$

If (26) is *TD right invertible* then one *TD left inverse system* is (*cf.* Lemma 1.2):

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{I} & 0 & 0 \end{array}\right] \dot{\xi}_e &= \left[\begin{array}{cc|c} 0 & \mathrm{I} & 0 \\ \hline C_r & 0 & -\mathrm{I} \\ A_r & B_r & 0 \end{array}\right] \xi_e + \begin{bmatrix} -\mathrm{I} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} y^* \\ u &= \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & \mathrm{I} \end{array}\right] \xi_e \end{aligned} \quad (27)$$

We can easily assert that systems (27) and (23) are externally equivalent (see [6])[4]; indeed, both systems satisfy the same integral equation: $u(t) = C_r \mathrm{e}^{A_r(t)} B y^*(0) + C_r \int_0^t \mathrm{e}^{A_r(t-\tau)} B y^*(\tau) \mathrm{d}\tau$.

Remark 3.5: From (26) we realize that:

1) Ker $[\mathrm{I} \quad 0] \cap$ Ker $[C_r \quad 0] \neq \{0\}$, and so (26) is not internally proper (see the Appendix); that is to say, for the system to be *right inverted* it has to possess an internal non proper part (pure derivative actions).
2) Let us now consider the exponential modes of (26). For this, let λ be a finite eigenvalue and $v = [v_1^T \ \ v_2^T]^T \neq 0$ an associated eigenvector of the pencil $[\lambda\mathbb{E} - \mathbb{A}]$ (see [12]), namely:

$$\begin{bmatrix} -C_r & 0 \\ \lambda\mathrm{I} - A_r & -B_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (28)$$

This implies:

$$0 = C_r(\lambda\mathrm{I} - A_r)^{-1} B_r v_2$$

From the *TD left invertibility* of (23) we directly get (it is a monic system, recall Remark 2.1-2 and (14)):

$$v_2 \equiv 0$$

And thus (28) is equivalent to:

$$(\lambda\mathrm{I} - A_r)v_1 = 0 \quad \& \quad v_1 \in \text{Ker } C_r \quad (29)$$

Therefore all the exponential modes of (26) are unobservable.

We have proved in this way that:

[4]Two models are called externally equivalent if the corresponding sets of all possible trajectories for the external variables (external behaviors) are the same.

Lemma 3.6: An implicit linear system:

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad ; \quad y(t) = Cx(t) \quad (30)$$

is *TD right invertible* only if all its exponential modes are unobservable.

Let us finish this Section with the following illustrative example:

Example 3.7: Let us consider the system:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad ; \quad y = \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \end{bmatrix} x \quad (31)$$

with $|\gamma_1| + |\gamma_2| \neq 0$.

System (31) is the dual of system (6), in the sense of (21). Then, its external behaviour and transfer function are precisely the ones given by (7) and (8) respectively. Furthermore, from the vector space duality we get quickly:

$\gamma_1 = 0$: Ker $C = \{e_1\}$ *and* Im $B = \{e_1\} = \mathcal{S}^1$. *Then:* $\mathcal{S}^2 = \{e_1\} + A\{e_1\} = \{e_1\} + \{e_2\} = \{e_1, e_2\}$; *namely:*

$$\mathcal{S}_* = \mathcal{X} \quad \textit{and} \quad \text{Ker } C = \{e_1\} \quad (32)$$

$\gamma_1 \neq 0$: Ker $C = \{\gamma_0 e_1 - e_2\}$, *with* $\gamma_0 = \gamma_2/\gamma_1$, *and* Im $B = \{e_1\} = \mathcal{S}^1$. *Then:* $\mathcal{S}^2 = \{e_1\} + A\{0\} = \{e_1\}$; *namely:*

$$\mathcal{S}_* = \{e_1\} \quad \textit{and} \quad \text{Ker } C = \{\gamma_0 e_1 - e_2\} \quad (33)$$

And thus:

$$\text{Im } C = \mathcal{Y} \quad \textit{and} \quad \text{Ker } C + \mathcal{S}_* = \mathcal{X} \quad (34)$$

Therefore, system (31) is TFM right invertible. *Indeed, from (8) its* TFM right inverse, $T_{y^*}^u(\mathrm{s})$, *is:*

$$T_{y^*}^u(\mathrm{s}) = \mathrm{s}^2/(\gamma_1\mathrm{s} + \gamma_2) \quad (35)$$

which is the Laplace transform of the system:

$$(\gamma_1\mathrm{p} + \gamma_2)u = \mathrm{p}^2 y^* \quad (36)$$

Let us now consider (22) for this example:

$\gamma_1 = 0$: Ker $C + (\mathcal{S}_* \cap A^{-1}\mathcal{S}_*) = \{e_1\} + (\mathcal{X} \cap A^{-1}\mathcal{X}) = \mathcal{X}$.

$\gamma_1 \neq 0$: Ker $C + (\mathcal{S}_* \cap A^{-1}\mathcal{S}_*) = \{\gamma_0 e_1 - e_2\} + (e_1 \cap A^{-1}e_1) = \{\gamma_0 e_1 - e_2\} \neq \mathcal{X}$.

Because of the zero $(\mathrm{s} + \gamma_0)$, *(22) is not satisfied. Let us consider the external behaviour (7):*

$$\mathrm{p}^2 y = w \quad ; \quad w = (\gamma_1\mathrm{p} + \gamma_2)u \quad (37)$$

If we consider the following system (cf. *(36)):*

$$w^* = \mathrm{p}^2 y^* \quad ; \quad (\gamma_1\mathrm{p} + \gamma_2)u = w^* \quad (38)$$

We get:

$$w \equiv w^* \quad \textit{and} \quad \mathrm{p}^2(y - y^*) = 0 \quad (39)$$

And thus:

$$y = y^* + k_1 + k_o t \quad (40)$$

The system is not TD right invertible *due to the presence of the two finite poles (and thus of the initial conditions). The zero does not create difficulties.*

Let us finally point out that:

1) *If we first exponentially stabilize the system, we can control the system in such a way that the difference $y - y^*$ decays exponentially. Indeed ($a > 0$, $b > 0$ and $a \neq b$):*

$$u = [-(a+b) \quad -ab]x + v \quad (41)$$

$$(\mathrm{p}+a)(\mathrm{p}+b)y = w \quad ; \quad w = (\gamma_1 \mathrm{p} + \gamma_2)v \quad (42)$$

$$w^* = (\mathrm{p}+a)(\mathrm{p}+b)y^* \quad ; \quad (\gamma_1 \mathrm{p} + \gamma_2)v = w^* \quad (43)$$

$$w \equiv w^* \quad \textit{and} \quad (\mathrm{p}+a)(\mathrm{p}+b)^2(y-y^*) = 0 \quad (44)$$

$$y = y^* + k_1 e^{-at} + k_o e^{-bt} \quad (45)$$

2) *If we first move the finite poles to infinity with a PD–feedback we can obtain a* TD right inverse. *Indeed (see for example [5]):*

$$u = [1 \quad 0]\dot{x} + [0 \quad -1]x + v \quad (46)$$

$$y = (\gamma_1 \mathrm{p} + \gamma_2)v \quad (47)$$

$$(\gamma_1 \mathrm{p} + \gamma_2)v = y^* \quad (48)$$

$$v \equiv y^* \quad (49)$$

IV. Concluding Remarks

In this paper we have shown that the *time domain duality* between *TD left invertibility* and *TD right invertibility* is given by a zero↔pole duality and not by an $(A, B, C, \text{Im } B, \text{Ker } C) \leftrightarrow (A^T, C^T, B^T, \text{Im } C^T, \text{Ker } B^T)$ duality, as is the case in the *transfer function matrix domain*. This is because, in the *time domain*, the duality has to be considered from a functional point of view and not from a vector space point of view.

We have also shown that for the system to be *TD right inverted* it has to be non-proper. In the case of strictly proper systems there are two possible options: (i) to do a separation of poles and zeros, as the one did in [9], and to *TD right invert* the non proper part of the system which only has zeros, obtaining an exponentially decaying output error (in the case of having Hurwitz poles), as illustrated in example 3.7; (ii) the other option is to apply (before the *TD right inversion*) a non-proper control to the strictly proper system by means of a PD–feedback (see [5]).

To get a complete setting for *TD left* or *right inversion*, and derive corresponding *TD left* or *right inverses*, it will be necessary to extend our previous results about *TD left invertibility* (see Theorem 2.7 and Corollary 2.8) to the class of generalized systems, $E\dot{x} = Ax + Bu$ and $y = Cx$. It is expected that, for this broader class of models, *TD left invetibility* will also require the absence of observable finite invariant zeros and *TD right invertibility* the absence of observable finite internal poles. In that way, we shall also be able to give a necessary and sufficient condition for *TD right invertibility* (remember that Lemma 3.6 only gives a necessary condition). It is expected that a condition for output controllability will occur (similar to condition (20) in the particular case of strictly proper systems). This is developed in a submitted paper.

References

[1] Armentano, V.A. (1986). The pencil $(sE - A)$ and controllability-observability for generalized linear systems: a geometric approach. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **24(4)**, 616–638.

[2] Basile, G. and G. Marro (1992). *Controlled and Conditioned Invariants in Linear System Theory.* Prentice Hall.

[3] Bernhard, P. (1982) On singular implicit dynamical systems. *SIAM Journal on Control and Optimization.* **20(5)**, 612–633.

[4] Bonilla, M. and M. Malabre (1990). One side invertibility for implicit descriptions. In: *29th Conference on Decision and Control.* pp. 3601–3602.

[5] Bonilla, M. and M. Malabre (1993). External Reachability (Reachability with Pole Assignment by P.D. Feedback) for Implicit Descriptions. *Kybernetika* **29(5)**, 499–510.

[6] Bonilla, M. and M. Malabre (1997). Structural Matrix Minimization Algorithm for Implicit Descriptions. *Automatica* **33(4)**, 705–710.

[7] Bonilla, M. and A. Malabre (2003). On the control of linear systems having internal variations. *Automatica* **39(11)**, pp. 1989–1996.

[8] Bonilla M., Figueroa, M. and M. Malabre. (2004). Time Domain Left Invertibility: Application to Failure Detection. In: *2nd IFAC Symposium on System, Structure and Control*. pp. 623-628. Oaxaca, México, December 8-10, 2004.

[9] Figueroa, M. , M. Bonilla, M. Malabre, J.C. Martínez. (2004). On Failure Detection by Inversion Techniques. In: *43rd Conference on Decision and Control*. pp. 4770–4775.

[10] Massoumnia M.A. A geometric Approach to the synthesis of failure detection filters. *IEEE Transaction on Automatic Control*, AC-31, No. 9, pp. 839-846, 1986.

[11] Niemann H.H., Saberi A., Stoorvogel A.A., and Sannuti P. Exact, almost and delayed fault detection - An observer based approach. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Vol. 4, No. 4, pp. 215-238, 1999.

[12] Wong, K.T. (1974). The eigenvalue problem $\lambda Tx + Sx$.,1974. *Journal of Differential Equations*, **1**, 270–281.

[13] Wonham, W.M. (1985). *Linear Multivariable Control: A Geometric Approach.* 3rd ed.. Springer–Verlag. New York.

Appendix

Definition 1.1 (Bernhard [3], Armentano [1]): The system $\mathbb{E}\dot{x} = \mathbb{A}x + v$ is internally proper iff the pencil $[\lambda\mathbb{E} - \mathbb{A}]$ is regular (square and $\det(\lambda\mathbb{E} - \mathbb{A}) \neq 0$) and it has no infinite zero of order grater than one (no derivators).

Proposition 1.2 (Bonilla and Malabre [7]): The system:

$$\begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} G \\ D \end{bmatrix} x(t) + Bu(t) \quad ; \quad y(t) = Cx(t)$$

is internally proper iff

$$\text{Ker } D \oplus \text{Ker } F = \mathcal{X} \quad (50)$$

Apéndice D

M.Bonilla E., M.Figueroa G. and M.Malabre.

Solving the Diophantine Equation by State Space Inversion Techniques: An illustrative Example.

2006 American Control Conference. Silver Anniversary ACC. Minneapolis, Minnesota USA. June 14-16, 2006.

Proceedings of the 2006 American Control Conference
Minneapolis, Minnesota, USA, June 14-16, 2006

Solving the Diophantine Equation by State Space Inversion Techniques: An illustrative Example

M. Bonilla E.*, M. Figueroa G.† and M. Malabre‡

*LAFMAA–CINVESTAV-IPN, Control Automático. MEXICO. mbonilla@cinvestav.mx

† PhD student of J.C. Martínez and M. Bonilla. Sponsored by CONACyT–México. mfigueroa@ctrl.cinvestav.mx

‡LAFMAA–IRCCyN, CNRS UMR 6597, FRANCE. Michel.Malabre@irccyn.ec-nantes.fr

***Abstract*— We propose a synthesis procedure for solving the Diophantine equation in the Factorization Approach, based on state space inversion techniques. This new approach is interesting because it allows to extend the powerful Factorization Approach to the state space one, from a geometric point of view and opens the way towards more general classes of systems, *e.g.* nonlinear systems ones for which the transfer function setting is not valid but for which the geometric approach exists. In order to clarify the main ideas, we limit the presentation here to a simple illustrative example.**

***Index Terms*— Linear systems, geometric approach, polynomial approach, factorization approach, inversion techniques, implicit systems.**

NOTATION AND SUBSPACES

s is the complex Laplace variable. $\mathbb{R}[\mathrm{s}]$ stands for the ring of polynomials in s and with coefficients in $\mathbb{R}$, the real numbers set. $\mathbb{R}(\mathrm{s})$ stands for the field of rational functions in s and with coefficients in $\mathbb{R}$. $\mathbb{S}$ stands for the ring of $\mathbb{R}(\mathrm{s})$ consisting of all proper stable rational functions. $\mathbb{U}$ denotes the set of units of $\mathbb{S}$. $\|\cdot\|$ stands for the Euclidean norm. Script capitals $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$, $\ldots$, denote linear spaces with elements v, w, $\ldots$; when $\mathcal{V}\subset\mathcal{W}$, $\frac{\mathcal{W}}{\mathcal{V}}$ or $\mathcal{W}/\mathcal{V}$ stands for the quotient space $\mathcal{W}$ modulo $\mathcal{V}$; the direct sum of independent spaces is written as $\oplus$. Given a linear map $X:\mathcal{V}\to\mathcal{W}$, Im $X = X\mathcal{V}$ denotes its image, and Ker X denotes its kernel. $X^{-1}\mathcal{T}$ stands for the inverse image of the subspace $\mathcal{T}$ by the linear map X. $\{x,y,z\}$ stands for the subspace spanned by x, y and z. e_i (f_i) stands for the vector in the domain (in the co-domain) with a 1 in its $i-th$ component and 0 otherwise. $D\{X_1,\ldots,X_k\}$ denotes a block diagonal matrix whose diagonal blocks are the matrices $X_1,\ldots,X_k$. I_k denotes a $k\times k$ identity matrix, or simply I when the size does not have to be explicitly indicated. $\underline{\chi}_k^i$ denotes a $k\times 1$ vector whose i-th component is 1 and the others are zero. $U\{v^T\}$ denotes an upper triangular Toeplitz matrix with first row vector v^T. $L\{v\}$ denotes a lower triangular Toeplitz matrix with first column vector v. *Eg.* $D\{X_1,X_2\} = \begin{bmatrix} X_1 & 0\\ 0 & X_2\end{bmatrix}$, $\underline{\chi}_2^1 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, $U\{[\,a\;\;b\,]\} = \begin{bmatrix} a & b\\ 0 & a\end{bmatrix}$, $L\{[\,a\;\;b\,]^T\} = \begin{bmatrix} a & 0\\ b & a\end{bmatrix}$.

Related with the implicit system $\Sigma(E,A,B,C)$:

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad ; \quad y(t) = Cx(t) \qquad (1)$$

with $E:\mathcal{X}\to\underline{\mathcal{X}}$, $A:\mathcal{X}\to\underline{\mathcal{X}}$, $B:\mathcal{U}\to\underline{\mathcal{X}}$, and $C:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$, we use the following three subspaces:

1. $\mathcal{V}_{\mathcal{X}}^* = \sup\{\mathcal{V}\subset\mathcal{X}|\ A\mathcal{V}\subset E\mathcal{V}+\mathrm{Im}\ B\}$, limit of the non increasing algorithm:

$$\mathcal{V}_{\mathcal{X}}^0 = \mathcal{X} \quad ; \quad \mathcal{V}_{\mathcal{X}}^{\mu+1} = A^{-1}(E\mathcal{V}_{\mathcal{X}}^{\mu} + \mathrm{Im}\ B),\ \mu\geq 0 \quad (2)$$

2. $\mathcal{V}_{\mathcal{X}0}^* = \sup\{\mathcal{V}\subset\mathcal{X}|\ A\mathcal{V}\subset E\mathcal{V}\}$, limit of the non increasing algorithm:

$$\mathcal{V}_{\mathcal{X}0}^0 = \mathcal{X} \quad ; \quad \mathcal{V}_{\mathcal{X}0}^{\mu+1} = A^{-1}(E\mathcal{V}_{\mathcal{X}0}^{\mu}),\ \mu\geq 0 \qquad (3)$$

3. $\mathcal{S}_{\mathcal{X}0}^* = \inf\{\mathcal{S}\subset\mathcal{X}|\ \mathcal{S} = E^{-1}A\mathcal{S}\}$, limit of the non decreasing algorithm:

$$\mathcal{S}_{\mathcal{X}0}^0 = \mathrm{Ker}\ E \quad ; \quad \mathcal{S}_{\mathcal{X}0}^{\mu+1} = E^{-1}(A\mathcal{S}_{\mathcal{X}0}^{\mu}),\ \mu\geq 0 \qquad (4)$$

I. INTRODUCTION

One of the most basic control problems is the one related with pole placement. This problem by state feedback is extremely simple when dealing with the *State Space Approach*. In the case of output feedback, the problem is usually tackled with the so called *Polynomial and Factorization Approaches*; in the *Polynomial Approach* (see [9]), this problem relies on the solution of a *Diophantine equation* and in the *Factorization Approach* one also needs to solve a *Diophantine equation*, but in the ring of proper stable rational functions (see for example [8], [7], [11]).

The use of the *Diophantine equation* for solving control problems in the *Polynomial and Factorization Approaches* is very useful [9], [11], but finding a particular solution is not always straight-forward, particularly for the *Factorization Approach*.

In this paper we propose a possible synthesis procedure for solving the *Diophantine equation* in the *Factorization Approach* based on state space inversion techniques. In order to clarify the principal ideas behind these *inversion techniques*, we limit our presentation here to a simple illustrative example and the general procedure will be detailed elsewhere.

II. PROBLEM STATEMENT

Let us consider the system:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}x(t) + \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u(t) \quad ; \quad y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0\end{bmatrix}x(t) \qquad (5)$$

We want to place the poles at $-1/2\pm\imath\sqrt{3}/2$, *i.e.* we want the following closed loop characteristic polynomial:

$$\pi_{CL}(\mathrm{s}) = \mathrm{s}^2 + \mathrm{s} + 1 \qquad (6)$$

If the state is available, the solution is:

$$u(t) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix} x(t) + r(t) \quad (7)$$

III. Ideal Output Feedback

A. Geometric Approach

When only output signals are available, we can use, for example, the *Structure State Reconstructor* proposed in [5] (see Appendix A). The control law is: (see Fig. 2): [1]

$$\bar{y}(t) = -y(t); \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \dot{\bar{\xi}}(t) = \bar{\xi}(t) + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \bar{y}(t) \quad (8)$$
$$\bar{u}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \bar{\xi}(t); \quad u(t) = r(t) + \bar{u}(t)$$

Indeed from (8) and (5) one has: $\bar{\xi}_1(t) = \bar{y}(t) = -y(t) = -x_1(t)$ and $\bar{\xi}_2(t) = \dot{\bar{\xi}}_1(t) = -\dot{y}(t) = -\dot{x}_1(t) = -x_2(t)$; and thus (*cf.* (7)): $u(t) = [\begin{smallmatrix} -1 & -1 \end{smallmatrix}] x(t) + r(t)$.

B. Polynomial Approach

If we want to find the control law, $u(\mathrm{s}) = r(\mathrm{s}) - C_1(\mathrm{s}) y(\mathrm{s})$, by using the polynomial approach [7], [9], it is first necessary to express the transfer functions of the plant $P(\mathrm{s})$ and of the controller $C_1(\mathrm{s})$ as a quotient of polynomials, that is to say:

$$P(\mathrm{s}) = \frac{\bar{n}_P(\mathrm{s})}{\bar{d}_P(\mathrm{s})} \in \mathbb{R}(\mathrm{s}) \quad ; \quad \bar{n}_P(\mathrm{s}) = 1, \ \bar{d}_P(\mathrm{s}) = \mathrm{s}^2 \in \mathbb{R}[\mathrm{s}]$$
$$C_1(\mathrm{s}) = \frac{\bar{n}_{C_1}(\mathrm{s})}{\bar{d}_{C_1}(\mathrm{s})} \in \mathbb{R}(\mathrm{s}) \quad ; \quad \bar{n}_{C_1}(s), \bar{d}_{C_1}(\mathrm{s}) \in \mathbb{R}[\mathrm{s}]$$

Next, we have to solve the *Diophantine equation* $\delta(P, C_1)$:

$$\begin{aligned} \delta(P, C_1) &:= \bar{n}_{C_1}(\mathrm{s}) \bar{n}_p(\mathrm{s}) + \bar{d}_{C_1}(\mathrm{s}) \bar{d}_P(\mathrm{s}) \\ &= \bar{n}_{C_1}(\mathrm{s}) \cdot 1 + \bar{d}_{C_1}(\mathrm{s}) \cdot \mathrm{s}^2 = \mathrm{s}^2 + \mathrm{s} + 1 \\ \Longrightarrow & \quad \bar{n}_{C_1}(\mathrm{s}) = \mathrm{s} + 1, \quad \bar{d}_{C_1}(\mathrm{s}) = 1 \end{aligned} \quad (9)$$

This is exactly the control law (8), obtained by using the *Structure State Reconstructor* proposed in [5] (*cf.* Fig. 2).

IV. Designed Output Feedback

A. Geometric Approach

Since up to now, it is not possible in practice to synthesize the proportional derivative feedback (8), one has to use some proper approximation of this non-proper control law. Let us apply the *Structural Exponentially Proper Approximation* [10] to the ideal control law $u^*(t) = \theta_1 \dot{\bar{y}}(t) + \theta_2 \bar{y}(t)$, with $\bar{y} = -y$, $\bar{u} = u - r$, and $\varepsilon, \beta > 0$ (see Appendix B):

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}(t) &= [-\beta] \bar{x}(t) - \varepsilon^2 \bar{u}(t) \\ \varepsilon \dot{\hat{x}}(t) &= [-1] \hat{x}(t) + [1] \big(\bar{x}(t) + (\theta_1 \dot{\bar{y}}(t) + \theta_2 \bar{y}(t)) \big) \\ \bar{u}(t) &= [1] \hat{x}(t) \end{aligned} \quad (10)$$

1) **State space description:** One possible state space description of (10) is:

$$\dot{z}(t) = \begin{bmatrix} -1/\varepsilon & 1 \\ -\varepsilon & -\beta \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} 1/\varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} \bar{y}(t) \quad (11)$$
$$u(t) = \begin{bmatrix} \left(\frac{\beta \theta_2}{(\beta + \varepsilon^2)} - \frac{\theta_1}{\varepsilon} \right) & \frac{\theta_2}{(\beta + \varepsilon^2)} \end{bmatrix} z(t) + [\theta_1/\varepsilon] y(t) \quad (12)$$

[1] In this paragraph it is assumed that pure derivative actions are accepted.

For our case $\theta_1 = \theta_2 = 1$ (*cf.* (9)). Thus the output equation (12) takes the following form:

$$\bar{u}(t) = \begin{bmatrix} \left(\frac{\beta}{(\beta + \varepsilon^2)} - \frac{1}{\varepsilon} \right) & \frac{1}{(\beta + \varepsilon^2)} \end{bmatrix} z(t) + [1/\varepsilon] \bar{y}(t) \quad (13)$$

2) **Transfer function:** From (11) and (13), one gets the following transfer function:

$$\bar{U}(\mathrm{s}) / \bar{Y}(\mathrm{s}) = C_0(\mathrm{s}) = (\mathrm{s} + \beta)(\mathrm{s} + 1) / \big(\varepsilon \Delta(\mathrm{s}) \big) \quad (14)$$
$$\Delta(\mathrm{s}) = (\mathrm{s} + \beta)(\mathrm{s} + 1/\varepsilon) + \varepsilon \quad (15)$$

This polynomial $\Delta(\mathrm{s})$ is Hurwitz, if:

$$\beta > 0 \quad ; \quad 0 < \varepsilon < 1/(\beta + 2) \quad (16)$$

Note that $\Delta(\mathrm{s})$ can be factorized as follows:

$$\Delta(\mathrm{s}) = (\mathrm{s} + \beta + f_0(\varepsilon))(\mathrm{s} + 1/\varepsilon - f_0(\varepsilon)) \quad (17)$$
$$f_0(\varepsilon) = \varepsilon^2 q_0(\varepsilon) \quad (18)$$
$$q_0(\varepsilon) = \big((1 - \varepsilon\beta)/2\varepsilon^3 \big) \left[1 - \sqrt{1 - 4\varepsilon^3/(1 - \varepsilon\beta)^2} \right] \quad (19)$$

Since $\lim_{\varepsilon \to 0} q_0(\varepsilon) = 1$ implies $\lim_{\varepsilon \to 0} f_0(\varepsilon) = 0$, we get:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} C_0(\mathrm{s}) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\frac{(\mathrm{s} + \beta)(\mathrm{s} + 1)}{(\mathrm{s} + \beta)(\varepsilon \mathrm{s} + 1)} \right] \quad (20)$$

Thus, one generates an observable non controllable mode, of dynamics β (in the state z_2, see Fig. 3). [2]

B. Factorization Approach

If we want to solve the problem by using the factorization approach [11], it is first necessary to express the transfer functions of the plant $P(\mathrm{s})$ and of the controller $C_0(\mathrm{s})$ as the quotients of proper stable rational functions. For this, we can make use of the desired closed loop characteristic polynomial (6), namely:

$$P(\mathrm{s}) = \frac{n_P(\mathrm{s})}{d_P(\mathrm{s})} \in \mathbb{R}(\mathrm{s}) \quad ; \quad n_P(\mathrm{s}) = \frac{1}{(\mathrm{s}^2 + \mathrm{s} + 1)},$$
$$d_P(\mathrm{s}) = \frac{\mathrm{s}^2}{(\mathrm{s}^2 + \mathrm{s} + 1)} \in \mathbb{S} \quad ; \quad C_0(\mathrm{s}) = \frac{n_{C_0}(\mathrm{s})}{d_{C_0}(\mathrm{s})} \in \mathbb{R}(\mathrm{s})$$
$$n_{C_0}(s), d_{C_0}(\mathrm{s}) \in \mathbb{S}$$

Next, we have to solve the Diophantine equation $\delta(P, C_0)$:

$$\delta(P, C_0) := n_{C_0}(\mathrm{s}) n_p(\mathrm{s}) + d_{C_0}(\mathrm{s}) d_P(\mathrm{s}) \in \mathbb{U}$$
$$\delta(P, C_0) = n_{C_0}(\mathrm{s}) \cdot \frac{1}{\mathrm{s}^2 + \mathrm{s} + 1} + d_{C_0}(\mathrm{s}) \cdot \frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{s}^2 + \mathrm{s} + 1} \quad (21)$$

[2] This mode is useful for smoothing the filter's behaviour response in the presence of abrupt signals.

Based on the development of section IV-A, one solution of (21) is the following (see (14) and (17)):

$$n_{C_0}(\mathrm{s}) = \frac{\mathrm{s}+1}{\varepsilon \mathrm{s}+1-\varepsilon f_0(\varepsilon)}\;,\quad d_{C_0}(\mathrm{s}) = \frac{\mathrm{s}+\beta+f_0(\varepsilon)}{\mathrm{s}+\beta}$$

$$C_0(\mathrm{s}) = \frac{n_{C_0}(\mathrm{s})}{d_{C_0}(\mathrm{s})} \in \mathbb{U} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}\delta(P, C_0) &= \frac{\mathrm{s}+1}{(\varepsilon \mathrm{s}+1-\varepsilon f_0(\varepsilon))(\mathrm{s}^2+\mathrm{s}+1)} \\ &\quad + \frac{(\mathrm{s}+\beta+f_0(\varepsilon))\mathrm{s}^2}{(\mathrm{s}+\beta)(\mathrm{s}^2+\mathrm{s}+1)} = \frac{\eta(\mathrm{s})}{\pi(\mathrm{s})}\end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}\eta(\mathrm{s}) &= (\mathrm{s}+1)(\mathrm{s}+\beta) \\ &\quad + \varepsilon(\mathrm{s}+\beta+f_0(\varepsilon))(\mathrm{s}+\frac{1}{\varepsilon}-f_0(\varepsilon))\mathrm{s}^2 \in \mathbb{R}[\mathrm{s}]\end{aligned} \tag{24}$$

$$\pi(\mathrm{s}) = (\mathrm{s}+\beta)(\mathrm{s}^2+\mathrm{s}+1)(\varepsilon \mathrm{s}+1-\varepsilon f_0(\varepsilon)) \in \mathbb{R}[\mathrm{s}] \tag{25}$$

Note that:

1. The degrees of polynomials $\eta(\mathrm{s})$ and $\pi(\mathrm{s})$ are the same. Therefore $\delta(P, C_0)$ is bi–proper.
2. From (16), it follows that $\pi(\mathrm{s})$ is Hurwitz.
3. To conclude that $\eta(\mathrm{s})$ is Hurwitz, it has to be noted that the rational function (*cf.* (24))

$$X(\mathrm{s}) = \frac{1}{\varepsilon}\frac{(\mathrm{s}+1)(\mathrm{s}+\beta)}{(\mathrm{s}+\beta+f_0(\varepsilon))(\mathrm{s}+1/\varepsilon-f_0(\varepsilon))\mathrm{s}^2}$$

has its two real zeros in the open left half plane and its four real poles in the closed left half plane. The conclusion follows by root locus argument (see Fig. 1).
4. Therefore:

$$\delta(P, C_0) \in \mathbb{U} \tag{26}$$

$$P_{CL}(\mathrm{s}) = \frac{P(\mathrm{s})}{1+C_0(\mathrm{s})P(\mathrm{s})} = \frac{n_P(\mathrm{s})d_{C_0}(\mathrm{s})}{\delta(P, C_0)} \in \mathbb{S} \tag{27}$$

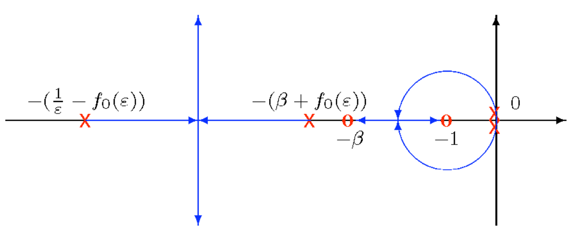

Fig. 1. Root Locus of $X(\mathrm{s})$ (we take for example $\beta > 1$).

Furthermore:

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\delta(P, C_0) &= \lim_{\varepsilon\to 0} \\ &\left(\frac{(\mathrm{s}+1)}{(\mathrm{s}^2+\mathrm{s}+1)(\varepsilon \mathrm{s}+1-\varepsilon f_0(\varepsilon))} + \frac{(\mathrm{s}+\beta+f_0(\varepsilon))\mathrm{s}^2}{(\mathrm{s}+\beta)(\mathrm{s}^2+\mathrm{s}+1)}\right) \\ &= \frac{\lim_{\varepsilon\to 0}\left[(\mathrm{s}+1)+(\varepsilon \mathrm{s}+1-\varepsilon f_0(\varepsilon))\mathrm{s}^2\right]}{\lim_{\varepsilon\to 0}\left[(\mathrm{s}^2+\mathrm{s}+1)(\varepsilon \mathrm{s}+1-\varepsilon f_0(\varepsilon))\right]} \\ &= \frac{\lim_{\varepsilon\to 0}\left[(\mathrm{s}+1)(1-\varepsilon f_0(\varepsilon)+\varepsilon)-\varepsilon\right]}{\lim_{\varepsilon\to 0}\left[(\mathrm{s}^2+\mathrm{s}+1)(\varepsilon \mathrm{s}+1-\varepsilon f_0(\varepsilon))\right]} \\ &\quad + \frac{\lim_{\varepsilon\to 0}\left[(\varepsilon \mathrm{s}+1-\varepsilon f_0(\varepsilon)+\varepsilon)\mathrm{s}^2\right]}{\lim_{\varepsilon\to 0}\left[(\mathrm{s}^2+\mathrm{s}+1)(\varepsilon \mathrm{s}+1-\varepsilon f_0(\varepsilon))\right]} \\ &= \frac{\lim_{\varepsilon\to 0}\left[(\mathrm{s}^2+\mathrm{s}+1)(\varepsilon \mathrm{s}+1-\varepsilon f_0(\varepsilon))\right]}{\lim_{\varepsilon\to 0}\left[(\mathrm{s}^2+\mathrm{s}+1)(\varepsilon \mathrm{s}+1-\varepsilon f_0(\varepsilon))\right]} = 1\end{aligned} \tag{28}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} d_{C_0}(\mathrm{s}) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\mathrm{s}+\beta+f_0(\varepsilon)}{\mathrm{s}+\beta} = 1$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} C_0(\mathrm{s}) = \lim_{\varepsilon\to 0} n_{C_0}(\mathrm{s}) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{\mathrm{s}+1}{\varepsilon \mathrm{s}+1}\right] \tag{29}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} P_{CL}(\mathrm{s}) = n_P(\mathrm{s}) = \frac{1}{\mathrm{s}^2+\mathrm{s}+1} \tag{30}$$

C. Separation of the Ideal Control

In this Section we show that the *Structural Exponentially Proper Approximation* of the designed control (11)-(12), is in fact, the concatenation of the ideal controller (8) with a smooth filter. For this, the control law is first brought to an (E, A, B, C) implicit description: [3]

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right]\begin{bmatrix}\dot z_1 \\ \dot z_2 \\ \dot\zeta_1\end{bmatrix} =$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1/\varepsilon & 1 & 0 \\ -\varepsilon & -\beta & 0 \\ \hline \left(\frac{-\beta\theta_2}{(\beta+\varepsilon^2)}+\frac{\theta_1}{\varepsilon}\right) & \frac{-\theta_2}{(\beta+\varepsilon^2)} & 1 \end{array}\right]\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \zeta_1\end{bmatrix} + \left[\begin{array}{c} 1/\varepsilon \\ \varepsilon \\ \hline -\theta_1/\varepsilon \end{array}\right]\bar y$$

$$\bar u = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 1\end{array}\right]\left[\begin{array}{ccc} z_1 & z_2 & \zeta_1\end{array}\right]^T$$

In view that: *(i)* for describing a derivative action of order κ is needed $\kappa+1$ descriptor variables and *(ii)* the control law has a derivative action of order $\kappa = 1$, we have to add another descriptor variable, ζ_2, *algebraically redundant* (see Appendix C), namely: [4]

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]\begin{bmatrix}\dot z_1 \\ \dot z_2 \\ \dot\zeta_1 \\ \dot\zeta_2\end{bmatrix} =$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} -1/\varepsilon & 1 & 0 & 0 \\ -\varepsilon & -\beta & 0 & 0 \\ \hline \left(\frac{-\beta\theta_2}{(\beta+\varepsilon^2)}+\frac{\theta_1}{\varepsilon}\right) & \frac{-\theta_2}{(\beta+\varepsilon^2)} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \zeta_1 \\ \zeta_2\end{bmatrix} + \left[\begin{array}{c} 1/\varepsilon \\ \varepsilon \\ \hline -\theta_1/\varepsilon \\ 0 \end{array}\right]\bar y$$

$$\bar u = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & \theta_2\end{array}\right]\left[\begin{array}{cccc} z_1 & z_2 & \zeta_1 & \zeta_2\end{array}\right]^T \tag{31}$$

From (31) we realize that: *(i)* The non algebraically redundant part of the system is located in the region comprised by the first three columns and the first three rows (see Appendix C) and *(ii)* the non algebraically redundant part is internally proper (see Appendix D).

[3] The descriptor variable, ζ_1, is equal to the output equation (12).
[4] Note also that it is added at the output θ_2 times the variable ζ_2 and θ_1 times its derivative (*c.f.* (41)).

In order to separate the non proper part from the designed controller (which corresponds to the ideal controller), let us first define the following two changes of bases matrices in the co-domain and in the domain:

$$L = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ \beta/(\beta+\varepsilon^2) & 1/(\beta+\varepsilon^2) & 1/\theta_1 & 0 \end{array}\right]$$

$$R = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline \beta\theta_2/(\beta+\varepsilon^2) & \theta_2/(\beta+\varepsilon^2) & 0 & \theta_1 \\ -\beta/(\beta+\varepsilon^2) & -1/(\beta+\varepsilon^2) & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Let us next define the following variable:

$$\left[\begin{array}{cccc} z_1 & z_2 & \bar{\zeta}_1 & \bar{\zeta}_2 \end{array}\right]^T = R^{-1}\left[\begin{array}{cccc} z_1 & z_2 & \zeta_1 & \zeta_2 \end{array}\right]^T$$

Let us finally pre multiply the descriptor equation of (31) by L:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{\bar{\zeta}}_1 \\ \dot{\bar{\zeta}}_2 \end{array}\right] =$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} -1/\varepsilon & 1 & 0 & 0 \\ -\varepsilon & -\beta & 0 & 0 \\ \hline \frac{-\beta}{(\beta+\varepsilon^2)} & \frac{-1}{(\beta+\varepsilon^2)} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} z_1 \\ z_2 \\ \bar{\zeta}_1 \\ \bar{\zeta}_2 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c} 1/\varepsilon \\ \varepsilon \\ \hline 0 \\ 0 \end{array}\right]\bar{y}$$

$$\bar{u} = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & \theta_2 & \theta_1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{cccc} z_1 & z_2 & \bar{\zeta}_1 & \bar{\zeta}_2 \end{array}\right]^T \quad (32)$$

From (32) we realize that (see Appendix E):

1. The proper part is located in the region comprised by the first two columns and the first two rows.
2. The non proper part is located in the region comprised by the last two columns and the last two rows.

Thus, (32) can be decomposed as follows: (see Fig. 4):

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \left[\begin{array}{cc} -1/\varepsilon & 1 \\ -\varepsilon & -\beta \end{array}\right] z(t) + \left[\begin{array}{c} 1/\varepsilon \\ \varepsilon \end{array}\right]\bar{y}(t) \\ v(t) &= \left[\begin{array}{cc} \beta/(\beta+\varepsilon^2) & 1/(\beta+\varepsilon^2) \end{array}\right] z(t) \quad (33) \\ \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{array}\right]\dot{\bar{\zeta}}(t) &= \bar{\zeta}(t) + \left[\begin{array}{c} -1 \\ 0 \end{array}\right] v(t) \\ \bar{u}(t) &= \left[\begin{array}{cc} \theta_2 & \theta_1 \end{array}\right]\bar{\zeta}(t) \quad (34) \end{aligned}$$

Note that:

1. The transfer functions of the controllers (33) and (34) are respectively:

$$\frac{V(\mathrm{s})}{\bar{Y}(\mathrm{s})} = C_2(\mathrm{s}) = \frac{(\mathrm{s}+\beta)}{(\varepsilon\Delta(\mathrm{s}))} \ ; \ \frac{\bar{U}(\mathrm{s})}{V(\mathrm{s})} = C_1(\mathrm{s}) = \mathrm{s}+1 \quad (35)$$

2. When ε tends to zero, from (33) and from (35) and (17)–(20) (*c.f.* (41) and (29)):

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|v(t)-\bar{y}(t)\| = K\mathrm{e}^{-\beta t} \quad (36)$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} C_2(\mathrm{s}) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(\mathrm{s}+\beta)}{(\mathrm{s}+\beta+f_0(\varepsilon))(\varepsilon\mathrm{s}+1-\varepsilon f_0(\varepsilon))} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{1}{(\varepsilon\mathrm{s}+1)}\right] \quad (37)$$

V. Concluding Remarks

In this paper we have shown by means of an example that inversion techniques are not only useful for solving control problems but also they are useful for mathematical problems as the Diophantine equation problem. This new approach is interesting because it allows to extend the powerful factorization approach (for linear systems) to the state space approach (from a geometric point of view) and later to other kinds of systems *e.g.* not necessarily linear, for which the transfer function setting is not valid but for which the geometric approach exists.

References

[1] Armentano, V.A. (1986). *The pencil $(sE-A)$ and controllability-observability for generalized linear systems: a geometric approach.* SIAM Journal on Control and Optimization, Vol. 24, No. 4, pp. 616-638.
[2] Bernhard, P. (1982). On singular implicit linear dynamical systems. *SIAM J. Control and Optimization* **20(5)**, pp. 612–633.
[3] Bonilla, M. and M. Malabre (1995). Geometric Minimization under External Equivalence for Implicit Descriptions. *Automatica*, Vol 31, No. 6, pp. 897-901.
[4] Bonilla, M. and M. Malabre (1997). Structural Matrix Minimization Algorithm for Implicit Descriptions. *Automatica*, Vol 33, No. 4, pp. 705-710.
[5] Bonilla, M., M. Malabre and M. Fonseca (1997). On the approximation of non-proper control laws. *Int. J. Control*, Vol 68, No. 4, pp. 775-796.
[6] Bonilla, M. and A. Malabre (2003). On the control of linear systems having internal variations. *Automatica* **39(11)**, pp. 1989–1996.
[7] Callier, F.M. and Ch.A. Desoer (1982). *Multivariable Feedback Systems*. Springer–Verlag. New York.
[8] Kailath, T. (1980). *Linear Systems*. Prentice Hall. New Jersey.
[9] Kučera, V. (1993). Diophantine Equations in Control–A Survey. *Automatica* Vol. 29, No. 6, pp. 1361-1375.
[10] Pacheco J., M. Bonilla and M. Malabre (2003) Proper Exponential Approximation for Non Proper Compensators: The MIMO Case. 42nd IEEE CDC, pp.110-115. Maui Hawaii, December 9-12.
[11] Vidyasagar, M. (1985). *Control System Synthesis: A Factorization Approach*. The MIT Press. London.
[12] Willems, J.C. (1983) Input–output and state space representations of finite–dimensional linear time–invariant systems. *Linear Algebra and its Applications*, Vol 50, pp. 581-608.

Appendix

A. Structural State Reconstructor

For a given observable strictly proper system:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad ; \quad y(t) = Cx(t) \quad (38)$$

with C an epic map, in [5] was proposed the following ideal state reconstructor:

$$\left[\begin{array}{c} 0 \\ N_C \end{array}\right]\dot{\xi} = \left[\begin{array}{c} P_C \\ N_C A \end{array}\right]\xi + \left[\begin{array}{cc} 0 & -K_C \\ N_C B & 0 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} u \\ y \end{array}\right] \quad (39)$$

where P_C is the natural projection on $\mathcal{X}_1 \oplus \mathrm{Ker}\ A$ along $\mathrm{Ker}\ C$, N_C is the natural projection on $A\mathrm{Ker}\ C$ along $\mathcal{X}_C \oplus A\mathcal{X}_1$, and K_C is some isomorphism satisfying: $K_C C = P_C$. The observability of (38) implies $\mathrm{Ker}\ C \cap \mathrm{Ker}\ A = \{0\}$, then $\mathcal{X}$ can be decomposed as: $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \oplus \mathrm{Ker}\ A \oplus \mathrm{Ker}\ C = \mathcal{X}_C \oplus A\mathcal{X}_1 \oplus A\mathrm{Ker}\ C$, where $\mathcal{X}_1$ and $\mathcal{X}_C$ are any complementary subspaces.

For our example (5), we get: Ker A = Ker $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \{e_1\}$, Ker C = Ker $[\begin{array}{cc} 1 & 0 \end{array}] = \{e_2\}$, and $\mathcal{X}_1 = \{0\}$. Then: AKer $C = \{e_1\}$, $A\mathcal{X}_1 = \{0\}$, and $\mathcal{X}_C = \{e_2\}$. And thus: $P_C = [\begin{array}{cc} 1 & 0 \end{array}]$, $N_C = [\begin{array}{cc} 1 & 0 \end{array}]$, $K_C = 1$, $N_C A = [\begin{array}{cc} 1 & 0 \end{array}] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = [\begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array}]$, and $N_C B = [\begin{array}{cc} 1 & 0 \end{array}] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$. In (8) we have $\bar{\xi} = -\xi$.

B. Structural Exponentially Proper Approximation

Let the non-proper compensator, $\Sigma^c : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$:

$$N\dot{\omega}(t) = \omega(t) + \Gamma v(t) \quad ; \quad u^*(t) = \Delta\omega(t) \tag{40}$$

where: N: $\mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}$ is a nilpotent operator such that $N = D\{N_1, \ldots, N_n\}$, with $N_i = L\left\{\underline{\chi}^2_{(k_i+1)}\right\}$ and the index of nilpotency of N is $\kappa = \max\{k_1, \ldots, k_n\}$; $\Gamma : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ is a linear operator such that $[N\ \Gamma]$ is epic; and $\Delta : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{U}$ is a linear operator such that $\Delta = D\{\Delta_1^T, \ldots, \Delta_n^T\}$, with $\Delta_i = \underline{\chi}^{(k_i+1)}_{(k_i+1)}$. We assume that the first $\kappa+1$ derivatives of v exist and are continuous and bounded.
In [10]] was shown the filter, $\Sigma^f : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}(t) &= A_\beta \bar{x}(t) - \varepsilon^{\kappa+1} u(t) \\ \varepsilon\dot{\hat{x}}(t) &= A_o \hat{x}(t) + B_o\left(\bar{x}(t) + u^*(t)\right) \\ u(t) &= C_o \hat{x}(t) \end{aligned}$$

where: $A_o = D\{A_1, \ldots, A_n\}$, $B_o = D\{b_1, \ldots, b_n\}$, $C_o = D\{c_1^T, \ldots, c_n^T\}$, $A_\beta = -\beta \mathrm{I}_n$, $A_i = -\mathrm{I}_{k_i} + U\{(\underline{\chi}^2_{k_i})^T\}$, $b_i = \underline{\chi}^{k_i}_{k_i}$, $c_i = \underline{\chi}^1_{k_i}$, with: $\hat{x} \in \widehat{\mathcal{X}}$, $\bar{x}, u, u^* \in \mathcal{U}$, and ε and β are fixed positive constants. The filter Σ^f satisfies:

$$\det\begin{bmatrix} (s\mathrm{I} - A_\beta) & \varepsilon^{k+1} C_o \\ -(1/\varepsilon)B_o & (s\mathrm{I} - (1/\varepsilon)A_o) \end{bmatrix} \text{ is Hurwitz } \ \forall\ 0 < \varepsilon < \varepsilon^*$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u(t) - u^*(t)\| \leq K_\beta \|\bar{x}_0\| \mathrm{e}^{-\beta t} \quad \forall\ t > 0 \tag{41}$$

The overall system $\left(\Sigma^f \circ \Sigma^c\right)$ is externally proper iff the orders of the zeros at infinity of Σ^f are respectively greater than or equal to k_i.

For our example (8), we have: $n = 1$ and $\kappa = 1$. Thus: $A_o = -1$, $B_o = 1$, $C_o = 1$, $A_\beta = -\beta$, and $u^*(t) = \theta_1 \dot{\bar{y}}(t) + \theta_2 \bar{y}(t)$.

C. Algebraic Redundancy

In [3] was shown that the implicit description (1) can be restricted to $\mathcal{V}^*_{\mathcal{X}}$ in the domain and to $E\mathcal{V}^*_{\mathcal{X}} + \mathrm{Im}\ B$ in the codomain without modifying its external behaviour (*i.e.* the set of all possible input–output trajectories, (u, y), see Willems [12]); namely: $\overline{E} = (E\mathcal{V}^*_{\mathcal{X}} + \mathrm{Im}\ B)|E|\mathcal{V}^*_{\mathcal{X}}$, $\overline{A} = (E\mathcal{V}^*_{\mathcal{X}} + \mathrm{Im}\ B)|A|\mathcal{V}^*_{\mathcal{X}}$, $\overline{B} = (E\mathcal{V}^*_{\mathcal{X}} + \mathrm{Im}\ B)|B$, and $\overline{C} = C|\mathcal{V}^*_{\mathcal{X}}$. The induced system, $\widehat{\Sigma}(\hat{E}, \hat{A}) : \hat{E}\dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}\hat{x}(t)$, with $\hat{\mathbb{E}} : \mathcal{X}/\mathcal{V}^*_{\mathcal{X}} \rightarrow \underline{\mathcal{X}}/(E\mathcal{V}^*_{\mathcal{X}} + \mathrm{Im}\ B)$ and $\hat{A} : \mathcal{X}/\mathcal{V}^*_{\mathcal{X}} \rightarrow \underline{\mathcal{X}}/(E\mathcal{V}^*_{\mathcal{X}} + \mathrm{Im}\ B)$, is the maximal part of the system, characterizing the algebraic relations which can be reduced by simple algebraic manipulations. The part of the system restricted to $\mathcal{V}^*_{\mathcal{X}}$ and $E\mathcal{V}^*_{\mathcal{X}} + \mathrm{Im}\ B$ is called the algebraic non-redundant part.

For our example (31) we have: $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $C = [\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & \theta_2 \end{array}]$, $A = \begin{bmatrix} -1/\varepsilon & 1 & 0 & 0 \\ -\varepsilon & -\beta & 0 & 0 \\ \left(\frac{-\beta\theta_2}{(\beta+\varepsilon^2)} + \frac{\theta_1}{\varepsilon}\right) & \frac{-\theta_2}{(\beta+\varepsilon^2)} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, and $B = \begin{bmatrix} 1/\varepsilon \\ \varepsilon \\ -\theta_1/\varepsilon \\ 0 \end{bmatrix}$. Applying the algorithm [4] we get: $\overline{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\overline{C} = [\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \end{array}]$, $\overline{A} = \begin{bmatrix} -1/\varepsilon & 1 & 0 \\ -\varepsilon & -\beta & 0 \\ \left(\frac{-\beta\theta_2}{(\beta+\varepsilon^2)} + \frac{\theta_1}{\varepsilon}\right) & \frac{-\theta_2}{(\beta+\varepsilon^2)} & 1 \end{bmatrix}$, and $\overline{B} = \begin{bmatrix} 1/\varepsilon \\ \varepsilon \\ -\theta_1/\varepsilon \end{bmatrix}$. Then: $\mathcal{V}^*_{\mathcal{X}} = \{e_1,\ e_2,\ e_3\}$ and $E\mathcal{V}^*_{\mathcal{X}} + \mathrm{Im}\ B = \{f_1,\ f_2,\ f_3\}$. That is to say, the non algebraically redundant part of the system is located in the region comprised by the first three columns and the three first rows

D. Internal Properness

Proposition 4.1 (Bonilla and Malabre [6]): The system (1), with $E = [\begin{array}{cc} F^T & 0 \end{array}]^T$, and $A = [\begin{array}{cc} G^T & D^T \end{array}]^T$, is internally proper if and only if: Ker $D \oplus$ Ker $F = \mathcal{X}$.

For our example (31), the matrices $\overline{E}$ and $\overline{A}$ linked with the non algebraically redundant part, $\overline{\Sigma}(\overline{E}, \overline{A}, \overline{B}, \overline{C})$, can be expressed as: $\overline{E} = [\begin{array}{cc} F^T & 0 \end{array}]^T$, $\overline{A} = [\begin{array}{cc} G^T & D^T \end{array}]^T$, $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $G = \begin{bmatrix} -1/\varepsilon & 1 & 0 \\ -\varepsilon & -\beta & 0 \end{bmatrix}$, and $D = \left[\begin{array}{ccc} \left(\frac{-\beta\theta_2}{(\beta+\varepsilon^2)} + \frac{\theta_1}{\varepsilon}\right) & \frac{-\theta_2}{(\beta+\varepsilon^2)} & 1 \end{array}\right]$. We then realize that: Ker D $\cap$ Ker F = Ker $\left[\begin{array}{ccc} \left(\frac{-\beta\theta_2}{(\beta+\varepsilon^2)} + \frac{\theta_1}{\varepsilon}\right) & \frac{-\theta_2}{(\beta+\varepsilon^2)} & 1 \end{array}\right]$ $\cap$ Ker $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \{0\}$ and Ker D + Ker F = $\left\{e_1 + \left(\beta\theta_2/(\beta+\varepsilon^2) - \theta_1/\varepsilon\right) e_3,\ \ e_2 + \frac{\theta_2}{(\beta+\varepsilon^2)} e_3\right\} + \{e_3\} = \{e_1,\ e_2,\ e_3\}$. That is to say, Ker $D \oplus$ Ker $F = \mathcal{X}$. And thus, the non algebraically redundant part of system (31) is internally proper.

E. Geometric Kronecker Decomposition

Armentano [1] showed that: *(i)* the proper part of the implicit system (1) is located in the restriction of $(\lambda E - A)$ to $\mathcal{V}^*_{\mathcal{X}0}/(\mathcal{V}^*_{\mathcal{X}0} \cap \mathcal{S}^*_{\mathcal{X}0})$ in the domain and $E\mathcal{V}^*_{\mathcal{X}0}/E(\mathcal{V}^*_{\mathcal{X}0} \cap \mathcal{S}^*_{\mathcal{X}0})$ in the codomain and that *(ii)* the non proper part of the implicit system (1) is located in the restriction of $(\lambda E - A)$ to $\mathcal{S}^*_{\mathcal{X}0}/(\mathcal{V}^*_{\mathcal{X}0} \cap \mathcal{S}^*_{\mathcal{X}0})$ in the domain and $A\mathcal{S}^*_{\mathcal{X}0}/A(\mathcal{V}^*_{\mathcal{X}0} \cap \mathcal{S}^*_{\mathcal{X}0})$ in the codomain.

For our example (32) we get: $\mathcal{V}^*_{\mathcal{X}0} = \{e_1, e_2\}$, $\mathcal{S}^*_{\mathcal{X}0} = \{e_3, e_4\}$, $\mathcal{V}^*_{\mathcal{X}0} \cap \mathcal{S}^*_{\mathcal{X}0} = \{0\}$, $\mathcal{V}^*_{\mathcal{X}0} + \mathcal{S}^*_{\mathcal{X}0} = \{e_1, e_3, e_3, e_4\}$, $E\mathcal{V}^*_{\mathcal{X}0} = \{f_1, f_2\}$, $A\mathcal{S}^*_{\mathcal{X}0} = \{f_3, f_4\}$, and $E\mathcal{V}^*_{\mathcal{X}0} + A\mathcal{S}^*_{\mathcal{X}0} = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$. Then:

$\frac{\mathcal{V}^*_{\mathcal{X}0}}{\mathcal{V}^*_{\mathcal{X}0} \cap \mathcal{S}^*_{\mathcal{X}0}} = \{e_1,\ e_2\}$ and $\frac{E\mathcal{V}^*_{\mathcal{X}0}}{E(\mathcal{V}^*_{\mathcal{X}0} \cap \mathcal{S}^*_{\mathcal{X}0})} = \{f_1,\ f_2\}$,

$\frac{\mathcal{S}^*_{\mathcal{X}0}}{\mathcal{V}^*_{\mathcal{X}0} \cap \mathcal{S}^*_{\mathcal{X}0}} = \{e_3,\ e_4\}$ and $\frac{A\mathcal{V}^*_{\mathcal{X}0}}{A(\mathcal{V}^*_{\mathcal{X}0} \cap \mathcal{S}^*_{\mathcal{X}0})} = \{f_3,\ f_4\}$

Therefore, the proper part of the system is located in the region comprised by the first two columns and the first two rows and the non proper part of the system is located in the region comprised by the last two columns and the last two rows.

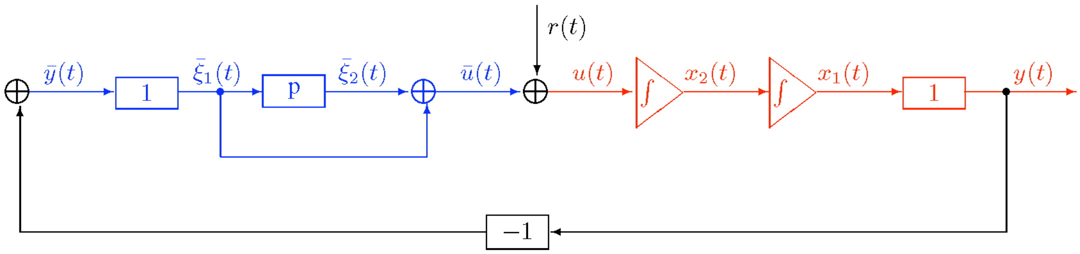

Fig. 2. Ideal Control: State Feedback (non-proper output feedback).

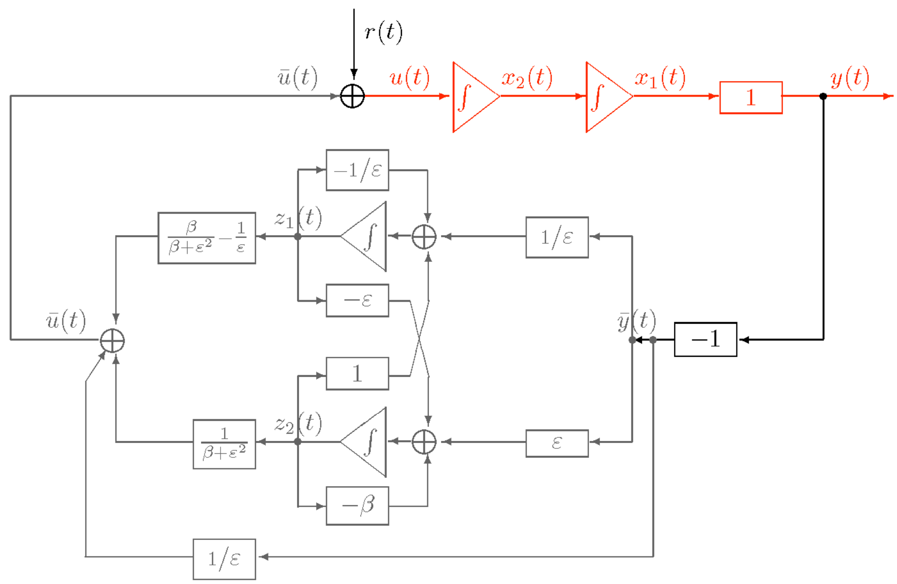

Fig. 3. Real Control: Proper Output Feedback ($\theta_1 = 1$ and $\theta_2 = 1$).

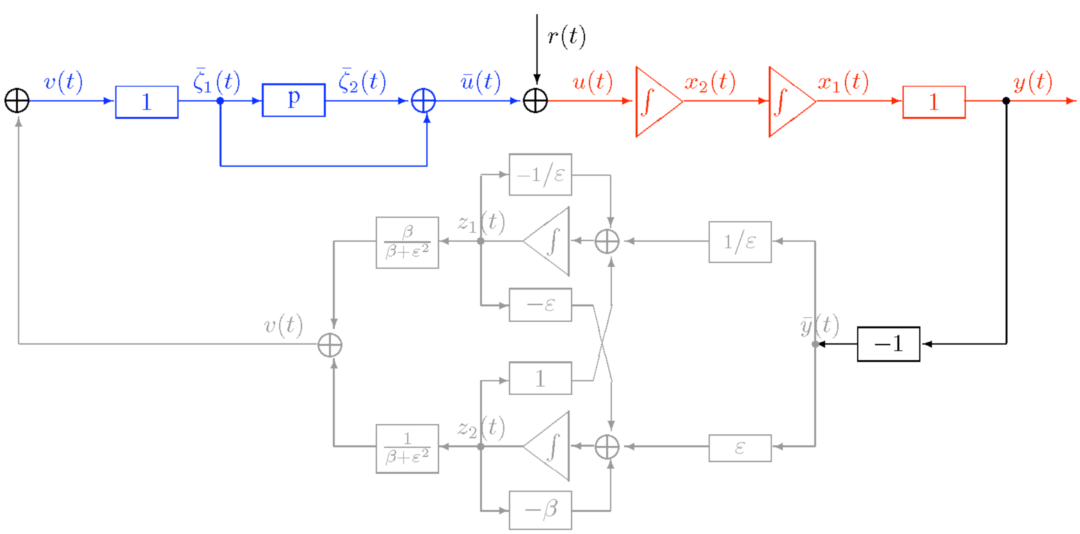

Fig. 4. Real Control with separation of the Ideal Control ($\theta_1 = 1$ and $\theta_2 = 1$).

Apéndice E

M. Figueroa G., J. C. Martínez G., M. Bonilla E. and M. Malabre.

Illustrating an inverse-based failure detection and identification technique based on reconstruction of unknown inputs.

17th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems. July 24-28, 2006, Kyoto, Japan.

Illustrating an inverse-based failure detection and identification technique based on reconstruction of unknown-inputs

M. Figueroa G., J. C. Martínez G., M. Bonilla E. and M. Malabre

***Abstract*— This paper illustrates a failure left-inverse-based detection and identification technique (for linear time-invariant systems) via an example consisting of a hydraulic Four-Tanks system affected by two kinds of failures: leakages in the Tanks and cloggings in the Pipes linking the Tanks. Both classes of failures are considered as unknown-inputs affecting the monitored system, and the detection mechanism is based on the left-inversion of the monitored system in order to reconstruct the unknown-inputs, which modelize both the leakages and the cloggings as fictitious failed actuators. We compare the inverse-based technique (which produces a derivative detector implemented via exponential approximation) with a classic observer-based detector (which performs residual generation via state identification).**

***Index Terms*–Linear time-invariant systems, failure detection and identification, unknown-inputs reconstruction, left-invertibility, approximation of non proper systems.**

I. INTRODUCTION

A failure in an industrial process is defined as an undesirable deviation, from the normal state, of a characteristic property of the monitored process. The undesirable deviation resulting in a catastrophic modification of the normal behavior of the system. As far as failure detection is concerned, we mainly recognize two categories of failures: the first one includes smooth failures, and the second one concerns abrupt failures. Smooth failures are mainly originated by the fatigue of particular components of the process. This class of failures can be detected, and corrected, normally by preventive maintenance. As far as abrupt failures are concerned, they are associated to collapses of actuators, sensors, and inner components of the system. It is quite obvious that this second class of failures must be detected and identified rapidly in order to minimize its effects on the behavior of the system. We are concerned in this paper with abrupt failures.

As is pointed out in [5], the supervision process requires:

- the detection of the failure through the study of changes in the measured (or estimated) outputs of the system with respect to their normal state;
- the identification (also called diagnosis) of the failure, which is to say the specific localization of the failure and the determination of its specific cause;
- the evaluation of the failure, which is to say the quantification of the effects of the failure on the behavior of the system, and
- to take a decision on the operation of the system.

In this paper we are concerned by the first and the second issues in the previous list. We consider model-based failure detection and identification techniques, and we focus our study in the reconstruction of the unknown signals (failures modes) which modelizes the failures. We only consider failures in the actuators, and we perform the reconstruction of the failures affecting a specific system (a hydraulic Four-Tanks system) via a left-inverse of the monitored system, applying the theoretical results presented in [2] and [4]. Since the reconstructor is described by a non proper generalized system, we approximate it in exponential terms by a proper system (see [7]). The failure detection and identification scheme based on the approximated reconstructor is compared with an observer-based failure detection and identification filter (residual generator, see for instance [6]).

The paper is organized as follows:

In Section II we present some basic definitions, mainly concerning left-invertibility of linear time-invariant systems, and we recall the statement of both the failure detection and identification tecnique based on unknown-inputs reconstruction and the observer-based technique (residual generation). We also include the necessary and sufficient conditions which make possible the implementation of both failure detection and identification methods in a monitoring system. In Section III we present the Four-Tanks system. We present the nonlinear model, as well as a linearized one, considering as failures (modelized as failures in fictitious actuators) leakages in the Tanks and cloggings in the Pipes linking the Tanks. In Section IV we compute a unknown-inputs reconstructor which approximates (in exponential terms) a non proper left-inverse of the monitored system (the Four-Tanks linearized model), and we compare the left-inverse-based failure detection and identification scheme with an observer-based detector. We conclude in Section V with some final comments.

II. BASIC CONCEPTS

Consider a linear time-invariant system described by:

$$\left\{ \; \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Lm(t) \, , \; y(t) = Cx(t) \; \right\} , \qquad (1)$$

M. Figueroa G. is preparing her PhD thesis under the co-advising of M. Bonilla E. and J. C. Martínez G. She is sponsored by CONACYT-México mfigueroa@ctrl.cinvestav.mx

J. C. Martínez G. and M. Bonilla are with the Departamento de Control Automático, Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional de México, A. P. 14-740, 07300 Mexico D.F., México {martinez,moises}@ctrl.cinvestav.mx

M. Malabre is with the Insitut de Recherche en Communications et Cybernétique de Nantes, CNRS & (Ecole Centrale-Université-Ecole de Mines) de Nantes, 1 rue de la Noë, F-44321 Nantes Cedex 03, France Michel.Malabre@irccyn.ec-nantes.fr

where: $x(\cdot) \in \mathscr{X} \approx \mathbb{R}^n$ denotes the state; $u(\cdot) \in \mathscr{U} \approx \mathbb{R}^m$ denotes the input; $y(\cdot) \in \mathscr{Y} \approx \mathbb{R}^p$ denotes the output, and $m(\cdot) \in \mathscr{M} \approx \mathbb{R}^k$ denotes the failure modes vector. $A : \mathscr{X} \Longrightarrow \mathscr{X}$, $B : \mathscr{U} \Longrightarrow \mathscr{X}$, $C : \mathscr{X} \Longrightarrow \mathscr{Y}$, and $L : \mathscr{M} \Longrightarrow \mathscr{X}$ (the i-th failure signature), are linear maps represented by particular real constant matrices for chosen bases.

In the previous description the i-th element of the vector $m(t)$ modelizes a possible failure in the i-th actuator. This signal, called *failure mode*, is only different from zero when the corresponding actuator is failed, and equal to zero otherwise.

A. Basic definitions

In what follows we shall denote $\Sigma(A,\ B,\ C)$ the system with no modelized failures included.

We present now some definition which will be useful in the sequel.

Definition 1: **TFM left-invertibility.** Let us consider the Transfer Function Matrix (TFM) of system $\Sigma(A,\ B,\ C)$, i.e. $T(s) := C(sI-A)^{-1}L$, with p rows and m columns. $T(s)$ is TFM left-invertible if and only if its m columns are independent as rational functions of s, namely if and only if *normal rank* $(T(s)) = m$.

Definition 2: **TD left-invertibility.** System $\Sigma(A,\ B,\ C)$ is called TD left-invertible if and only if: (i) there exists a system $\Sigma^i : \mathscr{Y} \Longrightarrow \mathscr{U}$ such that it is solvable[1] in $\mathrm{Im}\Sigma(A,\ B,\ C)$ and (ii) $\Sigma^i \circ \Sigma(A,\ B,\ C) = I$. Σ^i is called a TD left-inverse of $\Sigma(A,\ B,\ C)$.

It has been proven in [4] that the system $\Sigma(A,\ B,\ C)$ is TD left-invertible if and only if Ker $B = \{0\}$ and Im $B \cap (\mathscr{V}_B^* + A\mathscr{V}_B^*) = \{0\}$, where $\mathscr{V}_B^*$ denotes the supremal $(A,\ B)$-invariant subspace included in the Ker C (i.e. $\mathscr{V}_B^* := \sup\{\mathscr{V} \subset \mathrm{Ker}\, C | A\mathscr{V} \subset \mathscr{V} + \mathrm{Im}\, B\}$, see for instance [1]).

In what follows we shall present both the unknown-inputs reconstruction technique and the residual generation technique as a way to achieve fault detection and isolation.

B. Unknown-inputs reconstruction

Given system (1), to reconstruct the failure modes (i.e. the vector $m(t) := \begin{bmatrix} m_1(t) & m_2(t) & \cdots & m_k(t) \end{bmatrix}$) (see for instance [8]), using inversion techniques, let us rewrite system (1) as:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + \begin{bmatrix} L & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y(t) \\ u(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} C \\ 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2}$$

Since left-invertibility is equivalent to monicity (see for instance Remark 2 and Lemma 8 in [2]), system (2) will be left-invertible if and only if:

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ u(t) \end{bmatrix} = 0 \text{ implies that } \begin{bmatrix} m(t) \\ u(t) \end{bmatrix} = 0. \tag{3}$$

[1] Solvable means that for each input in $\mathscr{Y}$, there exists at least one solution in $\mathscr{X}$.

This is equivalent to ask for TD left-invertibility of the system:

$$\left\{ \ \dot{x}(t) = Ax(t) + Lm(t),\ y(t) = Cx(t) \ \right\}.$$

From Corollary 20 in [2] we have that the failure vector $m(t)$ can be reconstructed by left inversion techniques if and only if the matrix transfer function $C(sI_n - A)^{-1}L$ is TFM left-invertible and it has neither transmission zeros, nor input decoupling invariant zeros. Moreover, if the system is TD left-invertible, a left inverse is then given by (see [3]):

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ 1 & \end{bmatrix} \dot{\xi} = \begin{bmatrix} C & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ L & B \end{bmatrix} \\ A & \end{bmatrix} \xi(t) \\ \qquad + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} y(t), \\ \begin{bmatrix} \widetilde{m}(t) \\ \widetilde{u}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \end{bmatrix} \xi(t), \end{cases}$$

where $\widetilde{u}(t)$ and $\widetilde{m}(t)$ denotes the reconstructed input vector and the reconstructed failure vector, respectively. Since $\widetilde{u}(t)$ is by definition equal to $u(t)$ we get:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \end{bmatrix} \dot{\xi}(t) = \begin{bmatrix} C & 0 \\ A & L \end{bmatrix} \xi(t) \\ \qquad + \begin{bmatrix} -I & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \\ \widetilde{m}(t) = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \xi(t) \end{cases} \tag{4}$$

Remark 1: As you can see the left-inverse of the original system corresponds to a generalized system, i.e. in terms of a input-output description the left-inverse is a non proper system. Because of this, it is necessary to approximate the generalized system by a proper system in order to implement a failure detection and isolation scheme (see for instance [7]).

C. Residual generation

Consider system (1) be given. Let $\mathscr{W}_i^*$ the minimum of the family of all the $(C,\ A)$-invariant subspaces containing $\mathrm{Im}L_i$, with L_i denoting the i-th column of matrix L. Taking into account system (1), the failures can be identified by finding the projection of the output of the following full-order observer:

$$\begin{cases} \dot{w}(t) = (A + DC)w(t) - Dy(t) + Bu(t), \\ r(t) = Cw(t) - y(t), \text{ with } e(t) := w(t) - z(t) \end{cases} \tag{5}$$

(i.e. $r(t)$) onto each one of the independent subspaces $C\mathscr{W}_i^*$, and comparing the magnitude of the projection to a threshold, if and only if (see [6]):

$$C\mathscr{W}_i^* \bigcap \left(\sum_{j \neq i} C\mathscr{W}_i^* \right) = 0,\ i \in \{1, 2, \ldots, k\}, \tag{6}$$

assuming that $(C,\ A)$ is observable.

If (6) is satisfied, an observer gain solution D is given by (see [6]):

$$D = -Al(Cl)^1, \tag{7}$$

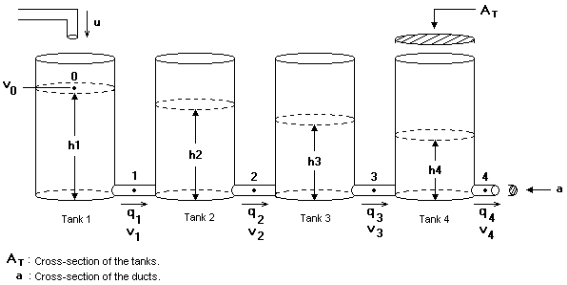

Fig. 1. Four Tanks system.

where $l := \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & \cdots & l_k \end{bmatrix}$, with $l_i := A^{\mu_i} L_i$, being μ_i the smallest integer such that $CA^{\mu_i} l_i = 0$, for $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

The observer (6) is such that $r(t) \in C\mathscr{W}_1^* \oplus C\mathscr{W}_2^* \oplus \cdots \oplus C\mathscr{W}_k^*$. In order to isolate the failures we obtain the projection matrices $H_i : r \to C\mathscr{W}_i^*$, for $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

If matrices H_i are included in the statement of the problem, it has been proven in [6] that under the assumptions (A, C) observable and:

$$e(0) = w(0) - x(0) \tag{8}$$

that a map solution D exists if and only if: Ker $E = \cap_{i=1}^{k} \left(\mathscr{N}^*_{\left(\text{Ker}\, C, \overline{\text{Im}\, L_i}\right)} + \text{Ker}\, C \right)$, restricted to Ker $HC = C$, where $\mathscr{N}^*_{\left(\text{Ker}\, C, \overline{\text{Im}\, L_i}\right)}$ denotes the infimal (Ker C, A)-unobservability subspace containing $\overline{\text{Im}\, L_i}$, with $\overline{\text{Im}\, L_i}$ standing for the image of the map L when the i-th failure signature is not included.

III. THE FOUR-TANKS SYSTEM

In this section we present the hydraulic Four-Tanks system. We shall apply the previously presented failure detection an isolation techniques on this system in order to illustrate them. First of all we shall show the nonlinear model, characterizing the fictitious actuator failures, and then we shall linearize the system.

A. The nonlinear model

Consider the Four-Tanks system described in Figure 1. The nonlinear model of the Four-Tanks system is given by (see fo instance [5]):

$$\begin{cases} \dot{h}_1(t) &= -\frac{a\sqrt{2g}}{A_T}\sqrt{h_1(t) - h_2(t)} + \frac{1}{A_T}u(t) \\ \dot{h}_2(t) &= \frac{a\sqrt{2g}}{A_T}\sqrt{h_1(t) - h_2(t)} - \frac{a\sqrt{2g}}{A_T}\sqrt{h_2(t) - h_3(t)} \\ \dot{h}_3(t) &= \frac{a\sqrt{2g}}{A_T}\sqrt{h_2(t) - h_3(t)} - \frac{a\sqrt{2g}}{A_T}\sqrt{h_3(t) - h_4(t)} \\ \dot{h}_4(t) &= \frac{a\sqrt{2g}}{A_T}\sqrt{h_3(t) - h_4(t)} - \frac{a\sqrt{2g}}{A_T}\sqrt{h_4(t)}, \end{cases} \tag{9}$$

where: g denotes the gravitational acceleration; A_T denotes the cross-section of the Tanks, and a denotes the cross-section of the Pipes.

TABLE I
SIGNATURE FAILURES FOR THE FOUR TANKS SYSTEMS.

i	1	2	3	4
L_i	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
i	5	6	7	8
L_i	$\begin{bmatrix} 1/A_T \\ -1/A_T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1/A_T \\ -1/A_T \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/A_T \\ -1/A_T \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/A_T \end{bmatrix}$

B. The characterization of the failures

The Four-Tanks system can present eight possible failures : a leakage in the i-th Tank, represented by $L_i m_i(t)$, for $i =$ 1, 2, 3, 4, and a clogging in the i-th Pipe, represented by $L_{i+4} m_{i+4}(t)$, for $i =$ 1, 2, 3, 4. The failure modes are then modeled as follows:

Leakages in Tanks

$m_i(t) = -(\widetilde{a}_i/A_T)\left[2g(h_i - x_i)\right]^{1/2}$, $i =$ 1, 2, 3, 4.

Cloggings in pipes

$m_{i+4}(t) = a_1^*\left[2g(h_i - h_{i+1})\right]^{1/2}$, $i =$ 1, 2, 3.

$m_8(t) = (2gh_4)^{1/2}$,

where: $\widetilde{a}_i$ denotes the area of the leakage in the i-th Tank; x_i denotes the level of the leakage in the i-th Tank; a_i^* denotes the reduction in the cross-section of the i-th pipe resulting from the clogging for $i =$ 1, 2, 3, 4.

Remark 2: Note that the leakage in the i-th Tank is completely characterized by the area of the leakage (i.e. $\widetilde{a}_i$) and the corresponding level x_i. It is quite obvious that in practical applications the corresponding mode of failure, i.e. $m_i(t)$, is unknown (indeed it is difficult to implement a measurement procedure to obtain both the leakage area $\widetilde{a}_i$ and the leakage x_i). As far as the cloggings are concerned, the situation is the same.

The corresponding signature failures are as shown in Table I.

Remark 3: Since L_2 and L_8 are linearly independent, failures 4 and 8 can not be isolated one from another. In what follows we shall assume that the level $h_2(t)$ is not measurable.

C. The linearized system

This nonlinear system is now linearized in the equilibrium point resulting from a constant input $u(t)$. For this, we take as the set of the parameters the next one: $\{\ A_T = 500cm^2$, $a = 2.54cm^2$, $u(t) = 277.8cm^3/sec$, $g = 981cm/sec^2\}$.

The corresponding linearized system is then given by: $\dot{h}(t)$

$= Ah(t) + Bu(t) + \sum_{i=1}^{8} L_i m_i(t)$, $y(t) = Ch(t)$, with:

$$A := 0.04558 \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B := \begin{bmatrix} 0.001 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \; C := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

and:

$$L_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad L_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$L_3 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad L_4 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$L_5 := \begin{bmatrix} 1/500 \\ -1/500 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad L_6 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1/500 \\ -1/500 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$L_7 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/500 \\ 1/500 \end{bmatrix}, \quad L_8 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/500 \end{bmatrix}.$$

Remark 4: In what follows we shall only consider as failures leakages in both Tank 3 and Tank 4, i.e. we shall consider that only $m_3(t)$ and $m_4(t)$ can be different from zero. We make this consideration just because of space limitations.

Taken into account the previous remark, the linearized model is given by: $\dot{h}(t) = Ah(t) + Bu(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_3(t) \\ m_4(t) \end{bmatrix}$, $y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} h(t)$.

IV. TWO DIFFERENT APPROACHES FOR FAILURE DETECTION AND ISOLATION: FAILURE RECONSTRUCTION AND RESIDUAL GENERATION

In this section we shall apply the failure detection and isolation tecniques previously presented on the linearized system.

A. Failure modes reconstruction

Consider the linearized system. As was recalled in Subsection II-B, the linearized system is TD left-invertible if and only if (3) is satisfied, which is the case for our current example ($C(sI_n - A)^{-1} L$ is in fact TFM left-invertible, and it has neither transmission zeros, nor input decoupling invariant zeros). The corresponding left-inverse of the linearized system is then given by (see (4)):

$$\left[\begin{array}{cccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \dot{\xi}(t) =$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline -0.0456 & 0.0456 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0456 & -0.0912 & 0.0456 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0456 & -0.0912 & 0.0456 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0456 & 0.0912 & 0 & 0 \end{array}\right] \xi(t)$$

$$+ \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0.001 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} y(t) \\ u(t) \end{bmatrix},$$

$$\widetilde{m}(t) = \left[\begin{array}{cccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xi(t). \tag{10}$$

Remark 5: As can be seen, system (10) has more equations than variables (i.e. the system has seven descriptor variables and eight descriptor equations), then there is one internal restriction which in this case is internally satisfied by the system itself. And thus, it is not necessary to include the extra row descriptor equation in the (square) failure reconstructor, namely:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \dot{\omega}(t) = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \omega(t)$$

$$+ \left[\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] y(t), \; \widetilde{m}(t) = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \omega(t)$$

$$+ \left[\begin{array}{ccc} -0.0456 & 0.0912 & -0.0456 \\ 0 & -0.0456 & -0.0912 \end{array}\right] y(t)$$

$$+ \left[\begin{array}{c} 0.001 \\ 0 \end{array}\right] u(t) \qquad (11)$$

In order to implement the non proper reconstructor (11), in a failure detection and identification scheme, it is necessary to obtain a proper approximation. Based on the techniques developed in [7] we obtain an exponential approximation given by (it is possible to obtain and exponential approximation for the non proper system because the non proper system is completely observable):

$$\dot{\widetilde{x}}(t) = \left[\begin{array}{cc|cc} -\frac{1}{\varepsilon} & 1 & 0 & 0 \\ -\varepsilon & -\beta & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -\frac{1}{\varepsilon} & 1 \\ 0 & 0 & -\varepsilon & -\beta \end{array}\right] \widetilde{x}(t)$$

$$+ \left[\begin{array}{ccc} -\frac{1}{\varepsilon} & \frac{1}{\varepsilon} & 0 \\ -\varepsilon & \varepsilon & 0 \\ \hline 0 & 0 & \frac{1}{\varepsilon} \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{array}\right] y(t),$$

$$\widetilde{m}(t) = \left[\begin{array}{cc|cc} -\frac{1}{\varepsilon} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\varepsilon} & 0 \end{array}\right] \widetilde{x}(t) + \left[\begin{array}{ccc} -\frac{1}{\varepsilon} & \frac{1}{\varepsilon} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\varepsilon} \end{array}\right] y(t)$$

$$+ \left[\begin{array}{ccc} -\alpha & 2\alpha & -\alpha \\ 0 & -\alpha & -2\alpha \end{array}\right] y(t) + \left[\begin{array}{c} 0.001 \\ 0 \end{array}\right] u(t), \qquad (12)$$

where the small strictly positive ε is chosen in order to guarantee the approximation of the derivative actions characterizing the left-inverse (11) , while the strictly positive β is chosen in order to guarantee the convergency of the exponential approximation.

B. Residual generation

It is easy to verify that the pair (C, A) for the linearized system is observable. Now, using the so-called CAISA algorithm (see for instance [9]) we obtain the subspaces: $\mathscr{W}_3^* = \mathrm{Im}L_3$ and $\mathscr{W}_4^* = \mathrm{Im}L_4$.

In this case $\mu_3 = \mu_4 = 0$, and consequently: $l_3 = L_3$ and $l_4 = L_4$. Thus, we have from (7) that:

$$D = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ -0.0456 & -0.0456 & 0 \\ 0.0456 & 0.0912 & -0.0456 \\ 0.0456 & -0.0456 & 0.0912 \end{array}\right].$$

It is quite obvious that: $H_3 = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \end{array}\right]^\top$ and $H_4 = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \end{array}\right]^\top$.

C. Comparing failure reconstruction with residual generation

We implemented the failure reconstructor in a Matlab^{TM}+Simulink^{TM} platform in order to simulate the monitoring system when failures are presented.

For both failure detection and identification schemes we chose as the first failure mode (i.e. $m_1(t)$) a step function of amplitude equal to two and starting at time equal to eight seconds. As far as the second failure mode (i.e. $m_2(t)$), we chose a de-phased sinus function of amplitude equal to one, also starting at time equal to eight seconds.

As can be seen in both Figure 2 and Figure 3, the failure detection and isolation scheme based on left-invertibility

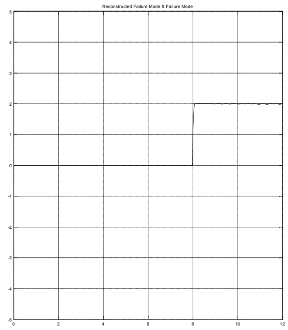

Fig. 2. Comparaison between the reconstructed first failure mode and the corresponding failure mode.

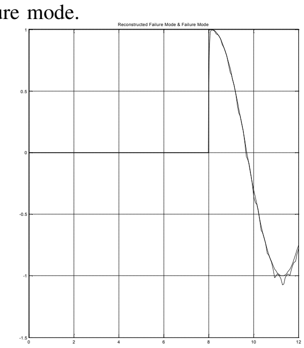

Fig. 3. Comparaison between the reconstructed second failure mode and the corresponding failure mode.

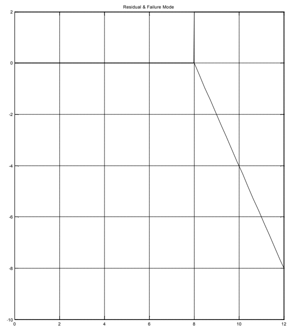

Fig. 4. First residual compared with the first failure mode.

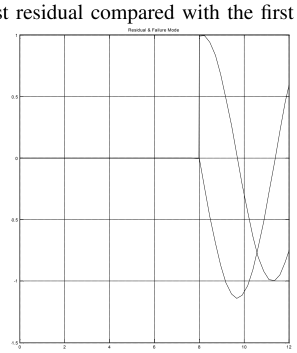

Fig. 5. Second residual compared with the second failure mode.

techniques has a nice behavior. Indeed, the failure modes are reconstructed with an astounding fidelity. We fixed for the reconstructor $\varepsilon = 1/50$ (precisition parameter) and $\beta = 10$ (convergency parameter). Note in Figure 3 the slightly oscillatory behavior of the second reconstructed failure mode. This behavior can in fact be minimized increasing the value of β.

As far as the failure detection and isolation scheme based on the observer (residual generator) is concerned, we can see in in Figure 4 how the first failure mode is effectively detected and identified (Figure 5 shows the residual corresponding to the second failure mode).

When compairing the behavior of both failure detection and identification schemes, we can see the advantages of the technique based on left-invertibility. Indeed, this scheme insures not only the detection and identification of the failure modes, but also their reconstruction. Moreover, the observer-based scheme depends on the condition (8), while the reconstruction scheme is not constrained by the initial conditions of the monitored system (a convenient value of β makes the effects of the initial conditions disappear from the outputs of the reconstructor). It is true that (under some structural constraints) a stable observer can be obtained in order to eliminate the dependence of the observer-based scheme from the initial conditions (in fact, it can be easily verified that the residual generator for our example is unstable). However, the reconstruction-based scheme is not limited by stability constraints, since the open-loop nature of this failure detection and identification scheme.

V. FINAL REMARKS

We illustrated here a failure detection and identification scheme based on unknow inputs (the failure modes) reconstruction. The reconstructor was based on the approximation (in exponential terms) of a non proper left-inverse of the monitored system. We compared the scheme with a filter based on state identification (residual generation), and we concluded that the unknown-inputs reconstruction approach offers some clear advantages, mainly the independency of the scheme from the initial conditions of the monitored system. Moreover, the reconstruction scheme makes unnecessary the comparaison of the outputs of the detector with a threshold (which is always necessary in observer-based residual generation schemes).

It must be pointed out that the unknown-inputs reconstruction scheme based on non proper actions minimizes the constraints impossed by stability issues (due to the open loop nature of the scheme), which is not the case for observer-based approaches.

As an obvious perspective, we consider the application of the unknown-inputs reconstruction scheme to the detection of failures in electromechanical systems.

REFERENCES

[1] G. Basile and G. Marro (1992). *Controlled and Conditioned Invariants in Linear Systems Theory*. Prentice Hall, USA.

[2] M. Bonilla Estrada, M. Figueroa Garcia, and M. Malabre (2004). Time domain left invertibility: applications to failure detection. *in 2nd Symposium on System, Structure and Control*, Oaxaca, Mexico, pp. 623-628.

[3] M. Bonilla Estrada and M. Malabre (1990). One side invertibility for implicit descriptions. *in 29th Conference on Decisition and Control*, pp. 3601-3602.

[4] M. Figueroa-Garcia, M. Bonilla-Estrada, M. Malabre, and J.C. Martinez-Garcia (2004). On failure detection by inversion techniques. *43rd IEEE Conference on Decision and Control*, Dec. 14-17, Atlantis, Paradise Island, Bahamas, pp. 4770-4775.

[5] W. Ge and C.Z. Fang (1989). Extended robust observation approach for failure isolation. *Int. J. Control*, vol. 49, no. 5.

[6] M.A. Massoumnia (1996). *A geometric approach to failure detection and identification in linear system*. PhD. Thesis, Dep. of Aeronautics and astronautics, MIT, Boston, USA.

[7] J.P. Martinez, M. Bonilla Estrada, and M. Malabre (2003). Structural proper exponential approximation of non proper systems. *in 42nd Conference on Decision and Control*, Maui, Hawaii, USA, pp. 110-115.

[8] A. Saberi, A.A. Stoorvogel, P. Sannuti, and H.H. Niemann (2000). Fundamental problems in fault detection and identification. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 10, pp. 1209-1236.

[9] L. Zongli (1992). *Linear system tools. Geometric subspaces*. Washigton State University, Pullman, June 8, Copyright (c) by Ali Saberi.

Apéndice F

M. Bonilla E., M. Figueroa G., M. Malabre and J.C Martínez G.

Left Invertibility and Duality for Linear Systems.

SOMETIDO.

Left Invertibility And Duality for Linear Systems

Moisés Bonilla Estrada [a,1] Maricela Figueroa Garcia [b,2] Michel Malabre [c,1]
Juan Carlos Martínez García [d,1]

[a] *CINVESTAV-IPN, Control Automático. AP 14-740. México 07000, MEXICO. mbonilla@cinvestav.mx.*

[b] *ESIME-IPN, Av. de las Granjas No. 682, Atzcapozalco, México 02250, MEXICO. mfigueroag@yahoo.com.mx.*

[c] *IRCCyN, B.P. 92101, 44321 NANTES, Cedex 03, FRANCE. Michel.Malabre@irccyn.ec-nantes.fr.*

[d] *CINVESTAV-IPN, Control Automático. AP 14-740. México 07000, MEXICO. martinez@ctrl.cinvestav.mx.*

Abstract

Left and right invertibilities, as well as inversion procedures and algorithms, have been widely studied for years. We consider here, for linear time invariant (LTI) systems, such types of one side invertibilities but in the time domain, which is more demanding than just in the frequency domain, *i.e.* for the Transfer Function Matrix (TFM). New geometric conditions are given for Time Domain (TD) Left Invertibility, as well as structural conditions which require not only full column rank but also the absence of some types of finite zeros, namely the "observable" ones. For general monic (full column rank) systems having "observable" zeros, we enhance a cascade decomposition which allows for the TD Left Inversion of the "pole" factor, and for the TFM Left Inversion of the "zero" factor. Duality in the classical TFM setting just relies on transposition. In the present TD context, this is not relevant. We give necessary and sufficient conditions for TD Right Invertibility, that show that the underlying duality is indeed the one between zeros and poles, which is *a posteriori* natural. Full row rank LTI systems can be TD Right Inverted if and only if they have no finite observable poles.

Key words: Linear systems, inversion techniques, geometric approach

Notation and Subspaces

Script capitals $\mathcal{V}$,$\mathcal{W}$, ..., denote linear spaces with elements v, w, ... ; when $\mathcal{V} \subset \mathcal{W}$, $\mathcal{W}/\mathcal{V}$ stands for the quotient space $\mathcal{W}$ modulo $\mathcal{V}$; given a map $X{:}\mathcal{V} \to \mathcal{W}$, $X^{-1}\mathcal{T}$ is the inverse image of $\mathcal{T} \subset \mathcal{Y}$ by the (possibly not invertible) linear map X, Im $X = X\mathcal{V}$ denotes its image, and Ker $X = X^{-1}\{0\}$ denotes its kernel. X^T denotes the transpose of X, and Adj X denotes its adjoint. e_i stands for the $i - th$ vector of the chosen basis, i.e. having a 1 in its $i - th$ coordinate and 0 in the other ones. $\{v_1, \dots v_k\}$ stands for the subspace generated by the vectors $v_1, \dots v_k$. $\dot{x}$ and $\ddot{x}$ denote the first and second time derivatives of x, $x^{(i)}$ is used for higher orders derivatives. p and s stand for d/dt and the Laplace variable, respectively. DBM stands for Diagonal Block Matrix. $\mathbb{R}$[s] stands for the ring of polynomials with real coefficients in the indeterminate s.

The following subspaces are used in this paper, see mainly (Wonham 1985), (Basile and Marro 1992), and (Bernhard 1982) :

(1) $\mathcal{N}$ is the unobservable subspace of the pair $(A,\ C)$, *i.e.* $\mathcal{N} = \cap_{i=0}^{n-1} A^{-i}\text{Ker }C$.

[1] LAFMAA, Laboratoire Franco–Mexicain d'Automatique Appliquée.
[2] Maricela Figueroa was sponsored by CONACyT-México and partly by LAFMAA during her thesis.

(2) The supremal $(A,B)-$ *invariant* subspace contained in Ker C, $\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} = \sup\{\mathcal{V} \subset \text{Ker } C \mid A\mathcal{V} \subset \mathcal{V} + \text{Im } B\}$, which is the limit of the non increasing algorithm:

$$\mathcal{V}^0_{[A,B,C]} = \mathcal{X} \ , \quad \mathcal{V}^{\mu+1}_{[A,B,C]} = \text{Ker } C \cap A^{-1}\big(\mathcal{V}^{\mu}_{[A,B,C]} + \text{Im } B\big) \tag{1}$$

(3) The infimal $(C,A)-$ *invariant* subspace containing Im B, $\mathcal{S}^*_{[C,A,B]} = \inf\{\mathcal{S} \supset \text{Im } B \mid A(\mathcal{S} \cap \text{Ker } C) \subset \mathcal{S}\}$, which is the limit of the non decreasing algorithm:

$$\mathcal{S}^0_{[C,A,B]} = \{0\} \ , \quad \mathcal{S}^{\mu+1}_{[C,A,B]} = \text{Im } B + A\big(\mathcal{S}^{\mu}_{[C,A,B]} \cap \text{Ker } C\big) \tag{2}$$

(4) The supremal $(A,B)-$ *controllability* subspace contained in Ker C, $\mathcal{R}^*_{[A,B,C]}$, which is the limit of the non decreasing algorithm:

$$\mathcal{R}^0_{[A,B,C]} = \{0\} \quad ; \quad \mathcal{R}^{\mu+1}_{[A,B,C]} = \mathcal{V}^*_{[A,B,C]} \cap \big(A\mathcal{R}^{\mu}_{[A,B,C]} + \text{Im } B\big) \tag{3}$$

(5) The supremal $(\mathbb{E},\mathbb{A})-$*invariant* subspace contained in $\mathcal{X}$, $\mathcal{V}^*_{[\mathcal{X};\mathbb{E},\mathbb{A}]} = \sup\{\mathcal{V} \subset \mathcal{X} \mid \mathbb{E}\mathcal{V} \subset \mathbb{A}\mathcal{V}\}$, which is the limit of the non increasing algorithm:

$$\mathcal{V}^0_{[\mathcal{X};\mathbb{E},\mathbb{A}]} = \mathcal{X} \quad ; \quad \mathcal{V}^{\mu+1}_{[\mathcal{X};\mathbb{E},\mathbb{A}]} = \mathbb{E}^{-1}\mathbb{A}\mathcal{V}^{\mu}_{[\mathcal{X};\mathbb{E},\mathbb{A}]} \tag{4}$$

1 INTRODUCTION

The *inversion problem* has been widely studied, in particular for characterizing some structural properties of the systems. See for instance, in the classic linear systems theory, the works of Silverman (1969), Luenberger (1978), Silverman and Kitapçi (1983) and Lizarzaburu (1978), for nonlinear systems, Hirschorn (1979(a)), Hirschorn (1979(b)), Singh (1981) and Moog (1988), for infinite dimensional systems Malabre and Rabah (1989), and for descriptor systems Lewis (1983), Lewis and Beauchamp (1987), Malabre (1989) and Bonilla and Malabre (1994).

Inverse systems are also useful in solving typical control problems. For that purpose, we have to distinguish *left* and *right inverse systems.*

Given a *left invertible system*, $\Sigma : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{Y}$, a *left inverse*, $\Sigma^\ell : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{U}$, is a system satisfying $\Sigma^\ell\Big(\Sigma\big(u(\cdot)\big)\Big) = u(\cdot)$. The *left inverse systems* are typically used for observing internal variables and for reconstructing unknown exogenous signals directly acting over the system.

Given a *right invertible system*, $\Sigma : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{Y}$, a *right inverse*, $\Sigma^r : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{U}$, is a system satisfying $\Sigma\Big(\Sigma^r\big(\bar{y}(\cdot)\big)\Big) = \bar{y}(\cdot)$. The *right inverse systems* are typically used for reference tracking and for disturbance rejection.

These two powerful tools are mainly studied from the two principal frameworks of the linear systems theory, namely: the *Transfer Function Matrix (TFM)* approach, in which case the argument of the considered signals is "s" and the *Time Domain (TD)* approach, in which case the argument of the considered signals is "t". We consider here the particularities of the *left* and *right invertibilities* in both domains.

In this paper we deal with the more general linear system theory of the generalized systems [3] (see for example Lewis (1992)), $\Sigma(\mathbb{E},\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{C})$:

$$\mathbb{E}\dot{x}(t) = \mathbb{A}x(t) + \mathbb{B}u(t) \quad ; \quad y(t) = \mathbb{C}x(t) \tag{5}$$

where $\mathbb{E}$ and $\mathbb{A}$: $\mathcal{X} \to \underline{\mathcal{X}}$, $\mathbb{B}$: $\mathcal{U} \to \underline{\mathcal{X}}$, and $\mathbb{C}$: $\mathcal{X} \to \mathcal{Y}$. u is the input, y is the output and x is the descriptor variable; the input is considered to be a continuous, and "sufficiently" derivable signal. We consider that the model is valid for $t \geq 0$, so the initial conditions are consistent, *i.e.* they also satisfy (5) [4]. $\mathcal{X}$, $\mathcal{U}$, and $\mathcal{Y}$ are the descriptor, input, and output spaces.

[3] Also called implicit, descriptor, or singular systems ; the pencil $[s\mathbb{E} - \mathbb{A}]$ may be singular and the matrices $\mathbb{E}$ and $\mathbb{A}$ may even be non square.

[4] That is to say, there are no internal switches for introducing initial conditions in the derivative actions, and thus the initial conditions are only due to the integrators (see also footnote 14 of the Appendix).

In (Bonilla and Malabre 1990) we tackled the invertibility of (5) from a time domain point of view. In that paper the following two results, in the time domain, were established:

Lemma 1 *(Bonilla and Malabre 1990) Let the generalized system (5) be solvable, namely there exists a linear transformation* $\Psi(\cdot) : \mathcal{U} \to \mathcal{X}$ *satisfying (5), i.e.* $\mathbb{B}u(t) = (\mathbb{E}\mathrm{p} - \mathbb{A})\Psi(u(t))$. *Then (5) is* left invertible *(resp.* right invertible*) if and only if:* Ker $C\Psi(\cdot) = \{0\}$ *(resp.* Im $C\Psi(\cdot) = \mathcal{Y}$*).*

Lemma 2 *(Bonilla and Malabre 1990) If (5) is* left invertible *(*right invertible*) then one* left inverse *(*right inverse*) system is:*[5]

$\Sigma^i(\mathbb{E}_i, \mathbb{A}_i, \mathbb{B}_i, \mathbb{C}_i)$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathbb{E} & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbb{E}_i} \dot{x}_i(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbb{C} & 0 \\ \mathbb{A} & \mathbb{B} \end{bmatrix}}_{\mathbb{A}_i} x_i(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} -\mathrm{I} \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbb{B}_i} \hat{y}(t) \quad ; \quad \hat{u}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \mathrm{I} \end{bmatrix}}_{\mathbb{C}_i} x_i(t) \tag{6}$$

where $\mathbb{E}_i$ *and* $\mathbb{A}_i$: $\mathcal{X}_i \to \underline{\mathcal{X}}_i, \mathbb{B}_i$: $\mathcal{Y} \to \underline{\mathcal{X}}_i$, *and* $\mathbb{C}_i : \mathcal{X}_i \to \mathcal{U}$, *and with* $\mathcal{X}_i = \mathcal{X} \oplus \mathcal{U}$ *and* $\underline{\mathcal{X}}_i = \mathcal{Y} \oplus \underline{\mathcal{X}}$.

The paper is structured as follows. In all sections, *left* or *right invertibility* is considered within both *TFM* and *TD* approaches. Section 2 is devoted to *left invertibility* for which geometric and structural characterizations are given. In Section 3 we show how to synthesize a *left inverse filter*. In Section 4 *right invertibility* is considered as well as the duality between these two types of *invertibilities*. Finally, we conclude in Section 5.

2 LEFT INVERTIBILITY

Let us begin this Section recalling the following three basic concepts related with *left invertibility*:

R1 The basic definition for *left invertibility* is: given a function $\varphi : Dom \to CoDom$, $r \mapsto \varphi(r)$, find (if possible) a function $\psi : CoDom \to Dom$, $v \mapsto \psi(v)$, such that the composite function $\psi \circ \varphi : Dom \to Dom$, $r \mapsto \psi(\varphi(r))$, is the identity function I, namely: $\psi(\varphi(r)) = r$ for all $r \in Dom$.
R2 For a linear function φ, the existence of a *left inverse function*, ψ, is equivalent to the fact that φ is monic, namely: Ker $\varphi(\cdot) := \{r \in Dom \mid \varphi(r) = 0\} = \{0\}$.
R3 From the fundamental Theorem of *Calculus*: the *left inverse function*, ψ, of the linear function $\varphi : r(t) \mapsto \int_0^t r(\tau)\mathrm{d}\tau$ is: $\psi : v(t) \mapsto \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}$, since $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^t r(\tau)\mathrm{d}\tau = r(t)$, for all integrable variable r.

Let us state the following problem:

Problem 3 *–Under which conditions does there exist, and, then, how to design a* left inverse system *for (5), independent of both the initial conditions of x and the nature of input u?*

For solving this problem, we have first to find which internal structures of (5) guarantee *left invertibility.* For this, let us express (5) in its Kronecker normal form (Gantmacher 1977). In such a normal form, the pencil $[\mathrm{s}\mathbb{E} - \mathbb{A}]$ has typically four types of blocks, namely: *(1)* finite elementary divisors, *e.g.* $\begin{bmatrix} (\mathrm{s}-\alpha) & 1 \\ 0 & (\mathrm{s}-\alpha) \end{bmatrix}$, *(2)* infinite elementary divisors, *e.g.* $\begin{bmatrix} 1 & \mathrm{s} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, *(3)* column minimal indices, *e.g.* $\begin{bmatrix} \mathrm{s} & 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{s} & 1 \end{bmatrix}$, and *(4)* row minimal indices, *e.g.* $\begin{bmatrix} \mathrm{s} & 0 \\ 1 & \mathrm{s} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. The finite and infinite elementary divisors correspond respectively to the proper (differential equations) and the non-proper (derivators) parts of the system. The column and row minimal indices correspond respectively to the existence of

[5] For the case of *left invertibility* replace i by ℓ and $(\hat{y}, \hat{u})$ by $(y, \bar{u})$. For the case of *right invertibility* replace i by r and $(\hat{y}, \hat{u})$ by $(\bar{y}, u)$.

degrees of freedom (more unknowns than equations) and to restrictions on the signals (the admissible inputs have, for instance, to satisfy a pre-specified differential equation).

Since we are interested in systems without restrictions on the inputs, we do not take into account row minimal indices. Also, as we are studying *left invertibility*, the column minimal indices are naturally excluded (the kernel of these kinds of blocks are certainly non zero and thus they are not *left invertible*, *c.f.* Remark **R2**). So we only take into account finite and infinite elementary divisors, which characterize the integral and derivative actions. In this case, it is said that the system is regular, since the pencil $[\mathrm{s}\mathbb{E}-\mathbb{A}]$ is square and invertible. Moreover, as we are also considering *left inverses* of *transfer functions matrices*, the existence of unique solutions forced us to deal with regular systems.

With respect to the finite elementary divisors, Wong (1974) and Bernhard (1982) have geometrically characterized them through the supremal $(\mathbb{E},\mathbb{A})-$*invariant* subspace, $\mathcal{V}^*_{[\mathcal{X};\mathbb{E},\mathbb{A}]}$. Indeed, if λ is a finite-zero of the pencil $[\lambda\mathbb{E}-\mathbb{A}]$, there then exists an exponential mode characterized by a vector $v\in\mathcal{V}^*_{[\mathcal{X};\mathbb{E},\mathbb{A}]}$ such that $\mathbb{A}v=\lambda\mathbb{E}v$.

When Armentano (1986) studied the controllability and observability of the regular generalized systems, he used the Wieierstrass form (here named the *parallel connection*):

$$\begin{bmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ 0 & \bar{N} \end{bmatrix}\dot{x}(t)=\begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & \mathrm{I} \end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ -\bar{B}_2 \end{bmatrix}u(t) \quad ; \quad y(t)=\begin{bmatrix} \bar{C}_1 & \bar{C}_2 \end{bmatrix}x(t) \tag{7}$$

where J is a Jordan matrix, with blocks say J_i, and $\bar{N}$ is a nilpotent matrix. The finite elementary divisors $[\mathrm{sI}-J_i]$ are located in the restriction of $[\mathrm{s}\mathbb{E}-\mathbb{A}]$ to $\mathcal{V}^*_{[\mathcal{X};\mathbb{E},\mathbb{A}]}$ in the domain and to $\mathbb{E}\mathcal{V}^*_{[\mathcal{X};\mathbb{E},\mathbb{A}]}$ in the codomain.

Let us note that its Transfer Function Matrix,

$$G^{-1}(\mathrm{s})F(\mathrm{s})=\bar{C}_1(\mathrm{sI}-J)^{-1}\bar{B}_1-\bar{C}_2(\mathrm{s}\bar{N}-\mathrm{I})^{-1}\bar{B}_2\ ,$$

satisfies the Euclidean division algorithm. Indeed, given polynomial matrices $G(\mathrm{s}),F(\mathrm{s})$ with elements in $\mathbb{R}[\mathrm{s}]$ there exists a unique polynomial matrix $\bar{F}(\mathrm{s})$ such that:

$$F(\mathrm{s})=G(\mathrm{s})H(\mathrm{s})+\bar{F}(\mathrm{s}),\text{ with }\deg\bar{F}(\mathrm{s})<\deg G(\mathrm{s})\ (\text{or }\bar{F}(\mathrm{s})\equiv 0),$$

where $G^{-1}(\mathrm{s})\bar{F}(\mathrm{s})=\bar{C}_1(\mathrm{sI}-J)^{-1}\bar{B}_1$ and $H(\mathrm{s})=-\bar{C}_2(\mathrm{s}\bar{N}-\mathrm{I})^{-1}\bar{B}_2$.

Although the Weierstrass form is very well adapted for the study of many structural properties, we also use the following alternative decomposition (here named the *cascade connection*):

$$\begin{bmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}\dot{x}(t)=\begin{bmatrix} A & B\Delta \\ 0 & \mathrm{I} \end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix} 0 \\ -\Gamma \end{bmatrix}u(t) \quad ; \quad y(t)=\begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}x(t) \tag{8}$$

where N is a nilpotent matrix.

In this case its Transfer Function Matrix is:

$$G^{-1}(\mathrm{s})F(\mathrm{s})=-C(\mathrm{sI}-A)^{-1}B\Delta(\mathrm{s}N-\mathrm{I})^{-1}\Gamma\ ,$$

which is expressed as the product of two factors, namely:

$$F(\mathrm{s})=F_2(\mathrm{s})F_1(\mathrm{s}),\text{ with }\deg F_2(\mathrm{s})<\deg G(\mathrm{s})$$

where $G^{-1}(\mathrm{s})F_2(\mathrm{s})=C(\mathrm{sI}-A)^{-1}B$ and $F_1(\mathrm{s})=-\Delta(\mathrm{s}N-\mathrm{I})^{-1}\Gamma$.

In this *cascade connection*, the decomposition of $F(\mathrm{s})$ in the two factors, $F_2(\mathrm{s})$ and $F_1(\mathrm{s})$, is not unique. However, in Section 3.1 we show how to separate the strictly proper part, $G^{-1}(\mathrm{s})F_2(\mathrm{s})$, into a polynomial part (describing zeros actions) and a strictly proper part (describing poles actions), and this final decomposition is certainly unique.

This *cascade connection* is more adapted to *left invertibility* analysis since it enables us to study separately left invertibility for each system, namely for the polynomial part, $F_1(\mathrm{s})$, and for the strictly proper part, $G^{-1}(\mathrm{s})F_2(\mathrm{s})$. On the opposite, for the *parallel connection*, there are some technical difficulties due to the computation of Ker $\begin{bmatrix} \bar{C}_1 & \bar{C}_2 \end{bmatrix}$.

In the following two subsections we analyze left invertibility within the two basic *domains*. Namely, the *frequency domain* and the *time domain*.

2.1 Transfer Function Matrix Left Invertibility

When dealing with a *Transfer Function Matrix* (*TFM*), the following definition for *left invertibility* is standard (*c.f.* Remark **R2**):

Definition 4 *Let us consider a* transfer function matrix, $T(\mathrm{s}) = \mathbb{C}\big(\mathrm{s}\mathbb{E} - \mathbb{A}\big)^{-1}\mathbb{B}$*, with ρ rows and m columns.* $T(\mathrm{s})$ *is* TFM left invertible *if and only if its m columns are independent as rational functions of* s*, namely if and only if* rank $T(\mathrm{s}) = m$, viz*, if and only if* Ker $T(\mathrm{s}) = \{0\}$.

Let us now give a geometric characterization of the *TFM left invertibility* for the two subsytems of the *cascade connection* (8).

2.1.1 Strictly proper systems

For the strictly proper part of system (8), $\Sigma_{sp}(A, B, C)$:

$$\dot{x}_{sp}(t) = Ax_{sp}(t) + Bz(t) \quad ; \quad y(t) = Cx_{sp}(t) \tag{9}$$

where A: $\mathcal{X}_{sp} \to \mathcal{X}_{sp}$, B: $\mathcal{Z} \to \mathcal{X}_{sp}$, and C: $\mathcal{X}_{sp} \to \mathcal{Y}$, the *TFM left invertibility* geometric characterization has been given by the end of the sixties (see Basile and Marro (1992)):

Theorem 5 *(Basile and Marro 1992)* $T_{sp}(\mathrm{s}) = C(\mathrm{sI} - A)^{-1}B$ *is* TFM left invertible *if and only if:*

$$\text{Ker } B = \{0\} \quad \textit{and} \quad \text{Im } B \cap \mathcal{V}^*_{[A,B,C]} = \{0\} \tag{10}$$

Equivalently, $T_{sp}(\mathrm{s})$ *is* TFM left invertible *if and only if:*

$$\text{Ker } B = \{0\} \quad \textit{and} \quad \mathcal{R}^*_{[A,B,C]} = \{0\} \tag{11}$$

2.1.2 Polynomial systems

For the polynomial part of system (8), $\Sigma_{pol}(N, \Gamma, \Delta)$:

$$N\dot{x}_{pol}(t) = x_{pol}(t) - \Gamma u(t) \quad ; \quad z(t) = \Delta x_{pol}(t) \tag{12}$$

where N: $\mathcal{X}_{pol} \to \mathcal{X}_{pol}$, Γ: $\mathcal{U} \to \mathcal{X}_{pol}$, and Δ: $\mathcal{X}_{pol} \to \mathcal{Z}$, with N a nilpotent matrix, we have the following geometric characterization proved in the Appendix:

Theorem 6 $T_{pol}(\mathrm{s}) = -\Delta(\mathrm{s}N - \mathrm{I})^{-1}\Gamma$ *is* TFM left invertible *if and only if:*

$$\text{Ker } \Gamma = \{0\} \quad \textit{and} \quad \text{Im } \Gamma \cap \mathcal{V}^*_{[N,\Gamma,\Delta]} = \{0\} \tag{13}$$

Equivalently, $T_{pol}(\mathrm{s})$ *is* TFM left invertible *if and only if:*

$$\text{Ker } \Gamma = \{0\} \quad \textit{and} \quad \mathcal{R}^*_{[N,\Gamma,\Delta]} = \{0\} \tag{14}$$

2.1.3 Particularities of the TFM left invertibility

Let us note that Definition 4 of *TFM left invertibility* lies on a purely matricial concept and thus it can only take into account the internal algebraic system structure. But this kind of *left invertibility* does not take into account the way inputs are interacting with the internal system structure. Let us show this specificity with the following illustrative example:

Example 7 (Start) Let us consider the strictly proper system, $\Sigma_{sp}(A, B, C)$:

$$\dot{x}_{sp}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x_{sp}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ b_0 \end{bmatrix} z(t) \quad ; \quad y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x_{sp}(t) \tag{15}$$

with $b_0 \neq 0$. The external behaviour of this system is given by the ordinary differential equation: $\mathrm{p}^2 y(t) = (\mathrm{p}+b_0)z(t)$ and its *Transfer Function Matrix* is: $T_z^y(\mathrm{s}) = (\mathrm{s}+b_0)/\mathrm{s}^2$. The information involved in Theorem 5 is (recall (1)):

$$\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} = \{e_2\} \quad ; \quad \mathrm{Im}\ B = \{e_1 + b_0 e_2\} \quad ; \quad \mathrm{Ker}\ B = \{0\} \quad ; \quad \mathrm{Im}\ B \cap \mathcal{V}^*_{[A,B,C]} = \{0\} \tag{16}$$

Therefore, system (15) is *TFM left invertible*. Indeed, its *TFM left inverse* is: $T_y^{\hat{z}}(\mathrm{s}) = \mathrm{s}^2/(\mathrm{s}+b_0)$, which is the Laplace transform of the system: $(\mathrm{p}+b_0)\hat{z}(t) = \mathrm{p}^2 y(t)$.

Let us note that:

R4 $T_z^y(\mathrm{s}) \cdot T_y^{\hat{z}}(\mathrm{s}) = \mathrm{I}$, but
R5 $(\mathrm{p}+b_0)(\hat{z}(t) - z(t)) = 0$, which implies: $\hat{z}(t) = z(t) + k\mathrm{e}^{-b_0 t}$. Moreover
R6 If: $z(t) = z(0)\mathrm{e}^{-b_0 t}$, with $z(0)$ non zero, then: $\mathrm{p}^2 y(t) = 0$, and thus $\hat{z}(t) = 0$.

From this simple example we see that *TFM invertibility* is a weaker property than *invertibility* in the *time domain.*

Indeed, from Remark **R5**, for $\hat{z}(t)$ to be close to $z(t)$, we need that the initial condition k be in a neighbourhood of zero with a very small radius. More important, the parameter b_0 must be non negative. Finaly, from Remark **R6**, the input z cannot belong to Ker $(\mathrm{p}+b_0)$.

Let us now consider *Time Domain Left Invertibility.*

2.2 Time Domain Left Invertibility

According to Remark **R1**, let us adopt the following definition for *Left Invertibility* in the *Time Domain* (*TD*):

Definition 8 *The system (5),* $\Sigma(\mathbb{E}, \mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C})$*, is called* TD left invertible *if and only if:* (*i*) *there exists a system* $\Sigma^\ell : \mathcal{Y} \to \mathcal{U}$ *such that it is solvable*[6] *in* Im Σ *and* (*ii*) $\Sigma^\ell \circ \Sigma = \mathrm{I}$. Σ^ℓ *is called a* TD left inverse *of* $\Sigma(\mathbb{E}, \mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C})$.

Let us note that only the strictly proper part, $\Sigma_{sp}(A, B, C)$, of (5) can have a *TD left inverse* (*c.f.* Remark **R3**). Indeed, the polynomial part, $\Sigma_{pol}(N, \Gamma, \Delta)$, of (5) can never have a *TD left inverse* since[7]: Ker $F_1(\mathrm{p}) =$ Ker $[-\Delta(\mathrm{p}N - \mathrm{I})^{-1}\Gamma] \neq \{0\}$. So, we only need to study the *TD left invertibility* of $\Sigma_{sp}(A, B, C)$.

Let us also note that, the strictly proper part (9) of the generalized system (5) is always solvable. Indeed, there exists a linear transformation $\Psi(\cdot)$: $\mathcal{Z} \to \mathcal{X}$, such that: $\mathrm{I}\dot{\Psi}(z(t)) = A\Psi(z(t)) + Bz(t)$ and $y(t) = C\Psi(z(t))$, for all admissible inputs z. And thus, system (6) is a *TD left inverse* of (9), with the assignations: $(\mathbb{E}, \mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}) \leftarrow (\mathrm{I}, A, B, C)$,

[6] Solvable means that for each input in $\mathcal{Y}$, there exists *at least one* solution in $\mathcal{X}$.
[7] The operator $(\mathrm{p}N - \mathrm{I})^{-1}$ is well defined due to the nilpotency of N, indeed $(\mathrm{p}N - \mathrm{I})^{-1} = -\mathrm{I} - \sum_{i=1}^{n-1}(\mathrm{p}N)^i$. Moreover, Ker $F_1(\mathrm{p})$ defines the set of all input trajectories satisfying the differential equation $F_1(\mathrm{p})u(t) = 0$. Namely, Ker $F_1(\mathrm{p})$ is nothing else than the zero module, which can be $\{0\}$ only if $F_1(\mathrm{p})$ is a constant operator, that is to say, if (5) has no polynomial part.

$(x_i, \hat{y}, \hat{u}) \leftarrow (x_\ell, y, \hat{z})$, $(\mathbb{E}_i, \mathbb{A}_i, \mathbb{B}_i, \mathbb{C}_i) \leftarrow (\mathbb{E}_\ell, \mathbb{A}_\ell, \mathbb{B}_\ell, \mathbb{C}_\ell)$, and $(\mathcal{X}_i, \mathcal{X}, \mathcal{U}, \underline{X}_i) \leftarrow (\mathcal{X}_\ell, \mathcal{X}_{sp}, \mathcal{Z}, \underline{X}_\ell)$. This *TD left inverse system* is (in general) non minimal. However, it can be easily minimized by matricial algorithms (see for example Bonilla and Malabre (1997)). Furthermore, if the state description (9) is observable and if B is monic, then the proposed *TD left inverse* (6) is minimal under external equivalence (see Kuijper (1992)). Indeed, (i) the matrix $\begin{bmatrix} \mathbb{E}_\ell & \mathbb{B}_\ell \end{bmatrix}$ is epic, (ii) the matrix $\begin{bmatrix} \mathbb{E}_\ell \\ \mathbb{C}_\ell \end{bmatrix}$ is monic and (iii) $\begin{bmatrix} \mathrm{s}\mathbb{E}_\ell - \mathbb{A}_\ell \\ \mathbb{C}_\ell \end{bmatrix}$ has full column rank, for all complex number s, if and only if this holds for matrix $\begin{bmatrix} C \\ \mathrm{sI} - A \end{bmatrix}$, namely: if and only if $\mathcal{N} = \{0\}$.

2.2.1 Geometric characterization of TD Left Invertibility

Theorem 9 *The state description (9) is* TD left invertible*, namely:*

$$0 = C\left(e^{At}x_{sp}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bz(\tau)\mathrm{d}\tau\right) \;\Rightarrow\; z(\tau) = 0,\ \forall \tau \in (0, t) \tag{17}$$

if and only if

$$\operatorname{Ker} B = \{0\} \quad \textit{and} \quad \operatorname{Im} B \cap \left(\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} + A\mathcal{V}^*_{[A,B,C]}\right) = \{0\} \tag{18}$$

In order to prove Theorem 9, we need the following two Lemmas proved in the Appendix:

Lemma 10 *If* $\operatorname{Im} B \cap \left(\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} + A\mathcal{V}^*_{[A,B,C]}\right) = \{0\}$ *and* $\operatorname{Ker} B = \{0\}$ *then:* $y(t) = 0$ *implies* $z(t) = 0$*, for all* $t \geq 0$.

Lemma 11 *If* $\operatorname{Ker} B = \{0\}$ *then:* $B^{-1}\left(\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} + A\mathcal{V}^*_{[A,B,C]}\right) = \{0\}$ *if* $\mathcal{V}^*_{[\mathcal{X}_\ell;\mathbb{E}_\ell,\mathbb{A}_\ell]} = \{0\}$.

Proof of Theorem 9

Let us first prove the sufficiency: For this let us suppose that $\operatorname{Ker} B = \{0\}$ and $\operatorname{Im} B \cap \left(\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} + A\mathcal{V}^*_{[A,B,C]}\right) = \{0\}$. Then by Lemma 10, $y(t) = 0$ implies $z(t) = 0\ \forall\ t \geq 0$, and thus, from Lemma 1 the system (9) is *TD left invertible.*

Let us now prove the necessity: If $\operatorname{Ker} B \neq \{0\}$ there then exists a $z(t) \neq 0$ such that $Bz(t) = 0$ which implies that there exists a non zero z which is non observable at the output, and so, $\operatorname{Ker} \Psi(z(t)) \neq \{0\}$. Therefore B has to be monic.

In order to prove the necessity of the second geometric condition, let us assume that system (9) is *TD left invertible*, then system (6) is one *TD left inverse.*

Let us note that a necessary condition for (6) to be a *TD left inverse* of (9) is that $\mathcal{V}^*_{[\mathcal{X}_\ell;\mathbb{E}_\ell,\mathbb{A}_\ell]} = \{0\}$. Indeed, if this is not the case, problems occur with the initial conditions for the exponential modes (integrators present in $\Sigma^\ell(\mathbb{E}_\ell, \mathbb{A}_\ell, \mathbb{B}_\ell, \mathbb{C}_\ell)$) characterized by $\mathcal{V}^*_{[\mathcal{X}_\ell;\mathbb{E}_\ell,\mathbb{A}_\ell]}$ (*cf.* Armentano (1986)) and in general $\Sigma^\ell\left(\Sigma\left(\cdot\right)\right)$ will not be the identity operator.

Therefore by Lemma 11, we get the second geometric condition. □

Let us come back to Example 7

Example 12 (Continued) From (16) we get: $\operatorname{Im} B \cap \left(\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} + A\mathcal{V}^*_{[A,B,C]}\right) = \{e_1 + b_0e_2\} \cap (\{e_2\} + \{e_1\}) \neq \{0\}$, then, the geometric condition (18) is not satisfied. And thus, system (15) is not *TD left invertible.*

2.2.2 Structural characterization of TD Left Invertibility

Let us now give a structural characterization of *TD Left Invertibility* which is equivalent to those of Theorem 9. For this, we first extract a maximal observable part of the system, and we next recall some results about the zero structure.

2.2.2.1 Maximal observable quotient system Let $\Pi : \mathcal{X}_{sp} \to \mathcal{X}_{sp}/\mathcal{N}$ be the canonical projection, there then exist unique maps A_{ob}, B_{ob}, and C_{ob} such that:

$$\Pi A = A_{ob}\Pi \quad ; \quad \Pi B = B_{ob} \quad ; \quad C = C_{ob}\Pi \tag{19}$$

Theorem 13 *Given the strictly proper system $\Sigma_{sp}(A, B, C)$, and its strictly proper quotient system $\Sigma_{sp}(A_{ob}, B_{ob}, C_{ob})$, then $\left(\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} + A\mathcal{V}^*_{[A,B,C]}\right) \cap \mathrm{Im}\ B = \{0\}$ and $\mathrm{Ker}\ B = \{0\}$ if and only if $\mathcal{V}^*_{[A_{ob},B_{ob},C_{ob}]} = \{0\}$ and $\mathrm{Ker}\ B_{ob} = \{0\}$.*

To prove Theorem 13 we need three Lemmas proved in the Appendix:

Lemma 14 $\left(\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} + A\mathcal{V}^*_{[A,B,C]}\right) \cap \mathrm{Im}\ B = \{0\}$ *and* $\mathrm{Ker}\ B = \{0\}$ *if and only if* $\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} = \mathcal{N}$ *and* $B^{-1}\left(\mathcal{N} + A\mathrm{Ker}\ C\right) = \{0\}$.

Lemma 15 *It is always true that:* (1) $\mathcal{V}^*_{[A_{ob},B_{ob},C_{ob}]} = \Pi\mathcal{V}^*_{[A,B,C]}$ *and that* (2) $B^{-1}\left(\mathcal{N} + A\mathrm{Ker}\ C\right) = B_{ob}^{-1}A_{ob}\mathrm{Ker}\ C_{ob}$.

Lemma 16 $\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} = \mathcal{N}$ *and* $B^{-1}\left(\mathcal{N} + A\mathrm{Ker}\ C\right) = \{0\}$ *if and only if* $\mathcal{V}^*_{[A_{ob},B_{ob},C_{ob}]} = \{0\}$ *and* $\mathrm{Ker}\ B_{ob} = \{0\}$.

Proof of Theorem 13 From Lemma 14, $(\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} + A\mathcal{V}^*_{[A,B,C]}) \cap \mathrm{Im}\ B = \{0\}$ and $\mathrm{Ker}\ B = \{0\}$ hold if and only if $\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} = \mathcal{N}$ and $B^{-1}\left(\mathcal{N} + A\mathrm{Ker}\ C\right) = \{0\}$, and from Lemma 16 if and only if $\mathcal{V}^*_{[A_{ob},B_{ob},C_{ob}]} = \{0\}$ and $\mathrm{Ker}\ B_{ob} = \{0\}$, which ends the proof. □

2.2.2.2 Zero structure Since the early 70's, pioneered by the work of Rosenbrock (1970), there has been a great interest about the zero structure of linear multivariable systems (see for example MacFarlane and Karcanias (1976) and Francis and Wonham (1975)). Later, Aling and Schumacher (1984) proposed a complete geometric characterization of the different types of zeros.

We shall here be concerned with two particular subsets of the invariant zeros, namely the *transmission zeros* and the *input decoupling invariant zeros* (see Aling and Schumacher (1984) for complements).

From (Aling and Schumacher 1984), the total number of *transmission zeros* and *input decoupling invariant zeros* of a strictly proper system, $\Sigma_{sp}(A, B, C)$, here called (for shortness) *observable invariant zeros* , is:

$$\#\ \textit{observable invariant zeros}\ = \dim\left(\mathcal{V}^*_{[A,B,C]}/(\mathcal{R}^*_{[A,B,C]} + \mathcal{N})\right) \tag{20}$$

2.2.2.3 Structural characterization We are now able to state the structural characterization of the *TD left invertibility*:

Corollary 17 *The state description (9) is* TD left invertible *if and only if it is* TFM left invertible *and it has neither* transmission zeros*, nor* input decoupling invariant zeros.

PROOF.

Let us first suppose that (9) is *TD left invertible.*

Theorem 9 implies $\mathrm{Ker}\ B = \{0\}$ and $\mathrm{Im}\ B \cap \mathcal{V}^*_{[A,B,C]} = \{0\}$. This last geometric condition is equivalent to $\mathrm{Im}\ B \cap \mathcal{R}^*_{[A,B,C]} = \{0\}$, and from algorithm (3) we get $\mathcal{R}^*_{[A,B,C]} = \{0\}$. Since $\mathrm{Ker}\ B = \{0\}$ and $\mathcal{R}^*_{[A,B,C]} = \{0\}$, we conclude from Theorem 5 that (9) is *TFM left invertible* (recall the equivalence (11)).
On the other hand, from Theorem 13 we get: $\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} = \mathrm{Ker}\ \Pi = \mathcal{N}$, which implies: $\dim\left(\mathcal{V}^*_{[A,B,C]}/(\mathcal{R}^*_{[A,B,C]} + \mathcal{N})\right)$

$= \dim \left(\mathcal{V}^*_{[A,B,C]}/\mathcal{N}\right) = \{0\}$. And then, from (20), there are neither *transmission zeros* nor *input decoupling invariant zeros*, *i.e. no observable invariant zeros.*

For the reverse part, let us suppose that (9) is *TFM left invertible* and it does not have any *observable invariant zero.*

Then from (11) and (20), we have $\mathrm{Ker}\ B = \{0\}$, $\mathcal{R}^*_{[A,B,C]} = \{0\}$, and $\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} = \mathcal{N}$. Now, since $\mathcal{N}$ is A–invariant, we get: $\mathrm{Im}\ B \cap (\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} + A\mathcal{V}^*_{[A,B,C]}) = \mathrm{Im}\ B \cap \mathcal{V}^*_{[A,B,C]}$. Since $\mathcal{R}^*_{[A,B,C]} = \{0\}$ we have: $\mathrm{Im}\ B \cap \mathcal{V}^*_{[A,B,C]} = \{0\}$. Therefore, $\mathrm{Ker}\ B = \{0\}$ and $\mathrm{Im}\ B \cap (\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} + A\mathcal{V}^*_{[A,B,C]}) = \{0\}$; and thus, Theorem 9 implies that (9) is *TD left invertible.* $\square$

Let us note that *TD left invertibility* includes both aspects: *(i)* the internal algebraic structure (the *TFM left invertibility*) and *(ii)* the input interaction with the internal structure (the absence of *observable invariant zeros*).

In Hou and Patton (1998) is introduced a notion which is very close to *TD left invertibility*, namely, the one called *input observability* [8]. In that paper, the *input observability* is characterized in a matricial way by their Theorem 1, where is stated as a necessary and sufficient condition for *input observability* the following equality (in this paper $D = 0$):

$$\sigma\left(\begin{bmatrix} \lambda\mathrm{I} - A & -B \\ C & D \end{bmatrix}\right) = \sigma\left(\begin{bmatrix} \lambda\mathrm{I} - A \\ C \end{bmatrix}\right) \tag{21}$$

where $\sigma(\lambda M - N)$ denotes the set of the finite eigenvalues of the pencil $[\lambda M - N]$ (these are the finite elementary divisors recalled in the beginning of Section 2). But this condition is only necessary and not sufficient. Indeed, let us consider the example:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&1 \\ 0&0&0&0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0&0 \\ 1&0 \\ 0&1 \\ 0&0 \end{bmatrix} u \quad ; \quad y = \begin{bmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&0&1&0 \end{bmatrix} x \tag{22}$$

The first input, u_1, is associated to the non observable subspace $\{e_2\}$, and the second input, u_2, is linked to y_2 by the ordinary differential equation $\ddot{y}_2 = \dot{u}_2$. It is clear that this system can not be either *TD left invertible* or *input observable.*

Computing the subspaces involved in Theorem 9 we get: $\mathrm{Ker}\ B = \{0\}$ and $\mathrm{Im}\ B \cap (\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} + A\mathcal{V}^*_{[A,B,C]}) = \{e_2,\ e_3\} \neq \{0\}$. This confirms the non *TD left invertibility.*

Let us consider the pencils used in Theorem 1 of Hou and Patton (1998), namely $M_1(\lambda) = \left[\begin{smallmatrix} \lambda\mathrm{I} - A & -B \\ C & D \end{smallmatrix}\right]$ and $M_2(\lambda) = \left[\begin{smallmatrix} \lambda\mathrm{I} - A \\ C \end{smallmatrix}\right]$. The *normal-ranks* of these two pencils are: *normal-rank*$(M_1(\lambda)) = 5$ and *normal-rank*$(M_2(\lambda)) = 4$. Then:

$$\mathrm{rank}M_1(\lambda) : \begin{cases} \lambda = 0 \Rightarrow \mathrm{rank}M_1 = 4 < 5 \\ \lambda \neq 0 \Rightarrow \mathrm{rank}M_1 = 5 = 5 \end{cases} \quad ; \quad \mathrm{rank}M_2(\lambda) : \begin{cases} \lambda = 0 \Rightarrow \mathrm{rank}M_1 = 3 < 4 \\ \lambda \neq 0 \Rightarrow \mathrm{rank}M_1 = 4 = 4 \end{cases}$$

This implies that: $\sigma(M_1) = \{0\} = \sigma(M_2)$, and from Theorem 1 of (Hou and Patton 1998) system (22) would be *input observable.* This contradiction comes from the fact that condition (21) is only necessary and not sufficient. Hou and Patton (1998) have to add the condition of *TFM invertibility*, namely to add the condition $\mathcal{R}^*_{[A,B,C]} = \{0\}$ (see (11) and the Corollary 17 of this paper). Indeed, in this academic example, (22) has a rank equal to 1 and not 2, *i.e.* the number of inputs; and it is precisely the input belonging to $\mathcal{R}^*_{[A,B,C]} \neq 0$ which makes problems.

Let us finish this Section coming back to Example 12

[8] Different from the (weaker) notion of *input observability* used in Massoumnia *et al* (1989) which corresponds to: B monic and $\mathrm{Im}\ B \cap \mathcal{N} = \{0\}$.

Example 18 (End) In view of Corollary 17, we realize that system (15) is not *TD left invertible* due to the presence of the *observable zero* $(\mathrm{s}+b_0)$ of $T_z^y(\mathrm{s})$. Now, in the case of Hurwitz zeros, one possible solution to overcome the above problem can be, for example, to decompose (15) as the cascade of the following linear systems:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \dot{\xi}_z(t) = \xi_z(t) - \begin{bmatrix} 1 \\ b_0 \end{bmatrix} z(t) \quad ; \quad v(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \xi_z(t) \tag{23}$$

$$\dot{\xi}_p(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xi_p(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v(t) \quad ; \quad y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \xi_p(t) \tag{24}$$

The strictly proper part of the "pole system" (24) is *TD left invertible* and the polynomial part of the "zero system" (23) is *TFM left invertible*. Indeed, the external behaviours of (23) and (24) are, respectively, described by the ordinary differential equations: $v(t) = (\mathrm{p} + b_0)z(t)$ and $\mathrm{p}^2 y(t) = v(t)$. The *TD left inverse* of (24) is: $\hat{v}(t) = \mathrm{p}^2 y(t)$. The *TFM left inverse* of (24) is (provided $b_0 > 0$): $\hat{z}(\mathrm{s})/\hat{v}(\mathrm{s}) = 1/(\mathrm{s} + b_0)$. And thus, we obtain by inversion techniques: $\hat{v}(t) \equiv v(t)$ and $\hat{z}(t) = z(t) + \big(\hat{z}(0) - z(0)\big)\mathrm{e}^{-b_0 t}$. The set of non detectable inputs is: $\mathrm{Ker}\ (\mathrm{p} + b_0) = \{z \in \mathcal{Z} : z(t) = z(0)\mathrm{e}^{-b_0 t}\}$.

This splitting procedure is formalized in the next Section.

3 LEFT INVERSE SYSTEM

In this Section we show, when the system (9) is observable, how to synthesize a left inverse filter. For this:

(1) We first decompose system (9), $\Sigma_{sp}(z)$, as the cascade of a *TFM left invertible* zero system, $\Sigma_{zeros}(z)$, and a *TD left invertible* pole sytem, $\Sigma_{poles}(v)$.
(2) Thanks to the *TD left invertibility* of Σ_{poles}, we know from Lemma 2 that system (6) satisfies $\Sigma^\ell(\Sigma_{poles}(v)) = v$, whatever be the initial conditions of Σ_{poles} and the nature of its input v.
(3) Then, in view of the *TFM left invertibility* of Σ_{zeros}, we can use a filter which *Transfer Function Matrix* coincides with its *TFM left inverse*, $\big(T_z^v(\mathrm{s})\big)^{-1}$; of course this can be accepted only if all the zeros are Hurwitz, namely if we are dealing with a minimum phase system. In the general (possibly non minimal phase) case, we will restrict ourselves to the use of the *TFM left adjoint* filter, $\big(T_z^v(\mathrm{s})\big)^a = \det T_z^v(\mathrm{s})\big(T_z^v(\mathrm{s})\big)^{-1}$, in place of the *TFM left inverse*.

3.1 Separation of Zeros

Let (9) be an observable system [9], where B and C are, respectively, monic and epic. From the dual of the Brunovsky's Theorem (Brunovsky 1970) there exist an output injection matrix K and two changes of bases T and S, $\widehat{A}_K = T^{-1}(A - KC)T$, $\widehat{C} = SCT$, and $\widehat{B} = T^{-1}B$, such that:

$$\widehat{A}_K = DBM\{\widehat{A}_{K,1}, \cdots, \widehat{A}_{K,\eta}\} \quad ; \quad \widehat{C} = DBM\{\widehat{C}_1, \cdots, \widehat{C}_\eta\} \quad ; \quad \widehat{B} = \begin{bmatrix} \widehat{B}_1 \\ \cdots \\ \widehat{B}_\eta \end{bmatrix} \tag{25}$$

$$\widehat{A}_{K,i} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix}_{\kappa_i \times \kappa_i} \quad ; \quad \widehat{C}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdots & \cdot & 0 \end{bmatrix}_{1 \times \kappa_i} \quad ; \quad \widehat{B}_i = \begin{bmatrix} b_{1,1}^i & \cdots & b_{1,\eta}^i \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ b_{\kappa_i,1}^i & \cdots & b_{\kappa_i,\eta}^i \end{bmatrix} \tag{26}$$

where, for $i \in \{1, \cdots, \eta\}$ the κ_i are the *observability indices*, satisfying $\kappa_1 \geq \kappa_2 \geq \cdots \geq \kappa_\eta \geq 0$ and $\sum_{i=1}^{\eta} \kappa_i = n$.

---

[9] If not, we just have to consider the quotient system as in Section 2.2.2.1.

Let us define the following matrices:

$$N_z = T\widehat{A}_K^T T^{-1} \quad ; \quad \Upsilon = T(\mathrm{I} - \widehat{A}_K \widehat{A}_K^T)T^{-1} \quad ; \quad \widehat{\Upsilon} = DBM\{\widehat{\Upsilon}_1, \cdots, \widehat{\Upsilon}_\eta\} \quad ; \quad \widehat{\Upsilon}_i^T = \begin{bmatrix} 0 & \cdot & \cdots & \cdot & 0 & 1 \end{bmatrix}_{1\times\kappa_i} \tag{27}$$

Let us note that:

(1) The matrix N_z is nilpotent with nilpotency index κ_1,
(2) $\mathrm{Im}\ N_z = T\mathrm{Im}\ \widehat{A}_K^T = T\mathrm{Ker}\ \widehat{C} = \mathrm{Ker}\ C$,
(3) $\mathrm{I} - AN_z = \mathrm{I} - (A - KC)N_z = T(\mathrm{I} - T^{-1}(A - KC)T\widehat{A}_K^T)T^{-1} = \Upsilon$.
(4) $\mathrm{I} - \widehat{A}_K \widehat{A}_K^T = \widehat{\Upsilon}\widehat{\Upsilon}^T$ and $\Upsilon = T\widehat{\Upsilon}\widehat{\Upsilon}^T T^{-1}$.

The following result (proved in the Appendix) gives a way to split the zero and pole subsystems by using the previously recalled observable canonical form.

Lemma 19 *Let the state space description (9) be* TFM left invertible*, with B and C monic and epic matrices, respectively. Then (9) is externally equivalent*[10] *to the cascade of the following polynomial zero system and strictly proper pole system:*

$$\Sigma_{zeros}(N_z, B, \Upsilon_z): \quad N_z\dot{\xi}_z(t) = \xi_z(t) - Bz(t) \quad ; \quad v(t) = \Upsilon_z\xi_z(t) \tag{28}$$
$$\Sigma_{poles}(A, \Upsilon_p, C): \quad \dot{\xi}_p(t) = A\xi_p(t) + \Upsilon_p v(t) \quad ; \quad y(t) = C\xi_p(t) \tag{29}$$

where: $\Upsilon_z = \widehat{\Upsilon}^T T^{-1}$ and $\Upsilon_p = T\widehat{\Upsilon}$. Moreover, the poles system, $\Sigma_{poles}(A, \Upsilon_p, C)$, is TD left invertible *and the zeros system, $\Sigma_{zeros}(N_z, B, \Upsilon_z)$, is* TFM left invertible.

The following (observable but non controllable) example illustrates this pole zero separation.

Example 20 (Separation of zeros) Let us consider the strictly proper system, $\Sigma_{sp}(A, B, C)$:

$$\dot{x}_{sp}(t) = \underbrace{\left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -3 & -1 & -1 \\ \hline 2 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{A} x_{sp}(t) + \underbrace{\left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right]}_{B} z(t) \quad ; \quad y(t) = \underbrace{\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{C} x_{sp}(t) \tag{30}$$

The external behaviour and the Transfer Function Matrix, $T_z^y(\mathrm{s}) = C\big(\mathrm{sI} - A\big)^{-1}B$, are:

$$\begin{bmatrix} (\mathrm{p}+1)^2 & (\mathrm{p}+1)^2 \\ 2(\mathrm{p}+2)(\mathrm{p}-1) & -2(\mathrm{p}+3) \end{bmatrix} y(t) = \begin{bmatrix} (\mathrm{p}-1) & (\mathrm{p}-1) \\ 2\mathrm{p} & -2 \end{bmatrix} z(t) \tag{31}$$

$$T_z^y(\mathrm{s}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\mathrm{s}+1 & -4/(\mathrm{s}+1)^4 \\ 0 & (\mathrm{s}-1)/(\mathrm{s}+1)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{32}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ (\mathrm{s}-1)(\mathrm{s}+1)^2 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/(\mathrm{s}+1)^4 & 0 \\ 0 & (\mathrm{s}-1)(\mathrm{s}+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}(\mathrm{s}+1)^3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{33}$$

In order to obtain its observable Brunovsky canonical form let us define: $\bar{x}_{sp}(t) = T_{ob}^{-1}x_{sp}(t)$, $\bar{z}(t) = U_{ob}^{-1}z(t)$ and $\bar{y}(t) = S_{ob}y(t)$, where: $T_{ob} = \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $U_{ob} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ and $S_{ob} = \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$. Indeed, with these changes of

[10] *External equivalence* (see Willems (1983)) means preservation of the external behaviour, *i.e.* the same overall set of possible trajectories for all the input and output signals.

bases, system (30) takes the following form:

$$\dot{\bar{x}}_{sp}(t) = \widehat{A}\bar{x}_{sp}(t) + \widehat{B}\bar{z}(t) \quad ; \quad \bar{y}(t) = \widehat{C}\bar{x}_{sp}(t) \tag{34}$$

$$\widehat{A} = T_{ob}^{-1}AT_{ob} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 1 \\ -6 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \widehat{B} = T_{ob}^{-1}BU_{ob} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \widehat{C} = S_{ob}CT_{ob} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{35}$$

Defining the output injection matrix $\widehat{K} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}^T$, we get ($\widehat{A}_K = \widehat{A} - \widehat{K}\widehat{C}$ and $\Upsilon = \mathrm{I} - \widehat{A}_K\widehat{A}_K^T$):

$$\widehat{A}_K = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \Upsilon = \widehat{\Upsilon}\widehat{\Upsilon}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad N_z = \widehat{A}_K^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \widehat{\Upsilon} = \widehat{\Upsilon}_p = \widehat{\Upsilon}_z^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{36}$$

And thus, we obtain the following pole zero separation:

$$\Sigma_{zeros} : \quad N_z\dot{\xi}_z(t) = \xi_z(t) - \widehat{B}\bar{z}(t) \quad ; \quad v(t) = \widehat{\Upsilon}_z\xi_z(t) \tag{37}$$

$$\Sigma_{poles} : \quad \dot{\xi}_p(t) = \widehat{A}\xi_p(t) + \widehat{\Upsilon}_p v(t) \quad ; \quad \bar{y}(t) = \widehat{C}\xi_p(t) \tag{38}$$

The external behaviours and Transfer Function Matrices are:

$$v(t) = \begin{bmatrix} -(\mathrm{p}-1) & 0 \\ 0 & (\mathrm{p}+1) \end{bmatrix}\bar{z}(t) \tag{39}$$

$$T_{\bar{z}}^{v}(\mathrm{s}) = -\widehat{\Upsilon}_c\big(N_c\mathrm{s} - \mathrm{I}\big)^{-1}\widehat{B} = \begin{bmatrix} -(\mathrm{s}-1) & 0 \\ 0 & (\mathrm{s}+1) \end{bmatrix} \tag{40}$$

$$\begin{bmatrix} (\mathrm{p}+1)^2 & 0 \\ 2(\mathrm{p}+3) & (\mathrm{p}+1)^2 \end{bmatrix}\bar{y}(t) = v(t) \tag{41}$$

$$T_{v}^{\bar{y}}(\mathrm{s}) = \widehat{C}(\mathrm{sI} - \widehat{A})^{-1}\widehat{\Upsilon}_p = \begin{bmatrix} 1/(\mathrm{s}+1)^2 & 0 \\ -2(\mathrm{s}+3)/(\mathrm{s}+1)^4 & 1/(\mathrm{s}+1)^2 \end{bmatrix} \tag{42}$$

$$= \begin{bmatrix} \big(4 + (\mathrm{s}-1)(\mathrm{s}+3)\big) & -\frac{1}{8}(\mathrm{s}-1) \\ -2(\mathrm{s}+3) & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/(\mathrm{s}+1)^4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{8}(\mathrm{s}-1)(\mathrm{s}+1)^2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{43}$$

Let us observe the following:

(1) Premultiplying (39) and (41) by $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ we get (31)
(2) From (40), (42) and (31), we get: $S_{ob}^{-1}T_{v}^{\bar{y}}(\mathrm{s})T_{\bar{z}}^{v}(\mathrm{s})U_{ob}^{-1} = T_{z}^{y}(\mathrm{s})$.
(3) From (40), (43) and (33), we realize that the information obtained from the Smith–McMillan form of $T_{z}^{y}(\mathrm{s})$ is indeed the union of the set of the zeros of the Smith–McMillan form of $T_{\bar{z}}^{v}(\mathrm{s})$ and the set of the poles of the Smith–McMillan form of $T_{v}^{\bar{y}}(\mathrm{s})$.

3.2 Input decoupling

We have shown in Lemma 19 that any *TFM left invertible* state space description, $\Sigma_{sp}(A, B, C)$, with its input and output maps, B and C, being, respectively, monic and epic, can be decomposed as the cascade of a *TFM left* *invertible* polynomial system, Σ_{zeros}, and a *TD left invertible* strictly proper system, Σ_{poles}. And thus, the strictly proper system Σ_{poles} can be *TD left inverted*, using, for example, the *TD left inverse* system (6).

With respect to the polynomial system Σ_{zeros}, we can diagonalize it (this is input decoupling) by means of a non-proper filter, Σ^a, whose Transfer Function Matrix is the adjoint matrix of the Transfer Function Matrix of Σ_{zeros}, namely $-\text{Adj}\,\big(\Upsilon_z(N_z\text{s}-\text{I})^{-1}B\big)$.

Let us sketch this procedure with the Example 20:

Example 21 (Input decoupling) We first synthesize for (38) the *TD left inverse* proposed in Lemma 2 , namely [11] :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ \hline 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0 \end{array}\right]\dot{\hat{x}}_\ell(t)=\hat{x}_\ell(t)+\left[\begin{array}{cc} -1&0\\ -2&0\\ 0&0\\ \hline 0&-1\\ -2&-2\\ 0&-1 \end{array}\right]\bar{y}(t) \quad ; \quad \hat{v}(t)=\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&1&0&0&0\\ 6&0&0&0&0&1 \end{array}\right]\hat{x}_\ell(t) \tag{44}$$

which external behaviour and Transfer Function Matrix, $T_{\bar{y}}^{\hat{v}}(\text{s})$, are:

$$\hat{v}(t)=\begin{bmatrix} (\text{p}+1)^2 & 0\\ 2(\text{p}+3) & (\text{p}+1)^2 \end{bmatrix}\bar{y}(t) \quad ; \quad T_{\bar{y}}^{\hat{v}}(\text{s})=\begin{bmatrix} (\text{s}+1)^2 & 0\\ 2(\text{s}+3) & (\text{s}+1)^2 \end{bmatrix} \tag{45}$$

Obtaining in this way $\hat{v}(t)\equiv v(t)$ (see (45.a) and (41)).

Let us rewrite the polynomial system of zeros (39) as follows (recall that $z(t)=U_{ob}\bar{z}(t)$):

$$v(t)=\begin{bmatrix} -(\text{p}-1) & 0\\ 0 & (\text{p}+1) \end{bmatrix}\bar{z}(t)=\underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(\text{p}-1) & -\frac{1}{2}(\text{p}-1)\\ \frac{1}{2}(\text{p}+1) & -\frac{1}{2}(\text{p}+1) \end{bmatrix}}_{M(\text{p})}z(t)$$

Since $\text{Adj}\ M(\text{p})=\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(\text{p}+1) & \frac{1}{2}(\text{p}-1)\\ -\frac{1}{2}(\text{p}+1) & -\frac{1}{2}(\text{p}-1) \end{bmatrix}$, it follows that the adjoint system, Σ^a, of the external behaviour from $z(t)$ to $v(t)$ is:

$$\hat{z}(t)=\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(\text{p}+1) & \frac{1}{2}(\text{p}-1)\\ -\frac{1}{2}(\text{p}+1) & -\frac{1}{2}(\text{p}-1) \end{bmatrix}\hat{v}(t). \tag{46}$$

Let us note that (45) and (46) imply (recall that $\bar{y}(t)=S_{ob}y(t)$):

$$\begin{aligned}\hat{z}(t)&=\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(\text{p}+1) & \frac{1}{2}(\text{p}-1)\\ -\frac{1}{2}(\text{p}+1) & -\frac{1}{2}(\text{p}-1) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (\text{p}+1)^2 & 0\\ 2(\text{p}+3) & (\text{p}+1)^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1/2 & -1/2\\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}y(t)=\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\text{p}^3+\text{p}^2-\text{p}+3) & 2\\ (\text{p}^2+2\text{p}-1) & \frac{1}{2}(\text{p}^3+3\text{p}^2+3\text{p}-3) \end{bmatrix}y(t)\\ &=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4}(\text{p}-1)\\ \frac{1}{2}\text{p} & -\frac{1}{4}(\text{p}-1) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (\text{p}+1)^2 & (\text{p}+1)^2\\ 2(\text{p}+2)(\text{p}-1) & -2(\text{p}+3) \end{bmatrix}y(t)\end{aligned} \tag{47}$$

Then, from (31) and (47) we get: $\hat{z}=\frac{1}{2}(\text{p}-1)(\text{p}+1)z(t)$.

---

[11] Just substitute $\widehat{C}$, $\widehat{A}$ and $\widehat{\Upsilon}$ in (6). In order to obtain the standard polynomial form, we have also pre-multiplied (6.a) by T_ℓ and defined $\hat{x}_\ell(t)=T_r^{-1}x_\ell(t)$, where: $T_\ell=\begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0\\ 2&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 2&2&0&0&1&0\\ 0&1&0&0&0&1 \end{bmatrix}$ and $T_r=\begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 1&0&1&0&0&0\\ 6&0&0&0&0&1 \end{bmatrix}$.

4 RIGHT INVERTIBILITY

In this Section we are interested in finding which are the links between the concepts of *left* and *right invertibilities*. For this, let us first remark some points connected with *right invertibility*:

R7 The basic definition for *right invertibility* is: *given a function* $f : Dom \to CoDom$, $r \mapsto f(r)$, *find (if possible) a function* $g : Dom \to CoDom$, $q \mapsto g(q)$, *such that the composite function* $f \circ g : CoDom \to CoDom$, $q \mapsto f(g(q))$, *is the* identity function I, *namely:* $f(g(q)) = q$ *for all* $q \in CoDom$.
R8 For a linear function f, the existence of a *right inverse function*, g, is equivalent to the fact that f has to be epic, namely: $\forall q \in CoDom\ \exists\ r \in Dom$ such that $f(r) = q$.
R9 The linear function g is a *right inverse function* of the linear function f, if and only if, f is a *left inverse function* of g; indeed in both cases: $f(g(q)) = q$ for all $q \in CoDom$.
R10 From the fundamental Theorem of *Calculus* the linear function $f : r(t) \mapsto \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(t)$ is not *right invertible* because of the initial condition $f(0)$. Indeed: $\int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} f(\tau)\mathrm{d}\tau = f(t) - f(0)$.

Let us point out that for the *right invertible* case, the Kronecker normal form of the pencil $[\mathrm{s}\mathbb{E} - \mathbb{A}]$, related with the generalized system (5), cannot have row minimal indices (*c.f.* Remark **R8**). Although for the *right invertible* case, there is no problem with respect to the column minimal indices, for reasons of symmetry (and for simplification) we are restricting our considerations to regular pencils as in Section 2.

4.1 Transfer Function Matrix Right Invertibility

When dealing with a *Transfer Function Matrix*, the following definition for *right invertibility* is standard (*c.f.* with Remark **R8**):

Definition 22 *Let us consider a* transfer function matrix, $T(\mathrm{s}) = \mathbb{C}\big(\mathrm{s}\mathbb{E} - \mathbb{A}\big)^{-1}\mathbb{B}$, *with* ρ *rows and* m *columns.* $T(\mathrm{s})$ *is* TFM right invertible *if and only if its* ρ *rows are independent as rational functions of* s, *namely if and only if* rank $T(\mathrm{s}) = \rho$, viz, *if and only if* Ker $T^T(\mathrm{s}) = \{0\}$.

From this definition, we have the following natural dualities for the strictly proper part (9) and for the polynomial part (12) of the regular generalized system (5):

$$(A, B, C, \mathrm{Im}\ B, \mathrm{Ker}\ C) \leftrightarrow (A^T, C^T, B^T, \mathrm{Im}\ C^T, \mathrm{Ker}\ B^T) \tag{48}$$
$$(N, \Gamma, \Delta, \mathrm{Im}\ \Gamma, \mathrm{Ker}\ \Delta) \leftrightarrow (N^T, \Delta^T, \Gamma^T, \mathrm{Im}\ \Delta^T, \mathrm{Ker}\ \Gamma^T) \tag{49}$$

Then, from Theorems 5 and 6 we have the following two Results:

Corollary 23 *(Basile and Marro 1992)* $T_{sp}(\mathrm{s}) = C(\mathrm{sI} - A)^{-1}B$ *is* TFM right invertible *if and only if:*

$$\mathrm{Im}\ C = \mathcal{Y} \quad \textit{and} \quad \mathrm{Ker}\ C + \mathcal{S}^*_{[C,A,B]} = \mathcal{X}_{sp} \tag{50}$$

Corollary 24 $T_{pol}(\mathrm{s}) = -\Delta(\mathrm{s}N - \mathrm{I})^{-1}\Gamma$ *is* TFM right invertible *if and only if:*

$$\mathrm{Im}\ \Delta = \mathcal{Z} \quad \textit{and} \quad \mathrm{Ker}\ \Delta + \mathcal{S}^*_{[\Delta,N,\Gamma]} = \mathcal{X}_{pol} \tag{51}$$

4.2 Time Domain Right Invertibility

In the *time domain* we adopt the following definition:

Definition 25 *The system (5),* $\Sigma(\mathbb{E}, \mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C})$, *is called* TD right invertible *if and only if:* (i) *there exists a system* $\Sigma^r : \mathcal{Y} \to \mathcal{U}$ *such that it is solvable in* Im Σ *and* (ii) $\Sigma \circ \Sigma^r = I$. Σ^r *is called a* TD righ inverse *of* $\Sigma(\mathbb{E}, \mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C})$.

Following the duality (48), one could think that the geometric condition for *TD right inversion* is the dual condition of (18), namely:

$$\mathrm{Im}\ C = \mathcal{Y} \quad \text{and} \quad \mathrm{Ker}\ C + \left(\mathcal{S}^*_{[C,A,B]} \cap A^{-1}\mathcal{S}^*_{[C,A,B]}\right) = \mathcal{X}_{sp} \tag{52}$$

Indeed, for the case of the linear system (9), one could think that the *TD right invertibility* of system $\Sigma_{sp}(A,B,C)$ is equivalent to the *TD left invertibility* of its dual system $\Sigma^{'}_{sp}(A',C',B')$. But, as we show hereafter, that is *completely wrong* since the "linking" between the two invertibility notions has to be tackled from a functional point of view and not from an algebraic (vector space) point of view.

4.3 Time Domain "Duality"

In view of Remark **R9** a given linear system $\Sigma : \mathcal{U} \to \mathcal{Y}$ is *TD right invertible* if and only if any of its *TD right inverses* is *TD left invertible*, and in particular its *TD right inverse* $\Sigma^r\colon \mathcal{Y} \to \mathcal{U}$:

$$\dot{\xi}(t) = A_r\xi(t) + B_r y^*(t) \quad ; \quad u(t) = C_r\xi(t) \tag{53}$$

is *TD left invertible* [12].

From Theorem 9 the *TD right inverse system*, (53), is *TD left invertible* if and only if:

$$\mathrm{Ker}\ B_r = \{0\} \quad \text{and} \quad \mathrm{Im}\ B_r \cap \left(\mathcal{V}^*_{[A_r,B_r,C_r]} + A_r\mathcal{V}^*_{[A_r,B_r,C_r]}\right) = \{0\} \tag{54}$$

If (53) is *TD left invertible* then one *TD left inverse system* is the system $\Sigma : \mathcal{U} \to \mathcal{Y}$ (*cf.* Lemma 2):

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathrm{I} & 0 \end{bmatrix} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} C_r & 0 \\ A_r & B_r \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -\mathrm{I} \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad ; \quad y(t) = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{I} \end{bmatrix} x(t) \tag{55}$$

If (55) is *TD right invertible* then one *TD left inverse system* is (*cf.* Lemma 2):

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{I} & 0 & 0 \end{array}\right] \dot{\xi}_e(t) = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & \mathrm{I} & 0 \\ \hline C_r & 0 & -\mathrm{I} \\ A_r & B_r & 0 \end{array}\right] \xi_e(t) + \begin{bmatrix} -\mathrm{I} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} y^*(t) \quad ; \quad u(t) = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & \mathrm{I} \end{array}\right] \xi_e(t) \tag{56}$$

We can easily check that systems (56) and (53) are externaly equivalent (see Bonilla and Malabre (1997)); indeed, both systems satisfy the same integral equation: $u(t) = C_r \mathrm{e}^{A_r(t)} By^*(0) + C_r \int_0^t \mathrm{e}^{A_r(t-\tau)} By^*(\tau)\mathrm{d}\tau$.

We shall need the following result:

Lemma 26 *(Bonilla and Malabre 2003) The system:*

$$\begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} G \\ D \end{bmatrix} x(t) + Bu(t) \quad ; \quad y(t) = Cx(t)$$

is internaly proper [13] *if and only if*

$$\mathrm{Ker}\ D \oplus \mathrm{Ker}\ F = \mathcal{X} \tag{57}$$

[12] Recall that only strictly proper systems can be *TD left invertible.*

[13] The system $\mathbb{E}\dot{x} = \mathbb{A}x + v$ is internaly proper if and only if the pencil $[\lambda\mathbb{E} - \mathbb{A}]$ is regular and it has no infinite zero of order grater than one (no derivators) (see Bernhard (1982) and Armentano (1986)).

Remark 27 *From (55) we note that:*

(1) Since Ker $[\mathrm{I}\ \ 0] \cap$ Ker $[C_r\ \ 0] \neq \{0\}$*, then Lemma 26 implies that system (55) is not internaly proper. That is to say, for the system to be* right inverted *it has to possess an internal non proper part (pure derivative actions).*
(2) Let us now consider the exponential modes of (55). For this, let λ be a finite eigenvalue and $v = [v_1^T\ \ v_2^T]^T \neq 0$ an associated eigenvector of the pencil $[\lambda\mathbb{E} - \mathbb{A}]$ (see Wong (1974)), namely:

$$\begin{bmatrix} -C_r & 0 \\ \lambda\mathrm{I} - A_r & -B_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0 \tag{58}$$

This implies:

$$0 = C_r(\lambda\mathrm{I} - A_r)^{-1} B_r v_2$$

From the TD left invertibility *of (53) we directly get (it is a monic system, recall Remark **R2** and (17)):*

$$v_2 \equiv 0$$

And thus (58) is equivalent to:

$$(\lambda\mathrm{I} - A_r)v_1 = 0 \quad \& \quad v_1 \in \mathrm{Ker}\ C_r \tag{59}$$

Therefore all the exponential modes of (55) are unobservable.

We have proved in this way the following necessary condition:

Lemma 28 *The implicit linear system (5) is* TD right invertible *only if all its exponential modes are unobservable.*

We are now in position to establish the second principal result:

Corollary 29 *The implicit linear system (5) is* TD right invertible *if and only if it is* TFM right invertible *and all its exponential modes are unobservable.*

PROOF.

Necessity:

In view of Lemma 28 we only need to prove that *TD right invertibility* implies *TFM right invertibility.* For this, we show that non *TFM right invertibility* implies non *TD right invertibility.*

Indeed, if (5) is not *TFM right invertible* we can then split the map $\mathbb{C}$ as: $\mathbb{C} = \begin{bmatrix} \mathbb{C}_1 \\ \mathbb{C}_2 \end{bmatrix}$, where $\mathbb{C}_1 : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}_1$ and $\mathbb{C}_2 : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}_2$, with $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_1 \oplus \mathcal{Y}_2$ and $\dim \mathcal{Y}_2 > 0$, such that: $\mathbb{C}_2(s\mathbb{E} - \mathbb{A})^{-1}\mathbb{B} = 0$. This last equation means that for all $y_2(t)(\neq 0) \in \mathcal{Y}_2$ there is no $u(t) \in \mathcal{U}$ satisfying the algebro-differential equation: $\mathbb{E}\dot{x}(t) = \mathbb{A}x(t) + \mathbb{B}u(t)$, $y_2(t) = \mathbb{C}x(t)$. That is to say, system (5) is not *TD right invertible.*

Sufficiency:

Let us assume that system (5) is *TFM right invertible* and all its exponential modes are unobservable. To prove the *TD right invertibility* of (5) it is enough to show that (*c.f.* Lemma 15):

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathbb{E} & 0 \end{bmatrix} \dot{x}_r(t) = \begin{bmatrix} \mathbb{C} & 0 \\ \mathbb{A} & \mathbb{B} \end{bmatrix} x_r(t) + \begin{bmatrix} -\mathrm{I} \\ 0 \end{bmatrix} \bar{y}(t) \quad ; \quad u(t) = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{I} \end{bmatrix} x_r(t) \tag{60}$$

is actually a *TD right inverse* of (2). In other words, we have to show that (60) is a solvable system and that it is itself *TD left invertible.*

Let us first show that system (60) is solvable. For this, we need to show that its associated pencil $\begin{bmatrix} -\mathbb{C} & 0 \\ (\mathrm{s}\mathbb{E}-\mathbb{A}) & -\mathbb{B} \end{bmatrix}$ has full row rank, namely that the pencil $\begin{bmatrix} -\mathbb{C}^T & (\mathrm{s}\mathbb{E}^T-\mathbb{A}^T) \\ 0 & -\mathbb{B}^T \end{bmatrix}$ has full column rank. Indeed, let a vector $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ such that: $\begin{bmatrix} -\mathbb{C}^T & (\mathrm{s}\mathbb{E}^T-\mathbb{A}^T) \\ 0 & -\mathbb{B}^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 0$, that is to say: $(\mathrm{s}\mathbb{E}^T-\mathbb{A}^T)^{-1}\mathbb{C}^T a = b$ and $\mathbb{B}^T b = 0$. Now, the full column rank of matrix $T^T(\mathrm{s}) = \mathbb{B}^T(\mathrm{s}\mathbb{E}^T-\mathbb{A}^T)^{-1}\mathbb{C}^T$ implies that $a = b = 0$. Then the associated pencil of (60) is a full row rank matrix, and thus system (60) is solvable.

Let us now show that system (60) is *TD left invertible*. For this, we need to show that $u(t) = 0$ implies that $\bar{y}(t) = 0$. Indeed, if $u(t) = 0$ we get: $\mathbb{C}x_{r,1}(t) = \bar{y}(t)$ and $(\mathbb{E}\mathrm{p}-\mathbb{A})x_{r,1}(t) = 0$. Carrying $(\mathbb{E},\mathbb{A},\mathbb{C})$ on its Weierstrass form (see (7)), we get: $(\mathrm{pI}-J)x_{r,(1,1)}(t) = 0$, $(\mathrm{p}\bar{N}-\mathrm{I})x_{r,(1,2)}(t) = 0$ and $\bar{C}_1 x_{r,(1,1)}(t) + \bar{C}_2 x_{r,(1,2)}(t) = \bar{y}(t)$, namely ($\gamma$ is the nilpotency index of $\bar{N}$): $x_{r,(1,1)}(t) = \mathrm{e}^{-Jt}x_{r,(1,1)}(0)$, $x_{r,(1,2)}(t) = -(\mathrm{I}+\sum_{i=1}^{\gamma-1}\mathrm{p}\bar{N}-\mathrm{I})0 = 0$. And thus $\bar{y}(t) = \bar{C}_1\mathrm{e}^{-Jt}x_{r,(1,1)}(0) = 0$, since all the exponential modes are unobservable. □

Let us finish this Section with the following illustrative example:

Example 30 Let us consider the system:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad ; \quad y(t) = \begin{bmatrix} 1 & b_0 \end{bmatrix} x(t) \tag{61}$$

with $b_0 \neq 0$. Since system (61) is the dual of (15), in the sense of (48), its external behaviour and transfer function are the same, namely:

$$\mathrm{p}^2 y(t) = (\mathrm{p}+b_0)u(t) \quad ; \quad T_z^u(\mathrm{s}) = (\mathrm{s}+b_0)/\mathrm{s}^2 \tag{62}$$

Furthermore, from the vector space duality we get quickly: Ker $C = \{b_0e_1 - e_2\}$, and Im $B = \{e_1\} = \mathcal{S}^1$. Then: $\mathcal{S}^2 = \{e_1\} + A\{0\} = \{e_1\}$; namely: $\mathcal{S}_* = \{e_1\}$ and Ker $C = \{b_0e_1 - e_2\}$. And thus: Im $C = \mathcal{Y}$ and Ker $C + \mathcal{S}_* = \mathcal{X}$. Therefore, system (61) is *TFM right invertible*. Indeed, from (62) its *TFM right inverse*, $T_{y^*}^u(\mathrm{s})$, and its external behaviour are:

$$T_{y^*}^u(\mathrm{s}) = \mathrm{s}^2/(\mathrm{s}+b_0) \quad ; \quad (\mathrm{p}+b_0)u(t) = \mathrm{p}^2 y^*(t) \tag{63}$$

Let us compute (52) for this example: Ker $C + \left(\mathcal{S}_* \cap A^{-1}\mathcal{S}_*\right) = \{b_0e_1 - e_2\} + (e_1 \cap A^{-1}e_1) = \{b_0e_1 - e_2\} \neq \mathcal{X}$. Because of the zero $(\mathrm{s}+\gamma_0)$, (52) is not satisfied. Let us express the external behaviour of (62) as follows:

$$\mathrm{p}^2 y(t) = w(t) \quad ; \quad w(t) = (\mathrm{p}+b_0)u(t) \tag{64}$$

If we consider the following system (*cf.* (63)):

$$w^*(t) = \mathrm{p}^2 y^*(t) \quad ; \quad (\mathrm{p}+b_0)u(t) = w^*(t) \tag{65}$$

We get:

$$w(t) \equiv w^*(t) \quad \text{and} \quad \mathrm{p}^2(y(t)-y^*(t)) = 0 \tag{66}$$

And thus:

$$y(t) = y^*(t) + k_1 + k_0 t \tag{67}$$

The system is not *TD right invertible* due to the presence of the two finite poles (and thus of the initial conditions). The zero does not create difficulties.

Let us finally point out that:

(1) If we first exponentially stabilize the system, we can control the system in such a way that the difference $y(t) - y^*(t)$ decays exponentially. Indeed, with the Proportional feedback $u(t) = [-(a+b) \quad -ab]x(t) + v(t)$, with $a > 0$, $b > 0$ and $a \neq b$, we get the external behaviours: $(\mathrm{p}+a)(\mathrm{p}+b)y(t) = w(t)$, $w(t) = (\mathrm{p}+b_0)v(t)$, $w^*(t) = (\mathrm{p}+a)(\mathrm{p}+b)y^*(t)$, and $(\mathrm{p}+b_0)v(t) = w^*(t)$. Thus: $w(t) \equiv w^*(t)$ and $(\mathrm{p}+a)(\mathrm{p}+b)(y(t) - y^*(t)) = 0$, namely: $y(t) = y^*(t) + k_1\mathrm{e}^{-at} + k_0\mathrm{e}^{-bt}$.

(2) If we first move the finite poles to infinity with a Proportional and Derivative feedback we can obtain a *TD right inverse*. Indeed with the Propotional and Derivative feedback: $u(t) = [1 \quad 0]\dot{x} + [0 \quad -1]x(t) + v(t)$, we get the external behaviours: $y(t) = (\mathrm{p}+b_0)v(t)$ and $(\mathrm{p}+b_0)v(t) = y^*(t)$, namely: $y(t) \equiv y^*(t)$.

5 CONCLUSION

We have proposed necessary and sufficient conditions for *TD left* or *TD right inversion*, *i.e.* when working in the *Time Domain*, and thus when being faced to possibly unknown initial conditions. Those properties are important for observation (left case) or reference tracking (right case) at any desired time. Direct applications can thus be found for exact Failure Detection and Identification problems, as well as *e.g.* exact Decoupling problems.

We have pointed out the structural conditions which express those *left* or *right TFM* or *TD invertibilities*. *TFM (left* or *right) invertibility* just relies on full (column or row) rank. *TD (left* or *right) invertibility* requires *TFM (left* or *right) invertibility* and the fact that some internal dynamics (finite zeros or finite poles) must be unobservable.

Simple examples are given throughout the paper that illustrate those particularities, as well as our proposed procedures for left or right inversion (*e.g.* for the cascade connection).

References

Aling, H. and J.M. Schumacher (1984). A nine-fold canonical decomposition for linear systems. *International Journal of Control*, **39(4)**, 779–805.

Armentano, V.A. (1986). The pencil $(sE - A)$ and controllability-observability for generalized linear systems: a geometric approach. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **24(4)**, 616–638.

Basile, G. and G. Marro (1992). *Controlled and Conditioned Invariants in Linear System Theory.* Prentice Hall.

Bernhard, P. (1982) On singular implicit dynamical systems. *SIAM Journal on Control and Optimization.* **20(5)**, 612–633.

Bonilla, M. and M. Malabre (1990). One side invertibility for implicit descriptions. In: *29th Conference on Decision and Control.* pp. 3601–3602.

Bonilla, M. and M. Malabre (1994). Geometric Characterization of Lewis's Structure Algorithm. *Circuits, Systems and Signal Processing, special issue on "Implicit and Robust Systems"* **13(2-3)**, 255–272.

Bonilla, M. and M. Malabre (1997). Structural Matrix Minimization Algorithm for Implicit Descriptions. *Automatica* **33(4)**, 705–710.

Bonilla, M. and A. Malabre (2003). On the control of linear systems having internal variations. *Automatica* **39(11)**, pp. 1989–1996.

Brunovsky, P. (1970). A classification of linear controllable systems. *Kybernetika*, **6**, 173-188.

Campbell, S.L. (1982). *Singular Systems of Differential Equations II.* Pitman.

Cobb, D. (1984). Controllability, Observability and Duality in Singular Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-29(12)**, 1076–1082.

Francis, B.A. and W.M. Wonham (1975). The role of transmission zeros in linear multivariable regulators. *International Journal of Control*, **22**, 657–681.

Gantmacher, F.R. (1977). The Theory of Matrices. Vol. II, *New York: Chelsea.*

Hirschorn (1979). Invertibility of nonlinear control systems. *SIAM J. Control Opt.*17, pp.289-297.

Hirschorn (1979). Invertibility for multivariable nonlinear control systems. *IEEE Trans. Aut. Contr.* AC-24, pp.855-865.

Hou, M. and R.J. Patton (1998). Input Observability and Input Reconstruction, *Automatica*, **34(6)**, 789–794.

Kuijper, M. (1992). Descriptor representations without direct feedthrough term. *Automatica*, **28**, 633–637.

Lewis F.L (1983). Inversion of descriptor systems. *Proc. Acc*, San Francisco, June, 1153-1158.

Lewis, F.L. (1992). A tutorial on the geometric analysis of linear time-invariant implicit systems. *Automatica* **28(1)**, 119–137.

Lewis F.L., Beauchamp G. (1987). *Computation of subspaces for singular systems.* Proc. MTNS'87, Phoenix, June.

Lizarzaburu (1978). Les systèmes inverses et leur application aux problems de decouplage. *Thèse pour obtenir le diplome de Doctorat de 3-ième Cycle.*

Luenberger D.G. (1978). Time-Invariant Descriptor Systems *Automatica*, 14, 473-480.

MacFarlane, A.G.J. and N. Karcanias (1976). Poles and zeros of linear multivariable systems: a survey of the algebraic, geometric and complex-variable theory. *International Journal of Control*, **24**, 33–74.

Malabre M, 1989. On infinite zeros for generalized systems. *MTNS'89*, Amsterdam, June 1989.

Malabre M, Rabah R. 1989. Zeros at Infinity for Infinite Dimensional Systems. *MTNS'89*, Amsterdam, June 1989.

Massoumnia, M.A., G.C. Verghese, and A.S. Wilsky (1989). Failure Detection and Identification. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **34(3)**, 316–321.

Moog C. H. (1988). Nonlinear Decoupling and Structure at Infinity. *Math. Control Signals Systems* 1 (3): 257-268.

Rosenbrock, H.H. (1970). State–Space and Multivariable Theory. *London: Nelson.*

Silverman L.M. (1969). Inversión of multivariable linear systems. *IEEE Trans on Automat. Contr.*, AC-14, 3, 270-276.

Silverman L.M., Kitapçi A. (1983). System Structure at infinity. *Systems and Control Letters*, 3, pp.123-131, 1983.

Singh S.N. (1981). A modified algorithm for invertibility in nonlinear systems. *IEEE Trans. Aut. Contr.* AC-26, pp. 595-598.

Willems, J.C. (1983). Input–output and state space representations of finite–dimensional linear time–invariant systems. *Linear Algebra and its Applications*, **50**, 81-608.

Wong, K.T. (1974). The eigenvalue problem $\lambda Tx + Sx$.. *Journal of Differential Equations*, **1**, 270–281.

Wonham, W.M. (1985). *Linear Multivariable Control: A Geometric Approach.* 3rd ed.. Springer–Verlag. New York.

A Proof of Theorem 6

Let us consider the Laplace transform of system (12) with zero initial conditions [14] and with Γ a monic map:

$$\mathrm{s}Nx_{pol}(\mathrm{s}) = x_{pol}(\mathrm{s}) - \Gamma u(\mathrm{s}) \quad ; \quad z(\mathrm{s}) = \Delta x(\mathrm{s}) \quad ; \quad \text{Ker } \Gamma = \{0\} \tag{A.1}$$

and let us define the subspace: $\mathbb{X}_{\mathcal{N}}(\mathrm{s}) = \{x_{pol}(\mathrm{s}) \in \mathbb{R}^n(\mathrm{s}) \big| z(\mathrm{s}) = 0\}$. Let us note that Ker $\Gamma = \{0\}$ implies that: Ker $T_{pol}(\mathrm{s}) = \{0\}$ if and only if $\mathbb{X}_{\mathcal{N}}(\mathrm{s}) = \{0\}$; so we only need to characterize $\mathbb{X}_{\mathcal{N}}(\mathrm{s})$.

(1) Let us first prove that $\mathbb{X}_{\mathcal{N}}(\mathrm{s}) \supset \mathcal{R}^*_{[N,\Gamma,\Delta]}$.
Indeed, by definition of $\mathcal{R}^*_{[N,\Gamma,\Delta]}$ there exists a control law $u(\mathrm{s}) = \mathrm{s}Fx_{pol}(\mathrm{s}) + \bar{u}(\mathrm{s})$, where F is an extension of a feedback friend of $\mathcal{R}^*_{[N,\Gamma,\Delta]}$, such that: $\mathrm{s}(N+\Gamma F)x_{pol}(\mathrm{s}) = x_{pol}(\mathrm{s}) - \Gamma\bar{u}(\mathrm{s})$, $0 = \Delta x_{pol}(\mathrm{s})$, and $x_{pol}(\mathrm{s}) \in \mathcal{R}^*_{[N,\Gamma,\Delta]}$.

(2) Let us next prove that $\mathbb{X}_{\mathcal{N}}(\mathrm{s}) \subset \mathcal{V}^*_{[N,\Gamma,\Delta]}$.
Let $x_{pol}(\mathrm{s}) \in \mathbb{X}_{\mathcal{N}}(\mathrm{s})$, then: $Nx_{pol}(\mathrm{s}) = \frac{1}{\mathrm{s}}x_{pol}(\mathrm{s}) - \frac{1}{\mathrm{s}}\Gamma u(\mathrm{s})$ and $x_{pol}(\mathrm{s}) \in$ Ker Δ, which implies: $x_{pol}(\mathrm{s}) \in \text{Ker } \Delta \cap N^{-1}\big(\text{Ker } \Delta + \text{Im } \Gamma\big) = \mathcal{V}^2_{[N,\Gamma,\Delta]}$. Then $x_{pol}(\mathrm{s}) \in \text{Ker } \Delta \cap N^{-1}\big(\mathcal{V}^2_{[N,\Gamma,\Delta]} + \text{Im } \Gamma\big) = \mathcal{V}^3_{[N,\Gamma,\Delta]}$, then $\cdots$, then $x_{pol}(\mathrm{s}) \in \text{Ker } \Delta \cap N^{-1}\big(\mathcal{V}^{pol}_{[N,\Gamma,\Delta]} + \text{Im } \Gamma\big) = \mathcal{V}^*_{[N,\Gamma,\Delta]}$.

(3) Let us finally prove that $\mathbb{X}_{\mathcal{N}}(\mathrm{s}) \subset \mathcal{R}^*_{[N,\Gamma,\Delta]}$.
Let $x_{pol}(\mathrm{s}) \in \mathbb{X}_{\mathcal{N}}(\mathrm{s})$, then: $x_{pol}(\mathrm{s}) = \Gamma u(\mathrm{s}) + \mathrm{s}Nx_{pol}(\mathrm{s}) \in$ Ker Δ, which implies: $x_{pol}(\mathrm{s}) = \Gamma u(\mathrm{s}) + \mathrm{s}N\big(\Gamma u(\mathrm{s}) + \mathrm{s}Nx_{pol}(\mathrm{s})\big) = X_1(\mathrm{s}) + \mathrm{s}^2N^2x_{pol}(\mathrm{s}) \in$ Ker Δ; where: $X_1(\mathrm{s}) = \Gamma u(\mathrm{s}) + \mathrm{s}N\Gamma u(\mathrm{s}) \in \text{Im } \Gamma + N\big(\text{Im } \Gamma \cap \text{Ker } \Delta\big) = \mathcal{W}^2_{[\Delta,N,\Gamma]}$. Then: $x_{pol}(\mathrm{s}) = (\Gamma u(\mathrm{s}) + \mathrm{s}N\Gamma u(\mathrm{s})) + \mathrm{s}^2N^2\left(\Gamma u(\mathrm{s}) + \mathrm{s}Nx_{pol}(\mathrm{s})\right) = (\Gamma u(\mathrm{s}) + \mathrm{s}NX_1(\mathrm{s})) + \mathrm{s}^3N^3x_{pol}(\mathrm{s}) \in$ Ker Δ.
Let us now suppose that for $i \in \{1,\ldots,\mu\}$: $x_{pol}(\mathrm{s}) = (\Gamma u(\mathrm{s}) + \mathrm{s}NX_i(\mathrm{s})) + \mathrm{s}^{i+2}N^{i+2}x_{pol}(\mathrm{s}) = X_{i+1}(\mathrm{s}) + \mathrm{s}^{i+2}N^{i+2}x_{pol}(\mathrm{s}) \in$ Ker Δ, where: $X_{i+1}(\mathrm{s}) = \Gamma u(\mathrm{s}) + \mathrm{s}NX_i(\mathrm{s}) \in \text{Im } \Gamma + N\big(\mathcal{W}^{i+1}_{[\Delta,N,\Gamma]} \cap \text{Ker } \Delta\big) = \mathcal{W}^{i+2}_{[C_{pol},N,\Gamma]}$. Then:

$$x_{pol}(\mathrm{s}) = \Bigg(\Gamma u(\mathrm{s}) + \mathrm{s}N\Bigg(\Gamma u(\mathrm{s}) + \mathrm{s}N\Bigg(\cdots\Bigg(\Gamma u(\mathrm{s}) + \mathrm{s}N\Big(\Gamma u(\mathrm{s}) + \mathrm{s}N\big(\Gamma u(\mathrm{s}) + \mathrm{s}N\Gamma u(\mathrm{s})\big)\Big)\Bigg)\cdots\Bigg)\Bigg)\Bigg) + \mathrm{s}^{\mu+3}N^{\mu+3}x_{pol}(\mathrm{s})$$

$= X_{\mu+2}(\mathrm{s}) + \mathrm{s}^{\mu+3}N^{\mu+3}x_{pol}(\mathrm{s}) \in$ Ker Δ, where: $X_{\mu+2}(\mathrm{s}) = \Gamma u(\mathrm{s}) + \mathrm{s}NX_{\mu+1}(\mathrm{s}) \in \text{Im } \Gamma + N\big(\mathcal{W}^{\mu+2}_{[\Delta,N_{pol},B]} \cap \text{Ker } \Delta\big) = \mathcal{W}^{\mu+3}_{[C_{pol},N,\Gamma]}$.
And thus (recall that N is a nilpotent matrix): $x_{pol}(\mathrm{s}) = X_{n-1}(\mathrm{s}) + \mathrm{s}^nN^nx(\mathrm{s}) = X_{n-1}(\mathrm{s})$, where $X_{n-1}(\mathrm{s}) = \Gamma u(\mathrm{s}) + \mathrm{s}NX_{n-2}(\mathrm{s}) \in \text{Im } \Gamma + \mathrm{s}N\big(\mathcal{W}^{n-1}_{[\Delta,N,\Gamma]} \cap \text{Ker } \Delta\big) = \mathcal{W}^*_{[C_{pol},N,\Gamma]}$. Therefore: $x_{pol}(\mathrm{s}) \in \mathcal{R}^*_{[N,\Gamma,\Delta]}$. □

[14] In fact only the strictly proper part could have initial conditions, due to the integrators. In some papers, (*e.g.* Cobb (1984)), non consistent initial conditions can also be at the origin of impulsive responses, coming from the polynomial part of the system. In that case, s must be handled as a "generalized derivative" (Campbell 1982) and not as the usual time derivative, which is the context of the present paper; anyway, when working with Transfer Function Matrices, the initial conditions are set to zero, which allows to skip such a "philosophical" discussion.

B Proof of Lemma 10

For the sake of shortness, we do not write "(t)" in the considered time functions. Doing $y = 0$ in (9), we get $\dot{x}_{sp} = Ax_{sp} + Bz$ and $0 = Cx_{sp}$. Let us prove in three steps that x_{sp}, $\dot{x}_{sp} \in \mathcal{V}^*_{[A,B,C]}$:

(1) **Let us first prove that x_{sp}, $\dot{x}_{sp} \in \mathcal{V}^2_{[A,B,C]}$ and $\ddot{x}_{sp} \in \mathcal{V}^1_{[A,B,C]}$:** Since $Cx_{sp} = 0$, we get $C\dot{x}_{sp} = 0$ and $C\ddot{x}_{sp} = 0$, which imply x_{sp}, $\dot{x}_{sp}$, $\ddot{x}_{sp} \in \text{Ker } C = \mathcal{V}^1_{[A,B,C]}$. Then $\dot{x}_{sp} = Ax_{sp} + Bz \in \mathcal{V}^1_{[A,B,C]}$ implies that $x_{sp} \in \mathcal{V}^1_{[A,B,C]} \cap A^{-1}\left(\mathcal{V}^1_{[A,B,C]} + \text{Im } B\right) = \mathcal{V}^2_{[A,B,C]}$. And $\ddot{x}_{sp} = A\dot{x}_{sp} + B\dot{z} \in \mathcal{V}^1_{[A,B,C]}$ implies that $\dot{x}_{sp} \in \mathcal{V}^1_{[A,B,C]} \cap A^{-1}\left(\mathcal{V}^1_{[A,B,C]} + \text{Im } B\right) = \mathcal{V}^2_{[A,B,C]}$.

(2) **Let us next prove that if $x_{sp} \in \mathcal{V}^{\mu}_{[A,B,C]}$ and $x^{(i)}_{sp} \in \mathcal{V}^{\mu+1-i}_{[A,B,C]}$ for $i \in \{1, \cdots, \mu\}$ then $x_{sp} \in \mathcal{V}^{\mu+1}_{[A,B,C]}$ and $x^{(i)}_{sp} \in \mathcal{V}^{\mu+2-i}_{[A,B,C]}$ for $i \in \{1, \cdots, \mu\}$:** Indeed, if $\dot{x}_{sp} = Ax_{sp} + Bz \in \mathcal{V}^{\mu}_{[A,B,C]}$ then $x_{sp} \in \mathcal{V}^{\mu}_{[A,B,C]} \cap A^{-1}\left(\mathcal{V}^{\mu}_{[A,B,C]} + \text{Im } B\right) = \mathcal{V}^{\mu+1}_{[A,B,C]}$. Since $Cx_{sp} = 0$ implies $Cx^{(\mu+1)}_{sp} = 0$, we get $Cx^{(\mu+1)}_{sp} = C(Ax^{(\mu)}_{sp} + Bz^{(\mu)}) = 0$, which implies: $Ax^{(\mu)}_{sp} + Bz^{(\mu)} \in \text{Ker } C$ and then $x^{(\mu)}_{sp} \in \mathcal{V}^1_{[A,B,C]} \cap A^{-1}\left(\mathcal{V}^1_{[A,B,C]} + \text{Im } B\right) = \mathcal{V}^2_{[A,B,C]}$. On the other hand, let us suppose that: $x^{(j)}_{sp}$, $x^{(j+1)}_{sp} \in \mathcal{V}^{\mu+1-j}_{[A,B,C]}$ for $j \in \{\mu - 1, \cdots, 1\}$, then $x^{(j+1)}_{sp} = Ax^{(j)}_{sp} + Bz^{(j)} \in \mathcal{V}^{\mu+1-j}_{[A,B,C]}$, and thus $x^{(j)}_{sp} \in \mathcal{V}^{k+1-j}_{[A,B,C]} \cap A^{-1}(\mathcal{V}^{\mu+1-j}_{[A,B,C]} + \text{Im } B) = \mathcal{V}^{\mu+2-j}_{[A,B,C]}$.

(3) **From the first two items, we get x_{sp}, $\dot{x}_{sp} \in \mathcal{V}^*_{[A,B,C]}$.**

Since x_{sp}, $\dot{x}_{sp} \in \mathcal{V}^*_{[A,B,C]}$, we get $Bz = \dot{x}_{sp} - Ax_{sp} \in \text{Im } B \cap \left(\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} + A\mathcal{V}^*_{[A,B,C]}\right) = \{0\}$, which implies $z \in \text{Ker } B = \{0\}$. $\square$

C Proof of Lemma 11

To prove the Lemma, we first need to show that:

$$\mathcal{V}^*_{[\mathcal{X}_\ell;\mathbb{E}_\ell,\mathbb{A}_\ell]} = \left\{ \left[\, x_1^T \;\; x_2^T \,\right]^T \in \mathcal{X}_\ell \middle|\; x_1 \in \mathcal{V}^*_{[A,B,C]},\; x_2 \in B^{-1}\left(\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} + A\mathcal{V}^*_{[A,B,C]}\right) \;\&\; \Pi_* B x_2 = -\Pi_* A x_1 \right\} \tag{C.1}$$

where $\Pi_* : \mathcal{X} \to \mathcal{X}/\mathcal{V}^*_{[A,B,C]}$ is the canonical projection. Indeed for the first step of the algorithm of $\mathcal{V}^*_{[\mathcal{X}_\ell;\mathbb{E}_\ell,\mathbb{A}_\ell]}$, we get: $\mathcal{V}^1_{[\mathcal{X}_\ell;\mathbb{E}_\ell,\mathbb{A}_\ell]} = \mathbb{A}_\ell^{-1}\mathbb{E}_\ell\mathcal{V}^0_{[\mathcal{X}_\ell;\mathbb{E}_\ell,\mathbb{A}_\ell]} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ A & B \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathcal{V}^0_{[A,B,C]} \end{bmatrix}$. This implies that there exist vectors $\left[\, x_1^T \;\; x_2^T \,\right]^T$, such that: $Cx_1 = 0$ and $Ax_1 + Bx_2 \in \mathcal{V}^0_{[A,B,C]}$.

Then $x_1 \in \text{Ker } C \cap A^{-1}\left(\mathcal{V}^0_{[A,B,C]} + \text{Im } B\right) = \mathcal{V}^1_{[A,B,C]}$ and $x_2 \in B^{-1}\left(\mathcal{V}^0_{[A,B,C]} + A\mathcal{V}^1_{[A,B,C]}\right)$. Satisfying $\Pi_0 Bx_2 = -\Pi_0 Ax_1$, where $\Pi_0 : \mathcal{X} \to \mathcal{X}/\mathcal{V}^0_{[A,B,C]}$ is the canonical projection (this first projection is trivial since $\mathcal{V}^0_{[A,B,C]} = \mathcal{X}$); namely: $\mathcal{V}^1_{[\mathcal{X}_\ell;\mathbb{E}_\ell,\mathbb{A}_\ell]} = \left\{ (x_1^T \; x_2^T)^T \in \mathcal{X}_\ell \middle|\; x_1 \in \mathcal{V}^1_{[A,B,C]},\; x_2 \in B^{-1}\left(\mathcal{V}^0_{[A,B,C]} + A\mathcal{V}^1_{[A,B,C]}\right) \;\&\; \Pi_0 Bx_2 = -\Pi_0 Ax_1 \right\}$ and $\mathbb{E}_\ell\mathcal{V}^1_{[\mathcal{X}_\ell;\mathbb{E}_\ell,\mathbb{A}_\ell]} = \{0\} \oplus \mathcal{V}^1_{[A,B,C]}$.

For the $\mu - th$ step of the algorithm of $\mathcal{V}^*_{[\mathcal{X}_\ell;\mathbb{E}_\ell,\mathbb{A}_\ell]}$, let us assume that (with $k \in \{1, \cdots, \mu\}$):

$$\begin{gathered} \mathcal{V}^k_{[\mathcal{X}_\ell;\mathbb{E}_\ell,\mathbb{A}_\ell]} = \left\{ \left[\, x_1^T \;\; x_2^T \,\right]^T \in \mathcal{X}_\ell \middle|\; x_1 \in \mathcal{V}^k_{[A,B,C]},\; x_2 \in B^{-1}\left(\mathcal{V}^{k-1}_{[A,B,C]} + A\mathcal{V}^k_{[A,B,C]}\right) \;\&\; \Pi_{k-1} Bx_2 = -\Pi_{k-1} Ax_1 \right\} \\ \mathbb{E}_\ell\mathcal{V}^k_{[\mathcal{X}_\ell;\mathbb{E}_\ell,\mathbb{A}_\ell]} = \{0\} \oplus \mathcal{V}^k_{[A,B,C]} \end{gathered} \tag{C.2}$$

where $\Pi_{k-1} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}/\mathcal{V}^{k-1}_{[A,B,C]}$ is the canonical projection. Then: $\mathcal{V}^{\mu+1}_{[\mathcal{X}_\ell;\mathbb{E}_\ell,\mathbb{A}_\ell]} = \mathbb{A}_\ell^{-1}\mathbb{E}_\ell\mathcal{V}^{\mu}_{[\mathcal{X}_\ell;\mathbb{E}_\ell,\mathbb{A}_\ell]} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ A & B \end{bmatrix}^{-1}$

$\begin{bmatrix} 0 \\ \mathcal{V}^{\mu}_{[A,B,C]} \end{bmatrix}$. This implies that there exist vectors $\begin{bmatrix} x_1^T & x_2^T \end{bmatrix}^T$ such that: $Cx_1 = 0$ and $Ax_1 + Bx_2 \in \mathcal{V}^{\mu}_{[A,B,C]}$. Then $x_1 \in \text{Ker } C \cap A^{-1}\left(\mathcal{V}^{\mu}_{[A,B,C]} + \text{Im } B\right) = \mathcal{V}^{\mu+1}_{[A,B,C]}$ and $x_2 \in B^{-1}\left(\mathcal{V}^{\mu}_{[A,B,C]} + A\mathcal{V}^{\mu+1}_{[A,B,C]}\right)$. Satisfying $\Pi_\mu Bx_2 = -\Pi_\mu Ax_1$, where $\Pi_\mu : \mathcal{X} \to \mathcal{X}/\mathcal{V}^{\mu}_{[A,B,C]}$ is the canonical projection. And thus (C.2) is true $\forall\ k > 0$, which proves (C.1).

We are now in position to prove that $\mathcal{V}^*_{[\mathcal{X}_\ell;\mathbb{E}_\ell,\mathbb{A}_\ell]} = \{0\}$ implies $B^{-1}\left(\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} + A\mathcal{V}^*_{[A,B,C]}\right) = \{0\}$, which is equivalent to prove that $B^{-1}\left(\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} + A\mathcal{V}^*_{[A,B,C]}\right) \neq \{0\}$ implies that $\mathcal{V}^*_{[\mathcal{X}_\ell;\mathbb{E}_\ell,\mathbb{A}_\ell]} \neq \{0\}$:

Indeed if $B^{-1}\left(\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} + A\mathcal{V}^*_{[A,B,C]}\right) \neq \{0\}$ there then exists $x_2 \in B^{-1}\left(\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} + A\mathcal{V}^*_{[A,B,C]}\right)$, $x_2 \neq 0$. Then $Bx_2 \neq 0$ and $Bx_2 \in \text{Im } B \cap \left(\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} + A\mathcal{V}^*_{[A,B,C]}\right) \subset \left(\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} + A\mathcal{V}^*_{[A,B,C]}\right)$; this implies that there exist $x_1, x_v \in \mathcal{V}^*_{[A,B,C]}$, such that: $\Gamma x_2 = x_v - Ax_1$, and thus, $\Pi_* Bx_2 = -\Pi_* Ax_1$. There then exists a $\begin{bmatrix} x_1^T & x_2^T \end{bmatrix}^T \neq 0$ such that $x_1 \in \mathcal{V}^*_{[A,B,C]}, x_2 \in B^{-1}\left(\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} + A\mathcal{V}^*_{[A,B,C]}\right)$ and satisfying $\Pi_* Bx_2 = -\Pi_* Ax$, namely $\mathcal{V}^*_{[\mathcal{X}_\ell;\mathbb{E}_\ell,\mathbb{A}_\ell]} \neq \{0\}$. □

D Proof of Lemma 14

(1) **Let us first prove that** $\text{Im } B \cap \left(\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} + A\mathcal{V}^*_{[A,B,C]}\right) = \left(\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} + A\text{Ker } C\right) \cap \text{Im } B$**:** Indeed, from (1) we get

$$\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} + A\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} = \mathcal{V}^*_{[A,B,C]} + A\text{Ker } C \cap \left(\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} + \text{Im } B\right) = (\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} + A\text{Ker } C) \cap \left(\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} + \text{Im } B\right)$$

and then: $\text{Im } B \cap \left(\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} + A\mathcal{V}^*_{[A,B,C]}\right) = \left(\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} + A\text{Ker } C\right) \cap \text{Im } B$, which implies the result.

(2) **Let us next prove that If** $\left(\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} + A\text{Ker } C\right) \cap \text{Im } B = \{0\}$ **then** $\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} = \mathcal{N}$**:** Since $A\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} = A\text{Ker } C \cap \left(\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} + \text{Im } B\right)$, let $x \in A\text{Ker } C \cap \left(\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} + \text{Im } B\right)$. There then exist $c \in \text{Ker } C, v \in \mathcal{V}^*_{[A,B,C]}$ and $b \in \text{Im } B$ such that $x = Ac = v + b$, which implies $Ac - v = b \in \left(\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} + A\text{Ker } C\right) \cap \text{Im } B = \{0\}$. That is to say $Ac - v = 0$. Namely $x = Ac = v \in \left(\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} \cap A\text{Ker } C\right)$. And thus

$$\left(\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} \cap A\text{Ker } C\right) \subset A\text{Ker } C \cap \left(\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} + \text{Im } B\right) \subset \left(\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} \cap A\text{Ker } C\right)$$

Therefore $A\text{Ker } C \cap \left(\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} + \text{Im } B\right) = \mathcal{V}^*_{[A,B,C]} \cap A\text{Ker } C$. And since $A\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} = A\text{Ker } C \cap \left(\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} + \text{Im } B\right)$ we get $A\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} = \mathcal{V}^*_{[A,B,C]} \cap A\text{Ker } C$, which implies: $A\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} \subset \mathcal{V}^*_{[A,B,C]}$. Now since $\mathcal{N}$ is the largest $A-$*invariant* subspace contained in $\text{Ker } C$ and $\mathcal{N} \subset \mathcal{V}^*_{[A,B,C]}$, we get the result.

(3) **Let us next prove that If** $\text{Ker } B = \{0\}$ **and** $(\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} + A\text{Ker } C) \cap \text{Im } B = \{0\}$ **then** $B^{-1}(\mathcal{N} + A\text{Ker } C) = \{0\}$**:** Indeed (recall that $\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} = \mathcal{N}$):

$$\begin{gathered}\left(\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} + A\text{Ker } C\right) \cap \text{Im } B = \{0\} \Leftrightarrow BB^{-1}\left(\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} + A\text{Ker } C\right) = \{0\}, \text{ then} \\ B^{-1}BB^{-1}\left(\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} + A\text{Ker } C\right) = B^{-1}\{0\} \Leftrightarrow B^{-1}\left(\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} + A\text{Ker } C\right) + \text{Ker } B = \text{Ker } B, \text{ then} \\ B^{-1}\left(\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} + A\text{Ker } C\right) = \{0\} \Leftrightarrow B^{-1}\left(\mathcal{N} + A\text{Ker } C\right) = \{0\}.\end{gathered}$$

Therefore, the result is satisfied.

(4) **Let us next prove that If $\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} = \mathcal{N}$ and $B^{-1}(\mathcal{N} + A\text{Ker } C) = \{0\}$ then $\left(\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} + A\mathcal{V}^*_{[A,B,C]}\right) \cap \text{Im } B = \{0\}$:** From items 1) and 2) we have:

$$\begin{aligned}\left(\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} + A\mathcal{V}^*_{[A,B,C]}\right) \cap \text{Im } B &= \left(\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} + A\text{Ker } C\right) \cap \text{Im } B = (\mathcal{N} + A\text{Ker } C) \cap \text{Im } B \\ &= BB^{-1}(\mathcal{N} + A\text{Ker } C) = B\{0\} = \{0\}\end{aligned}$$

(5) **Let us finally note that if** $B^{-1}(\mathcal{N} + A\text{Ker } C) = \{0\}$ **then** $\text{Ker } B = \{0\}$. $\square$

E Proof of Lemma 15

Let us first note that (recall (1) and (19)):

(1) $\mathcal{V}^0_{[A_{ob},B_{ob},C_{ob}]} = \mathcal{X}/\mathcal{N} = \Pi\mathcal{X} = \Pi\mathcal{V}^0_{[A,B,C]}$
(2) $\text{Ker } C = \Pi^{-1}\text{Ker } C_{ob}$, then $\Pi\text{Ker } C = \Pi\Pi^{-1}\text{Ker } C_{ob} = (\text{Im } \Pi) \cap \text{Ker } C_{ob} = \left(\mathcal{X}/\mathcal{N}\right) \cap \text{Ker } C_{ob} = \text{Ker } C_{ob}$.
(3) $\text{Im } B_{ob} = B_{ob}\mathcal{Z} = \Pi B\mathcal{Z} = \Pi\text{Im } B$.

Let us now prove that $\mathcal{V}^*_{[A_{ob},B_{ob},C_{ob}]} = \Pi\mathcal{V}^*_{[A,B,C]}$: For this let us suppose that $\mathcal{V}^\mu_{[A_{ob},B_{ob},C_{ob}]} = \Pi\mathcal{V}^\mu_{[A,B,C]}$, then:

$$\begin{aligned}\mathcal{V}^{\mu+1}_{[A_{ob},B_{ob},C_{ob}]} &= \text{Ker } C_{ob} \cap A_{ob}^{-1}(\mathcal{V}^\mu_{[A_{ob},B_{ob},C_{ob}]} + \text{Im } B_{ob}) = \Pi\text{Ker } C \cap A_{ob}^{-1}(\Pi\mathcal{V}^\mu_{[A,B,C]} + \Pi\text{Im } B) \\ &= \Pi\text{Ker } C \cap \left(\mathcal{X}/\mathcal{N}\right) \cap A_{ob}^{-1}\Pi(\mathcal{V}^\mu_{[A,B,C]} + \text{Im } B) \\ &= \Pi\text{Ker } C \cap \text{Im } \Pi \cap A_{ob}^{-1}\Pi(\mathcal{V}^\mu_{[A,B,C]} + \text{Im } B) = \Pi\text{Ker } C \cap \Pi\Pi^{-1}A_{ob}^{-1}\Pi(\mathcal{V}^\mu_{[A,B,C]} + \text{Im } B) \\ &= \Pi\text{Ker } C \cap \Pi\left(A_{ob}\Pi\right)^{-1}\Pi(\mathcal{V}^\mu_{[A,B,C]} + \text{Im } B) = \Pi\text{Ker } C \cap \Pi\left(\Pi A\right)^{-1}\Pi(\mathcal{V}^\mu_{[A,B,C]} + \text{Im } B) \\ &= \Pi\text{Ker } C \cap \Pi A^{-1}\Pi^{-1}\Pi(\mathcal{V}^\mu_{[A,B,C]} + \text{Im } B) = \Pi\text{Ker } C \cap \Pi A^{-1}(\mathcal{V}^\mu_{[A,B,C]} + \text{Im } B + \text{Ker } \Pi) \\ &= \Pi\text{Ker } C \cap \Pi A^{-1}(\mathcal{V}^\mu_{[A,B,C]} + \text{Im } B + \mathcal{N}) = \Pi\text{Ker } C \cap \Pi A^{-1}(\mathcal{V}^\mu_{[A,B,C]} + \text{Im } B) \\ &= \Pi(\text{Ker } C + \mathcal{N}) \cap \Pi A^{-1}(\mathcal{V}^\mu_{[A,B,C]} + \text{Im } B) = \Pi(\Pi^{-1}\Pi\text{Ker } C) \cap \Pi A^{-1}(\mathcal{V}^\mu_{[A,B,C]} + \text{Im } B) \\ &= \Pi(\Pi^{-1}\Pi\text{Ker } C \cap A^{-1}(\mathcal{V}^\mu_{[A,B,C]} + \text{Im } B)) = \Pi(\text{Ker } C \cap A^{-1}(\mathcal{V}^\mu_{[A,B,C]} + \text{Im } B)) = \Pi\mathcal{V}^{\mu+1}_{[A,B,C]}\end{aligned}$$

Therefore $\mathcal{V}^*_{[A_{ob},B_{ob},C_{ob}]} = \Pi\mathcal{V}^*_{[A,B,C]}$.

Let us now prove that $B^{-1}(\mathcal{N} + A\text{Ker } C) = B_{ob}^{-1}A_{ob}\text{Ker } C_{ob}$: $B^{-1}(\mathcal{N} + A\text{Ker } C) = B^{-1}(\text{Ker } \Pi + A\text{Ker } C) = B^{-1}(\Pi^{-1}\Pi A\text{Ker } C) = B^{-1}\Pi^{-1}\Pi A\text{Ker } C = (\Pi B)^{-1}(\Pi A)\text{Ker } C = B_{ob}^{-1}A_{ob}\Pi\text{Ker } C = B_{ob}^{-1}A_{ob}\text{Ker } C_{ob}$. $\square$

F Proof of Lemma 16

Let us first prove the necessity:

Since $\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} = \mathcal{N}$ and $B^{-1}(\mathcal{N} + A\text{Ker } C) = \{0\}$, then from Lemma (15), $\mathcal{V}^*_{[A_{ob},B_{ob},C_{ob}]} = \Pi\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} = \Pi\mathcal{N} = \{0\}$. Therefore $\mathcal{V}^*_{[A_{ob},B_{ob},C_{ob}]} = \{0\}$. Now $\text{Ker } B_{ob} = \text{Ker } \Pi B = B^{-1}\text{Ker } \Pi = B^{-1}\mathcal{N} \subset B^{-1}(\mathcal{N} + A\text{Ker } C) = \{0\}$. Therefore $\text{Ker } B_{ob} = \{0\}$.

Let us now prove the sufficiency:

$\mathcal{V}^*_{[A_{ob},B_{ob},C_{ob}]} = \{0\}$ implies $\Pi^{-1}\Pi\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} = \Pi^{-1}\{0\}$, which is equivalent to $\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} + \text{Ker } \Pi = \text{Ker } \Pi$, namely $\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} + \mathcal{N} = \mathcal{N}$. Since $\mathcal{N} \subset \mathcal{V}^*_{[A,B,C]}$, then $\mathcal{V}^*_{[A,B,C]} = \mathcal{N}$.
On the other hand, $\mathcal{V}^*_{[A_{ob},B_{ob},C_{ob}]} = \text{Ker } C_{ob} \cap A_{ob}^{-1}(\mathcal{V}^*_{[A_{ob},B_{ob},C_{ob}]} + \text{Im } B_{ob})$ implies $\{0\} = \text{Ker } C_{ob} \cap A_{ob}^{-1}\text{Im } B_{ob}$, and

thus $A_{ob}\{0\} = A_{ob}\text{Ker } C_{ob} \cap \text{Im } B_{ob}$. Then

$$\{0\} = B_{ob}B_{ob}^{-1}A_{ob}\text{Ker } C_{ob} \Rightarrow B_{ob}^{-1}\{0\} = B_{ob}^{-1}B_{ob}B_{ob}^{-1}A_{ob}\text{Ker } C_{ob}$$
$$\textit{if and only if}$$
$$\text{Ker } B_{ob} = B_{ob}^{-1}A_{ob}\text{Ker } C_{ob} + \text{Ker } \bar{\Gamma} \Rightarrow \{0\} = B_{ob}^{-1}A_{ob}\text{Ker } C_{ob} = B^{-1}\left(\mathcal{N} + A\text{Ker } C\right)$$

Therefore $B^{-1}\left(\mathcal{N} + A\text{Ker } C\right) = \{0\}$. $\square$

G Proof of Lemma 19

(1) *Let us first prove the external equivalence:* The following system is obviously externally equivalent to (9):

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathrm{I} & 0 \\ \hline 0 & N \end{array}\right]\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\bar{x}}(t) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{I} \end{array}\right]\begin{bmatrix} x(t) \\ \bar{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ \hline -B \end{bmatrix}u(t) \quad ; \quad z(t) = \left[\begin{array}{c|c} C & 0 \end{array}\right]\tilde{x}(t) \tag{G.1}$$

Premultiplying (G.1) by $\left[\begin{array}{c|c} \mathrm{I} & \mathrm{I} \\ \hline 0 & \mathrm{I} \end{array}\right]$ and defining $\begin{bmatrix} x_{sp}(t) \\ x_z(t) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{I} & N \\ \hline 0 & \mathrm{I} \end{array}\right]\begin{bmatrix} x(t) \\ \bar{x}(t) \end{bmatrix}$, we get (29)-(28).

(2) *Let us next prove the TD left invertibility of (29):* For this, let us point out that the supremal $(A, \Upsilon_{sp}) -$ *invariant* subspace contained in Ker C is invariant under the changing bases matrices T and S, and under the output injection matrix K, namely $\mathcal{V}^*_{[A,\Upsilon_{sp},C]} = \mathcal{V}^*_{[\widehat{A}_K,\widehat{\Upsilon},\widehat{C}]}$. We then get when computing algorithm (1) for the matices (25) and (26): $\mathcal{V}^*_{[\widehat{A}_K,\widehat{\Upsilon},\widehat{C}]} = \{0\}$, which implies the *TD left invertibility* of $\Sigma_{poles}(A, \Upsilon_{sp}, C)$.

(3) *Let us finally prove the TFM left invertibility of (28):*
For this, let us define the transfer function matrices associated with systems (9), (25) and (28):

$$T_z^y(\mathrm{s}) = C(\mathrm{sI} - A)^{-1}B \quad ; \quad \widehat{T}_z^{\bar{y}}(\mathrm{s}) = \widehat{C}(\mathrm{sI} - \widehat{A}_K)^{-1}\widehat{B} \quad ; \quad S_z^v(\mathrm{s}) = -\widehat{\Upsilon}^T(\mathrm{s}\widehat{A}_K^T - \mathrm{I})^{-1}\widehat{B} = -\Upsilon^T(\mathrm{s}N_c - \mathrm{I})^{-1}B$$

Since rank $T_z^y(\mathrm{s}) =$ rank $\widehat{T}_z^{\bar{y}}(\mathrm{s})$, the *TFM left invertibility* of $S_z^v(\mathrm{s})$ is then proved showing that $\widehat{T}_z^{\bar{y}}(\mathrm{s})$ and $S_z^v(\mathrm{s})$ are related by an invertible matrix.

Let us sketch the proof on a generic example, with: $\eta = 3$, $\kappa_1 = 3$, $\kappa_2 = 2$ and $\kappa_3 = 1$. For this particular case, the Markov's parameters are:

$$\widehat{C}\widehat{B} = \begin{bmatrix} b^1_{1,1} & b^1_{1,2} & b^1_{1,3} \\ b^2_{1,1} & b^2_{1,2} & b^2_{1,3} \\ b^3_{1,1} & b^3_{1,2} & b^3_{1,3} \end{bmatrix} \; ; \; \widehat{C}\widehat{A}_K\widehat{B} = \begin{bmatrix} b^1_{2,1} & b^1_{2,2} & b^1_{2,3} \\ b^2_{2,1} & b^2_{2,2} & b^2_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \; ; \; \widehat{C}(\widehat{A}_K)^2\widehat{B} = \begin{bmatrix} b^1_{3,1} & b^1_{3,2} & b^1_{3,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \; ; \; \widehat{C}(\widehat{A}_K)^3\widehat{B} = 0$$

$$\widehat{\Upsilon}^T\widehat{B} = \begin{bmatrix} b^1_{3,1} & b^1_{3,2} & b^1_{3,3} \\ b^2_{2,1} & b^2_{2,2} & b^2_{2,3} \\ b^3_{1,1} & b^3_{1,2} & b^3_{1,3} \end{bmatrix} \; ; \widehat{\Upsilon}^T\widehat{A}_K^T\widehat{B} = \begin{bmatrix} b^1_{2,1} & b^1_{2,2} & b^1_{2,3} \\ b^2_{1,1} & b^2_{1,2} & b^2_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \; ; \widehat{\Upsilon}^T(\widehat{A}_K^T)^2\widehat{B} = \begin{bmatrix} b^1_{1,1} & b^1_{1,2} & b^1_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \; ; \; \widehat{\Upsilon}^T(\widehat{A}_K^T)^3\widehat{B} = 0$$

Which implies: $S_z^v(\mathrm{s}) = \frac{1}{\mathrm{s}}\begin{bmatrix} \mathrm{s}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{s} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\widehat{T}_z^{\bar{y}}(\mathrm{s})$. Then: rank $S_z^v(\mathrm{s}) =$ rank $\widehat{T}_z^{\bar{y}}(\mathrm{s}) =$ rank $T_z^y(\mathrm{s})$. That is to say, the *TFM left invertibility* of $T_z^y(\mathrm{s})$ implies the *TFM left invertibility* of $S_z^v(\mathrm{s})$. The general case can easily be treated in the same way. $\square$