



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS  
AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO  
NACIONAL

DEPARTAMENTO DE CONTROL AUTOMÁTICO

**Retroalimentación singularmente perturbada para  
subespacios casi de controlabilidad**

**TESIS QUE PRESENTA:**

M. en C. Hugo Méndez Delgadillo

**PARA OBTENER EL GRADO DE:**

Doctor en Ciencias

**EN LA ESPECIALIDAD DE:**

Control Automático

**Director de tesis:**

Dr. Moisés Bonilla Estrada

Mexico, D.F.

*Junio 2011*



*Con todo el amor del mundo a mi esposa  
Nancy Arely Núñez Luna  
con la cual he tenido el honor de  
compartir muchos momentos de felicidad.  
Su valioso amor y apoyo en todo momento  
ha sido incondicional y fundamental*

*A mis padres:  
Esperanza Delgadillo y  
Salvador Méndez.  
Por la educación, consejos y amor  
depositados en mí, con el único fin de  
formar una persona responsable y un buen  
ser humano.*

*Con mucho cariño, a mis hermanos:  
Omar, Sonia, Gabriela  
Carlos, Salvador.  
A mis sobrinas:  
Paulina y Fernanda.  
Por todos los momentos especiales que he  
compartido con cada uno de ellos, y que  
sin lugar a dudas seguiremos  
compartiendo por el resto de nuestras  
vidas.*



# Agradecimientos

A mis abuelos:

Guadalupe Medina

† Jesús Delgadillo

† Elena Manjarrez

† Teodoro Méndez

Por inculcar en mis padres, los mismos principios y valores que me transmitieron.

A los Sinodales:

Rogelio Lozano Leal

Juan Carlos Martínez García

Rafael Martínez Guerra

Basilio del Muro Cuellar

Gabriel Daniel Villa Salvador

Con todo mi aprecio al Dr Moisés Bonilla Estrada, por su confianza, paciencia inagotable, amabilidad, sencillez y su invaluable ayuda para la realización de esta tesis.

Con todo cariño al Instituto Politécnico Nacional:

Pues estoy orgulloso de haber pertenecido a esta noble institución desde mis estudios de bachillerato.

Finalmente, agradezco al CONACyT por el apoyo dado durante mis estudios de Doctorado, a través de una de sus becas.



# Índice general

|                 |      |
|-----------------|------|
| Agradecimientos | v    |
| Notación        | xi   |
| Abstract        | xiii |
| Resumen         | xv   |
| Introducción    | xvii |

## I Subespacios Casi de Controlabilidad: Retroalimentaciones de Altas Ganancias y Retroalimentaciones Proporcional Derivativas

XIX

|                                                                                         |          |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| <b>1. Sistemas y Subespacios</b>                                                        | <b>1</b> |
| 1.1. Introducción . . . . .                                                             | 1        |
| 1.2. Subespacios y Algoritmos . . . . .                                                 | 2        |
| 1.3. Sistemas . . . . .                                                                 | 4        |
| 1.3.1. Sistema Entrada/Estado . . . . .                                                 | 4        |
| 1.3.2. Sistema Entrada/Estado/Salida . . . . .                                          | 5        |
| 1.3.3. Sistema Entrada/Variable Descriptora Regular . . . . .                           | 5        |
| 1.4. Conclusión . . . . .                                                               | 6        |
| <b>2. Retroalimentación de Altas Ganancias para Subespacios Casi de Controlabilidad</b> | <b>9</b> |
| 2.1. Introducción . . . . .                                                             | 9        |
| 2.2. Subespacios Casi de Controlabilidad . . . . .                                      | 10       |
| 2.2.1. Caracterizaciones Geométricas de $\mathcal{R}_a$ . . . . .                       | 10       |
| 2.2.2. Forma Canónica Casi de Controlabilidad . . . . .                                 | 11       |
| 2.3. Entradas Distribucionales . . . . .                                                | 12       |

|                                                                                                                               |               |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------|
| 2.4. Ejemplo Ilustrativo (Parte 1) . . . . .                                                                                  | 13            |
| 2.5. Aproximación de un Subespacio Casi de Controlabilidad . . . . .                                                          | 15            |
| 2.6. Ejemplo Ilustrativo (Parte 2) . . . . .                                                                                  | 16            |
| 2.6.1. Descomposición del Subespacio $\mathcal{S}_{\mathcal{K}}^{\infty}$ en Subespacios Casi<br>de Controlabilidad . . . . . | 16            |
| 2.6.2. Aproximación por Subespacios Casi $(A, B)$ -Invariantes . . . . .                                                      | 18            |
| 2.6.3. Matriz Cambio de Base . . . . .                                                                                        | 19            |
| 2.6.4. Retroalimentación de Altas Ganancias . . . . .                                                                         | 21            |
| 2.6.5. Comportamiento del Sistema en Lazo Cerrado . . . . .                                                                   | 24            |
| 2.6.6. Simulaciones . . . . .                                                                                                 | 30            |
| 2.7. Conclusión . . . . .                                                                                                     | 33            |
| <b>3. Retroalimentación Proporcional Derivativa Basada en el Sistema<br/>Inverso</b>                                          | <b>37</b>     |
| 3.1. Descomposición en Subsistemas . . . . .                                                                                  | 37            |
| 3.1.1. Subsistema Maestro . . . . .                                                                                           | 38            |
| 3.1.2. Subsistema Esclavo . . . . .                                                                                           | 38            |
| 3.1.3. Subsistema Casi de Desacoplamiento . . . . .                                                                           | 39            |
| 3.2. Retroalimentación P.D. Basada en el Control de Altas Ganancias<br>de Trentelman:                                         |               |
| Ejemplo Ilustrativo (Parte 3) . . . . .                                                                                       | 40            |
| 3.2.1. Retroalimentación de Alta Ganancia de Trentelman . . . . .                                                             | 40            |
| 3.2.2. Modelo Singularmente Perturbado . . . . .                                                                              | 41            |
| 3.2.3. Retroalimentación Proporcional Derivativa de Trentelman . . . . .                                                      | 45            |
| 3.3. Retroalimentación Proporcional Derivativa Basada en el Sistema<br>Inverso . . . . .                                      | 47            |
| 3.3.1. Retroalimentación Proporcional Derivativa . . . . .                                                                    | 47            |
| 3.3.2. Representación del Sistema en Lazo Cerrado . . . . .                                                                   | 47            |
| 3.3.3. Comportamiento del Sistema en Lazo Cerrado . . . . .                                                                   | 49            |
| 3.3.4. Ejemplo Ilustrativo (Parte 4) . . . . .                                                                                | 51            |
| 3.4. Conclusión . . . . .                                                                                                     | 56            |
| <br><b>II Aproximaciones Propias de Leyes de Control Pro-<br/>porcionales Derivativas</b>                                     | <br><b>57</b> |
| <b>4. Filtro Acoplador de Derivadas Singularmente Perturbado (fil-<br/>tro ADSP)</b>                                          | <b>59</b>     |
| 4.1. Introducción . . . . .                                                                                                   | 59            |
| 4.2. Interpretación del Problema para el Caso SISO . . . . .                                                                  | 60            |



|                                                                                                    |               |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------|
| 4.3. Filtro Acoplador de Derivadas Singularmente Perturbado (filtro ADSP) . . . . .                | 61            |
| 4.3.1. Modelo de Dos Escalas en el Tiempo. . . . .                                                 | 67            |
| 4.3.2. Propiedades de los Valores Propios. . . . .                                                 | 70            |
| 4.3.3. Comportamiento Externo del filtro-ADSP . . . . .                                            | 72            |
| 4.4. Conclusión . . . . .                                                                          | 78            |
| <b>5. Aproximaciones Propias (Caso MIMO)</b>                                                       | <b>79</b>     |
| 5.1. Introducción . . . . .                                                                        | 79            |
| 5.2. Estabilidad Relativa del Filtro ADSP . . . . .                                                | 80            |
| 5.2.1. Caso $\kappa \leq 3$ . . . . .                                                              | 81            |
| 5.2.2. Caso $\kappa > 3$ . . . . .                                                                 | 81            |
| 5.3. Aproximación Propia . . . . .                                                                 | 83            |
| 5.3.1. Convergencia . . . . .                                                                      | 83            |
| 5.3.2. Margen de Estabilidad . . . . .                                                             | 85            |
| 5.4. Densidad . . . . .                                                                            | 86            |
| 5.5. Ejemplo Ilustrativo . . . . .                                                                 | 86            |
| 5.6. Conclusión . . . . .                                                                          | 90            |
| <br><b>III Retroalimentación Singularmente Perturbada para Subespacios Casi de Controlabilidad</b> | <br><b>93</b> |
| <b>6. Retroalimentación Singularmente Perturbada para Subespacios Casi de Controlabilidad</b>      | <b>95</b>     |
| 6.1. Introducción . . . . .                                                                        | 95            |
| 6.2. Retroalimentación Singularmente Perturbada . . . . .                                          | 95            |
| 6.2.1. Filtro Acoplador Singularmente Perturbado . . . . .                                         | 96            |
| 6.2.2. Retroalimentación Singularmente Perturbada . . . . .                                        | 102           |
| 6.3. Ejemplo Ilustrativo (Parte 5) . . . . .                                                       | 104           |
| 6.3.1. Simulaciones . . . . .                                                                      | 106           |
| 6.4. Conclusión . . . . .                                                                          | 106           |
| <b>7. Conclusiones y Perspectivas</b>                                                              | <b>111</b>    |
| 7.1. Conclusiones . . . . .                                                                        | 111           |
| 7.2. Perspectivas . . . . .                                                                        | 113           |
| <b>A. Definición de Parámetros</b>                                                                 | <b>115</b>    |
| <b>B. Forma de Kronecker</b>                                                                       | <b>119</b>    |

|                         |            |
|-------------------------|------------|
| <b>C. Publicaciones</b> | <b>123</b> |
| <b>Bibliografía</b>     | <b>133</b> |

# Notación

En esta sección se dan las notaciones más importantes de este trabajo.

- Las letras mayúsculas  $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \dots$ , denotan espacios lineales con elementos  $u, v, w, x, y, \dots$ , respectivamente.
- Las letras  $\mathcal{X}$  y  $\mathcal{U}$  en general denotan el espacio de estados y el espacio de entradas de control.
- $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$  es una transformación lineal cuya imagen es denotada simplemente por  $A\mathcal{X}$ , su núcleo es denotado por  $\ker A$ .
- $B : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}$  es una transformación lineal cuya imagen es denotada simplemente por  $\mathcal{B}$ .
- Si  $A : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$  es una transformación lineal y  $\mathcal{S}$  es un subespacio de  $\mathcal{W}$  denotamos por  $A^{-1}\mathcal{S}$  a la imagen inversa de  $\mathcal{S}$  bajo  $A$ .
- Si dos subespacios  $\mathcal{V}, \mathcal{W}$  son isomorfos, lo denotaremos por:  $\mathcal{V} \cong \mathcal{W}$ .
- La suma directa de espacios independientes  $\mathcal{V}, \mathcal{W}$  es escrita como  $\mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$ .
- Por  $\|\cdot\|_2$  se entiende la norma euclídeana ( $L_2$ ) y por  $\|\cdot\|_1$  se entiende la norma ( $L_1$ ); en el caso de que  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$  y  $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ .
- Si  $(X, d)$  es un espacio métrico,  $A \subset X$ ,  $x \in X$ , entonces  $d(x, A)$  denota la distancia del punto  $x$  al conjunto  $A$ .
- $d_\infty(x, \mathcal{K}) := \inf \left\{ d(x(t), k) \mid t > 0, \quad k \in \mathcal{K} \right\}$   
 $\mathcal{S}_{\mathcal{K}}^\infty$  es el supremo de los subespacios casi de controlabilidad contenidos en  $\mathcal{K}$ .
- $\Sigma_{e/e}$  denota un *sistema entrada/estado*.

- $\Sigma_{e/p/e}$  denota *unsistema entrada/perturbación/estado*
- $\Sigma_{e/e/s}$  denota *unsistema entrada/estado/salida*
- $\Sigma_{e/d}$  denota *unsistema entrada/variable descriptora regular*
- Denotamos por  $A_F$  a  $A + BF$
- SISO denota un sistema de una entrada, una salida.
- MIMO denota un sistema de múltiples entradas y múltiples salidas.
- Sean  $a, b \in \mathbb{Z}$ , se denota el conjunto de enteros mayores o iguales a  $a$  y menores o iguales a  $b$  como  $[[a, b]]$ , por ejemplo  $[[ -5, 2]] = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ .
- $\chi_\kappa^i$  denota un  $\kappa \times 1$  vector cuya  $i$ -ésima componente es 1 y las otras componentes son cero, (en el caso que  $i > \kappa$  todas las componentes son tomadas igual a cero).  $T_u\{v^T\}$  denota una matriz Toeplitz triangular superior con primer renglón  $v^T$ .  $T_\ell\{v\}$  denota una matriz Toeplitz triangular inferior con primera columna  $v$ .
- $BDM\{X_1, \dots, X_\kappa\}$  denota matriz diagonal por bloques cuyos bloques son matrices diagonales  $X_1, \dots, X_\kappa$ .  $\mathbf{I}_\kappa$  denota una  $\kappa \times \kappa$  matriz identidad, o simplemente  $\mathbf{I}$  cuando no tenga que ser indicado de forma explícita.
- $i$  es el número imaginario  $\sqrt{-1}$ .  $s$  es la variable compleja de Laplace. Dada una función del tiempo  $f(t)$  escribimos  $F(s)$  para su transformada de Laplace.  $\mathcal{L}^{-1}\{\cdot\}$  denota la inversa de la transformada de Laplace.
- Dadas dos funciones de  $\varepsilon$ ,  $f$  y  $\varphi$ , con  $\varepsilon > 0$  y  $\varphi(\varepsilon) > 0$ , escribimos:  $f(\varepsilon) = \mathcal{O}(\varphi(\varepsilon))$  cuando existen constantes  $\varepsilon^* > 0$  y  $K > 0$  tales que  $|f(\varepsilon)| \leq K\varphi(\varepsilon)$  para  $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$ . En vez de:  $g + f(\varepsilon)$  con  $f(\varepsilon) = \mathcal{O}(\varphi(\varepsilon))$ , ésta es simplemente escrita como:  $g + \mathcal{O}(\varphi(\varepsilon))$  (ver [13] para detalles).

# Abstract

In this thesis work we study the high gain feedback, proposed by Trentelman [27], which aim is to approximate the distributional feedback, proposed by Willems [29, 30, 32]. We show that such a high gain feedback tends indeed to a proportional and derivative control law.

We show that almost controllability can be also obtained by means of singularly perturbed state feedbacks which are approximations of Proportional and Derivative state feedbacks. We show on a particular example that any Almost Controllability Subspace can also be interpreted as a subspace that can be made unobservable by means of a Proportional and Derivative state feedback. This is done using singularly perturbed techniques for analyzing the high gain feedbacks related to the Almost Controllability Subspace.

In some control and observations problems, it may be convenient, at least from the analysis point of view, to use non proper systems. However, as far as their implementation is concerned, proper approximations have to be designed. In this thesis work, we show how exponential approximations can be rather easily designed. We first consider the SISO case, and we next extend such results to the MIMO case. We also study the relative stability of the approximation for the MIMO case. As a by product, we show that the set of proper time-invariant linear systems is dense in the set of regular linear descriptor systems.



# Resumen

En este trabajo de tesis se estudian las retroalimentaciones de alta ganancia, propuestas por Trentelman [27], las cuales fueron concebidas para aproximar las retroalimentaciones distribucionales propuestas por Willems [29, 30, 32]. También se muestra que estas retroalimentaciones de alta ganancia son de hecho aproximaciones de leyes de control del tipo proporcional y derivativa.

También se muestra que la casi controlabilidad es obtenida mediante retroalimentaciones de estado singularmente perturbadas, las cuales son aproximaciones de retroalimentaciones de estado proporcional y derivativa. Mediante un ejemplo particular, se muestra que cualquier subespacio de casi controlabilidad puede interpretarse como un subespacio que se hace inobservable por medio de una retroalimentación proporcional y derivativa. Esto se hace utilizando la técnica de las perturbaciones singulares para analizar las retroalimentaciones de alta ganancia de los subespacios de casi controlabilidad.

En algunos problemas de control y de observación, puede ser conveniente, al menos desde un punto de vista analítico, la utilización de sistemas no propios. Ahora bien, cuando se procede a la realización práctica, hay que diseñar aproximaciones propias. En este trabajo de tesis, se muestra como realizar fácilmente aproximaciones exponenciales. Se considera primero el caso SISO, y después se extienden los resultados al caso MIMO. También se estudia la estabilidad relativa de las aproximaciones para el caso MIMO. Como un resultado extra, se muestra que el conjunto de sistemas lineales propios invariantes en el tiempo es denso en el conjunto de los sistemas lineales descriptores regulares.





# Introducción

Con los artículos de Brunovsky [9] y Morse [19] se inició en forma estructural el estudio de sistemas lineales. Ello hizo posible atacar problemas de control a partir de un punto de vista formal, y para entender como las propiedades estructurales de los sistemas juegan un papel importante en la solubilidad de tales problemas de control.

En particular Morse [19] es uno de los artículos claves para el enfoque estructural y geométrico. Más precisamente, algunas propiedades estructurales importantes pueden ser interpretadas en términos de la  $(A, B)$ -invarianza y de la controlabilidad de subespacios, los cuales son relacionados con las transformaciones lineales de la representación espacio estado de los sistemas. De un modo simple, estos subespacios de los cuales hablamos son la parte maximal del sistema la cual puede hacerse inobservable (hacerse invariante dentro del núcleo de la transformación lineal de salida) por una retroalimentación de estado y por alguna parte con dinámica asignable. Éste fue el punto de inicio para un estudio sistemático de la estructura de sistemas lineales. En Wonham [34] y Marro [2] son resumidos los resultados importantes del enfoque geométrico.

Un aporte importante a la Teoría de Control fue dada por Willems al introducir los *subespacios casi  $(A, B)$ -invariantes* y *subespacios casi de controlabilidad* [29, 30, 32]. Su importancia radica en el hecho de que algunas propiedades estructurales importantes de los sistemas lineales pueden interpretarse en términos de estos subespacios *casi  $(A, B)$ -invariantes* y *casi de controlabilidad*, los cuales están relacionados con retroalimentaciones de estado de alta ganancia, como aproximaciones de retroalimentaciones de estado distribucionales [29, 30, 32]. Estos subespacios son útiles cuando no es posible tener soluciones exactas.

En este trabajo de tesis se estudian las retroalimentaciones de alta ganancia, propuestas por Trentelman [27], las cuales fueron concebidas para aproximar las retroalimentaciones distribucionales propuestas por Willems [29, 30, 32]. También se muestra que estas retroalimentaciones de alta ganancia son de hecho aproximaciones de leyes de control del tipo proporcional y derivativa. Para esto:

- En el Capítulo 1 se dan definiciones de subespacios y sistemas importantes que se utilizarán a lo largo de la tesis.
- En el Capítulo 2 se da un breve resumen de los principales resultados del trabajo doctoral de Trentelman [27] relacionado con la realización práctica de las leyes de control distribucionales, a saber su realización mediante leyes de control de alta ganancia.
- En los Capítulos 3 y 6 se muestra que estas aproximaciones de alta ganancia, son también aproximaciones de leyes de control proporcional derivativo; es decir que las leyes de control distribucionales corresponden a leyes de control proporcional derivativas.

Entre los Capítulos 3 y 6 se abre un paréntesis para considerar el problema de la aproximación de leyes de control impropias por controladores propios, que conserven (aproximadamente) las bondades de las leyes de control impropias. Para esto:

- En el Capítulo 4 se resuelve el problema de aproximación de sistemas lineales no propios para el caso SISO.
- En el Capítulo 5 se extienden los resultados del Capítulo 4 para el caso MIMO.

En el Capítulo 7 se concluye.

## Parte I

# Subespacios Casi de Controlabilidad: Retroalimentaciones de Altas Ganancias y Retroalimentaciones Proporcionales Derivativas



# Capítulo 1

## Sistemas y Subespacios

### 1.1. Introducción

Con los artículos de Brunovsky [9] y Morse [19] se inició en forma estructural el estudio de sistemas lineales. Ello hizo posible atacar problemas de control a partir de un punto de vista formal, y para entender como las propiedades estructurales de los sistemas juegan un papel importante en la solubilidad de tales problemas de control.

En particular [19] es uno de los artículos claves para el enfoque estructural y geométrico. Más precisamente, algunas propiedades estructurales importantes pueden ser interpretadas en términos de la  $(A, B)$ -invarianza y de la controlabilidad de subespacios, los cuales son relacionados con las transformaciones lineales de la representación espacio estado de los sistemas. De un modo simple, estos subespacios de los cuales hablamos son la parte maximal del sistema la cual puede hacerse inobservable (hacerse invariante dentro del núcleo de la transformación lineal de salida) por una retroalimentación de estado y por alguna parte con dinámica asignable. Éste fue el punto de inicio para un estudio sistemático de la estructura de sistemas lineales. En los artículos de Wonham [34] y Marro [2] son resumidos los resultados importantes del enfoque geométrico.

Un segundo estudio importante ocurre con la introducción de los subespacios casi de controlabilidad y los subespacios casi  $(A, B)$ -invariantes debida a Willems, los cuales son relacionados con las transformaciones lineales de la representación espacio estado de los sistemas. [29, 30, 32]. Estos subespacios son usados cuando no se observa una solución exacta. Los subespacios casi de controlabilidad y los subespacios casi  $(A, B)$ -invariantes han sido conectados con el uso de retroalimentaciones de estado de altas ganancias, como aproximaciones de retroalimentaciones de estado distribucionales.

## 1.2. Subespacios y Algoritmos

Sea el sistema descrito por:

$$\frac{d}{dt}x = Ax + Bu, \quad (1.1)$$

donde:  $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$  y  $B : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}$  son transformaciones lineales.

En esta sección, recordamos definiciones, caracterizaciones geométricas importantes y algoritmos para la construcción de algunos subespacios importantes, para más detalles ver ([34]).

### Definición 1 ( Subespacio $A$ -Invariante )

Sean  $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$  una transformación lineal y  $\mathcal{S} \subset \mathcal{X}$  un subespacio, se dice que  $\mathcal{S}$  es un subespacio  $A$ -invariante si  $A\mathcal{S} \subset \mathcal{S}$ .

### Definición 2 ( Subespacio $(A, B)$ -Invariante )

Sean  $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ ,  $B : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}$  dos transformaciones lineales, donde  $\mathcal{S} \subset \mathcal{X}$  es un subespacio y  $\mathcal{B}$  la imagen de  $B$ . Se dice que  $\mathcal{S}$  es un subespacio  $(A, B)$ -invariante si  $A\mathcal{S} \subset \mathcal{S} + \mathcal{B}$ .

Equivalentemente,  $\mathcal{S}$  es un subespacio  $(A, B)$ -invariante, si existe una retroalimentación de estado  $F$  tal que  $\mathcal{S}$  es  $A + BF$ -invariante.

Sea  $\mathcal{K}$  cualquier subespacio de  $\mathcal{X}$ . Entonces el subespacio supremo de los subespacios  $(A, B)$ -invariantes contenidos en  $\mathcal{K}$ , denotado por  $\mathcal{S}_{\mathcal{K}}^*$  se calcula apartir del siguiente algoritmo no creciente; <sup>1</sup>

$$\mathcal{S}^0 = \mathcal{X}; \quad \mathcal{S}^{\mu+1} = \mathcal{K} \cap A^{-1}(\mathcal{S}^{\mu} + \mathcal{B}) \quad (\text{ISA})$$

### Definición 3 ( Subespacio de Controlabilidad )

Un subespacio  $\mathcal{R} \subset \mathcal{X}$  se dice subespacio de controlabilidad si  $\forall x_1 \in \mathcal{R}$  y  $\forall T > 0$  existe una ley de control  $u(t)$  tal que la correspondiente trayectoria  $x(t)$  satisfaga:  $x(0) = 0, x(T) = x_1$  y  $x(t) \in \mathcal{R}, \forall t > 0$ .

---

<sup>1</sup>De las siglas en ingles “Invariant Subspace Algorithm”.

Equivalentemente  $\mathcal{R}$  es un subespacio de controlabilidad si y sólo si existe una retroalimentación de entrada  $F$  y una transformación lineal  $G$  tal que  $\mathcal{R}$  es el subespacio controlable de  $(A + BF, BG)$ , es decir  $\mathcal{R} = \langle A + BF | \text{Im}(BG) \rangle$

Sea  $\mathcal{K}$  cualquier subespacio contenido en  $\mathcal{X}$ , entonces existe un subespacio supremo de contrabilidad contenido en  $\mathcal{K}$ , denotado por  $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}^*$  y se calcula apartir del siguiente algoritmo no decreciente;<sup>2</sup>

$$\mathcal{R}^0 = 0; \quad \mathcal{R}^{\mu+1} = \mathcal{S}_{\mathcal{K}}^* \cap (A\mathcal{R}^{\mu} + \mathcal{B}) \quad (\text{CSA})$$

**Definición 4** ( Subespacio Casi  $(A, B)$ -Invariante )

Un subespacio  $\mathcal{V}_a \subset \mathcal{X}$  se dice subespacio casi  $(A, B)$ -invariante si  $\forall x_0 \in \mathcal{V}_a$  y  $\forall \varepsilon > 0$  existe una trayectoria del sistema con las propiedades que  $x(0) = x_0$ ,  $d(x(t), \mathcal{V}_a) \leq \varepsilon \quad \forall t \in \mathbb{R}$ .

**Definición 5** ( Subespacio Casi de Contrabilidad [27])

Un subespacio  $\mathcal{R}_a \subset \mathcal{X}$  se dice subespacio casi de contrabilidad si  $\forall x_0, x_1 \in \mathcal{R}_a$ , existe  $T > 0$  tal que  $\forall \rho > 0$  existe una trayectoria del sistema con las siguientes propiedades:  $x(0) = x_0$ ,  $x(T) = x_1$  y  $d_{\infty}(x, \mathcal{R}_a) \leq \rho$ .

Sea  $\mathcal{K}$  un subespacio de  $\mathcal{X}$ , entonces el subespacio  $\mathcal{S}_{\mathcal{K}}^{\infty}$  es el límite del siguiente algoritmo no decreciente<sup>3</sup>:

$$\mathcal{S}^0 = \{0\} ; \quad \mathcal{S}^{\mu+1} = \mathcal{K} \cap (A\mathcal{S}^{\mu} + \mathcal{B}), \quad \mu > 0 \quad (\text{ACSA})$$

$\mathcal{S}_{\mathcal{K}}^{\infty}$  es el supremo de los subespacios casi de controlabilidad contenidos en  $\mathcal{K}$ .

Sea  $\mathcal{V}_{\mathcal{K}}$  el supremo  $(A, B)$ -invariante contenido en  $\mathcal{K}$ , entonces  $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}^* \subset \mathcal{V}_{\mathcal{K}}^*$ , es decir,  $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}^* \cap \mathcal{V}_{\mathcal{K}}^* = \mathcal{R}_{\mathcal{K}}^*$  lo que implica:  $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}^* = \mathcal{V}_{\mathcal{K}}^* \cap \mathcal{S}_{\mathcal{K}}^{\infty}$ , este es el supremo de los

<sup>2</sup>De las siglas en ingles “Controlability Subspace Algorithm”.

<sup>3</sup>De las siglas en ingles “Almost Controlability Subspace Algorithm”.

subespacios de controlabilidad contenidos en  $\mathcal{K}$  (ver [29], [30], [32])

## 1.3. Sistemas

### 1.3.1. Sistema Entrada/Estado

Un *sistema entrada/estado*,  $\Sigma_{e/e} = (\mathbb{R}^+, \mathcal{U} \times \mathcal{X}_{def}, \mathfrak{B}_{[A,B]}^{exp})$ , es un sistema dinámico definido por la representación espacio-estado [33] (ver también [22])

$$\frac{d}{dt}x_f = Ax_f + Bu \quad (1.2)$$

donde  $u \in \mathcal{U} \cong \mathbb{R}^m$  es la variable de entrada y  $x_f \in \mathcal{X}_{def} \cong \mathbb{R}^{n_f}$  es la variable de estado. Suponemos que la transformación lineal de entrada  $B$  es mónica.

Apartir de la teoría de Kronecker [12], el abanico asociado,  $[\lambda I - A]$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ , contiene únicamente divisores elementales finitos (acciones integrales), *def*. Su comportamiento  $\mathfrak{B}_{[A,B]}^{exp}$ , es del tipo exponencial, esto es <sup>4</sup>:

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_{[A,B]}^{exp} = \Big\{ (u, x_f) \in \mathcal{L}_1^{loc}(\mathbb{R}^+, \mathcal{U} \times \mathcal{X}_{def}) \mid \\ \exists x_0 \in \mathcal{X}_{def} \text{ tal que } x_f(t) = \mathbf{e}^{At}x_0 + \int_0^t \mathbf{e}^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \Big\}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Algunas veces la variable de entrada es descompuesta en dos componentes,  $u \in \mathcal{U}$  y  $q \in \mathcal{Q} \cong \mathbb{R}^\nu$ . La primera componente es libre para ser usada como señal de control (variable controlada o simplemente entrada) y la segunda componente es no controlada (llamada perturbación). En este caso escribimos  $\Sigma_{e/p/e} = (\mathbb{R}^+, [\mathcal{U} \times \mathcal{Q}] \times \mathcal{X}_{def}, \mathfrak{B}_{[A,[B \ S]]}^{exp})$ , siendo la representación espacio estado:

$$\frac{d}{dt}x_f = Ax_f + Bu + Sq \quad (1.4)$$

---

<sup>4</sup>Se usa la notación  $\mathcal{X}_{def}$  para indicar que está relacionado con los divisores elementales finitos del abanico  $[\lambda I - A]$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ . En esta tesis se restringe el comportamiento al espacio funcional  $C^\infty$  en vez del espacio funcional de las funciones localmente integrables utilizado por Willems, esto es por que se trabaja con leyes de control proporcionales derivativas.



y su comportamiento es del tipo exponencial, esto es:

$$\mathfrak{B}_{[A,[B \ S]]}^{exp} = \left\{ ((u, q), x_f) \in \mathcal{L}_1^{loc}(\mathbb{R}^+, [\mathcal{U} \times \mathcal{Q}] \times \mathcal{X}_{def}) \mid \exists x_0 \in \mathcal{X}_{def} \text{ tal que} \right. \\ \left. x_f(t) = \mathbf{e}^{At} x_0 + \int_0^t \mathbf{e}^{A(t-\tau)} (Bu(\tau) + Sq(\tau)) d\tau \right\}. \quad (1.5)$$

### 1.3.2. Sistema Entrada/Estado/Salida

Es también usual agregarle a la representación espacio estado (1.2) una variable de salida,  $y \in \mathbb{R}^p$ , por medio de una ecuación de salida:

$$y = Cx_f + Du \quad (1.6)$$

En este caso, se obtiene un *sistema entrada/estado/salida*,  $\Sigma_{e/e/s} = (\mathbb{R}^+, \mathcal{U} \times \mathcal{X}_{def} \times \mathcal{Y}, \mathfrak{B}_{[A,B,C,D]}^{exp})$ . El comportamiento es del tipo exponencial, esto es:

$$\mathfrak{B}_{[A,B,C,D]}^{exp} = \left\{ (u, x_f, y) \in C^\infty(\mathbb{R}^+, \mathcal{U} \times \mathcal{X}_{def} \times \mathcal{Y}) \mid \right. \\ \left. \exists (u, x_f) \in \mathfrak{B}_{[A,B]}^{exp} \text{ tal que } y(t) = Cx_f(t) + Du(t) \right\}. \quad (1.7)$$

En el caso que  $D = 0$ , simplemente escribimos  $\mathfrak{B}_{[A,B,C]}^{exp}$ .

### 1.3.3. Sistema Entrada/Variable Descriptora Regular

Un *Sistema Entrada/Variable Descriptora Regular*,  $\Sigma_{e/d} = (\mathbb{R}^+, \mathcal{U} \times [\mathcal{X}_{def} \times \mathcal{X}_\infty], \tilde{\mathfrak{B}}_{[A,B]}^{exp} \oplus \tilde{\mathfrak{B}}_{[N,\Gamma]}^{pol})$ , es un sistema dinámico definido por la representación de estado descriptor (expresado en su forma de Weierstrass) [12]:

$$\begin{aligned} \frac{dx_f}{dt} &= Ax_f + Bu \\ N \frac{dx_\infty}{dt} &= x_\infty - \Gamma u \\ x &= \begin{bmatrix} x_f^T & x_\infty^T \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (1.8)$$

donde  $u \in \mathcal{U} \cong \mathbb{R}^m$  es la variable de entrada y  $x \in \mathcal{X}_d = \mathcal{X}_{def} \oplus \mathcal{X}_{ied} \approx \mathbb{R}^{n_f+n_\infty}$  es la variable descriptora. A partir de la teoría de Kronecker, el abanico asociado de esta descripción contiene dos tipos de bloques: (i) El bloque  $[\lambda \mathbf{I} - A]$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ , es

un divisor elemental finito, que describe acciones integrales y cuyo comportamiento es del tipo exponencial  $\mathfrak{B}_{[A,B]}^{exp}$ . (ii) El bloque  $[\lambda N - \mathbf{I}]$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ , es un divisor elemental infinito, que describe acciones derivativas, en este caso se tendrá un comportamiento del tipo polinomial  $\tilde{\mathfrak{B}}_{[N,\Gamma]}^{pol}$ , definido de la siguiente manera:

$$\tilde{\mathfrak{B}}_{[N,\Gamma]}^{pol} = \left\{ (u, x_\infty) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+, \mathcal{U} \times \mathcal{X}_{ied}) \mid x_\infty(t) = \Gamma u(t) + \sum_{j=1}^{n_\infty-1} N^j \Gamma \frac{d^j}{dt^j} u(t) \right\} \quad (1.9)$$

Si agregamos a (1.8) una variable de salida,  $y \in \mathbb{R}^p$ , por medio de la ecuación de salida:

$$y = \begin{bmatrix} C & \Theta \end{bmatrix} x \quad (1.10)$$

En este caso, conseguimos:  $\Sigma_{e/d/s} = \left( \mathbb{R}^+, \mathcal{U} \times [\mathcal{X}_{def} \times \mathcal{X}_\infty] \times \mathcal{Y}, \tilde{\mathfrak{B}}_{[A,B,C]}^{exp} \oplus \tilde{\mathfrak{B}}_{[N,\Gamma,\Theta]}^{pol} \right)$ , cuyo comportamiento polinomial es:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{B}}_{[N,\Gamma,\Theta]}^{pol} = & \left\{ (u, x_\infty, y_\infty) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+, \mathcal{U} \times \mathcal{X}_{ied} \times \mathcal{Y}) \mid \right. \\ & \left. \exists (u, x_\infty) \in \tilde{\mathfrak{B}}_{[N,\Gamma]}^{pol} \text{ s.t. } y_\infty(t) = \Theta x_f(t) \right\}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

## 1.4. Conclusión

El estudio estructural de sistemas lineales, nos permite atacar problemas de control a partir de un punto de vista formal, y entender como las propiedades estructurales de los sistemas juegan un papel importante en la solubilidad de tales problemas de control. Algunas propiedades estructurales importantes se han interpretado en términos de la  $(A, B)$ -invarianza y de la controlabilidad de subespacios, los cuales están relacionadas con las transformaciones lineales de la representación espacio estado de los sistemas. De un modo simple, estos subespacios de los cuales hablamos son la parte maximal del sistema la cual puede hacerse inobservable (hacerse invariante dentro del núcleo de la transformación lineal de salida) por una retroalimentación de estado y por alguna parte con dinámica asignable.

Otro análisis importante se tiene cuando se introducen los subespacios casi de

---

controlabilidad y los subespacios casi  $(A, B)$ -invariantes, los cuales están relacionados con las transformaciones lineales de la representación espacio estado de los sistemas. [29, 30, 32]. Estos subespacios son utilizados cuando no es posible obtener una solución exacta.



## Capítulo 2

# Retroalimentación de Altas Ganancias para Subespacios Casi de Controlabilidad

### 2.1. Introducción

Un aporte muy importante a la Teoría de Control fue dada por Willems al introducir los *subespacios casi  $(A, B)$ -invariantes* y *subespacios casi de controlabilidad*. Su importancia radica en el hecho de que algunas propiedades estructurales importantes de los sistemas lineales pueden interpretarse en términos de estos subespacios *casi  $(A, B)$ -invariantes* y *casi de controlabilidad*, los cuales están relacionados con las transformaciones lineales de las representaciones del estado de los sistemas lineales [29, 30, 32]. Estos subespacios son útiles cuando no es posible tener soluciones exactas. Los subespacios *Casi  $(A, B)$ -Invariantes* y *Casi de Controlabilidad* han sido relacionados con la retroalimentación de estado de altas ganancias y con retroalimentaciones de estado de tipo distribucional. En este capítulo se da un breve resumen de los principales resultados del trabajo doctoral de Trentelman [27] relacionado con la realización práctica de las leyes de control distribucionales, a saber su realización mediante leyes de control de alta ganancia. En los Capítulos 3 y 6 se mostrará que estas aproximaciones de alta ganancia, son también aproximaciones de leyes de control proporcional derivativo; es decir que las leyes de control distribucionales corresponden a leyes

de control proporcional derivativas. Se usa el punto de vista comportamental, introducido por Willems en [22]

## 2.2. Subespacios Casi de Controlabilidad

En esta sección recordamos algunas caracterizaciones y propiedades geométricas de los Subespacios Casi de Controlabilidad (ver [27]).

### 2.2.1. Caracterizaciones Geométricas de $\mathcal{R}_a$

Willems caracteriza los subespacios casi de controlabilidad en función de cadenas de subespacios de la imagen de  $B$  de la siguiente manera:

**Corolario 1** ([29], Corolario 1.23 de [27]) *Un subespacio  $\mathcal{R}_a$  de  $\mathcal{X}_{fed}$  es un subespacio casi de controlabilidad si y sólo si existe una transformación lineal  $F : \mathcal{X}_{fed} \rightarrow \mathcal{U}$  y una cadena  $\{\mathcal{B}_i\}_{i=1}^k$  en  $\mathcal{B}$ , esto es  $\mathcal{B} \supset \mathcal{B}_1 \supset \cdots \supset \mathcal{B}_k$  tal que:*

$$\mathcal{R}_a = \mathcal{B}_1 + A_F \mathcal{B}_2 + \cdots + A_F^{k-1} \mathcal{B}_k.$$

*Más aún, existe un  $k \in \mathbb{Z}^{*+} \cup \{0\}$ ,  $k \leq \dim \mathcal{R}_a$ , una cadena  $\{\mathcal{B}_i\}_{i=1}^k$  en  $\mathcal{B}$  y una transformación lineal  $F^* : \mathcal{X}_{fed} \rightarrow \mathcal{U}$  tal que:*

$$\mathcal{R}_a = \mathcal{B}_1 \oplus A_{F^*} \mathcal{B}_2 \oplus \cdots \oplus A_{F^*}^{k-1} \mathcal{B}_k \quad (2.1)$$

$$\mathcal{B}_1 = \mathcal{R}_a \cap \mathcal{B} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{B}_i &= \dim A_F^{i-1} \mathcal{B}_i \\ &= \dim \mathcal{S}^i - \dim \mathcal{S}^{i-1}, \quad i \in [1, k], \end{aligned} \quad (2.3)$$

donde los  $\mathcal{S}^i$ ,  $i \in [0, k]$ , son los pasos del algoritmo [ACSA] con  $\mathcal{K} = \mathcal{R}_a$ .

Willems interpreta los espacios Casi de Controlabilidad en función de las trayectorias del sistema de la manera siguiente:

**Teorema 1** ([29], Teorema 1.24 de [27]) *Sea  $\mathcal{K}$  un subespacio de  $\mathcal{X}_{fed}$  y  $\mathcal{R}_{a,\mathcal{K}}^*$  el supremo de los subespacios casi de controlabilidad contenidos en  $\mathcal{K}$ . Entonces:*

$$\mathcal{R}_{a,\mathcal{K}}^* = \left\{ x_0 \in \mathcal{K} \mid \forall \rho > 0 \exists x_f \in \mathfrak{B}_{[A,B]}^{exp} \text{ tal que } \right. \\ \left. x_f(0) = x_0, \text{ con } x_f(T) = 0 \text{ y } d_\infty(x_f, \mathcal{K}) \leq \rho \right\}$$

*Más aún,  $\mathcal{R}_{a,\mathcal{K}}^* = \mathcal{S}_{\mathcal{K}}^\infty$ .*

### 2.2.2. Forma Canónica Casi de Controlabilidad

El siguiente lema da una descomposición agradable del espacio de estado, para el sistema retroalimentado, en términos del subespacio supremo de contrabilidad, con lo cual seremos capaces de dar importantes conclusiones de tipo estructural:

**Lema 1 (Lema 1.15 de [27])** *Sea  $\mathcal{K}$  un subespacio de  $\mathcal{X}_{fed}$ . Existen subespacios  $\mathcal{X}_1$ ,  $\mathcal{X}_2$  y  $\mathcal{X}_3$  de  $\mathcal{X}_{fed}$  y  $\mathcal{U}_1$ ,  $\mathcal{U}_2$  y  $\mathcal{U}_3$  de  $\mathcal{U}$ , una transformación lineal  $F^* : \mathcal{X}_{fed} \rightarrow \mathcal{U}$ , un entero  $k \leq \dim \mathcal{K}$ ,  $[[0, k-1]]$ , tales que:*

1.  $\mathcal{S}_{\mathcal{K}}^\infty = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2$ ,
2.  $\mathcal{X}_{fed} = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2 \oplus \mathcal{X}_3$ ,
3.  $A_{F^*} \mathcal{X}_1 \subset \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2$ ,
4.  $B\mathcal{U}_i \subset \mathcal{X}_i$ ,  $i \in [[1, 3]]$ ,
5. *Cuando se aplica la retroalimentación de estado  $u = F^*x_f + u^*$  a la ecuación  $\frac{dx_f}{dt} = Ax_f + Bu$ , entonces bajo las descomposiciones  $\mathcal{X}_{fed} = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2 \oplus \mathcal{X}_3$  y  $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2 \oplus \mathcal{U}_3$ , la representación de estado toma la siguiente forma Canónica Casi de Controlabilidad:*

$$\frac{d}{dt}x_f = A_{F^*}x_f + Bu^* \quad (2.4)$$

$$A_{F^*} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ 0 & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & B_3 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

donde:

a)  $\mathcal{X}_2 = \text{Im } A_{21} \oplus \text{Im } B_2^1$ .

b) Sea:

$$\begin{aligned} \bar{A}_{21} &= P_{A_{21}} A_{21} \\ P_{A_{21}} : \mathcal{X}_2 &\rightarrow \text{Im } A_{21}, \text{ proyección natural paralelamente a } \text{Im } B_2, \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\text{entonces } \mathcal{X}_1 = A_{11}^{-1} \text{Im } B_1 \oplus \text{Ker } \bar{A}_{21} \text{ y } \text{Im } \bar{A}_{21} \cong \text{Im } B_1.$$

---

<sup>1</sup>Estas propiedades geométricas se siguen directamente apartir de las expresiones matriciales de Trentelman. Por ejemplo, para el inciso a): de [27] se tiene  $\text{Ker } [A_{21} \ B_2]^T = \{0\}$  lo cual implica  $\mathcal{X}_2 = \text{Im } A_{21} + \text{Im } B_2$  y  $\dim \mathcal{X}_2 = \text{rango } A_{21} + \text{rango } B_2$ , esto es  $\mathcal{X}_2 = \text{Im } A_{21} \oplus \text{Im } B_2$ .

c) El abanico asociado,  $\left[ \frac{\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}_{11}}{\bar{A}_{21}} \mid -B_1 \right]$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ , únicamente contiene  
ied, a saber la tripleta estandar controlable  $(\bar{A}_{21}, A_{11}, B_1)$  es prima<sup>2</sup>.

### 2.3. Entradas Distribucionales

Como se vió en el Corolario 1 de la sección 2.2, los subespacios casi de controlabilidad, pueden ser caracterizados geoméricamente a partir de una secuencia de subespacios  $\{\mathcal{B}_i\}_{i=1}^k$  de tal forma que  $\mathcal{B} \supset \mathcal{B}_1 \supset \cdots \supset \mathcal{B}_k$ <sup>3</sup>. Denotamos por  $A_F$  a  $A + BF$ , se tiene el siguiente resultado:

**Proposición 1 ([27])** 1.  $V_a$  es un subespacio casi  $(A, B)$ -invariante si existen  $V$  subespacio  $(A, B)$ - invariante y  $\mathcal{S}_k^\infty$  subespacio casi de controlabilidad tales que:

$$V_a = V + \mathcal{S}_k^\infty.$$

2.  $\mathcal{S}_k^\infty$  es un subespacio casi de controlabilidad si existen una transformación lineal  $F : X \rightarrow U$  y una cadena  $\{\mathcal{B}_i\}_{i=1}^k$ , tal que:

$$\mathcal{S}_k^\infty = \mathcal{B}_1 + A_F \mathcal{B}_2 + \cdots + A_F^{k-1} \mathcal{B}_k.$$

Para ilustrar esto, sea  $x_0$  una condición inicial en  $\mathcal{S}_k^\infty$ , entonces se tiene que  $x_0 \in \text{generado}\langle b, A_F b, A_F^2 b, \cdots, A_F^{k-1} b \rangle$ ,  $b \in \mathcal{B} \setminus \{0\}$  y  $k = \text{grado}(\det(\lambda \mathbf{I} - A_F))$ ,

es decir existen  $\lambda_0, \cdots, \lambda_{k-1}$ , tales que  $x_0 = \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i A_F^i b$ , Sea la entrada de control

distribucional  $u = -\sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i \delta^{(i)} u_0$ , donde  $u_0 \in \mathcal{U}$ . Aplicando la ley de control distribucional al sistema 2.4 se tiene para  $t > 0$ :

$$x(t) = \mathbf{e}^{A_F t} \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i A_F^i B u_0 - \int_0^t \mathbf{e}^{A_F(t-\tau)} B \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i \delta^{(i)}(\tau) u_0 \, d\tau =$$

---

<sup>2</sup> En [19], Morse introdujo los sistemas primos, los cuales hablando en forma burda son sistemas observables y controlables, representados por una forma  $(C, A, B)$  de espacio estado. Más aún, el Teorema 3.1 de [19] demuestra que existe una retroalimentación de estado  $F$  tal que:  $(A + BF) \sim BDM\{A_1, \dots, A_m\}$ ,  $B \sim BDM\{B_1, \dots, B_m\}$ ,  $C \sim BDM\{C_1, \dots, C_m\}$ ,  $C_i = (\chi_{n_i}^1)^T$ ,  $A_i = T_u\{(\chi_{n_i}^2)^T\}$ , y  $B_i = (\chi_{n_i}^{n_i})$ .

<sup>3</sup>Dicha secuencia se llama cadena en  $B$



$$\sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i \mathbf{e}^{A_F t} A_F^i B u_0 - \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i \left[ \int_0^t \mathbf{e}^{A_F(t-\tau)} \delta^{(i)}(\tau) d\tau \right] B u_0 =$$

Ahora bien, puesto que

$$\int_0^t \mathbf{e}^{A_F(t-\tau)} \delta^{(i)}(\tau) d\tau = (-1)^i d^i / d\tau^i \mathbf{e}^{A_F(t-\tau)} \Big|_{\tau=0} = \mathbf{e}^{A_F t} A_F^i$$

Se tiene que:

$$x(t) = \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i \mathbf{e}^{A_F t} A_F^i B u_0 - \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i \mathbf{e}^{A_F t} A_F^i B u_0 = 0,$$

es decir para cada  $t > 0$  se tiene que  $x(t) = 0$ .

Para un análisis riguroso ver el Capítulo 2 de [27].

En las primeras tres secciones del Capítulo 2 de [27] se muestra que los subespacios casi invariantes son de hecho subespacios distribucionalmente invariantes.

## 2.4. Ejemplo Ilustrativo (Parte 1)

Considere un sistema cuyas matrices de comportamiento  $A_{F^*}$  y  $B$  ya están expresadas<sup>4</sup> en la forma Canónica Casi de Controlabilidad:

$$A_{F^*} = \left[ \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \quad B = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (2.7)$$

Obtenemos las partes real e imaginaria de los elementos del espectro  $\sigma(A_{F^*})$

$$\sigma(A_{F^*}) = \{ 2,1479, -0,57395 \pm i0,36899, -1, 0, 0, 0, -1 \}$$

<sup>4</sup>Se considera que ya se ha aplicado una retroalimentación previa para llevar al sistema a la forma canónica del Lema 1.

Ahora se considera  $\mathcal{K} = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$ . Note que:  $\mathcal{B} = \{e_1, e_3, e_6, e_9\}$ .  
Aplicando el algoritmo [ACSA] tenemos:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S}^1 &= \mathcal{K} \cap \mathcal{B} = \{e_1, e_3, e_6\} \\
 \mathcal{S}^2 &= \mathcal{K} \cap (A_{F^*} \mathcal{S}^1 + \mathcal{B}) \\
 &= \mathcal{K} \cap (\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 + e_8, e_6, e_9\}) \\
 &= \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_6\} \\
 \mathcal{S}^3 &= \mathcal{K} \cap (A_{1F^*} \mathcal{S}^2 + \mathcal{B}) \\
 &= \mathcal{K} \cap (\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_8, e_9\}) \\
 &= \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\} \\
 \mathcal{S}^\infty &= \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}
 \end{aligned}$$

Aplicando el algoritmo CISA tenemos:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{V}^1 &= \mathcal{K} = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\} \\
 \mathcal{V}^2 &= \mathcal{K} \cap A_{F^*}^{-1}(\mathcal{V}^1 + \mathcal{B}) \\
 &= \mathcal{K} \cap A_{F^*}^{-1}(\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_9\}) \\
 &= \mathcal{K} \cap (\{e_1, e_2, e_3, e_8\}) \\
 &= \{e_1, e_2, e_3\} \\
 \mathcal{V}^3 &= \mathcal{K} \cap A_{F^*}^{-1}(\mathcal{V}^2 + \mathcal{B}) \\
 &= \mathcal{K} \cap A_{F^*}^{-1}(\{e_1, e_2, e_3, e_6, e_9\}) \\
 &= \mathcal{K} \cap (\{e_3\}) \\
 &= \{e_3\} \\
 \mathcal{V}^4 &= \mathcal{K} \cap A_{F^*}^{-1}(\mathcal{V}^3 + \mathcal{B}) \\
 &= \mathcal{K} \cap A_{F^*}^{-1}(\{e_1, e_3, e_6, e_9\}) \\
 &= \mathcal{K} \cap \{0\} = \{0\} \\
 \mathcal{V}^* &= \{0\}
 \end{aligned}$$

Por lo que:

$$\mathcal{R}^* = \mathcal{V}^* \cap \mathcal{S}^\infty = \{0\}.$$

De lo anterior se concluye que no es posible obtener una invarianza, en el subespacio  $\mathcal{K}$  seleccionado, por retroalimentación proporcional de estado.  
Esto es, solo es posible obtener una casi invarianza.

Enseguida se muestra la representación de estado correspondiente a las matrices del comportamiento (2.7), así como a los subespacios correspondientes:

$$\begin{aligned}
& \mathcal{S}_K^\infty \\
& \begin{array}{cc} \mathcal{X}_1 & \mathcal{X}_2 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{U}_1 & \mathcal{U}_2 & \mathcal{U}_3 \end{array} \\
\frac{d}{dt}x_f = & \underbrace{\begin{bmatrix} \begin{array}{ccc|ccc|ccc} \textcolor{red}{0} & \textcolor{red}{0} & \textcolor{red}{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \textcolor{red}{0} & \textcolor{red}{0} & \textcolor{blue}{1} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \textcolor{red}{0} & \textcolor{red}{0} & \textcolor{red}{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \textcolor{blue}{1} & \textcolor{red}{0} & \textcolor{red}{0} & \textcolor{green}{0} & \textcolor{green}{1} & \textcolor{green}{0} & 1 & 1 & 1 \\ \textcolor{red}{0} & \textcolor{blue}{1} & \textcolor{red}{0} & \textcolor{green}{0} & \textcolor{green}{0} & \textcolor{green}{1} & 1 & 1 & 1 \\ \textcolor{red}{0} & \textcolor{red}{0} & \textcolor{red}{0} & \textcolor{green}{0} & \textcolor{green}{0} & \textcolor{green}{0} & 0 & 0 & 0 \\ \hline \textcolor{red}{0} & \textcolor{red}{0} & \textcolor{red}{0} & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \textcolor{red}{0} & \textcolor{red}{0} & \textcolor{red}{0} & 1 & 1 & 1 & 1 & \textcolor{green}{0} & \textcolor{green}{1} \\ \textcolor{red}{0} & \textcolor{red}{0} & \textcolor{red}{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & \textcolor{green}{0} & \textcolor{green}{0} \end{array} \end{bmatrix}}_{A_{F^*}} x_f + \underbrace{\begin{bmatrix} \begin{array}{ccc|ccc} \textcolor{blue}{1} & \textcolor{red}{0} & \textcolor{red}{0} & 0 & 0 & 0 \\ \textcolor{red}{0} & \textcolor{red}{0} & \textcolor{red}{0} & 0 & 0 & 0 \\ \textcolor{red}{0} & \textcolor{blue}{1} & \textcolor{red}{0} & 0 & 0 & 0 \\ \hline \textcolor{red}{0} & \textcolor{red}{0} & \textcolor{red}{0} & 0 & 0 & 0 \\ \textcolor{red}{0} & \textcolor{red}{0} & \textcolor{red}{0} & 0 & 0 & 0 \\ \textcolor{red}{0} & \textcolor{red}{0} & \textcolor{blue}{1} & 0 & 0 & 0 \\ \hline \textcolor{red}{0} & \textcolor{red}{0} & \textcolor{red}{0} & 0 & \textcolor{green}{0} & 0 \\ \textcolor{red}{0} & \textcolor{red}{0} & \textcolor{red}{0} & 0 & \textcolor{green}{0} & 0 \\ \textcolor{red}{0} & \textcolor{red}{0} & \textcolor{red}{0} & 0 & \textcolor{green}{1} & 1 \end{array} \end{bmatrix}}_B u \quad (2.8)
\end{aligned}$$

## 2.5. Aproximación de un Subespacio Casi de Controlabilidad

El siguiente teorema muestra que la ley de control distribucional es también aproximada por una sucesión de retroalimentaciones de estado de altas ganancias:

**Teorema 2 (Teorema 2.35 de [27])** *Sea  $\mathcal{S}_K^\infty$  el subespacio supremo de casi de controlabilidad y  $\{\mathcal{B}_i\}_{i=1}^k$  una cadena en  $\mathcal{S}_K^\infty \cap \mathcal{B}$ .*

*Sea  $F^* : \mathcal{X}_{fed} \rightarrow \mathcal{U}$  una transformación satisfaciendo (2.1)–(2.3).*

*Sean  $\mathfrak{L}_1, \dots, \mathfrak{L}_k$  subespacios de  $\mathcal{S}_K^\infty$ , definidos de la siguiente forma:*

$$\mathfrak{L}_1 = b_1 \oplus A_{F^*} b_1 + \dots + \oplus A_{F^*}^{n_1-1} b_1, \dots, \mathfrak{L}_k = b_k \oplus A_{F^*} b_k + \dots + \oplus A_{F^*}^{n_k-1} b_k, \quad (2.9)$$

donde  $\mathcal{B} = \text{generado}\{b_1, \dots, b_k\}$ . Sea  $N \in \mathbb{Z}^+$  y  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$  tales que:

$$N \geq \max \{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(A_{F^*})\} \text{ y } \varepsilon < \frac{1}{N}; \quad (2.10)$$

esta última condición garantiza la invertibilidad de la matriz  $(\mathbf{I} - \varepsilon A_{F^*})$ . Entonces, para cada  $i \in [1, k]$  existen Subespacios  $(A, B)$ -Invariantes,  $\mathfrak{L}_i(\varepsilon)$ , los cuales tienden a  $\mathfrak{L}_i$  respectivamente, y son generados por la sucesión de vectores<sup>5</sup>  $\{x_{i,1}(\varepsilon, \bar{u}_i), \dots, x_{i,k_i}(\varepsilon, \bar{u}_i)\}$ , donde:

<sup>5</sup>Ver Sección 2.4 de [27]

$$\begin{aligned} x_{i,j}(\varepsilon, \bar{u}_i) &= (\mathbf{I} - \varepsilon \mathbf{A}_{F^*})^{-1} \mathbf{B} \bar{u}_i, \\ x_{i+1,j}(\varepsilon, \bar{u}_{i+1}) &= (\mathbf{I} - \varepsilon \mathbf{A}_{F^*})^{-1} \mathbf{A}_{F^*} \mathbf{x}_{i,j}(\varepsilon, \bar{u}_i), \\ i &\in [[1, k_i]], B \bar{u}_j \in \{\mathcal{B}_i\}_{i=1}^{k_i}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Más aún, sea  $x_f$  una trayectoria solución de la representación de estado (2.4) y (2.5) con condición inicial  $x_0 \in \mathcal{S}_K^\infty$ . Considere una sucesión de retroalimentaciones amigas de  $F_i : \mathcal{L}_i(\varepsilon) \rightarrow \mathcal{U}$ , tales que:

$$F_i x_{i,j}(\varepsilon, \bar{u}_j) = - \left( \frac{1}{\varepsilon} \right)^i \bar{u}_j. \quad (2.12)$$

Entonces para todo  $\rho > 0$  existe un  $N \in \mathbb{Z}^{++}$  tal que:

$$d_\infty(x_f, \mathcal{S}_K^\infty) \leq \rho \quad (2.13)$$

$$x_f \in \mathfrak{B}_{[A_{F^*} + BF_n, B]}^{exp}, \forall \varepsilon \leq \frac{1}{N}.$$

## 2.6. Ejemplo Ilustrativo (Parte 2)

Para una mejor comprensión del Teorema 2, lo aplicaremos al ejemplo de la sección 2.4. Para esto procederemos de la siguiente manera:

1. Se descompone el subespacio  $\mathcal{S}_K^\infty$  en subespacios casi de controlabilidad  $\mathcal{L}_i$ .
2. Se aproximan Subespacios casi de controlabilidad por subespacios casi  $(A, B)$ -invariantes  $\mathcal{L}_i(\varepsilon)$ .
3. Se obtiene una retroalimentación de altas ganancias  $\bar{X}(\varepsilon)$ .
4. Se obtiene la matriz cambio de base  $\bar{F}_{Tr}(\varepsilon)$ .
5. Se analiza el comportamiento del sistema en lazo cerrado, así como también su tendencia cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .
6. Finalmente se realizan simulaciones numéricas.

### 2.6.1. Descomposición del Subespacio $\mathcal{S}_K^\infty$ en Subespacios Casi de Controlabilidad

Primero expresamos a  $\mathcal{S}_K^\infty$  como suma directa (ver (2.9)):<sup>6</sup>

---

<sup>6</sup>Recuerde que  $\mathcal{S}_K^\infty \cap \mathcal{B} = \text{generado}\{e_1, e_3, e_6\}$  (ver(2.8))

$$\mathcal{S}_{\mathcal{K}}^{\infty} = \mathfrak{L}_1 \oplus \mathfrak{L}_2 \oplus \mathfrak{L}_3 \quad (2.14)$$

Donde las  $\mathfrak{L}_i$  están dadas por:

$$\mathfrak{L}_1 = b_1 \oplus A_{F^*} b_1 \quad ; \quad \mathfrak{L}_2 = b_2 \oplus A_{F^*} b_2 \oplus A_{F^*}^2 b_2 \quad ; \quad \mathfrak{L}_3 = b_3$$

es decir:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_1 = \text{generado} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}, \quad \mathfrak{L}_2 = \text{generado} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}, \\ \mathfrak{L}_3 = \text{generado} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

Matricialmente se expresan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} [L_1 \parallel L_2 \parallel L_3] = & \left[ \begin{array}{c|c|c|c|c} \begin{matrix} b_1 \\ A_{F^*} b_1 \end{matrix} & \begin{matrix} b_2 \\ A_{F^*} b_2 \\ A_{F^*}^2 b_2 \end{matrix} & b_3 \\ \hline \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \end{array} \right] \quad (2.16) \\ & \begin{matrix} \mathfrak{L}_1 & \mathfrak{L}_2 & \mathfrak{L}_3 \end{matrix} \end{aligned}$$

Comparar con (2.8).

### 2.6.2. Aproximación por Subespacios Casi $(A, B)$ -Invariantes

A continuación damos la aproximación de los subespacios casi de controlabilidad, por medio de subespacios casi  $(A, B)$ -invariantes.

Considere  $\varepsilon > 0$  tal que  $1/\varepsilon > \max \{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(A_{F^*})\}$ . Con la ayuda de (2.11), construimos los subespacios casi  $(A, B)$ -invariantes, ver (2.10):

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_1(\varepsilon) &= \text{generado} \{x_{1,1}^b, x_{1,2}^b\}, \quad \mathfrak{L}_2(\varepsilon) = \text{generado} \{x_{2,1}^b, x_{2,2}^b, x_{2,3}^b\} \\ \mathfrak{L}_3(\varepsilon) &= \text{generado} \{x_{3,1}^b\} \\ &\text{donde :} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{F^*} \mathfrak{L}_i(\varepsilon) &\subset \mathfrak{L}_i(\varepsilon) + b_i, \quad i \in \{1, 2, 3\} \\ \mathfrak{L}(\varepsilon) &= \mathfrak{L}_1(\varepsilon) \oplus \mathfrak{L}_2(\varepsilon) \oplus \mathfrak{L}_3(\varepsilon) \quad ; \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathfrak{L}(\varepsilon) = \mathcal{S}_K^\infty \quad y \\ x_{i,1}^b &= (\mathbf{I} - \varepsilon A_{F^*})^{-1} b_i, \quad x_{i,j+1}^b = (\mathbf{I} - \varepsilon A_{F^*})^{-1} A_{F^*} x_{i,j}^b \end{aligned}$$

Ahora bien, para cada  $\varepsilon < \frac{1}{N}$  tal que  $N \geq \max \{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(A_{F^*})\}$  se tiene:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_1(\varepsilon) &= \text{generado} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & \frac{\varepsilon^2}{\alpha_1} & 0 & -\frac{\varepsilon \alpha_3}{\alpha_1} & -\frac{2\varepsilon^3 \eta_5}{\alpha_1 \alpha_5} & 0 & 0 & \frac{\varepsilon^2}{\alpha_1 \alpha_5} & 0 \\ 0 & -\frac{2\varepsilon \alpha_2}{\alpha_1^2} & 0 & \frac{\alpha_4 \alpha_5}{\alpha_1^2} & \frac{6\varepsilon^2 \alpha_6}{(\alpha_1 \alpha_5)^2} & 0 & 0 & -\frac{2\varepsilon \alpha_7}{(\alpha_1 \alpha_5)^2} & 0 \end{bmatrix}^T \right\}; \\ \mathfrak{L}_2(\varepsilon) &= \text{generado} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\varepsilon \alpha_3}{\alpha_1} & 1 & -\frac{\varepsilon^3}{\alpha_1} & \frac{\varepsilon^2 \beta_5}{\alpha_1} & 0 & 0 & -\frac{\varepsilon^3}{\alpha_1} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha_4 \alpha_5}{\alpha_1^2} & 0 & \frac{3\varepsilon^2 \alpha_8}{\alpha_1^2} & -\frac{2\varepsilon \alpha_9}{\alpha_1^2} & 0 & 0 & \frac{3\varepsilon^2 \alpha_8}{\alpha_1^2} & 0 \\ 0 & -\frac{3\varepsilon \beta_1}{\alpha_1^3} & 0 & -\frac{3\varepsilon \beta_2}{\alpha_1^3} & \frac{\beta_3}{\alpha_1^3} & 0 & 0 & -\frac{3\varepsilon \beta_2}{\alpha_1^3} & 0 \end{bmatrix}^T \right\}; \\ \mathfrak{L}_3(\varepsilon) &= \text{generado} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\varepsilon \beta_4}{\alpha_1} & 0 & \frac{2\varepsilon^2 \eta_5}{\alpha_1} & -\frac{\varepsilon \beta_6}{\alpha_1 \alpha_5} & 1 & 0 & -\frac{\varepsilon \beta_4}{\alpha_1 \alpha_5} & 0 \end{bmatrix}^T \right\} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Matricialmente tenemos:

$$\begin{aligned}
& \left[ L_1(\varepsilon) \parallel L_2(\varepsilon) \parallel L_3(\varepsilon) \right] = \\
& \begin{array}{c}
\begin{array}{c} x_{1,1}^b \\ x_{1,2}^b \\ x_{2,1}^b \\ x_{2,2}^b \\ x_{2,3}^b \\ x_{3,1}^b \end{array} \\
\left[ \begin{array}{c|c|c|c|c|c}
\begin{array}{c} 1 \\ \varepsilon^2 \\ \alpha_1 \\ 0 \\ -\frac{\varepsilon\alpha_3}{\alpha_1} \\ -\frac{2\varepsilon^3\eta_5}{\alpha_1\alpha_5} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\varepsilon^2}{\alpha_1\alpha_5} \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ -\frac{2\varepsilon\alpha_2}{\alpha_1^2} \\ 0 \\ \frac{\alpha_4\alpha_5}{\alpha_1^2} \\ \frac{6\varepsilon^2\alpha_6}{(\alpha_1\alpha_5)^2} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{2\varepsilon\alpha_7}{(\alpha_1\alpha_5)^2} \\ 0 \end{array} & \parallel & \begin{array}{c} 0 \\ -\frac{\varepsilon\alpha_3}{\alpha_1} \\ 1 \\ -\frac{\varepsilon^3}{\alpha_1} \\ \frac{\varepsilon^2\beta_5}{\alpha_1} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{\varepsilon^3}{\alpha_1} \\ 0 \end{array} & \parallel & \begin{array}{c} 0 \\ \frac{\alpha_4\alpha_5}{\alpha_1^2} \\ 0 \\ \frac{3\varepsilon^2\alpha_8}{\alpha_1^2} \\ -\frac{2\varepsilon\alpha_9}{\alpha_1^2} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{3\varepsilon^2\alpha_8}{\alpha_1^2} \\ 0 \end{array} & \parallel & \begin{array}{c} 0 \\ -\frac{3\varepsilon\beta_1}{\alpha_1^3} \\ 0 \\ -\frac{3\varepsilon\beta_2}{\alpha_1^3} \\ \frac{\beta_3}{\alpha_1^3} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{3\varepsilon\beta_2}{\alpha_1^3} \\ 0 \end{array} & \parallel & \begin{array}{c} 0 \\ -\frac{\varepsilon\beta_4}{\alpha_1} \\ 0 \\ \frac{2\varepsilon^2\eta_5}{\alpha_1} \\ -\frac{\varepsilon\beta_6}{\alpha_1\alpha_5} \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{\varepsilon\beta_4}{\alpha_1\alpha_5} \\ 0 \end{array}
\end{array} \right] \\
& \begin{array}{ccc}
\mathfrak{L}_1(\varepsilon) & & \mathfrak{L}_2(\varepsilon) \quad \mathfrak{L}_3(\varepsilon)
\end{array}
\end{array} \quad (2.18)
\end{aligned}$$

donde  $\alpha_i, \beta_j, \eta_k \in \{1 + \mathcal{O}(\varepsilon)\} \subset \mathbb{R}[\varepsilon]$ ; los cuales estn definidos en el apéndice A.

Note que (comparar (2.15) con (2.17)):<sup>7</sup>  
 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\mathfrak{L}_i(\varepsilon)] = \mathfrak{L}_i$

### 2.6.3. Matriz Cambio de Base

Para poder calcular la retroalimentación amiga (2.12) de los subespacios  $\mathfrak{L}_i(\varepsilon)$  se necesita la matriz cambio de base construida a partir de los generadores de los subespacios aproximados  $\mathfrak{L}_i(\varepsilon)$ .

La matriz cambio de base es (ver(2.18)):

<sup>7</sup>Esta convergencia de subespacio es en el sentido Grassmanniano; ver páginas 58, 61 y 62 de la sección 2.4 de [27]

$$\bar{X}(\varepsilon) = \begin{bmatrix} x_{1,1}^b & x_{1,2}^b & x_{2,1}^b & x_{2,2}^b & x_{2,3}^b & x_{3,1}^b & e_7 & e_8 & e_9 \\ \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\varepsilon^2}{\alpha_1} \\ 0 \\ -\frac{\varepsilon\alpha_3}{\alpha_1} \\ -\frac{2\varepsilon^3\eta_5}{\alpha_1\alpha_5} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\varepsilon^2}{\alpha_1\alpha_5} \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{2\varepsilon\alpha_2}{\alpha_1^2} \\ 0 \\ \frac{\alpha_4\alpha_5}{\alpha_1^2} \\ \frac{6\varepsilon^2\alpha_6}{(\alpha_1\alpha_5)^2} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{2\varepsilon\alpha_7}{(\alpha_1\alpha_5)^2} \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\varepsilon\alpha_3}{\alpha_1} \\ 1 \\ -\frac{\varepsilon^3}{\alpha_1} \\ \frac{\varepsilon^2\beta_5}{\alpha_1} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{\varepsilon^3}{\alpha_1} \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\alpha_4\alpha_5}{\alpha_1^2} \\ 0 \\ \frac{3\varepsilon^2\alpha_8}{\alpha_1^2} \\ -\frac{2\varepsilon\alpha_9}{\alpha_1^2} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{3\varepsilon^2\alpha_8}{\alpha_1^2} \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{3\varepsilon\beta_1}{\alpha_1^3} \\ 0 \\ -\frac{3\varepsilon\beta_2}{\alpha_1^3} \\ \frac{\beta_3}{\alpha_1^3} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{3\varepsilon\beta_2}{\alpha_1^3} \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\varepsilon\beta_4}{\alpha_1} \\ 0 \\ \frac{2\varepsilon^2\eta_5}{\alpha_1} \\ -\frac{\varepsilon\beta_6}{\alpha_1\alpha_5} \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{\varepsilon\beta_4}{\alpha_1\alpha_5} \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathfrak{L}_1(\varepsilon) & & \mathfrak{L}_2(\varepsilon) & & \mathfrak{L}_3(\varepsilon) & & \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Note que (recuerde el apéndice A):

$$\det \bar{X}(\varepsilon) = -\frac{\beta_7(\varepsilon)}{\alpha_5(\varepsilon)^2\alpha_1(\varepsilon)^3} \text{ y } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} -\frac{\beta_7(\varepsilon)}{\alpha_5(\varepsilon)^2\alpha_1(\varepsilon)^3} = -1$$

Su matriz inversa es:

$$\bar{X}(\varepsilon)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\varepsilon\alpha_5\beta_8}{\eta_8} & \frac{3\varepsilon^2\alpha_5^2\eta_7}{\eta_8} & \frac{\varepsilon^3\alpha_5^2}{\eta_8} & \frac{\alpha_5^2\delta_9}{\eta_8} & \frac{3\varepsilon\alpha_5^2\eta_2}{\eta_8} & \frac{-\varepsilon^2\alpha_5\gamma_6}{\eta_8} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\varepsilon^2\beta_9}{\eta_8} & \frac{-3\varepsilon^2\eta_9}{\eta_8} + 1 & \frac{\varepsilon\gamma_2}{\eta_8} & \frac{2\varepsilon\zeta_1}{\eta_8} & \frac{3\varepsilon\alpha_5^2\zeta_2}{\eta_8} & \frac{\varepsilon\gamma_7}{\eta_8} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-2\varepsilon^3\zeta_3}{\eta_8} & \frac{2\varepsilon\alpha_1\gamma_5}{\eta_8} & \frac{\varepsilon\alpha_1\gamma_3}{\eta_8} & \frac{2\varepsilon^2\alpha_1\alpha_5\eta_6}{\eta_8} & \frac{\varepsilon^2\alpha_1\alpha_5^2\zeta_4}{\eta_8} & \frac{\varepsilon\alpha_1\gamma_8}{\eta_8} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\varepsilon^2\beta_5}{\eta_8} & \frac{3\varepsilon^2\eta_7}{\eta_8} & \frac{\varepsilon^3}{\eta_8} & \frac{2\varepsilon\eta_2}{\eta_8} & \frac{3\varepsilon\eta_2}{\eta_8} & \frac{\varepsilon\gamma_9}{\eta_8} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

Aplicando el cambio de base (2.19) a la representación de estado (2.8), se obtienen:

$$\frac{d}{dt}\xi = \bar{A}_{F^*}\xi + \bar{B}u \quad (2.21)$$

donde:

$$\xi = \bar{X}^{-1}(\varepsilon)x_f \quad (2.22)$$



$$\overline{A}_{F^*} = \overline{X}^{-1}(\varepsilon) A_{F^*} \overline{X}(\varepsilon) = \left[ \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\beta_8 \alpha_5}{\beta_7} & -\frac{2\gamma_6 \gamma_1 \varepsilon}{\beta_7} & \frac{\alpha_5^2 \varepsilon^2}{\beta_7} & \frac{\alpha_5 \varepsilon^2}{\beta_7} & \frac{\alpha_5^2}{\beta_7} & \frac{\alpha_5 \gamma_6 \varepsilon}{\beta_7} & \frac{\alpha_5^2 \gamma_9 \delta_1}{\beta_7} & \frac{\alpha_5^2 \gamma_9 \delta_1}{\beta_7} & \frac{\alpha_5^2 \gamma_9 \delta_1}{\beta_7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{\varepsilon \beta_9}{\beta_7} & \frac{\beta_9}{\beta_7} & \frac{\gamma_2}{\beta_7} & \frac{\gamma_4 \varepsilon}{\beta_7} & \frac{\gamma_4}{\beta_7} & \frac{\gamma_7}{\beta_7} & \frac{\delta_3}{\beta_7} & \frac{\delta_3}{\beta_7} & \frac{\delta_3}{\beta_7} \\ -\frac{2\alpha_1 \gamma_1 \varepsilon^2}{\beta_7} & -\frac{2\alpha_1 \gamma_1 \varepsilon}{\beta_7} & \frac{\gamma_3 \alpha_1 \varepsilon}{\beta_7} & \frac{\gamma_3 \alpha_1}{\beta_7} & -\frac{4\gamma_5 \varepsilon}{\beta_7} & \frac{\alpha_1 \gamma_8}{\beta_7} & \frac{\alpha_1 \delta_2}{\beta_7} & \frac{\alpha_1 \delta_2}{\beta_7} & \frac{\alpha_1 \delta_2}{\beta_7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{\beta_5 \varepsilon}{\beta_7} & \frac{\beta_5}{\beta_7} & \frac{\varepsilon^2}{\beta_7} & \frac{\varepsilon}{\beta_7} & \frac{1}{\beta_7} & \frac{\gamma_9}{\beta_7} & \frac{\gamma_9 \delta_1}{\beta_7} & \frac{5\delta_4 \varepsilon}{\beta_7} & \frac{\gamma_9 \delta_1}{\beta_7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (2.23)$$

y

$$\overline{B} = \overline{X}^{-1}(\varepsilon) B = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\beta_8 \alpha_5 \varepsilon}{\beta_7} & \frac{\alpha_5^2 \varepsilon^3}{\beta_7} & \frac{\gamma_6 \alpha_5 \varepsilon^2}{\beta_7} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline \frac{\beta_9 \varepsilon^2}{\beta_7} & \frac{\gamma_2 \varepsilon}{\beta_7} & \frac{\gamma_7 \varepsilon}{\beta_7} & 0 \\ -\frac{2\gamma_1 \alpha_1 \varepsilon^3}{\beta_7} & \frac{\gamma_3 \alpha_1 \varepsilon^2}{\beta_7} & \frac{\gamma_8 \alpha_1 \varepsilon}{\beta_7} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\beta_5 \varepsilon^2}{\beta_7} & \frac{\varepsilon^3}{\beta_7} & \frac{\gamma_9 \varepsilon}{\beta_7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (2.24)$$

donde  $\gamma_i \in \{1 + \mathcal{O}(\varepsilon)\} \subset \mathbb{R}[\varepsilon]$ ; los cuales están definidos en el apéndice A.

### 2.6.4. Retroalimentación de Altas Ganancias

Para construir la retroalimentación amiga de los subespacios  $\mathfrak{L}_i(\varepsilon)$  se sigue el procedimiento dado en la prueba del Lema 2.34 de la Sección 2.4 de [27].

Considere la siguiente matriz (ver (2.12)):

$$\overline{F}_{Tr} = \left[ \begin{array}{cc|ccc|c|ccc} -\frac{1}{\varepsilon} & -\frac{1}{\varepsilon^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\varepsilon} & -\frac{1}{\varepsilon^2} & -\frac{1}{\varepsilon^3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\varepsilon} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (2.25)$$

Al aplicar la retroalimentación amiga (2.25) al sistema representado por (2.21), con las matrices (2.23) y (2.24) se tiene que:

$$\overline{A}_{F_{Tr}^*} + \overline{B}\overline{F}_{Tr} = \left[ \begin{array}{cc|ccc|c|ccc} -\frac{1}{\varepsilon} & -\frac{1}{\varepsilon^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\varepsilon} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha_5^2 \gamma_9 \delta_1}{\beta_7} & \frac{\alpha_5^2 \gamma_9 \delta_1}{\beta_7} & \frac{\alpha_5^2 \gamma_9 \delta_1}{\beta_7} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\varepsilon} & -\frac{1}{\varepsilon^2} & -\frac{1}{\varepsilon^3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\varepsilon} & -\frac{1}{\varepsilon^2} & 0 & \frac{\delta_3}{\beta_7} & \frac{\delta_3}{\beta_7} & \frac{\delta_3}{\beta_7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\varepsilon} & 0 & \frac{\alpha_1 \delta_2}{\beta_7} & \frac{\alpha_1 \delta_2}{\beta_7} & \frac{\alpha_1 \delta_2}{\beta_7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\varepsilon} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\gamma_9 \delta_1}{\beta_7} & \frac{5\varepsilon \delta_4}{\beta_7} & \frac{\gamma_9 \delta_1}{\beta_7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (2.26)$$

El polinomio característico de la matriz retroalimentada es (ver apéndice A):

$$|s\mathbf{I} - (\overline{A}_{F^*})| = s(s+1) \left(s + \frac{1}{\varepsilon}\right)^6 \left(s - \frac{5\varepsilon \delta_4}{\beta_7}\right)$$

Por lo que su espectro es:

$$\sigma\{\overline{A}_{F^*} + \overline{B}\overline{F}_{Tr}\} = \left\{0, -1, -\frac{1}{\varepsilon}, -\frac{1}{\varepsilon}, -\frac{1}{\varepsilon}, -\frac{1}{\varepsilon}, -\frac{1}{\varepsilon}, -\frac{1}{\varepsilon}, \frac{5\varepsilon \delta_4}{\beta_7}\right\}.$$

Ahora bien, para asignar también la dinámica fuera del subespacio  $\mathcal{S}_K^\infty$  se complementa la retroalimentación de estado de altas ganancias (2.25) de la siguiente manera:

$$\bar{F}_{Tr}(\varepsilon) =$$

|                               |                    |                               |                    |                               |                  |       |                                      |                                                       |
|-------------------------------|--------------------|-------------------------------|--------------------|-------------------------------|------------------|-------|--------------------------------------|-------------------------------------------------------|
| $x_{1,1}^b$                   | $x_{1,2}^b$        | $x_{2,1}^b$                   | $x_{2,2}^b$        | $x_{2,3}^b$                   | $x_{3,1}^b$      | $e_7$ | $e_8$                                | $e_9$                                                 |
| $-1/\varepsilon$              | $-1/\varepsilon^2$ | $0$                           | $0$                | $0$                           | $0$              | $0$   | $0$                                  | $0$                                                   |
| $0$                           | $0$                | $-1/\varepsilon$              | $-1/\varepsilon^2$ | $-1/\varepsilon^3$            | $0$              | $0$   | $0$                                  | $0$                                                   |
| $0$                           | $0$                | $0$                           | $0$                | $0$                           | $-1/\varepsilon$ | $0$   | $0$                                  | $0$                                                   |
| $0$                           | $0$                | $0$                           | $0$                | $0$                           | $0$              | $0$   | $-\frac{\delta_1 \gamma_9}{\beta_7}$ | $-\left(1 + \frac{\delta_1 \gamma_9}{\beta_7}\right)$ |
| $\mathfrak{L}_1(\varepsilon)$ |                    | $\mathfrak{L}_2(\varepsilon)$ |                    | $\mathfrak{L}_3(\varepsilon)$ |                  |       |                                      |                                                       |

(2.27)

obteniéndose:

$$\bar{A}_{F_{Tr}^*}(\varepsilon) =$$

|                               |                    |                               |                    |                               |                  |                                                |                                                |                                                       |
|-------------------------------|--------------------|-------------------------------|--------------------|-------------------------------|------------------|------------------------------------------------|------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|
| $x_{1,1}^b$                   | $x_{1,2}^b$        | $x_{2,1}^b$                   | $x_{2,2}^b$        | $x_{2,3}^b$                   | $x_{3,1}^b$      | $e_7$                                          | $e_8$                                          | $e_9$                                                 |
| $-1/\varepsilon$              | $-1/\varepsilon^2$ | $0$                           | $0$                | $0$                           | $0$              | $0$                                            | $0$                                            | $0$                                                   |
| $0$                           | $-1/\varepsilon$   | $0$                           | $0$                | $0$                           | $0$              | $\frac{\alpha_5^2 \gamma_9 \delta_1}{\beta_7}$ | $\frac{\alpha_5^2 \gamma_9 \delta_1}{\beta_7}$ | $\frac{\alpha_5^2 \gamma_9 \delta_1}{\beta_7}$        |
| $0$                           | $0$                | $-1/\varepsilon$              | $-1/\varepsilon^2$ | $-1/\varepsilon^3$            | $0$              | $0$                                            | $0$                                            | $0$                                                   |
| $0$                           | $0$                | $0$                           | $-1/\varepsilon$   | $-1/\varepsilon^2$            | $0$              | $\frac{\delta_3}{\beta_7}$                     | $\frac{\delta_3}{\beta_7}$                     | $\frac{\delta_3}{\beta_7}$                            |
| $0$                           | $0$                | $0$                           | $0$                | $-1/\varepsilon$              | $0$              | $\frac{\alpha_1 \delta_2}{\beta_7}$            | $\frac{\alpha_1 \delta_2}{\beta_7}$            | $\frac{\alpha_1 \delta_2}{\beta_7}$                   |
| $0$                           | $0$                | $0$                           | $0$                | $0$                           | $-1/\varepsilon$ | $0$                                            | $0$                                            | $0$                                                   |
| $0$                           | $0$                | $0$                           | $0$                | $0$                           | $0$              | $-1$                                           | $0$                                            | $0$                                                   |
| $0$                           | $0$                | $0$                           | $0$                | $0$                           | $0$              | $\frac{\gamma_9 \delta_1}{\beta_7}$            | $5\varepsilon \frac{\delta_4}{\beta_7}$        | $\frac{\gamma_9 \delta_1}{\beta_7}$                   |
| $0$                           | $0$                | $0$                           | $0$                | $0$                           | $0$              | $0$                                            | $-\frac{\delta_1 \gamma_9}{\beta_7}$           | $-\left(1 + \frac{\delta_1 \gamma_9}{\beta_7}\right)$ |
| $\mathfrak{L}_1(\varepsilon)$ |                    | $\mathfrak{L}_2(\varepsilon)$ |                    | $\mathfrak{L}_3(\varepsilon)$ |                  |                                                |                                                |                                                       |

(2.28)

Note la  $\bar{A}_{F_{Tr}^*} - \mathfrak{L}(\varepsilon)$  invarianza obtenida.

La retroalimentación toma la siguiente forma en la base original (ver (2.19), (2.23), (2.24))

$$F_{Tr}(\varepsilon) = \bar{F}_{Tr}(\varepsilon) \bar{X}^{-1}(\varepsilon) \quad (2.29)$$

Por lo cual obtenemos la  $A_{F_1^*} - \mathfrak{L}(\varepsilon)$  Invarianza.

Donde ahora el espectro es:

$$\left| s\mathbf{I} - (\mathbf{A}_{F_1^*} + \mathbf{B}\mathbf{F}_{\text{Tr}}(\varepsilon)) \right| = (s + 1/\varepsilon)^6 (s + 1)^3$$

### 2.6.5. Comportamiento del Sistema en Lazo Cerrado

Para analizar el comportamiento del sistema en lazo cerrado, procederemos de la siguiente manera:

1. Se obtiene la solución del sistema retroalimentado por la matriz de Trentelman  $\overline{F}_{Tr}^*$ .
2. A fin de calcular la matriz retroalimentada, se obtiene la forma de Jordan de  $\overline{A}_{F_{Tr}^*}$ .
3. Finalmente se analiza el comportamiento cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$

#### Retroalimentación de Trentelman

Aplicando la retroalimentación de Trentelman

$$u = \overline{F}_{Tr}\xi + u^* \tag{2.30}$$

al sistema (2.21), se obtiene el sistema en lazo cerrado:

$$\frac{d}{dt}\xi = \overline{A}_{F^*}\xi + \overline{B}u, \quad \xi(0) = \xi_0 \tag{2.31}$$

siendo su solución

$$\xi(t) = e^{t\overline{A}_{F_{Tr}^*}}\xi_0 + \int_0^t e^{(t-\tau)\overline{A}_{F_{Tr}^*}}\overline{B}u^*(\tau)d\tau, \tag{2.32}$$

la cual toma la siguiente forma en la base original ( $x_{f,0} = \overline{X}(\varepsilon)\xi_0$ ):

$$x_f(t) = (\overline{X}(\varepsilon)T_J(\varepsilon))e^{t\overline{A}_J^*}(\overline{X}(\varepsilon)T_J(\varepsilon))^{-1}x_{f,0} + \int_0^t (\overline{X}(\varepsilon)T_J(\varepsilon))e^{(t-\tau)\overline{A}_J^*}(\overline{X}(\varepsilon)T_J(\varepsilon))^{-1}Bu^*(\tau)d\tau \tag{2.33}$$



Siendo su inversa:

$$T_J^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\gamma_9 \delta_1 (\beta_7 \alpha_5 - 2 \gamma_9 \delta_1 \epsilon)}{\beta_7^2 \alpha_5} & \frac{\gamma_9 \delta_1}{\beta_7} \\ 0 & -\frac{1}{\epsilon^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\gamma_9 \delta_1 (\alpha_5 \beta_7 - \gamma_9 \delta_1 \epsilon)}{\epsilon \beta_7^2} & \frac{\alpha_5 \gamma_9 \delta_1}{\epsilon \beta_7} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{(\alpha_5^2 \beta_7 \delta_3 - \alpha_1 \alpha_5 \beta_7 \delta_2 + \alpha_1 \gamma_9 \delta_1 \delta_2 \eta_6) - 2 \alpha_5 \gamma_9 \delta_1 \delta_3 \epsilon}{\alpha_5^4 \beta_7^2} & \frac{\alpha_5 \delta_3 - \alpha_1 \delta_2}{\beta_7 \alpha_5^3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\epsilon^2} & 1 & -\frac{1}{\epsilon^3} & \frac{(\alpha_5^2 \beta_7 \delta_3 - \alpha_1 \alpha_5 \beta_7 \delta_2 + \alpha_1 \gamma_9 \delta_1 \delta_2) - \alpha_5 \gamma_9 \delta_1 \delta_3 \epsilon}{\alpha_5^3 \beta_7^2 \epsilon} & \frac{(\alpha_5 \delta_3 - \alpha_1 \delta_2)}{(\alpha_5 \delta_3 - \alpha_1 \delta_2)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\epsilon^2} & \frac{\alpha_5^3 \beta_7^2 \epsilon}{\alpha_1 \delta_2 (\gamma_9 \delta_1 \epsilon - \alpha_5 \beta_7)} & \frac{\alpha_5^2 \beta_7 \epsilon}{\alpha_1 \delta_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{\alpha_5^2 \beta_7 \epsilon^3}{\alpha_5 \beta_7 \epsilon^3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\gamma_9 \delta_1}{\beta_7} & 0 \end{bmatrix}$$

(2.35)

Obteniéndose la siguiente forma de Jordan:

$$\overline{A}_J^* = T_J^{-1} \overline{A}_{F_{T_r}^*} T_J = \overline{D}_J^* + \overline{N}_J^*$$

donde,  $\overline{D}_J^*$  y  $\overline{N}_J^*$ , son respectivamente igual a:

$$\left[ \begin{array}{cc|cccc|cccc} -\frac{1}{\varepsilon} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\varepsilon} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -\frac{1}{\varepsilon} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\varepsilon} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\varepsilon} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\varepsilon} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right] \quad y \quad \left[ \begin{array}{cc|cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Note que  $\overline{N}_J^{*3} = 0$  y que  $\overline{D}_J^* \overline{N}_J^* = \overline{N}_J^* \overline{D}_J^*$ , por lo que  $e^{t\overline{A}_J^*} = e^{t\overline{D}_J^*} e^{t\overline{N}_J^*}$ , esto es:

$$e^{t\overline{A}_J^*} = \left[ \begin{array}{cc|ccccc|cccc} e^{-\frac{t}{\varepsilon}} & te^{-\frac{t}{\varepsilon}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\frac{t}{\varepsilon}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & e^{-\frac{t}{\varepsilon}} & te^{-\frac{t}{\varepsilon}} & 1/2 t^2 e^{-\frac{t}{\varepsilon}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\frac{t}{\varepsilon}} & te^{-\frac{t}{\varepsilon}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-\frac{t}{\varepsilon}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-\frac{t}{\varepsilon}} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-t} & te^{-t} & 1/2 t^2 e^{-t} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-t} \end{array} \right] \quad (2.36)$$

De (2.34), (2.35) y (2.36), se tiene que:

$$T_J^{-1}(\varepsilon) e^{t\overline{A}_{F_{T_r}^*}} T_J(\varepsilon) = e^{t\overline{A}_J^*}$$

Por lo cual se tiene:

$$e^{t\bar{A}_{F^*}} = T_J(\varepsilon) e^{t\bar{A}_J^*} T_J^{-1}(\varepsilon) =$$

|                              |                                                           |                              |                                                           |                                                                                                |                              |                                                                                                                  |                                                                                                           |                                                                                                           |
|------------------------------|-----------------------------------------------------------|------------------------------|-----------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $e^{-\frac{t}{\varepsilon}}$ | $-(\frac{1}{\varepsilon})^2 t e^{-\frac{t}{\varepsilon}}$ | 0                            | 0                                                         | 0                                                                                              | 0                            | $\frac{p_{1,7}(t)e^{-\frac{t}{\varepsilon}} + q_{1,7}(t)e^{-t}}{\frac{1}{\varepsilon}\alpha_5\beta_7^2}$         | $\frac{p_{1,8}(t)e^{-\frac{t}{\varepsilon}} + q_{1,8}(t)e^{-t}}{\beta_7}$                                 | $\frac{p_{1,9}(t)e^{-\frac{t}{\varepsilon}} + q_{1,9}(t)e^{-t}}{\beta_7}$                                 |
| 0                            | $e^{-\frac{t}{\varepsilon}}$                              | 0                            | 0                                                         | 0                                                                                              | 0                            | $\frac{p_{2,7}(t)e^{-\frac{t}{\varepsilon}} + q_{2,7}(t)e^{-t}}{(\frac{1}{\varepsilon})^2 b_7^2}$                | $\frac{\gamma_9\delta_1\alpha_5(-e^{-\frac{t}{\varepsilon}} + e^{-t})}{\frac{1}{\varepsilon}\beta_7}$     | $\frac{\gamma_9\delta_1\alpha_5(-e^{-\frac{t}{\varepsilon}} + e^{-t})}{\frac{1}{\varepsilon}\beta_7}$     |
| 0                            | 0                                                         | $e^{-\frac{t}{\varepsilon}}$ | $-(\frac{1}{\varepsilon})^2 t e^{-\frac{t}{\varepsilon}}$ | $-(\frac{1}{\varepsilon})^3 t(1 - \frac{1}{2}\frac{t}{\varepsilon})e^{-\frac{t}{\varepsilon}}$ | 0                            | $\frac{p_{3,7}(t)e^{-\frac{t}{\varepsilon}} + q_{3,7}(t)e^{-t}}{2\beta_7^2 \frac{1}{\varepsilon}\alpha_5^4}$     | $\frac{p_{3,8}(t)e^{-\frac{t}{\varepsilon}} + q_{3,8}(t)e^{-t}}{2\beta_7\alpha_5^3}$                      | $\frac{p_{3,9}(t)e^{-\frac{t}{\varepsilon}} + q_{3,9}(t)e^{-t}}{2\beta_7\alpha_5^3}$                      |
| 0                            | 0                                                         | 0                            | $e^{-\frac{t}{\varepsilon}}$                              | $-(\frac{1}{\varepsilon})^2 t e^{-\frac{t}{\varepsilon}}$                                      | 0                            | $\frac{p_{4,7}(t)e^{-\frac{t}{\varepsilon}} + q_{4,7}(t)e^{-t}}{(\frac{1}{\varepsilon})^2 \alpha_5^3 \beta_7^2}$ | $\frac{p_{4,8}(t)e^{-\frac{t}{\varepsilon}} + q_{4,8}(t)e^{-t}}{\frac{1}{\varepsilon}\alpha_5^2 \beta_7}$ | $\frac{p_{4,9}(t)e^{-\frac{t}{\varepsilon}} + q_{4,9}(t)e^{-t}}{\frac{1}{\varepsilon}\alpha_5^2 \beta_7}$ |
| 0                            | 0                                                         | 0                            | 0                                                         | $e^{-\frac{t}{\varepsilon}}$                                                                   | 0                            | $\frac{p_{5,7}(t)e^{-\frac{t}{\varepsilon}} + q_{5,7}(t)e^{-t}}{(\frac{1}{\varepsilon})^2 \alpha_5^2 \beta_7^2}$ | $\frac{\alpha_1\delta_2(-e^{-\frac{t}{\varepsilon}} + e^{-t})}{\frac{1}{\varepsilon}\alpha_5\beta_7}$     | $\frac{\alpha_1\delta_2(-e^{-\frac{t}{\varepsilon}} + e^{-t})}{\frac{1}{\varepsilon}\alpha_5\beta_7}$     |
| 0                            | 0                                                         | 0                            | 0                                                         | 0                                                                                              | $e^{-\frac{t}{\varepsilon}}$ | 0                                                                                                                | 0                                                                                                         | 0                                                                                                         |
| 0                            | 0                                                         | 0                            | 0                                                         | 0                                                                                              | 0                            | $e^{-t}$                                                                                                         | 0                                                                                                         | 0                                                                                                         |
| 0                            | 0                                                         | 0                            | 0                                                         | 0                                                                                              | 0                            | $\frac{\gamma_9\delta_1 t(2\beta_7 + \gamma_9\delta_1 t)}{2\beta_7^2} e^{-t}$                                    | $\frac{(\beta_7 + \gamma_9\delta_1 t)}{\beta_7} e^{-t}$                                                   | $\frac{(\gamma_9\delta_1 t)}{\beta_7} e^{-t}$                                                             |
| 0                            | 0                                                         | 0                            | 0                                                         | 0                                                                                              | 0                            | $-\frac{\gamma_9^2 \delta_1^2 t^2}{2\beta_7^2} e^{-t}$                                                           | $-\frac{(\gamma_9\delta_1 t)}{\beta_7} e^{-t}$                                                            | $-\frac{(\gamma_9\delta_1 t - \beta_7)}{\beta_7} e^{-t}$                                                  |

$\mathfrak{L}_1(\varepsilon)$ 
 $\mathfrak{L}_2(\varepsilon)$ 
 $\mathfrak{L}_3(\varepsilon)$

(2.37)



(ver apéndice A).

### Tendencia

- De (2.37) se tiene el siguiente comportamiento cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$  y  $t > 0$  :

$$\begin{aligned}
 & \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ t > 0}} (\bar{X}(\varepsilon) T_J(\varepsilon) e^{t\bar{A}_J^*} T_J^{-1}(\varepsilon) \bar{X}^{-1}(\varepsilon)) = \bar{X}(0) \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ t > 0}} (e^{t\bar{A}_{F_{Tr}}^*}) \bar{X}^{-1}(0) = \\
 & = \bar{X}(0) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(1+t)e^{-t} & -e^{-t} & -e^{-t} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(1+t)e^{-t} & -e^{-t} & -e^{-t} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left(t + \frac{t^2}{2}\right)e^{-t} & (1+t)e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{t^2}{2}e^{-t} & -te^{-t} & (1-t)e^{-t} \end{bmatrix} \bar{X}^{-1}(0) \\
 & = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(1+t)e^{-t} & -e^{-t} & -e^{-t} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(1+t)e^{-t} & -e^{-t} & -e^{-t} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left(t + \frac{t^2}{2}\right)e^{-t} & (1+t)e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{t^2}{2}e^{-t} & -te^{-t} & (1-t)e^{-t} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

Por lo que de (2.38) y (2.33),  $\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ t > 0}} x_f(t) := \bar{x}_f(t)$  (con  $u^* = 0$ ) es igual a:

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{S}_{\mathcal{K}}^{\infty} \\
 & \mathcal{X}_1 \quad \mathcal{X}_2 \\
 & \bar{x}_f(t) = \left[ \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(1+t)e^{-t} & -e^{-t} & -e^{-t} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(1+t)e^{-t} & -e^{-t} & -e^{-t} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e^{-t} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left(t + \frac{t^2}{2}\right)e^{-t} & (1+t)e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{t^2}{2}e^{-t} & -te^{-t} & (1-t)e^{-t} \end{array} \right] x_f(0)
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

- De (2.37) se tiene el siguiente comportamiento aproximado cuando  $\varepsilon = 0$ :

$$\begin{aligned}
 & \left( \overline{X}(\varepsilon) T_J(\varepsilon) e^{t \overline{A}_J^*} T_J^{-1}(\varepsilon) \overline{X}^{-1}(\varepsilon) \right) \\
 & \stackrel{t=0}{=} \overline{X}(\varepsilon) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overline{X}^{-1}(\varepsilon) \quad (2.40) \\
 & = \mathbf{I}_9
 \end{aligned}$$

Por lo que de (2.40) y (2.33), se tiene ( $u^* = 0$ ):

$$x_f(0) = x_{f,0} \quad (2.41)$$

Es decir una condición inicial ( $t = 0$ ) que se encuentra en  $S_K^\infty$ , se va “instantáneamente” (es decir para  $t > 0$ ) a cero, cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Esto es, nos aproximamos a una ley de control del tipo distribucional.

### 2.6.6. Simulaciones

En las figuras 2.1, 2.2, 2.3, 2.4 y 2.5 se muestra una simulación MATLAB<sup>R</sup> - Simulink, con las siguientes especificaciones:

*Ode45(Dormand-Prince) Start time: 0.0, Stop time: 10.0, Type: Variable-step, Solver: Max step size: 1e-3, Min step size: auto, Initial step size: auto, Relative tolerance: 1e-9, Absolute tolerance: auto, Zero crossing control: Use local settings*

(2.42)

### Aproximación del Subespacio Supremo de Casi Contralabilidad

Primero, en las gráficas de la figura 2.1 se muestra el sistema descrito por (2.8), con la ley de control, (2.30), (2.19) y (2.27), con  $\varepsilon = 1/100$ , con la condición

inicial

$$\begin{aligned}
 x_f(0) &= \overline{X}(\varepsilon)\xi(0) \\
 \xi(0) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 25 \times 10^{-3} \\ 1/\sqrt{2} \\ 25 \times 10^{-3}/\sqrt{2} \\ 5 \times 10^{-4}/\sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.43}$$

y  $u^* = 0$ . En la figura se comparan los comportamientos de los subespacios  $(A, B)$ -invariante,  $\mathfrak{L}(\varepsilon)$  (2.17), y el casi  $(A, B)$ -invariante,  $\mathcal{S}_K^\infty$  (2.14)-(2.15).

Posteriormente en las gráficas de la figura 2.2 se muestra el sistema descrito por (2.8), con la ley de control, (2.30), (2.19) y (2.27). Se observan los comportamientos de los espacios complementarios y de las leyes de control, con  $\varepsilon = 1/100$ , con la condición inicial (2.43) y  $u^* = 0$ . Por último, se muestra en la figura 2.3 el comportamiento del subespacio  $(A, B)$ -invariante:  $\mathfrak{L}(\varepsilon)$ , y en la figura 2.4 el comportamiento del subespacio casi  $(A, B)$ -invariante:  $\mathcal{S}_K^\infty = \mathfrak{L}_1 \oplus \mathfrak{L}_2 \oplus \mathfrak{L}_3$ .

En los pies de figura se utiliza la siguiente notación: (*c.f.* (2.8), (2.16), (2.19) y (2.22)):

$$\begin{aligned}
 \|\mathfrak{L}_1\| &= \sqrt{x_{f,1}^2 + x_{f,4}^2}, \quad \|\mathfrak{L}_2\| = \sqrt{x_{f,3}^2 + x_{f,2}^2 + x_{f,5}^2}, \quad \|\mathfrak{L}_3\| = \sqrt{x_{f,6}^2}, \\
 \|\mathfrak{L}\| &= \sqrt{\|\mathfrak{L}_1\|^2 + \|\mathfrak{L}_2\|^2 + \|\mathfrak{L}_3\|^2}, \\
 \|\mathcal{X}_{fed}/\mathfrak{L}\| &= \sqrt{x_{f,7}^2 + x_{f,8}^2 + x_{f,9}^2}, \\
 \|\mathfrak{L}_1(\varepsilon)\| &= \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}, \quad \|\mathfrak{L}_2(\varepsilon)\| = \sqrt{\xi_3^2 + \xi_4^2 + \xi_5^2}, \quad \|\mathfrak{L}_3(\varepsilon)\| = \sqrt{\xi_6^2}, \\
 \|\mathfrak{L}(\varepsilon)\| &= \sqrt{\|\mathfrak{L}_1(\varepsilon)\|^2 + \|\mathfrak{L}_2(\varepsilon)\|^2 + \|\mathfrak{L}_3(\varepsilon)\|^2}, \\
 \|\mathcal{X}_{fed}/\mathfrak{L}(\varepsilon)\| &= \sqrt{\xi_7^2 + \xi_8^2 + \xi_9^2}, \\
 \|\mathcal{U}_1\| &= \sqrt{u_1^2 + u_2^2}, \quad \|\mathcal{U}_2\| = \sqrt{u_3^2}, \quad \|\mathcal{U}_3\| = \sqrt{u_4^2}.
 \end{aligned}$$

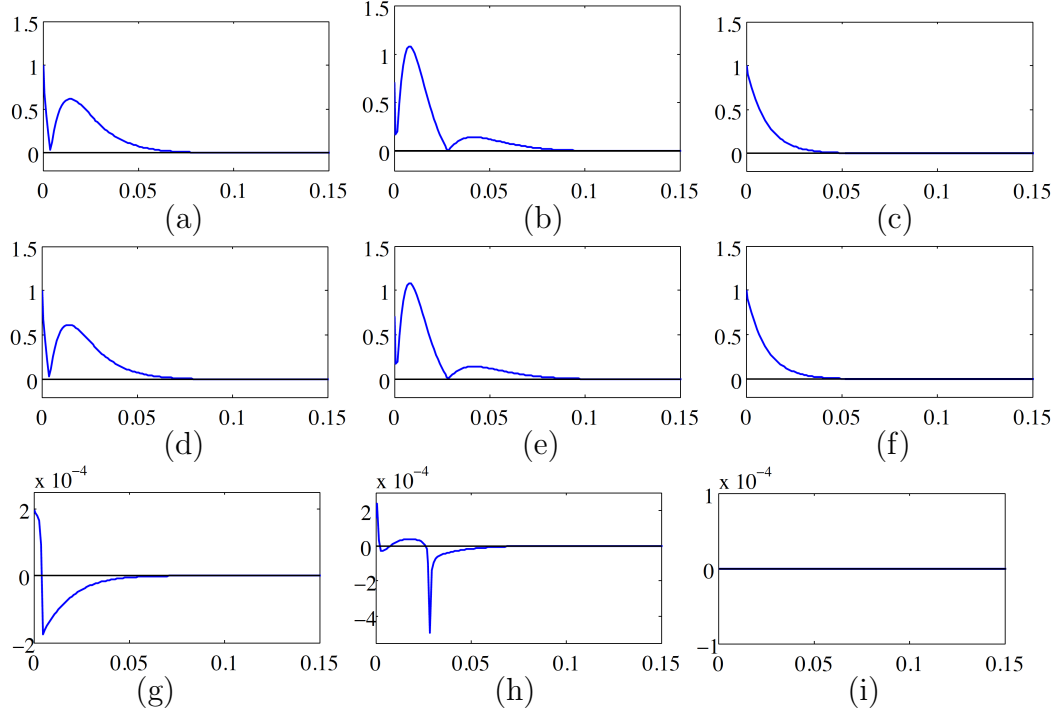


Figura 2.1: Gráficas de simulación del sistema descrito por (2.8), con la ley de control, (2.30), (2.19) y (2.27), con  $\varepsilon = 1/100$ , con la condición inicial (2.43) y  $u^* = 0$ . Comparación de los comportamientos de los subespacios  $(A, B)$ -invariante,  $\mathcal{L}(\varepsilon)$  (2.17), y casi  $(A, B)$ -invariante,  $\mathcal{S}_K^\infty$  (2.14)-(2.15). (a)  $\|\mathcal{L}_1(\varepsilon)\|$  *v.s.*  $t$ , (b)  $\|\mathcal{L}_2(\varepsilon)\|$  *v.s.*  $t$ , (c)  $\|\mathcal{L}_3(\varepsilon)\|$  *v.s.*  $t$ , (d)  $\|\mathcal{L}_1\|$  *v.s.*  $t$ , (e)  $\|\mathcal{L}_2\|$  *v.s.*  $t$ , (f)  $\|\mathcal{L}_3\|$  *v.s.*  $t$ , (g)  $\|\mathcal{L}_1(\varepsilon)\| - \|\mathcal{L}_1\|$  *v.s.*  $t$ , (h)  $\|\mathcal{L}_2(\varepsilon)\| - \|\mathcal{L}_2\|$  *v.s.*  $t$ , (i)  $\|\mathcal{L}_3(\varepsilon)\| - \|\mathcal{L}_3\|$  *v.s.*  $t$ .

### Tendencia

En la figura 2.5 mostramos las gráficas del sistema descrito por (2.8), con la ley de control, (2.30), (2.19) y (2.27), con  $\varepsilon = 1/100$ , con la condición inicial

$$x_f(0) = \bar{X}(\varepsilon)(\xi(0) + x_{a_0})$$

$$\xi(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 25 \times 10^{-3} \\ 1/\sqrt{2} \\ 25 \times 10^{-3}/\sqrt{2} \\ 5 \times 10^{-4}/\sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_{a_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

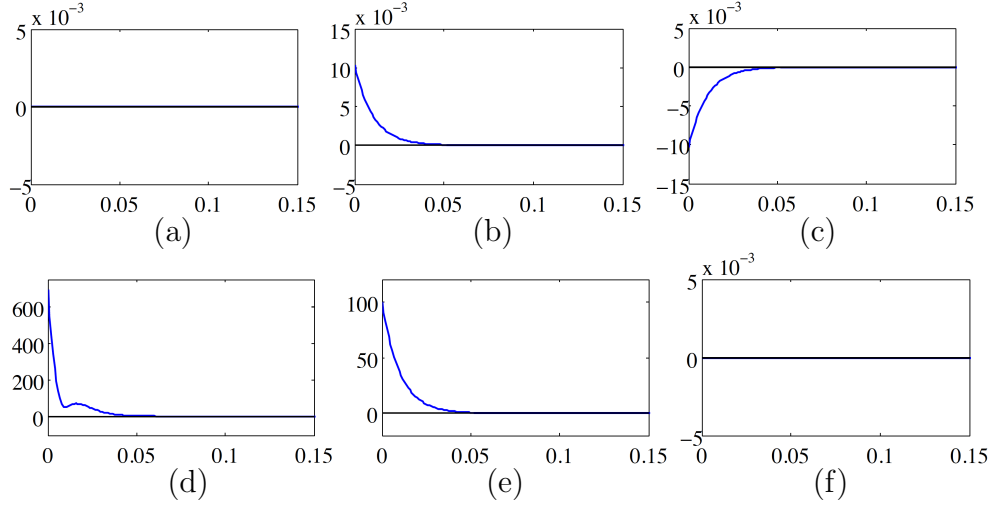


Figura 2.2: Gráficas de simulación del sistema descrito por (2.8), con la ley de control, (2.30), (2.19) y (2.27), con  $\varepsilon = 1/100$ , con la condición inicial (2.43) y  $u^* = 0$ . Espacios complementarios y leyes de control. (a)  $\|\mathcal{X}_{fed}/\mathcal{L}(\varepsilon)\|$  v.s.  $t$ , (b)  $\|\mathcal{X}_{fed}/\mathcal{L}\|$  v.s.  $t$ , (c)  $\|\mathcal{X}_{fed}/\mathcal{L}(\varepsilon)\| - \|\mathcal{X}_{fed}/\mathcal{L}\|$  v.s.  $t$ , (d)  $\|\mathcal{U}_1\|$  v.s.  $t$ , (e)  $\|\mathcal{U}_2\|$  v.s.  $t$ , (f)  $\|\mathcal{U}_3\|$  v.s.  $t$ .

y  $u^* = 0$ . En la figura se compara el comportamiento límite, para los sistemas: maestro, esclavo y casi de desacoplamiento,  $\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ t > 0}} x_f(t)$  (2.39).

En el pie de figura se utiliza la siguiente notación: (c.f. (2.8) y (2.39)):

$$\begin{aligned} \|x_m\| &= \sqrt{x_{f,1}^2 + x_{f,2}^2 + x_{f,3}^2}, \quad \|x_s\| = \sqrt{x_{f,4}^2 + x_{f,5}^2 + x_{f,6}^2}, \\ \|x_a\| &= \sqrt{x_{f,7}^2 + x_{f,8}^2 + x_{f,9}^2}, \\ \bar{x}_m &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x_m, \quad \bar{x}_s = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x_s, \quad \bar{x}_a = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x_a \end{aligned}$$

## 2.7. Conclusión

En este capítulo se revisó la relación que existe entre los subespacios de casi controlabilidad y las retroalimentaciones de alta ganancia. Así como también, su aproximación mediante una secuencia de Subespacios  $(A, B)$ –Invariantes. Se introdujo un ejemplo académico para ilustrar la aproximación de subespacios de casi controlabilidad por medio de una secuencia de subespacios  $(A, B)$ –invariantes, así como también la síntesis de la retroalimentación de alta ganancia.

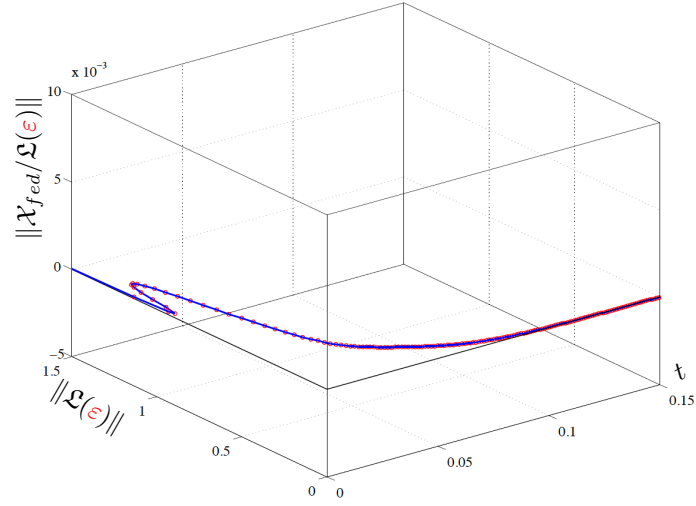


Figura 2.3: comportamiento del subespacio  $(A, B)$ -invariante:  $\mathcal{L}(\epsilon) = \mathcal{L}_1(\epsilon) \oplus \mathcal{L}_2(\epsilon) \oplus \mathcal{L}_3(\epsilon)$ .

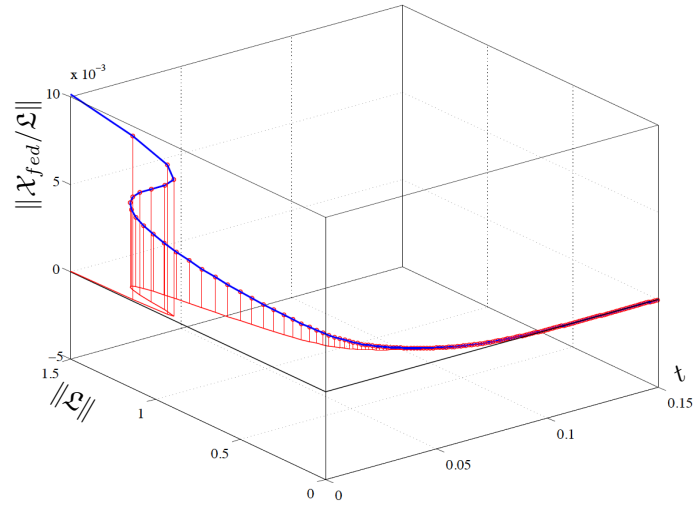


Figura 2.4: Comportamiento del subespacio casi  $(A, B)$ -invariante:  $\mathcal{S}_K^\infty = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2 \oplus \mathcal{L}_3$

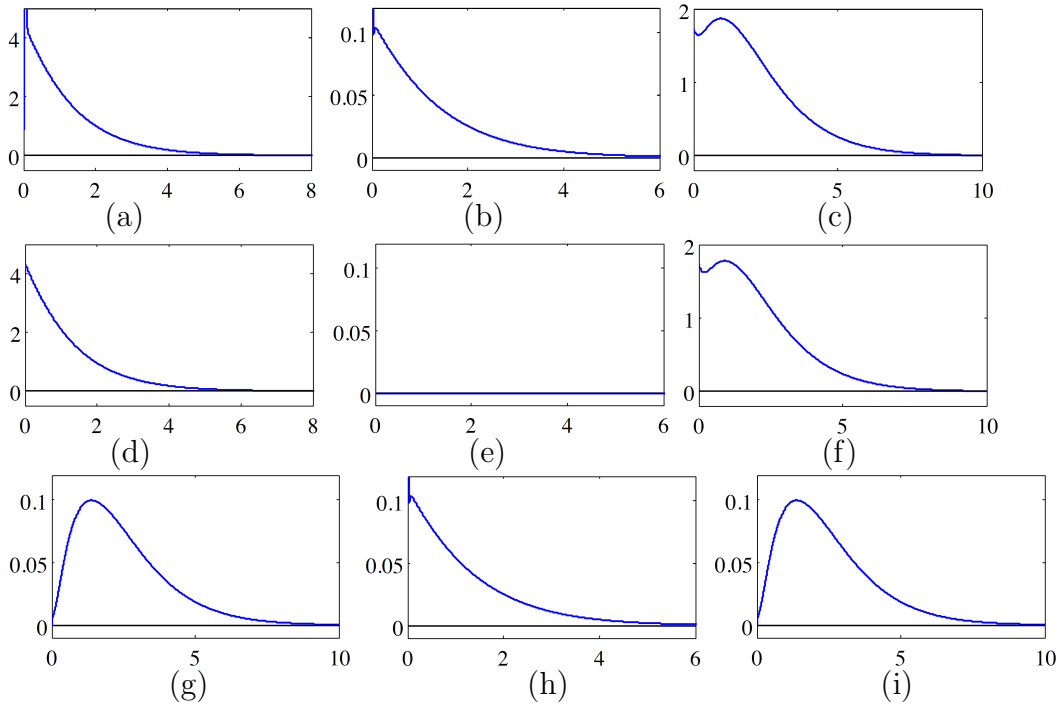


Figura 2.5: Gráficas de simulación del sistema descrito por (2.8), con la ley de control, (2.30), (2.19) y (2.27), con  $\epsilon = 1/100$ , con la condición inicial (2.44) y  $u^* = 0$ . Comparación con el comportamiento límite,  $\lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ t > 0}} x_f(t)$  (2.39). (a)  $\|x_m\|$  v.s.  $t$ , (b)  $\|x_s\|$  v.s.  $t$ , (c)  $\|x_a\|$  v.s.  $t$ , (d)  $\|\bar{x}_m\|$  v.s.  $t$ , (e)  $\|\bar{x}_s\|$  v.s.  $t$ , (f)  $\|\bar{x}_a\|$  v.s.  $t$ , (g)  $\|x_m\| - \|\bar{x}_m\|$  v.s.  $t$ , (h)  $\|x_s\| - \|\bar{x}_s\|$  v.s.  $t$ , (i)  $\|x_a\| - \|\bar{x}_a\|$  v.s.  $t$ .





## Capítulo 3

# Retroalimentación Proporcional Derivativa Basada en el Sistema Inverso

En este capítulo se muestra que el desacoplamiento obtenido con las leyes de control distribucionales, propuestas en el trabajo de tesis de Trentelman [27] (ver Capítulo 2), también puede obtenerse mediante leyes de control proporcional derivativo. Para esto primero se propone una ley proporcional derivativa, basada en una descomposición de la forma Canónica Casi de Controlabilidad (ver Subsección 2.2.2) en tres subsistemas; esta ley de control proporcional derivativa logra el mismo objetivo de la ley de control distribucional del Capítulo 2, es decir, el desacoplamiento exacto.

Posteriormente se obtiene una ley proporcional derivativa, obtenida de la aproximación de altas ganancias de Trentelman; esto es, la ley de control proporcional derivativa, a la cual se tiende cuando la ganancia tiende a infinito.

### 3.1. Descomposición en Subsistemas

Basados en la demostración del Lema 1.15 de [27] se va a descomponer el sistema (2.4)–(2.5) en tres subsistemas particulares:

1. Subsistema maestro: Es aquel subsistema, cuyo comportamiento manifestado  $(u_1, y_1)$ , dirige la trayectoria de la consigna del subsistema esclavo con el fin de llevar su trayectoria de estado hacia cero.

2. Subsistema esclavo: Es aquel subsistema cuyo comportamiento manifestado,  $(u_2, y_2)$ , obedece la consigna dada por el subsistema maestro con el fin de llevar a la trayectoria de estado hacia cero.
3. Subsistema casi de desacoplamiento: Aquel subsistema inicialmente en reposo, el cual es perturbado y en un tiempo finito previamente especificado vuelve a cero.

Descompongamos (2.4)–(2.5) en los subsistemas antes mencionados (recordar Sección 1.3.1)<sup>1</sup>:

### 3.1.1. Subsistema Maestro

$\Sigma_{e/p/e} = \left( \mathbb{R}^+, [\mathcal{U}_1 \times (\mathcal{X}_2 \times \mathcal{X}_3)] \times [\mathcal{X}_1 \times \{0\}] \times \text{Im } \bar{A}_{21}, \tilde{\mathfrak{B}}_{[A_{11}, [B_1 \ [A_{12} \ A_{13}]], \bar{A}_{21}}^{exp} \oplus \{0\} \right)$ ,  
descrito por:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x_{f,1} &= A_{11} x_{f,1} + B_1 u_1 + [A_{12} \ A_{13}] \begin{bmatrix} x_{f,2} \\ x_{f,3} \end{bmatrix} \\ u_m &= u_1 \\ x_m &= x_{f,1} \\ y_m &= \bar{A}_{21} x_m \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde: (i)  $u_m$  es la variable de entrada controlada, (ii)  $y_m$  es una variable de salida virtual, y (iii)  $\begin{bmatrix} x_{f,2}^T & x_{f,3}^T \end{bmatrix}^T$  es considerada como una variable de perturbación medible a la entrada. Note que este subsistema es también controlable, observable, y sin ceros invariantes.

### 3.1.2. Subsistema Esclavo

$\Sigma_{e/p/e} = \left( \mathbb{R}^+, [(\text{Im } \bar{A}_{21}) \times \mathcal{U}_2 \times \mathcal{X}_3] \times [\mathcal{X}_2 \times \{0\}] \times \text{Im } A_{32}, \tilde{\mathfrak{B}}_{[A_{22}, [W_2 \ A_{23}], A_{32}}^{exp} \oplus \{0\} \right)$ ,  
descrito por:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x_{f,2} &= A_{22} x_{f,2} + W_2 \begin{bmatrix} y_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + A_{23} x_{f,3} \\ u_s &= u_2 \\ x_s &= x_{f,2} \\ y_s &= A_{32} x_s \end{aligned} \tag{3.2}$$

---

<sup>1</sup>La siglas  $e/p/e$  significan *entrada/perturbación/estado*.

donde:

$$\begin{aligned} W_2 &= [V_{A_{21}} \ B_2] \\ V_{A_{21}} : \text{Im } \overline{A_{21}} &\rightarrow \mathcal{X}_2, \text{ transformación lineal inserción,} \end{aligned} \quad (3.3)$$

(i)  $\begin{bmatrix} y_m^T & u_s^T \end{bmatrix}^T$  es una variable de entrada virtualmente controlada, (ii)  $y_s$  es una variable de salida virtual, y (iii)  $x_{f,3}$  es considerada como una variable de perturbación medible a la entrada. Note que  $W_2$  es un isomorfismo.

### 3.1.3. Subsistema Casi de Desacoplamiento

$\Sigma_{e/p/s} = \left( \mathbb{R}^+, [\mathcal{U}_3, \mathcal{X}_2] \times [\mathcal{X}_3 \times \{0\}] \times A_{33}^{-1} \text{Im } B_3, \tilde{\mathfrak{B}}_{[A_{33}, [B_3 \ A_{22}], P_3]}^{exp} \oplus \{0\} \right)$ , descrito por:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x_{f,3} &= A_{33} x_{f,3} + B_3 u_3 + A_{32} x_{f,2} \\ u_a &= u_3 \\ x_a &= x_{f,3} \\ y_a &= P_3 x_a \end{aligned} \quad (3.4)$$

donde: (i)  $u_a$  es la variable de entrada controlada, (ii)  $y_a$  es una variable virtual de salida, y (iii)  $x_{f,2}$ , es considerada como una variable de perturbación medible a la entrada. Como se considera que las condiciones iniciales para (2.4) son restricciones en  $\mathcal{S}_K^\infty = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2$ , a saber  $x_{f,3}(0) \equiv 0$ , podemos asumir sin pérdida de generalidad que el par  $(A_{33}, B_3)$  es controlable. Así, si seleccionamos como transformación lineal de salida, alguna proyección natural

$$P_3 : \mathcal{X}_3 \rightarrow A_{33}^{-1} \text{Im } B_3, \text{ proyección natural paralelamente a } \mathcal{X}_{3,C}, \quad (3.5)$$

donde  $\mathcal{X}_{3,C}$  es algún subespacio complementario, entonces la tripleta estandar controlable  $(P_3, A_{33}, B_3)$  es prima (ver [19]). Así este subsistema es también controlable, observable, y sin ceros invariantes.

## 3.2. Retroalimentación P.D. Basada en el Control de Altas Ganancias de Trentelman: Ejemplo Ilustrativo (Parte 3)

### 3.2.1. Retroalimentación de Alta Ganancia de Trentelman

De (2.29), (2.27) y (2.20) se tiene la siguiente matriz de retroalimentación de alta ganancia de Trentelman:

$$F_{Tr}(\varepsilon) = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} -\frac{2}{\varepsilon} & -3 & 0 & -(\frac{1}{\varepsilon^2} - 3) & -(\frac{3}{\varepsilon} - 6) & -1 \\ 1 & -(\frac{3}{\varepsilon^2} - 7) & -\frac{3}{\varepsilon} & 5 & -(\frac{1}{\varepsilon^3} - \frac{3}{\varepsilon} - 6) & -(\frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon} - 6) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\varepsilon} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (3.6)$$

De (3.6) y (2.8) se tiene la siguiente matriz retroalimentada:

$$A_{F^*} + BF_{Tr}(\varepsilon) = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} -\frac{2}{\varepsilon} & -3 & 0 & -(\frac{1}{\varepsilon^2} - 3) & -(\frac{3}{\varepsilon} - 6) & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -(\frac{3}{\varepsilon^2} - 7) & -\frac{3}{\varepsilon} & 5 & -(\frac{1}{\varepsilon^3} - \frac{3}{\varepsilon} - 6) & -(\frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon} - 6) \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\varepsilon} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (3.7)$$

Obteniéndose la siguiente descripción del sistema en lazo cerrado (ver (2.30) y (2.22)):

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \varepsilon^2 x_{m,1} \\ x_{m,2} \\ \varepsilon^3 x_{m,3} \\ x_{s,1} \\ x_{s,2} \\ \varepsilon x_{s,3} \\ x_{a,1} \\ x_{a,2} \\ x_{a,3} \end{bmatrix} &= \left( \begin{bmatrix} -2\varepsilon & -3\varepsilon^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \varepsilon^3 & -(3\varepsilon - 7\varepsilon^3) & -3\varepsilon^2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right. \\
 &\quad \left. \begin{array}{ccc|ccc} -(1-3\varepsilon^2) & -(3\varepsilon-6\varepsilon^2) & -\varepsilon^2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5\varepsilon^3 & -(1-3\varepsilon^2-6\varepsilon^3) & -(\varepsilon+\varepsilon^2-6\varepsilon^3) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{array} \right) \\
 &\quad + \left( \begin{bmatrix} \varepsilon^3 v_{m,1}^T(\varepsilon) \\ 0v_{m,2}^T \\ \varepsilon^4 v_{m,3}^T(\varepsilon) \\ 0v_{s,1}^T \\ 0v_{s,2}^T \\ \varepsilon^2 v_{s,3}^T(\varepsilon) \\ 0v_{a,1}^T \\ 0v_{a,2}^T \\ 0v_{a,3}^T \end{bmatrix} \right) x_f + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} u^*
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

donde:  $v_{m,1}(\varepsilon)$ ,  $v_{m,2}$ ,  $v_{m,3}(\varepsilon)$ ,  $v_{s,1}$ ,  $v_{s,2}$ ,  $v_{s,3}(\varepsilon)$ ,  $v_{a,1}$ ,  $v_{a,2}$ ,  $v_{a,3} \in \mathbb{R}^9[\varepsilon]$

### 3.2.2. Modelo Singularmente Perturbado

Reagrupando términos, se obtiene el siguiente modelo singularmente perturbado del sistema en lazo cerrado [15] (haciendo  $u^* = 0$ ):

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_{m,2} \\ x_{s,1} \\ x_{s,2} \\ x_{a,1} \\ x_{a,2} \\ x_{a,3} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{m,2} \\ x_{s,1} \\ x_{s,2} \\ x_{a,1} \\ x_{a,2} \\ x_{a,3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{m,1} \\ x_{m,3} \\ x_{s,3} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \varepsilon^2 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon^3 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_{m,1} \\ x_{m,3} \\ x_{s,3} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -3\varepsilon^2 & -(1-3\varepsilon^2) & -(3\varepsilon-6\varepsilon^2) & 0 & 0 & 0 \\ -(3\varepsilon-7\varepsilon^3) & 5\varepsilon^3 & -(1-3\varepsilon^2-6\varepsilon^3) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{m,2} \\ x_{s,1} \\ x_{s,2} \\ x_{a,1} \\ x_{a,2} \\ x_{a,3} \end{bmatrix} \\
 &\quad + \begin{bmatrix} -2\varepsilon & 0 & -\varepsilon^2 \\ \varepsilon^3 & -3\varepsilon^2 & -(\varepsilon+\varepsilon^2-6\varepsilon^3) \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{m,1} \\ x_{m,3} \\ x_{s,3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon^3 v_{m,1}^T(\varepsilon) \\ \varepsilon^4 v_{m,3}^T(\varepsilon) \\ \varepsilon^2 v_{s,3}^T(\varepsilon) \end{bmatrix} x_f
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Note que:

$$\det \left( \lambda \begin{bmatrix} \varepsilon^2 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon^3 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2\varepsilon & 0 & -\varepsilon^2 \\ \varepsilon^3 & -3\varepsilon^2 & -(\varepsilon+\varepsilon^2-6\varepsilon^3) \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \right) = \varepsilon^3(\varepsilon\lambda+1)(\varepsilon\lambda+2)(\varepsilon\lambda+3) \tag{3.10}$$

Siguiendo el procedimiento de Kokotović [15], se obtienen los siguientes modelos del *sistema lento* y del *sistema rápido de tiempo congelado*:

**Sistema lento** Para obtener el modelo del *sistema lento*, en (3.9) se hace  $\varepsilon = 0$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{x}_s = 0 \\ \frac{d}{dt} \bar{x}_a = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \bar{x}_a \\ \bar{x}_m = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -(d/dt + 1) & -(d/dt + 1) & -(d/dt + 1) \end{bmatrix} \bar{x}_a \end{array} \right. \quad (3.11)$$

Las trayectorias solución de (3.11) son:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{x}_s(t) = 0 \\ \bar{x}_a(t) = \mathcal{L}^{-1} \left( \left[ \begin{array}{ccc} (s+1) & 0 & 0 \\ -1 & s & -1 \\ 0 & 1 & (s+2) \end{array} \right]^{-1} \right) \bar{x}_a(0) \\ \bar{x}_m(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ (t + \frac{1}{2}t^2)e^{-t} & (1+t)e^{-t} & te^{-t} \\ -\frac{1}{2}t^2e^{-t} & -te^{-t} & (1-t)e^{-t} \end{bmatrix} \bar{x}_a(0) \\ \bar{x}_m(t) = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -(d/dt + 1) & -(d/dt + 1) & -(d/dt + 1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ (t + \frac{1}{2}t^2)e^{-t} & (1+t)e^{-t} & te^{-t} \\ -\frac{1}{2}t^2e^{-t} & -te^{-t} & (1-t)e^{-t} \end{bmatrix} \bar{x}_a(0) \\ \bar{x}_m(t) = \begin{bmatrix} -(1+t)e^{-t} & -e^{-t} & -e^{-t} \\ -(1+t)e^{-t} & -e^{-t} & -e^{-t} \\ -e^{-t} & 0 & 0 \end{bmatrix} \bar{x}_a(0) \end{array} \right. \quad (3.12)$$

**Sistema rápido de tiempo congelado** Para obtener el modelo del *sistema rápido de tiempo congelado*, se definen las variables:  $\hat{x}_{m,1} = x_{m,1} - \bar{x}_{m,1}$ ,  $\hat{x}_{m,3} = x_{m,3} - \bar{x}_{m,3}$ ,  $\hat{x}_{s,3} = x_{s,3} - \bar{x}_{s,3}$ , y se escala al tiempo:  $\tau = t/\varepsilon$ , obteniéndose de (3.9):

$$\frac{d}{d\tau} \begin{bmatrix} \hat{x}_{m,1} \\ \hat{x}_{m,3} \\ \hat{x}_{s,3} \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{cc|c} -2 & 0 & -\varepsilon \\ \varepsilon & -3 & -(1/\varepsilon + 1 - 6\varepsilon) \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \hat{x}_{m,1} \\ \hat{x}_{m,3} \\ \hat{x}_{s,3} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Las trayectorias solución de (3.13) son:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{x}_{m,1}(\tau) \\ \hat{x}_{m,3}(\tau) \\ \hat{x}_{s,3}(\tau) \end{bmatrix} &= \mathcal{L}^{-1} \left( \begin{bmatrix} (s_f + 2) & 0 & \varepsilon \\ -\varepsilon & (s_f + 3) & 1/\varepsilon \\ 0 & 0 & (s_f + 1) \end{bmatrix}^{-1} \right) \begin{bmatrix} \hat{x}_{m,1}(0) \\ \hat{x}_{m,3}(0) \\ \hat{x}_{s,3}(0) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} e^{-2\tau} & 0 & -\varepsilon(e^{-\tau} - e^{-2\tau}) \\ \varepsilon(e^{-2\tau} - e^{-3\tau}) & e^{-3\tau} & -(\frac{1}{\varepsilon} + 1 - 6\varepsilon + \varepsilon^2)e^{-\tau} - \varepsilon^2 e^{-2\tau} + (\frac{1}{\varepsilon} + 1 - 6\varepsilon - \varepsilon^2)e^{-3\tau} \\ 0 & 0 & e^{-\tau} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{x}_{m,1}(0) \\ \hat{x}_{m,3}(0) \\ \hat{x}_{s,3}(0) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

De (3.12), (3.14) y del Teorema 5.1 del Capítulo 2 de [15], se tiene que existe un  $\varepsilon^*$  (recordar (3.10)) tal que, para todo  $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$ , las trayectorias solución del modelo singularmente perturbado (3.9) son aproximadas para todo  $t > 0$  por:

$$\begin{aligned} x_a(t) &= \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ (t + \frac{1}{2}t^2)e^{-t} & (1+t)e^{-t} & te^{-t} \\ -\frac{1}{2}t^2e^{-t} & -te^{-t} & (1-t)e^{-t} \end{bmatrix} x_a(0) + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ x_s(t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t/\varepsilon} \hat{x}_{s,3}(0) + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ x_m(t) &= \begin{bmatrix} -(1+t)e^{-t} & -e^{-t} & -e^{-t} \\ -(1+t)e^{-t} & -e^{-t} & -e^{-t} \\ -e^{-t} & 0 & 0 \end{bmatrix} x_a(0) + \mathcal{O}(\varepsilon) + \\ &\quad \begin{bmatrix} e^{-2\frac{t}{\varepsilon}} & 0 \\ 0 & 0 \\ \varepsilon(e^{-2\frac{t}{\varepsilon}} - e^{-3\frac{t}{\varepsilon}}) & e^{-3\frac{t}{\varepsilon}} \\ -\varepsilon(e^{-\frac{t}{\varepsilon}} - e^{-2\frac{t}{\varepsilon}}) & 0 \\ -(\frac{1}{\varepsilon} + 1 - 6\varepsilon + \varepsilon^2)e^{-\frac{t}{\varepsilon}} - \varepsilon^2 e^{-\frac{2t}{\varepsilon}} + (\frac{1}{\varepsilon} + 1 - 6\varepsilon - \varepsilon^2)e^{-\frac{3t}{\varepsilon}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_{m,1}(0) \\ \hat{x}_{m,3}(0) \\ \hat{x}_{s,3}(0) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Comparar (3.15) con (2.39).



### 3.2.3. Retroalimentación Proporcional Derivativa de Trentelman

Hay que notar que el mismo comportamiento promedio,  $(\bar{x}_m, \bar{x}_s, \bar{x}_a)$ , del modelo del *sistema lento* (3.11), con trayectorias solución (3.12), es también obtenido mediante la siguiente retroalimentación proporcional derivativa siguiente:

$$u_\infty = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & | & -1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & -1 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & -1 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & | & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}}_{F_p} x_f + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{F_d} \frac{d}{dt} x_f + \mathbf{I} u^* \quad (3.16)$$

En efecto, aplicando la retroalimentación proporcional derivativa (3.16) a (2.8), se obtiene el sistema en lazo cerrado:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} 0 \\ x_{m,2} \\ 0 \\ x_{s,1} \\ x_{s,2} \\ 0 \\ x_{a,1} \\ x_{a,2} \\ x_{a,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & | & -1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & 1 & 1 & | & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & -1 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & | & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & | & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & -1 & | & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & | & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & | & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 1 \end{bmatrix} u^* \quad (3.17)$$

Comparando (3.17) con (3.8), nos damos cuenta que cuando se hace  $\varepsilon = 0$  en (3.8), se obtiene precisamente el modelo del *sistema lento* (3.17) (*c.f.* (3.11), con  $u^* = 0$ ).

Ahora bien, la retroalimentación proporcional derivativa (3.16) es obtenida directamente de la retroalimentación de altas ganancias de Trentelman (3.6). En efecto, reescribiendo (3.6) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 u = & \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}}_{F_{p1}} x_f \\
 & + \underbrace{\begin{bmatrix} 1/\varepsilon^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\varepsilon^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{G_1(\varepsilon)} \left( \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{F_{p2}} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) x_f \\
 & + \underbrace{\begin{bmatrix} 1/\varepsilon^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\varepsilon^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{G_2(\varepsilon)} u^*
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Se obtiene:

$$F_p = F_{p1} + F_{p2}, \quad F_d = G_1(\mathbf{1})B^T, \quad \mathbf{I} = G_2(\mathbf{1}) \tag{3.19}$$

En la siguiente sección se propone una metodología alterna para obtener una ley proporcional derivativa, con objetivos similares, que no necesita del cálculo de los subespacios  $(A, B)$ -invariantes,  $\mathfrak{L}_i(\varepsilon)$ , para efectuar los cambios de bases necesarios para obtener la matriz de alta ganancias (2.27),  $\overline{F}_{Tr}(\varepsilon)$ .

### 3.3. Retroalimentación Proporcional Derivativa Basada en el Sistema Inverso

#### 3.3.1. Retroalimentación Proporcional Derivativa

En [8], se propone la siguiente ley de control proporcional derivativa:

$$\begin{aligned} u_m &= \left( B_1^T \frac{d}{dt} - \bar{A}_{21} \right) x_m + h_m - B_1^T [A_{12} \ A_{13}] \begin{bmatrix} x_s \\ x_a \end{bmatrix} \\ W_2 \begin{bmatrix} h_m \\ u_s \end{bmatrix} &= \left( \frac{d}{dt} - A_{22} - \mathbf{I} \right) x_s - A_{23} x_a + h_s \\ u_a &= \left( B_3^T \frac{d}{dt} - P_3 \right) x_a - B_3^T A_{32} x_s \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} h_s(t) &= \begin{cases} x_s(0) e^{-(t/T)^2 / (1-(t/T)^2)}, & 0 \leq t < T \\ 0, & t \geq T \end{cases}, & \text{si } \text{Im } A_{32} \subset \langle A_{33} \mid \text{Im } B_3 \rangle \\ h_s(t) &= 0, & \text{si } \text{Im } A_{32} \not\subset \langle A_{33} \mid \text{Im } B_3 \rangle \end{aligned} \quad (3.21)$$

donde la función,  $h_s \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+, \mathcal{X}_2)$ , es tomada de la Sección 2.4 de [22]. En el caso de que  $x_s$  no afecte la dinámica de la parte no controlable de  $x_a$ , es decir cuando  $\text{Im } A_{32} \subset \langle A_{33} \mid \text{Im } B_3 \rangle$ , la función  $h_s$  evoluciona suavemente desde  $x_s(0)$ , en  $t = 0$ , hasta 0, para todo  $t \geq T$ ; como se verá en la sección 3.3.3, esto garantiza que  $x_s$  vaya a cero suavemente y en tiempo finito (ver (3.37)).

#### 3.3.2. Representación del Sistema en Lazo Cerrado

Para obtener la representación del sistema en lazo cerrado hay que hacer las siguientes observaciones:

1. Aplicando la ley de control proporcional derivativa (3.20) a los *subsistemas maestro* (3.1), *esclavo* (3.2) y *casi de desacoplamiento* (3.4), se obtiene el sistema en lazo cerrado descrito por las siguientes representaciones:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x_m &= A_{11} x_m + [A_{12} \ A_{13}] \begin{bmatrix} x_s \\ x_a \end{bmatrix} + B_1 \left( B_1^T \left( \frac{d}{dt} x_m - [A_{12} \ A_{13}] \begin{bmatrix} x_s \\ x_a \end{bmatrix} \right) \right. \\ &\quad \left. - \bar{A}_{21} x_m + h_m \right) \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$x_s = h_s \quad (3.23)$$

$$\frac{d}{dt}x_a = A_{33}x_a + A_{32}x_s + B_3 \left( B_3^T \left( \frac{d}{dt}x_a - A_{32}x_s \right) - P_3x_a \right) \quad (3.24)$$

2. Puesto que la tripleta estandar controlable  $(\bar{A}_{21}, A_{11}, B_1)$  es prima, entonces:<sup>2</sup>

$$B_1^T B_1 = \mathbf{I}, \quad B_1^T A_{11} = 0, \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} \bar{A}_{21} \\ N_1 A_{11} \end{bmatrix} = \mathbf{I} \quad (3.25)$$

donde:

$$N_1 : \mathcal{X}_1 \rightarrow \mathcal{X}_1 / \text{Im } B_1 \quad \text{es el máximo anulador de la Im } B_1 \quad (3.26)$$

Tomando en cuenta (3.23), (3.25) y (3.26) en (3.22), se obtiene:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ N_1 \end{bmatrix}}_{N_m} \frac{d}{dt}x_m = x_m - \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ 0 \end{bmatrix} h_m + \begin{bmatrix} 0 \\ N_1 A_{12} \end{bmatrix} h_s + \begin{bmatrix} 0 \\ N_1 A_{13} \end{bmatrix} x_a \quad (3.27)$$

Note que  $N_m$  es una matriz nilpotente.

3. Con respecto al *susbsistema casi de desacoplamiento*, se va a suponer que su parte controlable ya ha sido llevada a su forma Canónica de Controlabilidad de Brunovsky, entonces:

$$B_3^T B_3 = \mathbf{I} \quad \text{y} \quad B_3^T A_{33} = 0 \quad (3.28)$$

Tomando en cuenta (3.23) y (3.28) en (3.24), se obtiene:

$$\begin{bmatrix} N_3 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{d}{dt}x_a = \begin{bmatrix} N_3 A_{33} \\ P_3 \end{bmatrix} x_a + \begin{bmatrix} N_3 A_{32} \\ 0 \end{bmatrix} h_s \quad (3.29)$$

donde:

$$N_3 : \mathcal{X}_3 \rightarrow \mathcal{X}_3 / \text{Im } B_3 \quad \text{es el máximo anulador de la Im } B_3 \quad (3.30)$$

---

<sup>2</sup>Ver pie de nota <sup>2</sup> del Lema 1 de la Subsección 2.2.2.

4. De (2.6) y (3.3), se tiene:

$$P_{A_{21}} V_{A_{21}} = \mathbf{I} \quad \text{y} \quad P_{A_{21}} B_2 = 0 \quad (3.31)$$

Tomando en cuenta (3.31), (3.3) y (3.23) en (3.20.b), se obtiene:

$$h_m = P_{A_{21}} \left( \left( \frac{d}{dt} - A_{22} \right) h_s - A_{23} x_a \right) \quad (3.32)$$

Por lo que de (3.23), (3.27), (3.29) y (3.32), se tiene que el sistema en lazo cerrado es descrito por la siguiente representación implícita regular:

$$\left[ \begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ N_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_3 \\ & & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \frac{dx_m/dt}{dx_s/dt} \\ \frac{dx_a/dt} \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{c|c|c} \mathbf{I} & 0 & \frac{P_{A_{21}} A_{23}}{N_1 A_{13}} \\ 0 & \mathbf{I} & 0 \\ \hline 0 & 0 & \frac{N_3 A_{33}}{P_3} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \frac{x_m}{x_s} \\ \frac{x_a}{x_a} \end{bmatrix} + \left[ \begin{array}{c|c} -P_{A_{21}} & \frac{P_{A_{21}} A_{22}}{N_1 A_{12}} \\ 0 & N_3 A_{32} \\ \hline 0 & 0 \\ & -\mathbf{I} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \frac{dh_s/dt}{h_s} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

### 3.3.3. Comportamiento del Sistema en Lazo Cerrado

**Susbsistema casi de desacoplamiento** El comportamiento del *susbsistema casi de desacoplamiento* se obtiene en los siguientes tres pasos:

1. Primero hay que expresar al subespacio  $\mathcal{X}_3$  en términos de su subespacio de controlabilidad, esto es:

$$\mathcal{X}_3 = \mathcal{X}_{3\bar{C}} \oplus \langle A_{33} \mid \text{Im } B_3 \rangle \quad (3.34)$$

donde  $\mathcal{X}_{3\bar{C}}$  es cualquier subespacio complementario no controlable.

2. De (3.33), se tiene que:

$$P_3 x_a = 0 \quad (3.35)$$

Por lo que las coordenadas de  $x_a$  correspondientes al subespacio,  $A_{33}^{-1} \text{Im } B_3 \subset \langle A_{33} \mid \text{Im } B_3 \rangle$ , son nulas (ver (3.5)).

3. Esta última relación implica a su vez que la parte controlable de  $x_a$  es una combinación lineal de su trayectoria de estado homogénea no controlable,  $x_{a\bar{C}}^h$ , y de la señal  $h_s$ , y sus derivadas sucesivas, esto es (recordar (3.21)):

$$x_a(t) = \begin{cases} \Theta_{\bar{C}} x_{a\bar{C}}^h(t) + \Theta_0 h_s(t) + \sum_{i=1}^{n_3-1} \Theta_i \frac{d^i}{dt^i} h_s(t), & 0 < t < T \\ \Theta_{\bar{C}} x_{a\bar{C}}^h(t) & , \quad t \geq T \end{cases} \quad (3.36)$$

**Susbsistema esclavo** El comportamiento del *susbsistema esclavo* es trivialmente (recordar (3.21) y ver (3.33)):

$$x_s(t) = \begin{cases} h_s(t), & 0 < t < T \\ 0 & , \quad t \geq T \end{cases} \quad (3.37)$$

**Susbsistema maestro** El comportamiento del *susbsistema maestro* es (recordar (3.21) y ver (3.33)):

$$\begin{aligned} x_m(t) &= \bar{x}_m(t) + \Gamma_0 x_{a\bar{C}}^h(t) + \sum_{i=1}^{n_1-1} \Gamma_i \frac{d^i}{dt^i} x_{a\bar{C}}^h(t), & t > 0 \\ \bar{x}_m(t) &= \begin{cases} \Upsilon_0 h_s(t) + \sum_{i=1}^{(n_1-1)(n_3-1)} \Upsilon_i \frac{d^i}{dt^i} h_s(t), & 0 < t < T \\ 0 & , \quad t \geq T \end{cases} \end{aligned} \quad (3.38)$$

Se tiene el siguiente resultado:

**Teorema 3 (Teorema 7 [8])** *Sea  $x_0 \in \mathcal{S}_{\mathcal{K}}^\infty$  una condición inicial para (2.4). Para cualquier constante positiva,  $\rho > 0$ , y cualquier tiempo finito,  $T > 0$ , existe una retroalimentación proporcional derivativa,  $u^* = F_D dx_f/dt + F_P x_f + h$ ,  $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+, \mathcal{U})$ , tal que la trayectoria  $(u^*, x_f) \in \tilde{\mathfrak{B}}_{[A_{F^*}, B]}^{pol}$  satisface:*

$$\begin{aligned} d_1(x_f, \mathcal{S}_{\mathcal{K}}^\infty) &\leq \rho, \\ x_f(t) &= 0 \quad \text{para cada } t \geq T. \end{aligned}$$

A fin de clarificar este resultado considerese el siguiente ejemplo académico.

### 3.3.4. Ejemplo Ilustrativo (Parte 4)

Considere el sistema representado por (2.8), cuyas matrices correspondientes a la forma *Canónica Casi de Controlabilidad*, (2.4) y (2.5), son:

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= \left[ \begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right], & A_{12} &= \left[ \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right], & A_{13} &= \left[ \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\
 A_{21} &= \left[ \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right], & A_{22} &= \left[ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right], & A_{23} &= \left[ \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\
 A_{32} &= \left[ \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right], & A_{33} &= \left[ \begin{array}{ccc} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\
 B_1 &= \left[ \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right], & B_2 &= \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right], & B_3 &= \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right]
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

Note que (recordar (2.6), (3.3) y (3.5)):

$$\bar{A}_{21} = \left[ \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right], V_{A_{21}} = \left[ \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{array} \right], W_2 = \left[ \begin{array}{cc} V_{A_{21}} & B_2 \end{array} \right] = I_3 \text{ y } P_3 = \left[ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \end{array} \right]. \tag{3.40}$$

### Retroalimentación Proporcional Derivativa

De (3.20), (3.21), (3.39) y (3.40) la ley de control es:

$$\begin{aligned}
 u_m &= \left[ \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \frac{d}{dt} x_m + \left[ \begin{array}{ccc} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{array} \right] x_m + h_m \\
 \left[ \begin{array}{c} h_m \\ \frac{h_m}{u_s} \end{array} \right] &= \frac{d}{dt} x_s + \left[ \begin{array}{ccc} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right] x_s + \left[ \begin{array}{ccc} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] x_a + h_s
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

$$u_a = \left[ \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \frac{d}{dt} x_a + \left[ \begin{array}{ccc} 0 & -1 & 0 \end{array} \right] x_a$$

con  $t > 0$ .

Simplificando la ley de control (3.41), se tiene:

$$\begin{aligned}
 h_m &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} x_s + \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} x_s + \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} x_a \\
 &\quad + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} h_s \\
 u_m &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} x_m + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} x_m + h_m \\
 u_s &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} x_s + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x_s + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} h_s \\
 u_a &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} x_a + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} x_a
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

con  $t > 0$

### Representación del Sistema en Lazo Cerrado

Aplicando la ley de control proporcional derivativa (3.42) al sistema descrito por la representación de estado (2.8) se tiene el siguiente sistema en lazo cerrado:

$$\begin{aligned}
 &\left[ \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \frac{d}{dt} x_f = \\
 &\quad \left[ \begin{array}{ccc|ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right] x_f + \\
 &\quad \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] h_s, \tag{3.43}
 \end{aligned}$$



con  $t > 0$ . Premultiplicando por la siguiente matriz invertible ( $\det(T_\ell) = -1$ ):

$$T_\ell = \left[ \begin{array}{ccc|ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ \hline -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \quad (3.44)$$

a la representación (3.43) del sistema retroalimentado se obtiene:

$$\underbrace{\left[ \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right]}_N \begin{bmatrix} dx_m/dt \\ dx_s/dt \\ dx_a/dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_m \\ x_s \\ x_a \end{bmatrix} + \underbrace{\left[ \begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right]}_\Gamma h_s, \quad (3.45)$$

con  $t > 0$ . Aplicando el siguiente operador invertible ( $\det(L(d/dt)) = 1$ ):

$$L\left(\frac{d}{dt}\right) = \left[ \begin{array}{ccc|ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & -\frac{d}{dt} & 0 & 0 & 0 & \frac{d}{dt} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -\frac{d}{dt} & 0 & 0 & \frac{d}{dt} & 0 \\ 0 & -\frac{d}{dt} & -1 & 0 & -\frac{d}{dt^2} & 0 & 0 & \left(\frac{d^2}{dt^2} + \frac{d}{dt}\right) & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right], \quad (3.46)$$

a la representación (3.45), se obtiene:

$$\begin{bmatrix} x_m(t) \\ x_s(t) \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{d^2}{dt^2} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) h_s(t) \quad (3.47)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} x_a = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x_a + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} h_s \quad (3.48)$$

con  $t > 0$ .

Por otro lado de (2.8), (3.39), (3.40), (3.26), (3.30) y (2.6), se tiene:

$$\begin{aligned} P_{A_{21}} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, P_{A_{21}} A_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, P_{A_{21}} A_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \\ N_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, N_1 A_{13} = N_1 A_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \\ N_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, N_3 A_{32} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, N_3 A_{33} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Entonces de (3.33), (3.49) y (3.40), la representación implícita regular correspondiente al *subsistema casi de desacoplamiento* es precisamente la ecuación (3.48).

Para el *subsistema maestro*, de (3.33) y (3.49) se tiene la siguiente representación implícita regular:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} x_m = x_m - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} h_s + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} h_s + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} x_a \quad (3.50)$$

Notando que (3.48), implica:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} x_a = - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} h_s \quad (3.51)$$

Entonces de (3.50) y (3.51) se obtiene la representación implícita regular (3.47).

### Comportamiento del Sistema en Lazo Cerrado

De la ecuación (3.21), se tiene:

$$h'_s(t) = \begin{cases} -x_s(0) \frac{(2t/T^2)}{(1-(t/T)^2)^2} \mathbf{e}^{-(t/T)^2} / (1-(t/T)^2), & 0 \leq t < T \\ 0, & t \geq T \end{cases} \quad (3.52)$$

$$h''_s(t) = \begin{cases} x_s(0) \frac{(2/T^2)(3(t/T)^4-1)}{(1-(t/T)^2)^4} \mathbf{e}^{-(t/T)^2} / (1-(t/T)^2), & 0 \leq t < T \\ 0, & t \geq T \end{cases}$$

Entonces, de (3.20), (3.21) y (3.52) las trayectorias solución del sistema en lazo cerrado, representado (3.47) y (3.48), son:

$$x_f(t) = \hat{x}_f(t) + \mathbf{e}^{-t} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_a(0), \quad t > 0 \quad (3.53)$$

$$\hat{x}_f(t) = \begin{cases} \mathbf{e}^{-\left(\frac{t}{T}\right)^2} \begin{bmatrix} 1 - \frac{\frac{2}{T} \frac{t}{T}}{(1-(\frac{t}{T})^2)^2} & 0 & 1 \\ 1 & 1 - \frac{\frac{2}{T} \frac{t}{T}}{(1-(\frac{t}{T})^2)^2} & 0 \\ -\frac{\frac{2}{T} \frac{t}{T}}{(1-(\frac{t}{T})^2)^2} & \frac{\frac{2}{T^2}(3(\frac{t}{T})^4-1)}{(1-(\frac{t}{T})^2)^4} - \frac{\frac{2}{T} \frac{t}{T}}{(1-(\frac{t}{T})^2)^2} & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} x_s(0), & 0 < t < T \\ 0, & t \geq T \end{cases} \quad (3.54)$$

### 3.4. Conclusión

En este capítulo se mostró que a partir de la retroalimentación de altas ganancias de Trentelman se puede obtener una retroalimentación de estado proporcional y derivativa que también resuelve el *problema de casi rechazo de perturbaciones*. Utilizando técnicas de perturbaciones singulares [15] se mostró que la secuencia de retroalimentaciones de altas ganancias de Trentelman tienden a tal retroalimentación proporcional y derivativa (ver Teorema 9).

## Parte II

# Aproximaciones Propias de Leyes de Control Proporcionales Derivativas



## Capítulo 4

# Filtro Acoplador de Derivadas Singularmente Perturbado (filtro ADSP)

### 4.1. Introducción

Con la introducción dada por Rosenbrock [23] de los así llamados sistemas generalizados (también llamados sistemas singulares o sistemas implícitos), esto hizo posible el estudio de acciones derivativas desde un punto de vista más estructural. También algunos problemas de control han sido considerados en el marco de los sistemas implícitos usando compensadores no propios (por ejemplo desacoplamientos, desacoplamiento de perturbaciones, etc). Esto es porque no existen otras soluciones exactas propias, o porque estas soluciones se obtienen de dichos sistemas de un modo más fácil (a menudo basados en técnicas de inversión) ; ver por ejemplo [31], [4], [5] y [6].

El uso de acciones derivativas en la práctica fue muy familiar para los pioneros en control, por ejemplo Coinsidine [10] y Jackson [14] quien propusieron aproximaciones útiles de tales acciones derivativas; entonces para la efectiva implementación de filtros no propios, las aproximaciones propias deben de ser diseñadas de tal forma que no alteren el objetivo de control.

En [7], se estudió una generalización de la aproximación de Jackson [14] y fue también descrito un procedimiento para perturbar el sistema de forma total (el sistema propio más el compensador no propio) por una retroalimentación está-

tica <sup>1</sup>; en ambos casos la aproximación depende de un número real positivo  $\varepsilon$  (la calidad de la aproximación es inversamente proporcional a  $\varepsilon$ ). Para la generalización del procedimiento de Jackson propuesto en [7], se demostró que no siempre funciona correctamente debido a problemas de estabilidad. De modo contrario, para la perturbación de la retroalimentación, la estabilidad no es un problema.

Para ambos casos ocurren transitorios, los cuales son funciones del parametro  $\varepsilon$ , a saber términos del tipo  $k\mathbf{e}^{-\varepsilon t}$ . Cuando el parámetro  $\varepsilon$  es demasiado pequeño se pueden generar problemas de cálculo en la simulación debido a la presencia de términos de alta velocidad. Para superar esta desventaja en [3] fue propuesta una aproximación para sistemas SISO, la cual separa agradablemente la calidad de la aproximación (dada por la inversa del parámetro positivo  $\varepsilon$ ) de la razón de convergencia (dado por un parámetro positivo  $\beta$  en términos del tipo  $k\mathbf{e}^{-\varepsilon t}$ ); sin embargo las pruebas matemáticas dadas en [21] no fueron convincentes para la comunidad de control y la selección de parámetros tampoco fue clara. En este capítulo se modifica la proposición dada en [21], para poder utilizar la sólida teoría de Perturbaciones Singulares, (ver [15]) como herramienta de análisis. Básicamente la modificación consiste en la substitución del filtro pesado  $\frac{1}{(\varepsilon s + 1)^\kappa}$  por un filtro Butterword pasa bajas, el cual nos permite una agradable aplicación de los resultados de [15].

## 4.2. Interpretación del Problema para el Caso SISO

En esta sección, estamos interesados en encontrar una aproximación exponencial propia para el caso<sup>2</sup> SISO, es decir:

**Problema 1** *Dado un sistema no propio  $\Sigma^c$ , con realización:*

$$N\dot{\omega}(t) = \omega(t) + \Gamma v(t); u(t) = \left(\underline{\chi}_{\kappa+1}^{\kappa+1}\right)^T \omega(t) \quad (4.1)$$

donde  $N : \mathbb{R}^{\kappa+1} \rightarrow \mathbb{R}^{\kappa+1}$ ,  $\Gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{\kappa+1}$ ,  $\left(\underline{\chi}_{\kappa}^1\right)^T : \mathbb{R}^{\kappa+1} \rightarrow \mathbb{R}$  son operadores lineales,  $N = \mathcal{T}_\ell\{\underline{\chi}_{\kappa+1}^2\}$  es nilpotente con índice de nilpotencia  $\kappa + 1$  y  $\Gamma$  es una

---

<sup>1</sup>Una condición geométrica suficiente para preservar la estabilidad fue dada.

<sup>2</sup>El caso MIMO se considera en el Capítulo 5.



transformación lineal tal que la matriz  $\begin{bmatrix} N & \Gamma \end{bmatrix}$  es épica,  $v$ ,  $u$ ,  $\omega$  son respectivamente la entrada, la salida y la variable descriptora; además suponemos que  $v$  es acotada y que las primeras  $\kappa$  derivadas de  $v$  con respecto al tiempo existen y son Lipschitz continuas, es decir:

H<sub>1</sub>.  $|v(t)| \leq K_0$  para todo  $t \geq 0$  para alguna constante positiva  $K_0$ .

H<sub>2</sub>.  $|v(t_1) - v(t_2)| \leq L_0|t_1 - t_2|$ ,  $\left| \frac{d^i}{dt^i} v(t_1) - \frac{d^i}{dt^i} v(t_2) \right| \leq L_i|t_1 - t_2|$  para cada  $t_1, t_2 > 0$ , con  $L_i$  constante positiva para cada  $i \in [0, \kappa]$ ,

encontrar un filtro estrictamente propio,  $\Sigma^f : \dot{\zeta}(t) = A(\varepsilon)\zeta(t) + B(\varepsilon)u(t)$ ,  $y(t) = C\zeta(t)$ , y constantes positivas  $\beta$ ,  $\epsilon$ , tales que:

Q<sub>1</sub>.  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |y(t) - u(t)| \leq K e^{-\beta t}$ , para todo  $t > 0$ .

Q<sub>2</sub>.  $\Sigma^f$  es internamente estable para todo  $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$ , para algún  $\varepsilon^* > 0$ .

Q<sub>3</sub>. El sistema total  $\Sigma^f \circ \Sigma^c$  es estrictamente equivalente<sup>3</sup> a un sistema propio.

En otras palabras requerimos el filtro propio  $\Sigma^f$ , para volver propio al sistema total  $\Sigma^f \circ \Sigma^c$ , y tal que la salida  $y(t)$ , tienda exponencialmente al comportamiento no propio de  $\Sigma^c$ . El interés, es finalmente sintetizar el sistema propio total  $\Sigma^f \circ \Sigma^c$  como una aproximación propia de  $\Sigma^c$ .

En la Sección (4.3) resolvemos el problema para el caso de sistemas de una entrada y una salida; en lo subsecuente será llamado sistema SISO.

### 4.3. Filtro Acoplador de Derivadas Singularmente Perturbado (filtro ADSP)

Consideremos el siguiente sistema lineal con perturbaciones singulares (SLPS) [15]:

---

<sup>3</sup>Se introduce la noción de equivalencia externa, la cual en resumen establece que dos modelos son externamente equivalentes, si sus correspondientes conjuntos de todas las trayectorias posibles para el comportamiento externo (en nuestro caso las trayectorias entrada-salida) son las mismas.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\beta x(t) - \varepsilon^{\kappa+1} \left( \underline{\chi}_\kappa^1 \right)^T z(t) \\ \varepsilon \dot{z}(t) = \underline{\chi}_\kappa^\kappa x(t) - (\mathfrak{M}_\kappa - U_\kappa) z(t) + \underline{\chi}_\kappa^\kappa u(t) \\ y(t) = \left( \underline{\chi}_\kappa^1 \right)^T z(t) \end{cases} \quad (4.2)$$

Donde  $x, y, u \in \mathbb{R}$ ,  $z \in \mathbb{R}^\kappa$ ,  $\kappa \in \mathbb{N}$ ,  $\beta, \varepsilon$  son dos números reales positivos. Las matrices  $\mathfrak{M}_\kappa$  y  $U_\kappa$  son definidas como sigue<sup>4</sup>:

$U_\kappa$  es la matriz triangular superior Toeplitz cuyo primer renglón es  $\left( \underline{\chi}_\kappa^2 \right)^T$   
 (4.3)

$$\mathfrak{M}_\kappa = \begin{cases} BDM \left\{ M_1, \dots, M_{\frac{\kappa}{2}} \right\} & \text{si } \kappa \text{ es par} \\ BDM \left\{ M_1, \dots, M_{\frac{\kappa-1}{2}}, 1 \right\} & \text{si } \kappa \text{ es impar} \end{cases} \quad (4.4)$$

$$M_i = \begin{bmatrix} \sin \theta_i & 0 \\ \cos^2 \theta_i & \sin \theta_i \end{bmatrix}; \quad \theta_1 = \frac{\pi}{2\kappa}; \quad \theta_{i+1} = \theta_i + \Delta\theta, \quad \Delta\theta = \frac{\pi}{\kappa}; \quad i \in [1, \kappa-1] \quad (4.5)$$

La parte lenta del sistema lineal con perturbaciones singulares (4.2) está compuesta por un sistema de primer orden con un valor propio en  $-\beta$ .

La parte rápida del sistema lineal con perturbaciones singulares (4.2) está compuesta por un filtro Butterword pasa bajas normalizado (vea por ejemplo [11] y [20]).

**Lema 2** *La matriz inversa de  $(\mathfrak{M}_\kappa - U_\kappa)$  es:*

$$(\mathfrak{M}_\kappa - U_\kappa)^{-1} = [Z_{ij}] \quad (4.6)$$

---

<sup>4</sup>Si  $\kappa = 1$ , la matriz  $U_\kappa = 0$  y  $\mathfrak{M}_\kappa = 1$

donde:

$$Z_{ii} = \begin{bmatrix} \text{sen } \theta_i & 1 \\ -\cos^2 \theta_i & \text{sen } \theta_i \end{bmatrix} \quad ; \quad Z_{ij} = \begin{bmatrix} \text{sen } \theta_j & 1 \\ \text{sen } \theta_i \text{sen } \theta_j & \text{sen } \theta_i \end{bmatrix} \quad ; \quad Z_{ij} = \mathbf{0} \quad (4.7)$$

Si  $\kappa$  es impar entonces:

$$Z_{\kappa\kappa} = 1 \quad y \quad Z_{i\kappa} = \begin{bmatrix} 1 \\ \text{sen } \theta_i \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

La función de transferencia del sistema rápido está dado por:

$$(\underline{\chi}_\kappa^1)^T \left( sI_\kappa + (\mathfrak{M}_\kappa - U_\kappa) \right)^{-1} \underline{\chi}_\kappa = \frac{1}{\Delta_B(s)} \quad (4.9)$$

donde:

$$\Delta_B(s) = \begin{cases} \prod_{k=1}^{\frac{\kappa}{2}} \left( (s + \text{sen } \theta_k)^2 + \cos^2 \theta_k \right) & \text{si } \kappa \text{ es par} \\ (s+1) \prod_{k=1}^{\frac{\kappa-1}{2}} \left( (s + \text{sen } \theta_k)^2 + \cos^2 \theta_k \right) & \text{si } \kappa \text{ es impar} \end{cases} \quad (4.10)$$

## Demostración

Haremos la demostración para  $\kappa$  par<sup>5</sup>. La Matriz  $(\mathfrak{M}_\kappa - U_\kappa)$  tiene la siguiente forma:

$$(\mathfrak{M}_\kappa - U_\kappa) = \begin{bmatrix} X_1 & Y & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X_2 & Y & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & 0 & X_{\frac{\kappa-2}{2}} & Y \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & 0 & 0 & X_{\frac{\kappa}{2}} \end{bmatrix}$$

---

<sup>5</sup>Para el caso impar SISO ver la demostración en [17], para el caso sistema de múltiples entradas múltiples salidas (sistemas MIMO) ver la demostración en [18].

donde

$$X_k = \begin{bmatrix} \text{sen } \theta_k & -1 \\ \cos^2 \theta_k & \text{sen } \theta_k \end{bmatrix}, \quad k \in \left[ \left| 1, \frac{\kappa}{2} \right| \right]$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Entonces dicha matriz inversa es:

$$(\mathfrak{M}_\kappa - U_\kappa)^{-1} = [ Z_{ij} ]$$

$$\text{donde } Z_{kk} = X_k^{-1}, \quad Z_{ij} = (-1)^{j-i} \prod_{k=i}^{j-1} (X_k^{-1} Y) \cdot X_j^{-1}, \quad Z_{ij} = \mathbf{0} \text{ para } i > j$$

Observe que  $Z_{kk} = X_k^{-1} = \begin{bmatrix} \text{sen } \theta_k & 1 \\ -\cos^2 \theta_k & \text{sen } \theta_k \end{bmatrix}$ ,  $k \in \left[ \left| 1, \frac{\kappa}{2} \right| \right]$ . Luego entonces:

$$X_k^{-1} Y = \begin{bmatrix} \text{sen } \theta_k & 1 \\ -\cos^2 \theta_k & \text{sen } \theta_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \text{sen } \theta_k & 0 \end{bmatrix}, \quad k \in \left[ \left| 1, \frac{\kappa}{2} \right| \right].$$

Por lo tanto:

$$Z_{ij} = (-1)^{j-i} \prod_{k=i}^{j-1} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \text{sen } \theta_k & 0 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} \text{sen } \theta_j & 1 \\ -\cos^2 \theta_j & \text{sen } \theta_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{sen } \theta_j & 1 \\ \text{sen } \theta_i \text{sen } \theta_j & \text{sen } \theta_i \end{bmatrix}$$

Lo cual implica (4.7).

Para la función de transferencia tenemos:

$$\text{Para cada } k \in \left[ \left| 1, \frac{\kappa}{2} \right| \right], \text{ se define } h_k = (s + \text{sen } \theta_k)^2 + \cos^2 \theta_k$$

La Matriz  $s\mathbf{I}_\kappa + (\mathfrak{M}_\kappa - U_\kappa)$  tiene la siguiente forma:

$$s\mathbf{I}_\kappa + (\mathfrak{M}_\kappa - U_\kappa) = \begin{bmatrix} X_{s_1} & Y_s & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X_{s_2} & Y & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & 0 & X_{s_{\frac{\kappa-2}{2}}} & Y_s \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & 0 & 0 & X_{s_{\frac{\kappa}{2}}} \end{bmatrix}$$

donde

$$X_{s_k} = \begin{bmatrix} s + \operatorname{sen} \theta_k & -1 \\ \cos^2 \theta_k & s + \operatorname{sen} \theta_k \end{bmatrix}, \quad i \in \left[ \left| 1, \frac{\kappa}{2} \right| \right]$$

$$Y_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Entonces dicha matriz inversa es:

$$\left( s\mathbf{I}_\kappa + (\mathfrak{M}_\kappa - \mathbf{U}_\kappa) \right)^{-1} = [ Z_{s_{ij}} ] \quad \text{donde:}$$

$$Z_{s_{kk}} = X_{s_k}^{-1}, Z_{s_{ij}} = (-1)^{j-i} \prod_{k=i}^{j-1} (X_{s_k}^{-1} Y_s) \cdot X_{s_j}^{-1}, \quad Z_{s_{ij}} = \mathbf{0}.$$

$$\text{Observe que } Z_{s_{kk}} = X_{s_k}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s + \operatorname{sen} \theta_k}{h_k} & \frac{1}{h_k} \\ \frac{-\cos^2 \theta_k}{h_k} & \frac{s + \operatorname{sen} \theta_k}{h_k} \end{bmatrix}, \quad k \in \left[ \left| 1, \frac{\kappa}{2} \right| \right].$$

Luego entonces:

$$X_{s_k}^{-1} Y_s = \begin{bmatrix} \frac{s + \operatorname{sen} \theta_k}{h_k} & \frac{1}{h_k} \\ \frac{-\cos^2 \theta_k}{h_k} & \frac{s + \operatorname{sen} \theta_k}{h_k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} \frac{1}{h_k} & 0 \\ \frac{s + \operatorname{sen} \theta_k}{h_k} & 0 \end{bmatrix},$$

$$k \in \left[ \left| 1, \frac{\kappa}{2} \right| \right].$$

Así, se tiene que:

$$Z_{s_{ij}} = (-1)^{j-i} \prod_{k=i}^{j-1} \left( \begin{bmatrix} \frac{1}{h_k} & 0 \\ \frac{s + \operatorname{sen} \theta_k}{h_k} & 0 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} \frac{s + \operatorname{sen} \theta_j}{h_j} & \frac{1}{h_j} \\ \frac{-\cos^2 \theta_j}{h_j} & \frac{s + \operatorname{sen} \theta_j}{h_j} \end{bmatrix},$$

En particular:

$$Z_{s_1 \frac{\kappa}{2}} = (-1)^{\frac{\kappa-2}{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\prod_{k=1}^{\frac{\kappa-2}{2}} h_k} & 0 \\ \frac{s + \text{sen } \theta_1}{\prod_{k=1}^{\frac{\kappa-2}{2}} h_k} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{s + \text{sen } \theta_{\frac{\kappa}{2}}}{h_{\frac{\kappa}{2}}} & \frac{1}{h_{\frac{\kappa}{2}}} \\ \frac{-\cos^2 \theta_{\frac{\kappa}{2}}}{h_{\frac{\kappa}{2}}} & \frac{s + \text{sen } \theta_{\frac{\kappa}{2}}}{h_{\frac{\kappa}{2}}} \end{bmatrix}, \text{ luego:}$$

$$Z_{s_1 \frac{\kappa}{2}} = (-1)^{\frac{\kappa-2}{2}} \begin{bmatrix} \frac{s + \text{sen } \theta_{\frac{\kappa}{2}}}{\prod_{k=1}^{\frac{\kappa-2}{2}} h_k} & \frac{1}{\prod_{k=1}^{\frac{\kappa-2}{2}} h_k} \\ \frac{(s + \text{sen } \theta_1) \cdot (s + \text{sen } \theta_{\frac{\kappa}{2}})}{\prod_{k=1}^{\frac{\kappa-2}{2}} h_k} & \frac{s + \text{sen } \theta_1}{\prod_{k=1}^{\frac{\kappa-2}{2}} h_k} \end{bmatrix}$$

Como la función de transferencia del sistema rápido esta dada por:

$$(\underline{\chi}_\kappa^1)^T \left( s\mathbf{I}_\kappa + (\mathfrak{M}_\kappa - \mathbf{U}_\kappa) \right)^{-1} \underline{\chi}_\kappa^\kappa, \text{ entonces de lo anterior se tiene que:}$$

$$(\underline{\chi}_\kappa^1)^T \left( s\mathbf{I}_\kappa + (\mathfrak{M}_\kappa - \mathbf{U}_\kappa) \right)^{-1} \underline{\chi}_\kappa^\kappa = \frac{1}{\prod_{k=1}^{\frac{\kappa}{2}} h_k} = \frac{1}{\prod_{k=1}^{\frac{\kappa}{2}} \left[ (s + \text{sen } \theta_k)^2 + \cos^2 \theta_k \right]} = \frac{1}{\Delta_B(s)}$$

■

Un procedimiento muy adecuado usado en la ingeniería para simplificar el modelo es el siguiente: (ver Sección 2.5 de [15])<sup>6</sup>:

1. Haciendo  $\varepsilon = 0$  en (4.2) y sin hacer caso de la condición inicial para  $z$  conseguimos el siguiente modelo lento sin corregir:

$$\begin{cases} z_s(t) = \begin{bmatrix} 1 & \text{sen } \theta_1 & \cdots & 1 & \text{sen } \theta_{\frac{\kappa}{2}} \end{bmatrix}^T (x_s(t) + u(t)) \\ x_s(t) = x(0) \mathbf{e}^{-\beta t} \\ y_s(t) = x_s(t) + (\underline{\chi}_1^\kappa)^T z_s(t) \end{cases} \quad (4.11)$$

---

<sup>6</sup>En adelante asumimos que  $\kappa$  es par. El desarrollo para  $\kappa$  impar se trata de manera similar.

2. Definiendo el escalamiento rápido del tiempo,  $\tau = t/\varepsilon$ , conseguimos el siguiente modelo rápido sin corregir:

$$\begin{cases} z_f(\tau) = z(\tau) - z_s(\tau) \\ \frac{d}{d\tau} z_f(\tau) = -(\mathfrak{M}_\kappa - U_\kappa) z_f(\tau) ; \quad z_f(0) = z_0 + (\mathfrak{M}_\kappa - U_\kappa)^{-1} \underline{\chi}_\kappa^\kappa x(0) \end{cases} \quad (4.12)$$

apartir de la común y adecuada simplificación del modelo, realizamos el filtro acoplador de derivadas singularmente perturbado (filtro-ADSP), éste parece seguir la señal de entrada  $u(t)$ . Esta entrada puede ser por ejemplo la salida de un derivador en el tiempo de orden mayor o igual a  $\kappa$ <sup>7</sup>.

Para el procedimiento ingenieril anterior, procedemos primero a obtener dos modelos de escala en el tiempo del filtro-ADSP (4.2), encontramos después las características de sus valores propios, y finalmente validamos la aproximación del estado sin corregir.

#### 4.3.1. Modelo de Dos Escalas en el Tiempo.

A continuación damos 2 resultados importantes:

**Lema 3** Si  $0 < \varepsilon < \min\{1, \varepsilon_1\}$ , donde:

$$\varepsilon_1 = \left( \kappa^{3/2} \left( (\beta + 1) + \kappa^{\frac{1}{2}} \right) + 2\sqrt{(\beta + 1)\kappa^{\frac{1}{2}}} \right)^{-1} \quad (4.13)$$

entonces existe  $L(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{\kappa+1}$ , solución de la siguiente ecuación algebraica:

$$R(L, \varepsilon) = \underline{\chi}_\kappa^\kappa + (\mathfrak{M}_\kappa - \varepsilon\beta\mathbf{I}_\kappa - U_\kappa)L + \varepsilon^{\kappa+2} \left( \left( \underline{\chi}_\kappa^1 \right)^T L \right) L = 0 \quad (4.14)$$

Más aún, una solución aproximada de (4.14) es:

$$\begin{cases} L(\varepsilon) = (\mathbf{I}_\kappa + \varepsilon\beta(\mathfrak{M}_\kappa - U_\kappa)^{-1}) L_0 + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ L_0 = - \begin{bmatrix} 1 & \text{sen } \theta_1 & 1 & \text{sen } \theta_2 & \cdots & 1 & \text{sen } \theta_{\frac{\kappa}{2}} \end{bmatrix}^T \end{cases} \quad (4.15)$$

---

<sup>7</sup>El sistema compuesto (el derivador más el filtro-ADSP) será propio (bajo ciertas condiciones estructurales).

## Demostración

Poniendo  $A_{11} = -\beta$ ,  $A_{12}(\varepsilon) = -\varepsilon^{\kappa+1}(\underline{\chi}_\kappa^1)^T$ ,  $A_{21} = \underline{\chi}_\kappa^\kappa$ , y  $A_{22} = -(\mathfrak{M}_\kappa - U_\kappa)$  en la ecuación (2.8) de la Sección 2.2 de [15], obtenemos (4.14). Siguiendo la demostración de Lema 2.1 de [15] y recordando el Lema 2, además notando que  $\det A_{22} = (-1)^\kappa \neq 0$ , se tiene que:

$$L(\varepsilon) = L(0) + \varepsilon \frac{dL(\varepsilon)}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

$$L(0) = -(\mathfrak{M}_\kappa - U_\kappa)^{-1} \underline{\chi}_\kappa^\kappa = - \begin{bmatrix} 1 & \text{sen } \theta_1 & 1 & \text{sen } \theta_2 & \cdots & \text{sen } \theta_{\frac{\kappa}{2}} \end{bmatrix}^T \triangleq L_0$$

$$\frac{dL(\varepsilon)}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = \beta(\mathfrak{M}_\kappa - U_\kappa)^{-1} L(0)$$

Para proveer la validación de (4.15) pongamos  $A_0(\varepsilon) = -\beta \mathbf{I}_\kappa + \varepsilon^{\kappa+1}(\underline{\chi}_\kappa^1)^T L_0$  en Lema 2.2 de [15], entonces conseguimos apartir de la demostración de Lema 2.2 de [15] y recordando el Lema 2:

$f(D) = -\varepsilon(\mathfrak{M}_\kappa - U_\kappa)^{-1} \left[ -\beta + \varepsilon^{\kappa+1}(\underline{\chi}_\kappa^1)^T (L_0 + D(\varepsilon)) \right] (L_0 + D(\varepsilon))$ , donde:

$$c = \|\varepsilon(\mathfrak{M}_\kappa - U_\kappa)^{-1}\|_2 \leq \varepsilon\sqrt{\kappa} \ \|(\mathfrak{M}_\kappa - U_\kappa)^{-1}\|_1 = \varepsilon\sqrt{\kappa} \ \| [z_{ij}] \|_1 <$$

$$\varepsilon\sqrt{\kappa}\kappa = \varepsilon\kappa^{3/2},$$

$$a = \left\| -\beta + \varepsilon^{\kappa+1}(\underline{\chi}_\kappa^1)^T L_0 \right\|_2 = \left\| -\beta - \varepsilon^{\kappa+1} \right\|_2 = \beta + \varepsilon^{\kappa+1},$$

$$b = \left\| \varepsilon^{\kappa+1}(\underline{\chi}_\kappa^1)^T \right\|_2 = \varepsilon^{\kappa+1},$$

$$\ell = \|L_0\|_2.$$

Puesto que  $\sqrt{\kappa} \text{sen } \theta_1 < \ell < \sqrt{\kappa}$ , obtenemos:

$$\frac{(\beta + \varepsilon^{\kappa+1}) \text{sen } \theta_1 \sqrt{\kappa}}{\varepsilon^{\kappa+1}} < a\ell/b < \frac{(\beta + \varepsilon^{\kappa+1}) \sqrt{\kappa}}{\varepsilon^{\kappa+1}}$$

y también  $a + b\ell + 2\sqrt{ab\ell} < (\beta + \varepsilon^{\kappa+1}) + \varepsilon^{\kappa+1}\sqrt{\kappa} + 2\sqrt{(\beta + \varepsilon^{\kappa+1})\varepsilon^{\kappa+1}\kappa^{1/2}}$ , es



decir :

$$\frac{1}{(\beta + \varepsilon^{\kappa+1}) + \varepsilon^{\kappa+1}\sqrt{\kappa} + 2\sqrt{(\beta + \varepsilon^{\kappa+1})\varepsilon^{\kappa+1}\kappa^{1/2}}} < \frac{1}{a + b\ell + 2\sqrt{abl}}$$

Puesto que  $c < \varepsilon\kappa^{3/2}$ , entonces necesitamos:

$$\varepsilon\kappa^{3/2} < \frac{1}{(\beta + \varepsilon^{\kappa+1}) + \varepsilon^{\kappa+1}\sqrt{\kappa} + 2\sqrt{(\beta + \varepsilon^{\kappa+1})\varepsilon^{\kappa+1}\kappa^{1/2}}}$$

Pero  $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$  y  $0 < \varepsilon^{\kappa+1} < \varepsilon < 1$  implican:

$$\varepsilon\kappa^{3/2} < \frac{1}{(\beta + 1) + \kappa^{1/2} + 2\sqrt{(\beta + 1)\kappa^{1/2}}} < \frac{1}{(\beta + \varepsilon^{\kappa+1}) + \varepsilon^{\kappa+1}\sqrt{\kappa} + 2\sqrt{(\beta + \varepsilon^{\kappa+1})\varepsilon^{\kappa+1}\kappa^{1/2}}}$$

Lo cual prueba la validez de (4.15).■

**Lema 4** *Bajo las mismas condiciones del Lema 3 existe  $H(L, \varepsilon) \in \mathbb{R}^{1 \times \kappa}$  solución de la siguiente ecuación algebraica:*

$$S(H, \varepsilon) = H \left( (\mathfrak{M}_\kappa - U_\kappa) + \varepsilon \left( -(\beta - \varepsilon^{\kappa+1}(\underline{\chi}_\kappa^1)^T L) \mathbf{I}_\kappa + \varepsilon^{\kappa+1} L (\underline{\chi}_\kappa^1)^T \right) \right) - \varepsilon^{\kappa+1} (\underline{\chi}_\kappa^1)^T = 0 \quad (4.16)$$

Más aún, una solución aproximada de (4.16) es:

$$\begin{cases} H(\varepsilon) = \varepsilon^{\kappa+1} H(0) + \mathcal{O}(\varepsilon^{\kappa+2}) \\ H_0 = \begin{bmatrix} \sin \theta_1 & 1 & \sin \theta_2 & 1 & \cdots & \sin \theta_{\frac{\kappa}{2}} & 1 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (4.17)$$

## Demostración

Poniendo  $A_{11} = -\beta$ ,  $A_{12}(\varepsilon) = -\varepsilon^{\kappa+1}(\underline{\chi}_\kappa^1)^T$ , y  $A_{22} = -(\mathfrak{M}_\kappa - U_\kappa)$  en la ecuación (4.3) de la Sección 2.4 de [15] obtenemos (4.16).

Apartir de (4.16) y (4.15), tenemos:

$$H \left[ (\mathfrak{M}_\kappa - U_\kappa) - \varepsilon \beta \mathbf{I}_\kappa + \mathcal{O}(\varepsilon^{\kappa+2}) \right] = \varepsilon^{\kappa+1} (\underline{\chi}_\kappa^1)^T$$

Notemos que  $\left( \text{recuerde que } 0 < \sin \theta_i < 1 \text{ y que } 0 < \varepsilon < \varepsilon_1 < \frac{1}{\beta} \right) :$

$$\det \left[ (\mathfrak{M}_\kappa - U_\kappa) - \varepsilon \beta \mathbf{I}_\kappa \right] = (1 - \varepsilon \beta) \prod_{i=1}^{\frac{\kappa}{2}} \left[ (1 - \varepsilon \beta)^2 + 2\varepsilon \beta (1 - \sin \theta_i) \right] \neq 0$$

Conseguimos apartir del Lema de Inversión<sup>8</sup>:

$$H(\varepsilon) = \varepsilon^{\kappa+1} (\underline{\chi}_\kappa^1)^T (\mathfrak{M}_\kappa - U_\kappa)^{-1} + \mathcal{O}(\varepsilon^{\kappa+2})$$

el cual junto con el Lema 2 implican (4.17).■

De los Lemas 3 y 4 podemos definir el siguiente cambio de variables de estado:

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \varepsilon H^*(L, \varepsilon) L(\epsilon) & -\varepsilon H(L, \varepsilon) \\ L(\epsilon) & I_\kappa \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

conduciendo al siguiente modelo de dos escalas en el tiempo del ADSP-filtro (4.2):

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\xi}(t) \\ \varepsilon \dot{\eta}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -(\beta - \varepsilon^{\kappa+1} (\underline{\chi}_\kappa^1)^T L(\varepsilon)) & 0 \\ 0 & -\left( (\mathfrak{M}_\kappa - U_\kappa) + \varepsilon^{\kappa+2} L(\varepsilon) (\underline{\chi}_\kappa^1)^T \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} -H(L, \varepsilon) \underline{\chi}_\kappa^\kappa \\ \underline{\chi}_\kappa^\kappa \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} (\underline{\chi}_\kappa^1)^T L(\epsilon) & (\underline{\chi}_\kappa^1)^T (1 - \varepsilon L(\epsilon) H(L, \varepsilon)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.19)$$

### 4.3.2. Propiedades de los Valores Propios.

Indicamos el primer resultado principal:

**Teorema 4** Si  $0 < \varepsilon < \min \left\{ 1, \varepsilon_1, (\sin \pi / (2\kappa))^{1/(\kappa+1)} \right\}$  entonces el SLPS (4.18) (y así el SLPS (4.2)) es asintóticamente estable. Sus valores propios  $\lambda_i$ , son aproximados como sigue:

$$\lambda_0(\varepsilon) = -\left( \beta + \varepsilon^{\kappa+1} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^{\kappa+2}) \quad (4.20)$$

---

<sup>8</sup>  $(A - \varepsilon \beta \mathbf{I})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} + \sum_{i=1}^{\kappa+1} (\varepsilon \beta)^i \mathbf{A}^{-(2i-1)} + \mathcal{O}(\varepsilon^{\kappa+2}).$

$$\begin{cases} \lambda_{(2j-1)}(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \left( -\cos \theta_i + i \sin \theta_i + \mathcal{O}(\varepsilon^{\kappa+2}) \right) & j \in \left[ \left[ 1, \frac{\kappa}{2} \right] \right]; \\ \lambda_{2j}(\varepsilon) = \bar{\lambda}_{(2j-1)}(\varepsilon) & j \in \left[ \left[ 1, \frac{\kappa}{2} \right] \right]; \\ \lambda_{\kappa}(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \left( -1 + \mathcal{O}(\varepsilon^{\kappa+2}) \right) \end{cases} \quad (4.21)$$

*Y todos los valores propios siguen siendo distintos en el semiplano izquierdo abierto complejo s.*

## Demostración

Esta demostración, es basada en la prueba del Teorema 3.1 y del Corolario 3.1 de [15] y la cual se realiza en 5 pasos:

1. En la misma forma que en la Sección 2.3 de [15]. La ecuación característica del SLPS (4.19) (y así el SLPS (4.2)  $\psi(s, \varepsilon)$  es factorizado como:

$$\psi(s, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^{\kappa}} \psi_s(s, \varepsilon) \psi_f(s_f, \varepsilon) = 0 \quad (4.22)$$

donde

$$\psi_s(s, \varepsilon) = (s + \beta) - \varepsilon^{\kappa+1} \left( \underline{\chi}_{\kappa}^1 \right)^T L(\varepsilon) \quad (4.23)$$

es el polinomio característico del subsistema lento, y

$$\psi_f(s_f, \varepsilon) = \det \left( \left( s_f I_{\kappa} + (\mathfrak{M}_{\kappa} - U_{\kappa}) \right) - \varepsilon^{\kappa+2} L(\varepsilon) \left( \underline{\chi}_{\kappa}^1 \right)^T \right) \quad (4.24)$$

es el polinomio característico del subsistema rápido, en la escala de alta frecuencia  $s_f = \varepsilon s$ .

2. Con respecto al polinomio característico del subsistema lento, tenemos de (4.23) y (4.15):

$$\begin{aligned} \lambda_0(\varepsilon) &= -\beta + \varepsilon^{\kappa+1} \left( \underline{\chi}_{\kappa}^1 \right)^T L(0) + \varepsilon^{\kappa+2} \beta \left( \underline{\chi}_{\kappa}^1 \right)^T (\mathfrak{M}_{\kappa} - U_{\kappa})^{-1} L(0) + \mathcal{O}(\varepsilon^{\kappa+3}) = \\ &= -\beta - \varepsilon^{\kappa+1} - \varepsilon^{\kappa+2} \beta \left( 2 \sum_{i=1}^{\frac{\kappa}{2}} \sin \theta_i \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^{\kappa+3}) = -\beta - \varepsilon^{\kappa+1} + \mathcal{O}(\varepsilon^{\kappa+2}). \end{aligned}$$

3. Con respecto al polinomio característico del subsistema rápido, note primero que los  $\kappa$  valores propios,  $\lambda_i^B$ , de  $-(\mathfrak{M}_{\kappa} - U_{\kappa})$  son las raíces del polinomio Butterword (4.10), y así todos ellos son distintos.

4. Note después que las sucesivas derivadas totales de los polinomios exactos, (4.23) y (4.24), con respecto a  $\varepsilon$  son<sup>9</sup>:

$$\frac{d}{d\varepsilon}\psi_f(s_f, \varepsilon) = \frac{\partial\psi_f}{\partial s_f}\left(\frac{ds_f}{d\varepsilon}\right) + \frac{\partial\psi_f}{\partial\varepsilon} = 0$$

$$\frac{d^i}{d\varepsilon^i}\psi_f(s_f, \varepsilon) = \frac{\partial\psi_f}{\partial s_f}\left(\frac{d^i s_f}{d\varepsilon^i}\right) + \left(\frac{d^i}{d\varepsilon^i}\left(\frac{\partial\psi_f}{\partial s_f}\right)\right)\left(\frac{ds_f}{d\varepsilon}\right) + \frac{d^i}{d\varepsilon^i}\left(\frac{\partial\psi_f}{\partial\varepsilon}\right) = 0, \text{ con}$$

$i \in [2, n+1]$  . Puesto que  $\varepsilon = 0$  y los  $\lambda_i^B$  ( $i \in [1, \kappa]$ ) son todos distintos, esto garantiza que:  $\frac{\partial\psi(\lambda_i^B, 0)}{\partial s_f} \neq 0$ . Esto implica la existencia de  $\frac{d^{n+1}\lambda_i^B(\varepsilon)}{d\varepsilon^{n+1}}$  para todo  $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$ , para algún  $\varepsilon^* > 0$ , lo cual implica la existencia de la serie de Taylor:

$$\lambda_i^B(\varepsilon) = \lambda_i^B(0) + \varepsilon \frac{d}{d\varepsilon}\lambda_i^B(0) + \dots + \frac{\varepsilon^n}{n!} \frac{d^n}{d\varepsilon^n}\lambda_i^B(0) + R_{n+1}, \text{ con } R_{n+1} = \mathcal{O}(\varepsilon^{n+1}).$$

5. Dada la existencia de la serie de Taylor alrededor de  $\varepsilon = 0$ , de las raíces de  $\psi_s(s, \varepsilon)$  y  $\psi_f(s_f, \varepsilon)$  y la aproximación (4.15) de  $L(\varepsilon)$ , obtenemos (4.20) y (4.21).
6. Finalmente note que las desigualdades  $0 < \varepsilon < 1$  y  $\varepsilon^{\kappa+1} < \varepsilon^\kappa < \frac{1}{\varepsilon} \sin \theta_1$  garantiza que los valores propios más cercanos al eje imaginario,  $\lambda_1(\varepsilon)$  y  $\lambda_2(\varepsilon)$ , permanecen en el semiplano izquierdo abierto complejo s. Además, puesto que  $\frac{1}{\varepsilon} \sin \frac{\Delta\theta}{2} = \frac{1}{\varepsilon} \sin \theta_1$  todos los valores propios permanecen distintos. ■

### 4.3.3. Comportamiento Externo del filtro-ADSP

**Lema 5** Si  $0 < \varepsilon < \min\left\{1, \frac{\beta}{2}\right\}$  entonces existe  $\varepsilon_1^* > 0$  tal que:

$$\mathbf{e}^{-(\beta + \varepsilon^{\kappa+1} + \mathcal{O}(\varepsilon^{\kappa+2}))t} = \mathbf{e}^{-(\beta + \varepsilon^{\kappa+1})t} + \mathcal{O}(\varepsilon^\kappa) \quad \text{para } \varepsilon \in (0, \varepsilon_1^*). \quad (4.25)$$

---

<sup>9</sup>Lo desarrollamos para  $\psi_f$ .  $\psi_s$  se hace de igual manera.

## Demostración

Consideremos la siguiente función de valores reales:

$$f(t, \varepsilon) = \mathbf{e}^{-(\beta + \varepsilon^{\kappa+1})t + g(\varepsilon)t} \quad \text{donde} \quad g(\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon^{\kappa+2})$$

es decir  $|g(\varepsilon)| < K_f \varepsilon^{\kappa+2}$  para  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_f^*)$  con  $K_f > 0$  y  $\varepsilon_f^* > 0$ .

Sea  $\varepsilon_1^* \in (0, \varepsilon_f^*)$  tal que  $K_f \varepsilon_1^* < 1$ , a saber, en otras palabras,  $|g(\varepsilon)| < \varepsilon^{\kappa+1}$  para  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1^*)$ . Entonces:

$$\mathbf{e}^{-(\beta + 2\varepsilon^{\kappa+1})t} < f(t, \varepsilon) < \mathbf{e}^{-\beta t}$$

Definamos la siguiente función:

$$\Delta(t) = \mathbf{e}^{-\beta t} - \mathbf{e}^{-(\beta + 2\varepsilon^{\kappa+1})t}$$

en la cual el máximo ocurre en:  $t^* = (2\varepsilon^{\kappa+1})^{-1} \ln \left( 1 + \frac{2\varepsilon^{\kappa+1}}{\beta} \right)$ , es decir:

$$\begin{aligned} \Delta(t^*) &= \left( 1 + \frac{2\varepsilon^{\kappa+1}}{\beta} \right)^{-\left(\frac{\beta}{2\varepsilon^{\kappa+1}}\right)} \left[ 1 - \left( 1 + \frac{2\varepsilon^{\kappa+1}}{\beta} \right)^{-1} \right] < \\ &\mathbf{e}^{-\left(\frac{\beta}{2\varepsilon^{\kappa+1}}\right)} \left[ 1 - \left( 1 + \frac{2\varepsilon^{\kappa+1}}{\beta} \right)^{-1} \right]. \end{aligned}$$

Ahora, puesto que  $\varepsilon < \frac{\beta}{2}$  y  $\frac{2\varepsilon^{\kappa+1}}{\beta} < \varepsilon^\kappa < \varepsilon < 1$ , Podemos aplicar la serie de Taylor a la desigualdad anterior, es decir

$$\Delta(t^*) < \mathbf{e}^{\left(\frac{\beta}{2\varepsilon^{\kappa+1}}\right)} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{2\varepsilon^{\kappa+1}}{\beta} + R_2 \right) \right]$$

donde  $R_2 = \left( 1 + \frac{2a^{\kappa+1}}{\beta} \right)^{-3} \left( \frac{2\varepsilon^{\kappa+1}}{\beta} \right)^2$ , con  $a \in (0, \varepsilon)$ , es decir:

$$\Delta(t^*) < \mathbf{e}^{-\left(\frac{2\varepsilon^{\kappa+1}}{\beta}\right)} \left[ \frac{2\varepsilon^{\kappa+1}}{\beta} + \mathcal{O}(1) \left( \frac{2\varepsilon^{\kappa+1}}{\beta} \right)^2 \right] = \mathcal{O}(\varepsilon^\kappa)$$

lo cual implica (4.25). ■

**Lema 6** Sea  $h_\kappa(t)$  y  $\alpha_\kappa(t)$  definidas como sigue:

$$h_\kappa(\tau, \varepsilon) = (\underline{\chi}_\kappa^1)^T \mathbf{e}^{-((\mathfrak{M}_\kappa - U_\kappa) + \mathcal{O}(\varepsilon^{\kappa+2}))\tau} \underline{\chi}_\kappa^\kappa \quad y \quad \alpha_\kappa(\tau, \varepsilon) = \int_0^\tau h_\kappa(\tau - \sigma, \varepsilon) d\sigma \quad (4.26)$$

Si  $0 < \varepsilon < \min \left\{ 1, \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \left( \frac{\pi}{2\kappa} \right) \right)^{1/(\kappa+1)} \right\}$ , entonces existe  $k_0 = \mathcal{O}(1)$ ,  
 $k_1 = \mathcal{O}(1)$ , y  $\varepsilon_2^* > 0$  tal que:

$$\begin{cases} |h_\kappa(\tau, \varepsilon)| \leq \kappa_1 \mathbf{e}^{-(\sin \theta_1 - \sqrt{2}\varepsilon^{\kappa+1})\tau} & y \\ |\alpha_\kappa(\tau, \varepsilon) - 1| \leq \kappa_0 \mathbf{e}^{-(\sin \theta_1 - \sqrt{2}\varepsilon^{\kappa+1})\tau} + \varepsilon^{\kappa+1} & \text{para } \varepsilon \in (0, \varepsilon_2^*). \end{cases} \quad (4.27)$$

## Demostración

Del Lema 2 y del Teorema 4, obtenemos:

$$\begin{aligned} h_\kappa(\tau, \varepsilon) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ (\underline{\chi}_\kappa^1)^T (s_f I_\kappa - (\mathfrak{M}_\kappa - U_\kappa) + \mathcal{O}(\varepsilon^{\kappa+2}))^{-1} \underline{\chi}_\kappa^\kappa \right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1 + \sum_{j=0}^{\kappa-1} \rho_j(\varepsilon) s_f^j}{(s_f + 1 + a_\kappa(\varepsilon)) \prod_{i=1}^{\frac{\kappa}{2}} [(s_f + \sin \theta_i + b_i(\varepsilon))^2 + (\cos \theta_i + c_i(\varepsilon))^2]} \right\} \end{aligned}$$

donde:

$$a_\kappa(\varepsilon), b_i(\varepsilon), c_i(\varepsilon), \rho_j(\varepsilon) \in \mathbb{R},$$

$$a_\kappa(\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon^{\kappa+2}), b_i(\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon^{\kappa+2}), c_i(\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon^{\kappa+2}), y \rho_j(\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon^{\kappa+2})$$

con  $i \in \left[ \left[ 1, \frac{\kappa}{2} \right] \right]$  y  $j \in [0, \kappa - 1]$ . Es decir, existe  $K_h > 0$  y  $\varepsilon_h^* > 0$  tal que  $|a_\kappa(\varepsilon)| < K_h \varepsilon^{\kappa+2}$ ,  $|b_i(\varepsilon)| < K_h \varepsilon^{\kappa+2}$ , y  $|c_i(\varepsilon)| < K_h \varepsilon^{\kappa+2}$ , para  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_h^*)$ , con  $i \in \left[ \left[ 1, \frac{\kappa}{2} \right] \right]$ .

Sea  $\varepsilon_2^* \in (0, \varepsilon_h^*)$  tal que  $K_h \varepsilon_2^* < 1$ , a saber, en otras palabras,  $|a_\kappa(\varepsilon)| < \varepsilon^{\kappa+1}$ ,  $|b_i(\varepsilon)| < \varepsilon^{\kappa+1}$ , y  $|c_i(\varepsilon)| < \varepsilon^{\kappa+1}$ , para  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2^*)$ , con  $i \in \left[ \left[ 1, \frac{\kappa}{2} \right] \right]$ .

Ahora, si  $\varepsilon < (2^{-1/2} \sin \Delta\theta/2)^{1/(\kappa+1)}$  y  $\varepsilon < (2^{-1/2} \sin \theta_1)^{1/(\kappa+1)}$ , entonces no hay intersecciones entre las vecindades de radios  $\sqrt{2}\varepsilon^{\kappa+1}$  y centrados en  $-1$  y en  $-\cos \theta_i \pm i \sin \theta_i$ ,  $i \in \left[1, \frac{\kappa}{2}\right]$ , y todos ellos están en el semiplano complejo izquierdo abierto, así todos los polos de la transformada de Laplace de la función  $h_\kappa(\tau, \varepsilon)$  son Hurwitz y todos distintos, así:

$$\begin{aligned} h_\kappa(\tau, \varepsilon) &= k_1 \mathbf{e}^{-(\sin \theta_1 - \sqrt{2}\varepsilon^{\kappa+1})\tau} f_\kappa(\tau, \varepsilon) \\ f_\kappa(\tau, \varepsilon) &= \frac{1}{k_1} \left( A_\kappa(\varepsilon) \mathbf{e}^{-(1 - \sin \theta_1 + \sqrt{2}\varepsilon^{\kappa+1} + a_\kappa)\tau} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^{\frac{\kappa}{2}} X_i(\varepsilon) \mathbf{e}^{-(\sin \theta_i - \sin \theta_1 + \sqrt{2}\varepsilon^{\kappa+1} + b_i(\varepsilon))\tau} \cos((\cos \theta_i + c_i(\varepsilon))\tau + \varphi_i(\varepsilon)) \right) \end{aligned}$$

donde:  $k_1, A_\kappa(\varepsilon), X_i(\varepsilon), \varphi_i(\varepsilon) \in \mathbb{R}$ ,  $k_1 > 0$ ,  $A_\kappa(\varepsilon) = \mathcal{O}(1)$ , y  $X_i(\varepsilon) = \mathcal{O}(1)$ ; con  $\left[1, \frac{\kappa}{2}\right]$ . Haciendo  $k_1 = |A_\kappa| + \sum_{i=1}^{\frac{\kappa}{2}} |X_i|$  obtenemos (4.27.a).

Con respecto a  $\alpha_\kappa(\tau, \varepsilon)$  tenemos:

$$\begin{aligned} \alpha_\kappa(\tau, \varepsilon) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1 + \sum_{j=0}^{\kappa-1} \rho_j(\varepsilon) s_f^j}{s_f(s_f + 1 + a_\kappa(\varepsilon)) \prod_{i=1}^{\frac{\kappa}{2}} [(s_f + \sin \theta_i + b_i(\varepsilon))^2 + (\cos \theta_i + c_i(\varepsilon))^2]} \right\} \\ \alpha_\kappa(\tau, \varepsilon) &= \bar{A}_0(\varepsilon) + k_0 \mathbf{e}^{-(\sin \theta_1 - \sqrt{2}\varepsilon^{\kappa+1})\tau} \bar{f}_\kappa(\tau, \varepsilon) \\ \bar{f}_\kappa(\tau, \varepsilon) &= \frac{1}{k_0} \left( \bar{A}_\kappa(\varepsilon) \mathbf{e}^{-(1 - \sin \theta_1 + \sqrt{2}\varepsilon^{\kappa+1} + a_\kappa)\tau} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^{\frac{\kappa}{2}} \bar{X}_i(\varepsilon) \mathbf{e}^{-(\sin \theta_i - \sin \theta_1 + \sqrt{2}\varepsilon^{\kappa+1} + b_i(\varepsilon))\tau} \cos((\cos \theta_i + c_i(\varepsilon))\tau + \bar{\varphi}_i(\varepsilon)) \right) \\ \bar{A}_0(\varepsilon) &= \frac{1 + \rho_0(\varepsilon)}{(1 + a_\kappa(\varepsilon)) \prod_{i=1}^{\frac{\kappa}{2}} [1 + 2(b_i(\varepsilon) \sin \theta_i + c_i(\varepsilon) \cos \theta_i) + b_i^2(\varepsilon) + c_i^2(\varepsilon)]} \\ &= 1 + d(\varepsilon) \end{aligned}$$

donde:  $k_0, \bar{A}_\kappa(\varepsilon), \bar{X}_i(\varepsilon), \bar{\varphi}_i(\varepsilon), d(\varepsilon) \in \mathbb{R}$ ,  $k_0 > 0$ ,  $\bar{A}_\kappa(\varepsilon) = \mathcal{O}(1)$ ,  $\bar{X}_i(\varepsilon) = \mathcal{O}(1)$ ; con  $\left[1, \frac{\kappa}{2}\right]$ . Y  $d(\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon^{\kappa+2})$ , es decir, existe  $K_\alpha > 0$  y  $\varepsilon_\alpha^* > 0$  tal que  $|d(\varepsilon)| <$

$K_\alpha \varepsilon^{\kappa+2}$  para  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_\alpha^*)$ . Sea  $\varepsilon_2^* \in (0, \min\{\varepsilon_h^*, \varepsilon_\alpha^*\})$  tal que  $K_\alpha \varepsilon_2^* < 1$ , a saber, en otras palabras,  $|d(\varepsilon)| < \varepsilon^{\kappa+1}$  para  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2^*)$ . Haciendo  $k_0 = |\overline{A}_\kappa| + \sum_{i=1}^{\frac{\kappa}{2}} |\overline{X}_i|$  obtenemos (4.27.b). ■

Supongamos que la señal de entrada es una función continua Lipschitz acotada. A saber, existen dos constantes positivas  $L_0$  y  $L_1$  tal que:

$$|u(t_1)| \leq L_0 \quad \text{y} \quad |u(t_1) - u(t_2)| \leq L_1 |t_1 - t_2| \quad \forall t_1, t_2 \geq 0. \quad (4.28)$$

Estamos ahora en la posición de establecer el siguiente resultado principal:

**Teorema 5** *Sea  $p, q \in \mathbb{Z}^+$  tal que se satisface:  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .*

$$\text{Si } 0 < \varepsilon < \min \left\{ 1, \varepsilon_1, \frac{\beta}{2}, \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \left( \frac{\pi}{2\kappa} \right) \right)^{1/(\kappa+1)}, \frac{1}{L_0}, \frac{1}{L_1^q} \right\}, \quad (4.29)$$

*entonces existe  $\varepsilon^* \in (0, \min\{\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*\})$ , tal que para cada  $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$ , el comportamiento externo de el filtro-ADSP es aproximado por:*

$$y(t) = u(t) + \mathbf{e}^{-(\beta + \varepsilon^{\kappa+1})t} x(0) + (L_0 k_0 + \mathcal{O}(1)) \mathbf{e}^{-(\sin \theta_1 - \sqrt{2} \varepsilon^{\kappa+1})t/\varepsilon} + \mathcal{O}(\varepsilon^{1/p}) \quad \forall t \geq 0 \quad (4.30)$$

*Más aún, la corrección de la “capa frontera” (4.12) es significativa únicamente durante el intervalo inicial  $[0, t^*]$ , donde<sup>10</sup>:*

$$t^* = \mathcal{O} \left( \frac{\varepsilon}{\sin \theta_1 - \sqrt{2} \varepsilon^{\kappa+1}} \ln \frac{L_0}{\varepsilon^{1/p}} \right) \quad (4.31)$$

*después de lo cual*

$$y(t) = u(t) + \mathbf{e}^{-(\beta + \varepsilon^{\kappa+1})t} x(0) + \mathcal{O}(\varepsilon^{1/p}) \quad \forall t \geq t^* \quad (4.32)$$

---

<sup>10</sup>Si  $L_0 \leq \varepsilon^{1/p}$  se tiene que  $t^* = 0$ .



### Demostración

De (4.19), (4.15), (4.17), (4.25), Teorema 4, y recordando que  $\varepsilon L_0 < 1$  obtenemos:

$$\begin{aligned}
 \xi(t) &= \mathbf{e}^{-((\beta+\varepsilon^{\kappa+1})+\mathcal{O}(\varepsilon^{\kappa+2}))t} \xi(0) \\
 &\quad - (\varepsilon^{\kappa+1} H(0) + \mathcal{O}(\varepsilon^{\kappa+2})) \underline{\chi}_\kappa^\kappa \int_0^t \mathbf{e}^{-((\beta+\varepsilon^{\kappa+1})+\mathcal{O}(\varepsilon^{\kappa+2}))(t-\sigma)} u(\sigma) d\sigma \\
 &= \mathbf{e}^{-(\beta+\varepsilon^{\kappa+1})t} \xi(0) + \mathcal{O}(\varepsilon^\kappa) \\
 &\quad - \varepsilon^{\kappa+1} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \int_0^t \mathbf{e}^{-((\beta+\varepsilon^{\kappa+1})+\mathcal{O}(\varepsilon^{\kappa+2}))(t-\sigma)} u(\sigma) d\sigma \\
 &= \mathbf{e}^{-(\beta+\varepsilon^{\kappa+1})t} \xi(0) + \mathcal{O}(\varepsilon^\kappa)
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 \eta(t) &= \mathbf{e}^{-((\mathfrak{M}_\kappa - U_\kappa) + \mathcal{O}(\varepsilon^{\kappa+2}))t/\varepsilon} \eta(0) + \int_0^{t/\varepsilon} \mathbf{e}^{-((\mathfrak{M}_\kappa - U_\kappa) + \mathcal{O}(\varepsilon^{\kappa+2}))(t/\varepsilon - \sigma)} \underline{\chi}_\kappa^\kappa u(\varepsilon\sigma) d\sigma \\
 y(t) &= (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \xi(t) + \left( (\underline{\chi}_\kappa^1)^T + \mathcal{O}(\varepsilon^{\kappa+2}) \right) \eta(t)
 \end{aligned}$$

Es decir:

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \mathbf{e}^{-(\beta+\varepsilon^{\kappa+1})t} \xi(0) + (\underline{\chi}_\kappa^1)^T \mathbf{e}^{-((\mathfrak{M}_\kappa - U_\kappa) + \mathcal{O}(\varepsilon^{\kappa+2}))t/\varepsilon} \eta(0) + \\
 &\quad \int_0^{t/\varepsilon} (\underline{\chi}_\kappa^1)^T \mathbf{e}^{-((\mathfrak{M}_\kappa - U_\kappa) + \mathcal{O}(\varepsilon^{\kappa+2}))(t/\varepsilon - \sigma)} \underline{\chi}_\kappa^\kappa u(\varepsilon\sigma) d\sigma + \mathcal{O}(\varepsilon)
 \end{aligned}$$

Del Lema 6 y recordando que  $\varepsilon L_0 < 1$  y que  $\varepsilon^{1/q} L_1 < 1$ , obtenemos:

$$\begin{aligned}
 &\left| y(t) - \mathbf{e}^{-(\beta+\varepsilon^{\kappa+1})t} \xi(0) - (\underline{\chi}_\kappa^1)^T \mathbf{e}^{-((\mathfrak{M}_\kappa - U_\kappa) + \mathcal{O}(\varepsilon^{\kappa+2}))t/\varepsilon} \eta(0) - u(t) \right| \\
 &\leq \mathcal{O}(\varepsilon) + \left| u(t) \left( \int_0^{t/\varepsilon} (\underline{\chi}_\kappa^1)^T \mathbf{e}^{-((\mathfrak{M}_\kappa - U_\kappa) + \mathcal{O}(\varepsilon^{\kappa+2}))(t/\varepsilon - \sigma)} \underline{\chi}_\kappa^\kappa d\sigma - 1 \right) \right| \\
 &\quad + \left| \int_0^{t/\varepsilon} (\underline{\chi}_\kappa^1)^T \mathbf{e}^{-((\mathfrak{M}_\kappa - U_\kappa) + \mathcal{O}(\varepsilon^{\kappa+2}))(t/\varepsilon - \sigma)} \underline{\chi}_\kappa^\kappa (u(\varepsilon\sigma) - u(t)) d\sigma \right| \\
 &= \mathcal{O}(\varepsilon) + |u(t)| |\alpha_\kappa(t/\varepsilon, \varepsilon) - 1| + \int_0^{t/\varepsilon} |h((t/\varepsilon - \sigma), \varepsilon)| |u(\varepsilon\sigma) - u(t)| d\sigma \\
 &= \mathcal{O}(\varepsilon) + k_0 L_0 \mathbf{e}^{-(\sin \theta_1 - \sqrt{2}\varepsilon^{\kappa+1})t/\varepsilon} + \varepsilon^{\kappa+1} L_0 + \\
 &\quad k_1 L_1 \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \mathbf{e}^{-(\sin \theta_1 - \sqrt{2}\varepsilon^{\kappa+1})(t-\bar{\sigma})/\varepsilon} (t - \bar{\sigma}) d\bar{\sigma} \\
 &\leq \mathcal{O}(\varepsilon) + k_0 L_0 \mathbf{e}^{-(\sin \theta_1 - \sqrt{2}\varepsilon^{\kappa+1})t/\varepsilon} + \varepsilon^{\kappa+1} L_0 + \varepsilon L_1 k_1 / (\sin \theta_1 - \sqrt{2}\varepsilon^{\kappa+1})^2 \\
 &\leq \mathcal{O}(\varepsilon^{1/p}) + k_0 L_0 \mathbf{e}^{-(\sin \theta_1 - \sqrt{2}\varepsilon^{\kappa+1})t/\varepsilon}
 \end{aligned}$$

De (4.18), (4.15) y (4.17), tenemos:

$$\begin{aligned}\xi(0) &= (1 - \varepsilon H(L, \varepsilon) L(\varepsilon)) x(0) - \varepsilon H(L, \varepsilon) z(0) = (1 + \mathcal{O}(\varepsilon^{\kappa+2})) x(0) \\ &\quad + \mathcal{O}(\varepsilon^{\kappa+2}) z(0) \\ \eta(0) &= L(\varepsilon) x(0) + z(0) = (L_0 + \mathcal{O}(\varepsilon)) x(0) + z(0)\end{aligned}$$

Del Teorema 4, tenemos:

$$\left| (\underline{\chi}_\kappa^1)^T \mathbf{e}^{-((\mathfrak{M}_\kappa - U_\kappa) + \mathcal{O}(\varepsilon^{\kappa+2})) t / \varepsilon} \eta(0) \right| \leq k_3 \mathbf{e}^{-(\sin \theta_1 - \sqrt{2} \varepsilon^{\kappa+1}) t / \varepsilon}$$

donde  $k_3 = \mathcal{O}(1)$ , lo cual implica (4.30). La ecuación (4.32) es deducida directamente. ■

## 4.4. Conclusión

En este capítulo, se resolvió el Problema 1, introducido en la sección 4.2. Para esto, se modificó la proposición dada en [21], para poder utilizar la sólida teoría de Perturbaciones Singulares, (ver [15]) como herramienta de análisis. Básicamente la modificación consistió en la substitución del filtro  $\frac{1}{(\varepsilon s + 1)^\kappa}$  por un filtro Butterword pasa bajas, el cual nos permitió una agradable aplicación de los resultados de [15].

Nuestra solución para diseñar un filtro adecuado separó agradablemente la calidad de la aproximación, dado por el subsistema rápido, parametrizado por la inversa del parámetro positivo<sup>11</sup>,  $\varepsilon$ , a partir del radio de convergencia dado por el subsistema lento parametrizado por el parámetro positivo,  $\beta$ .

---

<sup>11</sup>El parámetro  $\varepsilon$  fue elegido adecuadamente, garantizando la separación de las dos escalas en el tiempo, la lenta y la rápida (4.19) y además garantizando la estabilidad del (SPLS) (4.2)(ver Teorema 4).

## Capítulo 5

# Aproximaciones Propias (Caso MIMO)

### 5.1. Introducción

En este capítulo, estamos interesados en encontrar una aproximación exponencial propia para el caso MIMO, la cual es una extensión de los resultados del Capítulo 4, es decir:

**Problema 2** *Dado un sistema lineal no propio e invariante en el tiempo  $\Sigma^c$ , con realización:*

$$N\dot{w}(t) = w(t) - \Gamma v(t), \quad u(t) = \Theta w(t) \quad (5.1)$$

donde  $v \in \mathbb{R}^m$ ,  $u \in \mathbb{R}^n$ , y  $w \in \mathbb{R}^{\hat{n}+n}$  son la entrada, la salida y la variable descriptora, respectivamente.  $N$  es una matriz nilpotente con índice de nilpotencia  $\bar{\kappa} + 1$  y  $\Gamma$  es una transformación lineal tal que la matriz  $[N \ \Gamma]$  es epica. Supongamos que  $v$  es acotada y que las primeras  $\bar{\kappa}$  derivadas de  $v$  existen, son Lipschitz acotadas y funciones del tiempo continuas, a saber:

**H1.**  $\|v(t)\|_2 \leq K_0$ , para todo  $t \geq 0$ .

**H2.**  $\|v(t_1) - v(t_2)\|_2 \leq L_0 |t_1 - t_2|$ ,  $\|d^i v(t_1)/dt^i - d^i v(t_2)/dt^i\|_2 \leq L_i |t_1 - t_2|$ , para todo  $t_1, t_2 > 0$ ,  $i \in [0, \bar{\kappa}]$ ,

con  $K_0$  y  $L_i$  ( $i \in [0, \bar{\kappa}]$ ) algunas constantes positivas.

Se requiere encontrar un filtro estrictamente propio e invariante en el tiempo,  $\Sigma_\varepsilon^f: \dot{\zeta}(t) = A(\varepsilon)\zeta(t) + B(\varepsilon)u(t)$ ,  $y(t) = C(\varepsilon)\zeta(t)$ , y encontrar constantes positivas  $\beta$  y  $\varepsilon$ , tales que:

*Q1)*  $\exists K > 0$  tal que  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|y(t) - u(t)\|_2 \leq K \mathbf{e}^{-\beta t}$ ,  $\forall t > 0$ .

*Q2)*  $\exists \varepsilon^* > 0$  tal que  $\Sigma_\varepsilon^f$  es internamente estable  $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$ .

*Q3)* El sistema total  $\Sigma^f \circ \Sigma^c$  es estrictamente equivalente a un sistema propio lineal e invariante en el tiempo.

En otras palabras requerimos el filtro propio  $\Sigma^f$ , para volver propio al sistema total  $\Sigma^f \circ \Sigma^c$ , y tal que la salida  $y(t)$ , tienda exponencialmente al comportamiento no propio de  $\Sigma^c$ . El interés, es finalmente sintetizar el sistema propio total  $\Sigma^f \circ \Sigma^c$  como una aproximación propia de  $\Sigma^c$ .

## 5.2. Estabilidad Relativa del Filtro ADSP

En el Teorema 5, del Capítulo 4, se dieron condiciones sobre el parámetro positivo  $\varepsilon$  el cual garantiza una cierta precisión de la aproximación de la salida del filtro ADSP. En esta sección se extiende el *filtro acoplador de derivadas singularmente perturbado* (ADSP), del Capítulo 4, para el caso MIMO, y se muestra que la estabilidad relativa del filtro ADSP (4.2) depende de la elección del parámetro positivo  $\beta$ . Para esto, estudiamos la fase y el margen de ganancia de su ecuación característica  $F_B$  (recordemos (4.5), (4.9) y (4.10)):

$$\begin{aligned} F_B(j\omega) &= 1 + K_\kappa G_\kappa(j\omega), \quad K_\kappa = \varepsilon^{\kappa+1}/\beta, \\ G_\kappa^{-1}(j\omega) &= (1 + j\omega/\beta)\Delta_B(j\varepsilon\omega), \\ \Delta_B(j\varepsilon\omega) &= (1 + j\varepsilon\omega)^{\sigma_o} \prod_{i=1}^{\sigma_\kappa} ((1 - (\varepsilon\omega)^2) + j(2\varepsilon\omega \sin \theta_{i,\kappa})), \end{aligned} \quad (5.2)$$

Si  $\kappa$  es impar:  $\sigma_o = 1$  &  $\sigma_\kappa = (\kappa - 1)/2$ , si no:  $\sigma_o = 0$  &  $\sigma_\kappa = \kappa/2$ ; y  $\theta_{i,\kappa} = \pi/(2\kappa) + (i - 1)\pi/\kappa$ ,  $i \in [1, \kappa]$ .

Recordemos que la magnitud en el diagrama de Bode del filtro Butterworth es maximalmente plana en el origen y más aún:  $|\Delta_B(j\varepsilon\omega)| = \sqrt{1 + (\varepsilon\omega)^{2\kappa}}$ , lo cual implica:

$$\begin{aligned} |G_\kappa(\sqrt{\beta/\varepsilon})| &= \sqrt{\varepsilon\beta}/\sqrt{1 + (\varepsilon\beta) + (\varepsilon\beta)^\kappa + (\varepsilon\beta)^{\kappa+1}}, \\ |G_\kappa(0)| &= 1, \quad \partial |G_\kappa(j\omega)|/\partial \omega < 0 \quad \forall \omega > 0 \\ |\Delta_B(j)| &= k_o \prod_{i=1}^{\sigma_\kappa} (2 \sin \theta_{i,\kappa}) = \sqrt{2} \\ \text{Si } \kappa \text{ es impar: } k_o &= \sqrt{2} \text{ \& } \sigma_\kappa = (\kappa - 1)/2, \text{ Si no: } k_o = 1 \text{ \& } \sigma_\kappa = \kappa/2 \end{aligned} \quad (5.3)$$

Supongamos, en esta Sección, que se tiene la desigualdad (4.29) del Teorema 5. Puesto que  $\varepsilon < 1$  y  $\varepsilon < \beta/2$ , tenemos:  $K_\kappa < 1$ . Así, el margen de fase de (5.2),  $\mathcal{P}h_{\mathcal{M}}(K_\kappa G_\kappa(j\omega))$ , es acotado por abajo por  $\mathcal{P}h_{\mathcal{M}}(G_\kappa(j\omega)) = 180^\circ - \angle G_\kappa(0) = +180^\circ$ . Así, únicamente necesitamos estudiar el margen de ganancia de (5.2),  $\mathcal{G}_{\mathcal{M}}(K_\kappa G_\kappa(j\omega))$ . A saber, estudiamos el comportamiento del ángulo de fase de  $G_\kappa(j\omega)$ :

$$\begin{aligned} \text{Para } \kappa \text{ impar: } \angle G_\kappa(j\omega) &= -\phi_\beta(\omega) - \phi_\varepsilon(\omega) - \sum_{i=1}^{(\kappa-1)/2} \phi_{i,\kappa}(\omega) \\ \text{Para } \kappa \text{ par: } \angle G_\kappa(j\omega) &= -\phi_\beta(\omega) - \sum_{i=1}^{\kappa} \phi_{i,\kappa}(\omega) \\ \phi_\beta(\omega) &= \arg(1 + j(\omega/\beta)) \text{ , } \phi_\varepsilon(\omega) = \arg(1 + j(\varepsilon\omega)) \text{ ,} \\ \phi_{i,\kappa}(\omega) &= \arg((1 - (\varepsilon\omega)^2) + j(2\varepsilon\omega \sin \theta_{i,\kappa})) \end{aligned} \quad (5.4)$$

### 5.2.1. Caso $\kappa \leq 3$

Para  $\kappa = 1$ , tenemos:  $\mathcal{G}_{\mathcal{M}}(K_1 G_1(j\omega)) = K_1^{-1} |G_1^{-1}(j\omega)| = +\infty$ .

Para  $\kappa = 2$ , tenemos:  $0 \leq \phi_\beta(\omega) < \pi/2$  para todo  $\omega \in [0, +\infty)$  y  $0 \leq \phi_{1,2}(\omega) + \phi_{1,1}(\omega) \leq \pi/2$  para todo  $\omega \in [0, \varepsilon^{-1}]$ . entonces:

$$\mathcal{G}_{\mathcal{M}}(K_2 G_2(j\omega)) \geq K_2^{-1} |G_2^{-1}(j\varepsilon^{-1})| = (1/\varepsilon)^{2+1} \varepsilon^{-1} \sqrt{2 + 2(\varepsilon\beta)^2}$$

Considere el caso  $\kappa = 3$ . Para esto, primero note que (4.13) y (4.29) implican que:  $\varepsilon\beta < \varepsilon/\varepsilon_1 < 1$ , y (5.3) implican que:  $2 \sin \theta_{1,3} = 1$ . Sea  $\bar{\omega}_c$  la media geométrica de las dos frecuencias de esquina,  $\beta$  y  $1/\varepsilon$ , a saber  $\log(\bar{\omega}_c) = \frac{1}{2}(\log(\beta) + \log(1/\varepsilon))$ . Así, para  $\omega \in [0, \bar{\omega}_c]$  se tiene:  $0 \leq \omega/\beta \leq 1/\sqrt{\varepsilon\beta}$ ,  $0 \leq \varepsilon\omega \leq \sqrt{\varepsilon\beta}/1$ , y  $0 < 1 - (\varepsilon\beta) \leq 1 - (\varepsilon\omega)^2 \leq 1$ , lo cual implica (ver (5.4)):  $0 \leq \phi_\beta(\omega) + \phi_\varepsilon(\omega) \leq \pi/2$  y  $0 \leq \phi_{1,3}(\omega) < \pi/2$ , para todo  $\omega \in [0, \bar{\omega}]$ . Entonces:  $0 \leq -\angle G_3(j\omega) < \pi$ , para todo  $\omega \in [0, \sqrt{\beta/\varepsilon}]$ . Así pues, (recordemos (5.3)):

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\mathcal{M}}(K_3 G_3(j\omega)) &\geq K_3^{-1} |G_3^{-1}(j\sqrt{\beta/\varepsilon})| \\ &= (1/\varepsilon)^{3+1} \sqrt{\beta/\varepsilon} \sqrt{1 + (\varepsilon\beta) + (\varepsilon\beta)^3 + (\varepsilon\beta)^{3+1}}. \end{aligned}$$

### 5.2.2. Caso $\kappa > 3$

Tenemos ya demostrado que:

$$0 \leq \phi_\beta(\omega) + \phi_\varepsilon(\omega) \leq \pi/2 \text{ , para tod } \omega \in [0, \sqrt{\beta/\varepsilon}] \quad (5.5)$$

así, tenemos únicamente que hacer la demostración para el comportamiento  $\sum_{i=1}^{\eta} \phi_{i,\kappa}(\omega)$ , con  $\eta = (\kappa - 1)/2$  para  $\kappa$  impar y  $\eta = \kappa/2$  para  $\kappa$  par. Necesitamos los siguientes 2 lemas técnicos:

**Lema 7** Sea  $S_\eta = \{x_1, \dots, x_\eta\}$ ,  $x_i = \sin \theta_{i,\kappa}$ . Entonces:

$$\begin{aligned} \tan \left( \sum_{i=1}^{\eta} \phi_{i,\kappa}(\omega) \right) &= \varphi_\eta(\omega) / \varrho_\eta(\omega) , \\ \varphi_\eta(\omega) &= \sum_{i=1}^{\sigma_n} (-1)^{i+1} (2\varepsilon\omega)^{2i-1} (1 - (\varepsilon\omega)^2)^{\eta-(2i-1)} \mathfrak{C}_{2i-1}^\eta(x_{i_m}) \\ \varrho_\eta(\omega) &= (1 - (\varepsilon\omega)^2)^\eta + \sum_{i=1}^{\sigma_d} (-1)^i (2\varepsilon\omega)^{2i} (1 - (\varepsilon\omega)^2)^{\eta-2i} \mathfrak{C}_{2i}^\eta(x_{i_m}) \end{aligned} \quad (5.6)$$

cuando  $\eta$  es par, ponga:  $\sigma_n = \sigma_d = \eta/2$ , y cuando  $\eta$  es impar, ponga:  $\sigma_n = (\eta + 1)/2$  y  $\sigma_d = (\eta - 1)/2$ .

**Lema 8** Sea  $\eta \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ ,  $\mathcal{S}_\eta = \{x_1, \dots, x_\eta\} \subset \mathbb{R}^+$ ,

$$\begin{aligned} \aleph_{\ell,\eta}(\omega) &= (2\varepsilon\omega)^\ell (1 - (\varepsilon\omega)^2)^{\eta-\ell} \mathfrak{C}_\ell^\eta(x_{i_m}) \\ &\quad - (2\varepsilon\omega)^{\ell+2} (1 - (\varepsilon\omega)^2)^{\eta-\ell-2} \mathfrak{C}_{\ell+2}^\eta(x_{i_m}) \end{aligned} \quad (5.7)$$

donde  $\ell \in [0, \eta - 2]$ . Si:

$$\omega \leq \varepsilon^{-1} \left( \sqrt{1 + \mathfrak{C}_2^\eta(x_{i_m})} + \sqrt{\mathfrak{C}_2^\eta(x_{i_m})} \right)^{-1} \quad (5.8)$$

Entonces:

$$\aleph_{\ell,\eta}(\omega) > 0 \quad (5.9)$$

Tenemos entonces otro resultado principal:

**Teorema 6** Sea  $\kappa > 3$ . Si:

$$\begin{aligned} \beta \leq (1/\varepsilon) \left( \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{\eta-1} \sum_{j=i+1}^{\eta} \sin \theta_{i,\kappa} \sin \theta_{j,\kappa}} \right. \\ \left. + \sqrt{\sum_{i=1}^{\eta-1} \sum_{j=i+1}^{\eta} \sin \theta_{i,\kappa} \sin \theta_{j,\kappa}} \right)^{-2} \end{aligned} \quad (5.10)$$

donde  $\eta = (\kappa - 1)/2$  para  $\kappa$  impar y  $\eta = \kappa/2$  para  $\kappa$  par. Entonces:

$$0 \leq -\underline{G_\kappa(\mathcal{J}\omega)} < \pi , \quad \text{para todo } \omega \in [0, \sqrt{\beta/\varepsilon}] \quad (5.11)$$

Más aún:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_\mathcal{M}(K_\kappa G_\kappa(\mathcal{J}\omega)) &\geq K_\kappa^{-1} \left| G_\kappa^{-1}(\mathcal{J}\sqrt{\beta/\varepsilon}) \right| \\ &= (1/\varepsilon)^{\kappa+1} \sqrt{\beta/\varepsilon} \sqrt{1 + (\varepsilon\beta) + (\varepsilon\beta)^\kappa + (\varepsilon\beta)^{\kappa+1}} \end{aligned} \quad (5.12)$$

### 5.3. Aproximación Propia

Estamos ahora en condiciones de resolver el Problema 1 en el caso MIMO. Para esto, suponemos que el compensador no propio (5.1) es completamente observable. Entonces, su forma canónica de Kronecker tiene únicamente  $n$  bloques de índices mínimos por renglón de tamaño  $(\kappa_i + 1) \times (\kappa_i + 1)$ ,  $i \in [1, n]$ , tal que  $\kappa_i > 0$ ,  $\sum_{i=1}^n \kappa_i = \hat{n}$ , y  $\max\{\kappa_1, \dots, \kappa_n\} = \bar{\kappa}$  [12]. Poniendo el sistema (5.1) en su forma canónica de Kronecker, se tiene:

$$\begin{aligned} N &= BDM \{N_1, \dots, N_n\}, \quad N_i = \text{Tel}\{\underline{\chi}_{(\kappa_i+1)}^2\}, \\ \Theta &= BDM \{\underline{\theta}_1^T, \dots, \underline{\theta}_n^T\}, \quad \underline{\theta}_i = \underline{\chi}_{(\kappa_i+1)}^{(\kappa_i+1)}, \\ \Gamma &= [\Gamma_1^T \mid \dots \mid \Gamma_n^T]^T, \quad \Gamma_i = \begin{bmatrix} \underline{\gamma}_{i,0} & \underline{\gamma}_{i,1} & \dots & \underline{\gamma}_{i,\kappa_i} \end{bmatrix}^T, \\ &\text{con } \underline{\gamma}_{i,j} \in \mathbb{R}^m \text{ y } \underline{\gamma}_{i,0} \neq 0, \quad j \in [1, \kappa_i], \quad i \in [1, n] \end{aligned} \quad (5.13)$$

Definiendo las siguientes matrices:

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_i &= \begin{bmatrix} \hat{\gamma}_{1,i} & \dots & \hat{\gamma}_{n,i} \end{bmatrix}^T, \quad i \in [0, \bar{\kappa}], \quad \text{donde} \\ \hat{\gamma}_{j,i} &= \begin{cases} \underline{\gamma}_{j,(\kappa_j - \bar{\kappa} + i)} & \text{para } i \in [\bar{\kappa} - \kappa_j, \bar{\kappa}] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}, \quad j \in [1, n] \end{aligned} \quad (5.14)$$

se tiene apartir de (5.13) y (5.1):

$$u(t) = \left( \hat{\Gamma}_0 \frac{d^{\bar{\kappa}}}{dt^{\bar{\kappa}}} + \hat{\Gamma}_1 \frac{d^{\bar{\kappa}-1}}{dt^{\bar{\kappa}-1}} + \dots + \hat{\Gamma}_{\bar{\kappa}-1} \frac{d}{dt} + \hat{\Gamma}_{\bar{\kappa}} \right) v(t) \quad (5.15)$$

con  $\hat{\Gamma}_0 \neq 0$ . Sea  $K_{0,j}$ ,  $L_{0,j}$ ,  $L_{1,j}$ , ...,  $L_{\bar{\eta},j}$ , las constantes positivas de Lipschitz de las  $m$  componentes,  $v_j$ , de  $v$ ; a saber:  $\|v_j(t)\|_2 \leq K_{0,j}$ ,  $\|v_j(t_1) - v_j(t_2)\|_2 \leq L_{0,j}|t_1 - t_2|$ ,  $\|d^i v_j(t_1)/dt^i - d^i v_j(t_2)/dt^i\|_2 \leq L_{i,j}|t_1 - t_2|$ , para todo  $t \geq 0$ ,  $t_1, t_2 > 0$ ,  $j \in [1, m]$ ,  $i \in [0, \bar{\kappa}]$ . De acuerdo con (5.15) y (4.28), se definen las constantes positivas de Lipschitz como:

$$\begin{aligned} \bar{K}_0 &= \sum_{j=1}^m \left( \left\| \hat{\Gamma}_{\bar{\kappa}} \underline{\chi}_m^j \right\| 2K_{0,j} + \sum_{i=0}^{\bar{\kappa}-1} \left\| \hat{\Gamma}_i \underline{\chi}_m^j \right\| 2L_{(\bar{\kappa}-1-i),j} \right), \\ \bar{L}_0 &= \sum_{j=1}^m \sum_{i=0}^{\bar{\kappa}} \left\| \hat{\Gamma}_i \underline{\chi}_m^j \right\| 2L_{(\bar{\kappa}-i),j}. \end{aligned}$$

Entonces:  $|u(t_1)| \leq \bar{K}_0$  y  $|u(t_1) - u(t_2)| \leq \bar{L}_0|t_1 - t_2| \quad \forall t_1, t_2 \geq 0$ .

#### 5.3.1. Convergencia

El Problema 2 es resuelto por el siguiente resultado:

**Teorema 7** Sea el filtro ADSP multivariable,  $\Sigma_\varepsilon^f$ ,

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -\beta x(t) - \varepsilon K_\varepsilon C_o z(t), \\ \varepsilon \dot{z}(t) &= B_o x(t) + A_o z(t) + B_o u(t), \quad y(t) = C_o z(t)\end{aligned}\quad (5.16)$$

donde:  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $z \in \mathbb{R}^{\hat{n}}$ ,  $u \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \in \mathbb{R}^n$ ,  $y$ :

$$\begin{aligned}A_o &= BDM \{A_1, \dots, A_n\}, \quad B_o = BDM \{b_1, \dots, b_n\}, \\ K_\varepsilon &= BDM \{\varepsilon^{\kappa_1}, \dots, \varepsilon^{\kappa_n}\}, \quad C_o = BDM \{\underline{c}_1^T, \dots, \underline{c}_n^T\}\end{aligned}\quad (5.17)$$

$$A_i = (-M_{\kappa_i} + U_{\kappa_i}), \quad \underline{b}_i = \underline{\chi}_{\kappa_i}^{\kappa_i}, \quad \underline{c}_i = \underline{\chi}_{\kappa_i}^1, \quad \text{con } i \in [1, n] \quad (5.18)$$

Sea  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$  y  $p, q \in \mathbb{Z}^+$  tal que  $1/p + 1/q = 1$ . Si:

$$\varepsilon < \min \left\{ 1, \varepsilon_1(\bar{\kappa}), \frac{\beta}{2}, \left( \frac{\sin(\pi/(2\bar{\kappa}))}{\sqrt{2}} \right)^{1/(\bar{\kappa}+1)}, \bar{K}_0^{-1}, \bar{L}_0^{-q} \right\} \quad (5.19)$$

entonces existe  $\bar{\varepsilon}^* > 0$  tal que, para todo  $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}^*)$ , el filtro ADSP multivariable,  $\Sigma_\varepsilon^f$ , es internamente estable y:

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}^*)}} \left\| y(t) - \left( \sum_{i=1}^{\bar{\kappa}} \hat{\Gamma}_{\bar{\kappa}-i} \frac{d^i}{dt^i} + \hat{\Gamma}_{\bar{\kappa}} \right) v(t) \right\|_2 \leq \|x(0)\|_2 e^{-\beta t}, \quad (5.20)$$

para todo  $t > 0$ . Más aún, el sistema total,  $\Sigma_\varepsilon^f \circ \Sigma^c$ , es externamente equivalente al sistema propio singularmente perturbado:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -\beta x(t) - \varepsilon K_\varepsilon C_o \bar{z}(t) - \varepsilon \bar{\Gamma}_0 v(t), \\ \varepsilon \dot{\bar{z}}(t) &= B_o x(t) + A_o \bar{z}(t) + (A_o \bar{R}_p + B_o \Theta) \Gamma v(t), \\ y(t) &= C_o \bar{z}(t) + K_\varepsilon^{-1} \bar{\Gamma}_0 v(t)\end{aligned}\quad (5.21)$$

donde:

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma}_0 &= \left[ \underline{\gamma}_{1,0} \mid \dots \mid \underline{\gamma}_{n,0} \right]^T, \quad \bar{R}_p = \left[ \bar{R}_{p_1} \mid \dots \mid \bar{R}_{p_n} \right], \\ \bar{R}_{p_i} &= \left[ (1/\varepsilon^{\kappa_i-1}) A_o^{\kappa_i-1} \hat{\underline{b}}_{p_i} \mid \dots \mid \hat{\underline{b}}_{p_i} \mid 0 \right], \quad i \in [1, n]\end{aligned}\quad (5.22)$$

$$\begin{aligned}\hat{\underline{b}}_{p_i} &= \left[ \tilde{\underline{b}}_{i,1}^T \quad \dots \quad \tilde{\underline{b}}_{i,n}^T \right]^T \in \mathbb{R}^{\hat{n}}, \quad \tilde{\underline{b}}_{i,j} \in \mathbb{R}^{\kappa_j}, \\ \tilde{\underline{b}}_{i,j} &= 0, \quad \tilde{\underline{b}}_{i,i} = (1/\varepsilon) \underline{b}_i, \quad i \in [1, n]\end{aligned}\quad (5.23)$$

con:  $\bar{z}(t) = z(t) - \bar{R}_p w(t)$ .



### 5.3.2. Margen de Estabilidad

Ahora exploramos el margen de estabilidad del filtro ADSP multivariable en lazo abierto (5.16). Para esto, encontramos las funciones características,  $\ell_i(s)$ , de la tasa de retorno de la matriz,  $L_{rr}(s)$  (ver [16] para detalles). El sistema en lazo abierto de (5.16) es:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{z}(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} (1/\varepsilon)A_o & 0 \\ \varepsilon K_\varepsilon C_o & -\beta \mathbf{I}_n \end{bmatrix}}_{A_{OL}} \\ y_2(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I}_n \end{bmatrix}}_{C_{OL}} \begin{bmatrix} z^T(t) & x^T(t) \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (5.24)$$

donde  $y_2(t) = x(t)$  y cuando cerramos el lazo  $u_1(t) = u(t) - y_2(t)$ . El determinante de la tasa de retorno de la matriz es:  $\det(L_{rr}(s)) = \det(C_{OL}(s\mathbf{I}_{(\tilde{n}+n)} - A_{OL})^{-1}B_{OL}) = \prod_{i=1}^n K_{\kappa_i} G_{\kappa_i}(s)$ ,

donde (recordemos (4.9) y (4.10)):

$$\begin{aligned} K_{\kappa_i} &= \varepsilon^{\kappa_i+1}/\beta, \quad G_{\kappa_i}^{-1}(s) = (s/\beta + 1)\Delta_{B,i}(\varepsilon s), \\ \Delta_{B,i}(s) &= (s+1)\prod_{j=1}^{\frac{\kappa_i-1}{2}} ((s + \sin \theta_{j,\kappa_i})^2 + \cos^2 \theta_{j,\kappa_i}) \end{aligned} \quad (5.25)$$

con:  $i \in [1, n]$ . Por lo tanto, las  $n$  funciones características son:

$$\ell_i(s) = K_{\kappa_i} G_{\kappa_i}(s), \quad i \in [1, n] \quad (5.26)$$

El margen de estabilidad está dado por el quinto resultado principal:

**Teorema 8** *si en adición a las condiciones del Teorema 7 tenemos:*

$$\beta \leq (1/\varepsilon)\rho^* \quad (5.27)$$

$$\rho^* = 1, \quad \text{for } \bar{\kappa} = 3 \quad (5.28)$$

$$\begin{aligned} \rho^* &= \left( \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{(\bar{\kappa}-3)/2} \sum_{j=i+1}^{(\bar{\kappa}-1)/2} \sin \theta_{i,\bar{\kappa}} \sin \theta_{j,\bar{\kappa}}} \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\sum_{i=1}^{(\bar{\kappa}-3)/2} \sum_{j=i+1}^{(\bar{\kappa}-1)/2} \sin \theta_{i,\bar{\kappa}} \sin \theta_{j,\bar{\kappa}}} \right)^{-2}, \quad \text{para } \bar{\kappa} > 3 \end{aligned} \quad (5.29)$$

Entonces los márgenes de ganancia de las funciones características (5.26) y (5.25) son acotados por abajo por:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\mathcal{M}}(\ell_i(j\omega)) &\geq K_{\kappa_i}^{-1} \left| G_{\kappa_i}^{-1}(j\sqrt{\beta/\varepsilon}) \right| \\ &\geq (1/\varepsilon)^{\kappa_i+1} \sqrt{\beta/\varepsilon} \sqrt{1 + (\varepsilon\beta) + (\varepsilon\beta)^{\bar{\kappa}} + (\varepsilon\beta)^{\bar{\kappa}+1}} \end{aligned}$$

donde  $\underline{\kappa} = \min\{\kappa_1, \dots, \kappa_n\}$  y  $i \in [1, n]$ .

## 5.4. Densidad

De los resultados anteriores, a continuación se enuncia el Corolario de la densidad. Con este corolario se establece que los sistemas entrada/estado propios, lineales e invariantes en el tiempo, (1.4) y (1.6), son densos en los sistemas entrada/variable descriptora regulares, lineales e invariantes en el tiempo, (1.8) y (1.10). A saber, cada sistema regular no propio puede ser aproximado arbitrariamente ( $\varepsilon$  cercano) por una sucesión de sistemas propios; más aún dicha aproximación puede guardar una convergencia exponencial (dinámica  $\beta$ ).

**Corolario 2** *Considere que las condiciones de los Teoremas 7 y 8 se satisfagan. Sea  $\beta = (1/\varepsilon)ap^*$ , donde  $a$  es una constante positiva lo suficientemente pequeña,  $0 < a \leq 1$ , tal que el comportamiento del filtro-ADSP (4.2) permanece en un modelo de dos escalas en el tiempo, para todo  $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}^*)$ . Entonces para cada<sup>1</sup>  $u \in \Sigma^c(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}))$  existe una sucesión  $y_\varepsilon \in \Sigma_\varepsilon^f \circ \Sigma^c(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}))$  tal que  $y_\varepsilon$  converge a  $u$  en el sentido de  $\mathcal{L}_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ .*

## 5.5. Ejemplo Ilustrativo

Considere el sistema no propio  $\Sigma^c(N, \Gamma, \Theta)$ :  $u(t) = \begin{bmatrix} d^2/dt^2 & 0 \\ d/dt & d^3/dt^3 \end{bmatrix} v(t)$ . Entonces, las matrices (5.13) del sistema descriptor (5.1) son:

$$\begin{aligned} N_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad N_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \Gamma_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Theta = \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 0 & 0 & 1 & & & & \\ \hline & & & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{aligned} \quad (5.30)$$

donde:  $n = 2$ ,  $k_1 = 2$ ,  $k_2 = 3$ , y así  $\bar{\kappa} = 3$ . Más aún:  $\hat{\Gamma}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $\hat{\Gamma}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\hat{\Gamma}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ , y  $\hat{\Gamma}_3 = 0$ .

---

<sup>1</sup>La hipótesis  $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$  no es restrictiva, puesto que  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$  es denso en  $\mathcal{L}_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ , ver Teorema 2.4.10 de [22].

1) Las matrices envueltas en el sistema propio singularmente perturbado (5.21) son (recuerde (5.14), (5.17), y (5.18)):<sup>2</sup>

$$\begin{aligned}
 A_o &= \left[ \begin{array}{cc|ccc} -\sqrt{2}/2 & 1 & & & & \\ -1/2 & -\sqrt{2}/2 & & & & \\ \hline & & -1/2 & 1 & 0 & \\ & & -3/4 & -1/2 & 1 & \\ & & 0 & 0 & -1 & \end{array} \right], \quad B_o = \left[ \begin{array}{c|c} 0 & \\ 1 & \\ \hline & 0 \\ & 0 \\ & 1 \end{array} \right], \\
 K_\varepsilon &= \left[ \begin{array}{c|c} \varepsilon^2 & \\ \hline & \varepsilon^3 \end{array} \right], \quad C_o = \left[ \begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & & & & \\ \hline & & 1 & 0 & 0 & \end{array} \right], \quad \bar{\Gamma}_0 = \left[ \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right]
 \end{aligned} \tag{5.31}$$

2) La matriz  $\bar{R}_p$  de (5.22) y la matriz  $(A_o\bar{R}_p + B_o\Theta)$  son:

$$\begin{aligned}
 \bar{R}_p &= \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1/\varepsilon^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2}/(2\varepsilon^2) & 1/\varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1/\varepsilon^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3/(2\varepsilon^3) & 1/\varepsilon^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\varepsilon^3 & -1/\varepsilon^2 & 1/\varepsilon & 0 \end{array} \right], \\
 (A_o\bar{R}_p + B_o\Theta) &= \left[ \begin{array}{ccc|cccc} -\sqrt{2}/\varepsilon^2 & 1/\varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2}/(2\varepsilon) & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -2/\varepsilon^3 & 1/\varepsilon^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\varepsilon^3 & -3/(2\varepsilon^2) & 1/\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/\varepsilon^3 & 1/\varepsilon^2 & -1/\varepsilon & 1 \end{array} \right]
 \end{aligned} \tag{5.32}$$

3) El sistema propio singularmente perturbado externamente equivalente, (5.21), es:

---

<sup>2</sup>Puesto que  $\kappa_1 = 2$  y  $\kappa_2 = 3$ , entonces:  $\sin \theta_{1,\kappa_1} = \cos \theta_{1,\kappa_1} = \sqrt{2}/2$  y  $\sin \theta_{1,\kappa_2} = 1/2$  y  $\cos \theta_{1,\kappa_2} = \sqrt{3}/2$ .

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= -\beta x(t) - \left[ \begin{array}{cc|ccc} \varepsilon^3 & 0 & & & & \\ & & \varepsilon^4 & 0 & 0 & \end{array} \right] \bar{z}(t) - \left[ \begin{array}{cc} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{array} \right] v(t) \\
\varepsilon \dot{\bar{z}}(t) &= \left[ \begin{array}{cc|ccc} -\sqrt{2}/2 & 1 & & & & \\ -1/2 & -\sqrt{2}/2 & & & & \\ & & -1/2 & 1 & 0 & \\ & & -3/4 & -1/2 & 1 & \\ & & 0 & 0 & -1 & \end{array} \right] \bar{z}(t) \\
&+ \left[ \begin{array}{c|c} 0 & \\ 1 & 0 \\ & 0 \\ & 1 \end{array} \right] x(t) + \left[ \begin{array}{cc|c} -\sqrt{2}/\varepsilon^2 & 0 & \\ 0 & 0 & -2/\varepsilon^3 \\ 1/\varepsilon & 1/\varepsilon^3 & \\ -1/\varepsilon & -1/\varepsilon^3 & \end{array} \right] v(t) \\
y(t) &= \left[ \begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & & & & \\ & & 1 & 0 & 0 & \end{array} \right] \bar{z}(t) + \left[ \begin{array}{cc} 1/\varepsilon^2 & 0 \\ 0 & 1/\varepsilon^3 \end{array} \right] v(t)
\end{aligned} \tag{5.33}$$

Note que el comportamiento externo de (5.33) está dado por las siguientes dos ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{d}/\mathrm{d}t + \beta)\varphi_h(t) = 0, \\
&\left[ \begin{array}{cc} \Delta_2(\mathrm{d}/\mathrm{d}t) & 0 \\ 0 & \Delta_3(\mathrm{d}/\mathrm{d}t) \end{array} \right] y(t) = \left[ \begin{array}{cc} \mathrm{d}^2/\mathrm{d}t^2 & 0 \\ \mathrm{d}/\mathrm{d}t & \mathrm{d}^3/\mathrm{d}t^3 \end{array} \right] v(t) + \varphi_h(t)
\end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned}
\Delta_2(\mathrm{d}/\mathrm{d}t) &= \left( (\varepsilon \mathrm{d}/\mathrm{d}t + \sqrt{2}/2)^2 + (\sqrt{2}/2)^2 \right) + \varepsilon^3, \\
\Delta_3(\mathrm{d}/\mathrm{d}t) &= (\varepsilon \mathrm{d}/\mathrm{d}t + 1) \left( (\varepsilon \mathrm{d}/\mathrm{d}t + 1/2)^2 + (\sqrt{3}/2)^2 \right) + \varepsilon^4
\end{aligned}$$

Hacemos alguna simulación en MATLAB<sup>R</sup>. Para ello, elegimos como entrada:

$$v(t) = \begin{bmatrix} 10e^{t-2}/(1 + e^{t-2}) & \sin(2\pi/5)t \end{bmatrix}^T \tag{5.34}$$

en la cual las derivadas envueltas son:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}v_1(t)/\mathrm{d}t &= 10e^{t-2}/(1 + e^{t-2})^2, \\
\mathrm{d}^2v_1(t)/\mathrm{d}t^2 &= 10e^{t-2}(1 - e^{t-2})/(1 + e^{t-2})^3, \\
\mathrm{d}^3v_2(t)/\mathrm{d}t^3 &= -(2\pi/5)^3 \cos(2\pi/5)t
\end{aligned}$$

Entonces, eligiendo  $\beta = 1$  y  $q = p = 2$ , conseguimos apartir de (5.34), (4.13), y (5.19):

$$\begin{aligned}
L_{0,1} &= 5/2, \quad L_{1,1} = 5\sqrt{3}/18, \quad L_{2,1} = 5/4, \quad L_{2,2} = (2\pi/5)^3, \\
L_{3,2} &= (2\pi/5)^4, \quad \bar{K}_0 = L_{2,2} + L_{1,1} + L_{0,1} = 4,9655, \\
\bar{L}_0 &= L_{3,2} + L_{2,1} + L_{1,1} = 4,2248, \quad \varepsilon_1 = 0,0258, \quad \beta/2 = 0,5, \\
((1/\sqrt{2}) \sin \pi/6)^{1/4} &= 0,7711, \quad \bar{K}_0^{-1} = 0,2014, \quad \bar{L}_0^{-2} = 0,056
\end{aligned}$$

Entonces seleccionamos:

$$\varepsilon = 0,025$$

Puesto que  $\bar{\kappa} = 3$ , apartir de (5.28) que  $\rho^* = 1$  y así (5.27) se satisface. esta selección conservadora garantiza la aproximación (4.15) de  $L(\varepsilon)$ . Y a partir de (4.31), tenemos:

$$t^* = \mathcal{O}(0,1723)$$

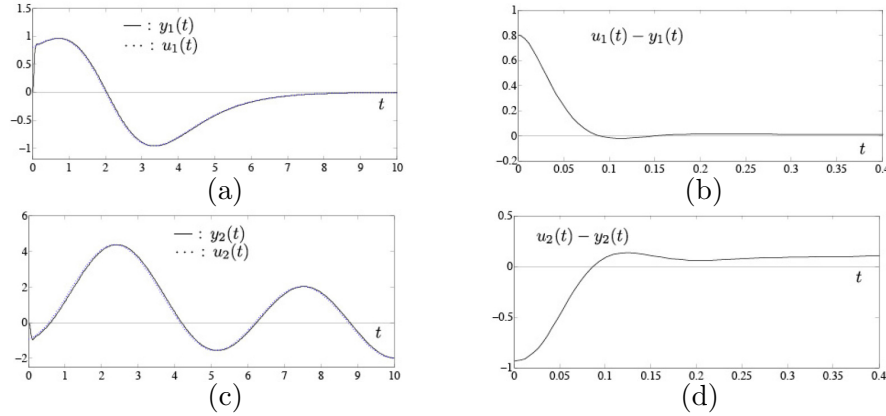


Figura 5.1: Simulación de la respuesta en el tiempo del sistema (5.33) Para la entrada (5.34), con:  $(\beta, \varepsilon) = (1, 0,025)$ ,  $x(0) = 0$  y  $\bar{z}(0) = -\bar{R}_p w(0)$ . (a) Primera componente; la línea punteada es  $u_1(t) = d^2 v_1(t)/dt^2$  y la línea continua es  $y_1(t)$ . (b) Error de la primera componente,  $u_1(t) - y_1(t)$ . (c) Segunda componente; la línea punteada es  $u_2(t) = dv_1(t)/dt - d^3 v_2(t)/dt^3$  y la línea continua es  $y_2(t)$ . (d) Error de la segunda componente,  $u_2(t) - y_2(t)$ .

En las Figuras 5.1 y 5.3, se muestra una simulación con MATLAB<sup>R</sup> con una *tolerancia relativa* de  $1 \times 10^{-6}$ , una *variable de paso* y un "ODE 45 (Domain-Prince)"; los otros parámetros son puestos en *automático*.

En la figura 5.1, la simulación está dada con condiciones iniciales (recuerde (5.1), (5.30), (5.32), y (5.34)):

$$\begin{aligned} \bar{z}(0) &= z(0) - \bar{R}_p w(0) = -\bar{R}_p w(0) \\ &= \begin{bmatrix} -10/((1+e^2)\varepsilon^2) & 10(\sqrt{2}(1+e^2) - 2e^2\varepsilon)/(2(1+e^2)^2\varepsilon^2) \\ 0 & -2\pi/(5\varepsilon^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\pi(1+e^2) - 50\varepsilon \\ (5(1+e^2)\varepsilon^2) \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

esta simulación está en completa concordancia con el Teorema 5.

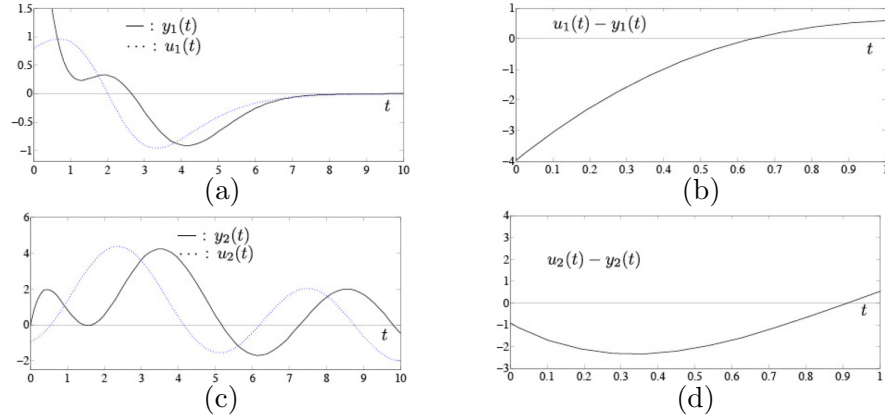


Figura 5.2: Simulación de la respuesta en el tiempo del sistema (5.33) Para la entrada (5.34), con:  $(\beta, \varepsilon) = (1, 0,2)$ ,  $x(0) = 0$  y  $\bar{z}(0) = 0$ . (a) Primera componente; la línea punteada es  $u_1(t) = d^2v_1(t)/dt^2$  y la línea continua es  $y_1(t)$ . (b) Error de la primera componente,  $u_1(t) - y_1(t)$ . (c) Segunda componente; la línea punteada es  $u_2(t) = dv_1(t)/dt - d^3v_2(t)/dt^3$  y la línea continua es  $y_2(t)$ . (d) Error de la segunda componente,  $u_2(t) - y_2(t)$ .

Ahora, si no somos capaces de conocer  $w(0)$ , se puede todavía relajar la selección de  $\varepsilon$  para disminuir el pico transitorio. Hagamos, por ejemplo:

$$\varepsilon = 0,2$$

y conseguimos apartir de (4.31):

$$t^* = \mathcal{O}(0,9673)$$

Ver Figura 5.3 Para el resultado de la simulación.

## 5.6. Conclusión

En este capítulo se extendieron los resultados del Capítulo 4 para el caso MIMO. El parámetro  $\varepsilon$  se selecciona de tal manera que: (i) se garantiza la separación de las dos escalas de tiempo, la lenta y la rápida, mediante una diagonalización de los subsistemas lento y rápido, (ii) se garantiza la estabilidad del filtro SPDC (4.2), y (iii) se toma en cuenta la función característica de la señal continua Lipschitz acotada  $u(t)$  (reflejada por su norma  $L_\infty$ ,  $\bar{K}_0$ , y su constante

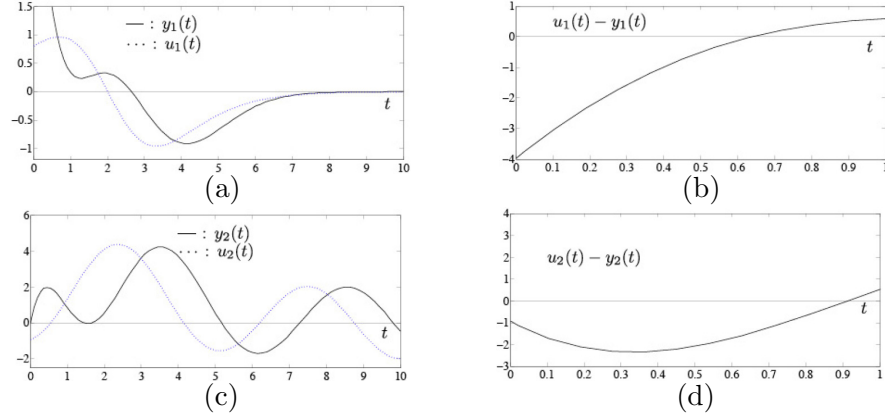


Figura 5.3: Simulación de la respuesta en el tiempo del sistema(5.33) Para la entrada (5.34), con:  $(\beta, \varepsilon) = (1, 0,2)$ ,  $x(0) = 0$  y  $\bar{z}(0) = 0$ . (a) Primera componente; la línea punteada es  $u_1(t) = d^2v_1(t)/dt^2$  y la línea continua es  $y_1(t)$ . (b) Error de la primera componente,  $u_1(t) - y_1(t)$ . (c) Segunda componente; la línea punteada es  $u_2(t) = dv_1(t)/dt - d^3v_2(t)/dt^3$  y la línea continua es  $y_2(t)$ . (d) Error de la segunda componente,  $u_2(t) - y_2(t)$ .

de Lipschitz,  $\bar{L}_0$ ) para resolver el Problema 2, introducido en la sección 5.1, para el caso MIMO (ver Teorema 7).

También se mostró que la selección del parámetro  $\beta$  está directamente relacionada con la estabilidad relativa de la aproximación (ver Teorema 6 y 8).

En el Corolario 2 se probó que los sistemas lineales propios invariantes en el tiempo son densos en los sistemas descriptores regulares. Esto implica que cada sistema no propio puede aproximarse arbitrariamente cerca (orden  $\varepsilon$ ) por un sistema propio, mas aún, este procedimiento de aproximación se realiza asegurando una convergencia exponencial (dinámica  $\beta$ ) y una estabilidad relativa (margen de ganancia). Hay que notar que la proposición de este capítulo no es del todo una aproximación de altas ganancias, sino una aproximación singularmente perturbada. También hay que notar que para evitar altos transitorios, debidos a las posibles discontinuidades (señales no derivables), se deben poner las condiciones iniciales correctas.





Parte III

Retroalimentación  
Singularmente Perturbada para  
Subespacios Casi de  
Controlabilidad



## Capítulo 6

# Retroalimentación Singularmente Perturbada para Subespacios Casi de Controlabilidad

### 6.1. Introducción

En este capítulo, se continua el estudio del Capítulo 3 con referencia a la comparación de las leyes de control de alta ganancia, obtenidas a partir de subespacios de casi controlabilidad, con leyes de control proporcional derivativa.

### 6.2. Retroalimentación Singularmente Perturbada

Dado que a la fecha no se pueden desarrollar leyes de control con acciones puramente derivativas es necesario dar un procedimiento de aproximación para la ley de control (3.20).

Para esto, se propone la siguiente ley de control singularmente perturbada (ver el Teorema 5 de la Sección 4.3, así como también el Corolario 2 de la Sección 5.4):

### 6.2.1. Filtro Acoplador Singularmente Perturbado

En el Lema 8 de [8] (Resultado de la Subsección 5.3.1) se mostró que si a un sistema controlable, descrito por su forma canónica de controlabilidad de Brunovsky:

$$\begin{aligned} dx_f/dt &= A_{F^*}x_f + Bu + Sq, \quad y = Cx_f \\ A_{F^*} &= BDM\{A_1, \dots, A_m\}, \quad B = BDM\{B_1, \dots, B_m\}, \\ C &= BDM\{C_1, \dots, C_m\}, \quad S = \begin{bmatrix} S_1^T & \cdots & S_m^T \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (6.1)$$

donde:<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} A_i &= T_u\{(\chi_{\kappa_i}^2)^T\} \in \mathbb{R}^{\kappa_i \times \kappa_i}, \quad B_i = \chi_{\kappa_i}^{\kappa_i} \in \mathbb{R}^{\kappa_i \times 1}, \quad C_i = (\chi_{\kappa_i}^1)^T \in \mathbb{R}^{1 \times \kappa_i}, \\ S_i &= \begin{bmatrix} s_{i,1} & \cdots & s_{i,\kappa_i} \end{bmatrix}^T, \quad s_{i,j} \in \mathbb{R}^{\ell \times 1}, \\ i &\in \{1, \dots, m\}, \quad j \in \{1, \dots, \kappa_i\}, \quad \sum_{i=1}^m \kappa_i = n, \end{aligned} \quad (6.2)$$

se le aplica la siguiente ley de control *singularmente perturbada*:

$$\begin{aligned} u(t) &= K_{\varepsilon}^{-1}(\bar{F}_{\varepsilon}x_f(t) + \tilde{x}_f(t) + g(t)) - B^T Sq(t), \quad g(0) = y(0), \\ d\tilde{x}_f/dt &= -\beta\tilde{x}_f - \varepsilon K_{\varepsilon}y, \\ K_{\varepsilon} &= BDM\{\varepsilon^{\kappa_1}, \varepsilon^{\kappa_2}, \dots, \varepsilon^{\kappa_m}\}, \quad \bar{F}_{\varepsilon} = BDM\{-\underline{a}_{1,\varepsilon}^T, -\underline{a}_{2,\varepsilon}^T, \dots, -\underline{a}_{m,\varepsilon}^T\}, \\ \underline{a}_{i,\varepsilon}^T &= \begin{bmatrix} \mathfrak{b}_{i,\kappa_i}^B & \varepsilon \mathfrak{b}_{i,\kappa_i-1}^B & \cdots & \varepsilon^{\kappa_i-1} \mathfrak{b}_{i,1}^B \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (6.3)$$

donde los coeficientes  $\mathfrak{b}_{i,j}^B$  son aquellos coeficientes de los polinomios de Butterworth (ver sección 4.3),  $\Delta_{B,i}(s)$ ,

---

<sup>1</sup>Recordar que:  $\chi_k^i$  denota un  $k \times 1$  vector cuya  $i$ -ésima componente es 1 y las otras componentes son cero, (en el caso que  $i > k$  todas las componentes son tomadas igual a cero).  $T_u\{v^T\}$  denota una matriz Toeplitz triangular superior con primer renglón  $v^T$ .  $T_\ell\{v\}$  denota una matriz Toeplitz triangular inferior con primera columna  $v$ .

$BDM\{X_1, \dots, X_k\}$  denota matriz diagonal por bloques cuyos bloques son matrices diagonales  $X_1, \dots, X_k$ .  $\mathbf{I}_\kappa$  denota una  $\kappa \times \kappa$  matriz identidad, o simplemente  $\mathbf{I}$  cuando no tenga que ser indicado de forma explícita (*c.f.* sección de notación).

$$\begin{aligned}
\Delta_{B,i}(s) &= (s^{\kappa_i} + \mathfrak{b}_{i,1}^B s^{\kappa_i-1} + \dots + \mathfrak{b}_{i,\kappa_i-1}^B s + \mathfrak{b}_{i,\kappa_i}^B) \\
&= \begin{cases} \prod_{j=1}^{\frac{\kappa_i}{2}} ((s + \sin \theta_{j,\kappa_i})^2 + \cos^2 \theta_{j,\kappa_i}), & \text{para } \kappa_i \text{ par} \\ (s+1) \prod_{j=1}^{\frac{(\kappa_i-1)}{2}} ((s + \sin \theta_{j,\kappa_i})^2 + \cos^2 \theta_{j,\kappa_i}), & \text{para } \kappa_i \text{ non} \end{cases}, \\
\theta_{1,\kappa_i} &= \frac{\pi}{2\kappa_i}, \quad \theta_{(j+1),\kappa_i} = \theta_{j,\kappa_i} + \Delta\theta_{\kappa_i}, \quad \Delta\theta_{\kappa_i} = \frac{\pi}{\kappa_i}, \quad j \in [1, \kappa_i - 1],
\end{aligned} \tag{6.4}$$

se obtiene entonces el sistema en lazo cerrado descrito por la siguiente representación de estado:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} dx_f/dt \\ d\tilde{x}_f/dt \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11}^{LC}(\varepsilon) & A_{12}^{LC}(\varepsilon) \\ A_{21}^{LC}(\varepsilon) & A_{22}^{LC}(\varepsilon) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_f \\ \tilde{x}_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11}^{LC}(\varepsilon) \\ 0 \end{bmatrix} g + \begin{bmatrix} S_{11}^{LC} \\ 0 \end{bmatrix} q \\
y &= \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_f \\ \tilde{x}_f \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{6.5}$$

donde:

$$\begin{aligned}
A_{11}^{LC}(\varepsilon) &= BDM\{A_{1,\varepsilon}^{LC}, \dots, A_{m,\varepsilon}^{LC}\}, \quad A_{12}^{LC}(\varepsilon) = BDM\{B_{1,\varepsilon}^{LC}, \dots, B_{m,\varepsilon}^{LC}\}, \\
A_{21}^{LC}(\varepsilon) &= BDM\{-\varepsilon^{\kappa_1+1}C_1, \dots, -\varepsilon^{\kappa_m+1}C_m\}, \quad A_{22}^{LC} = -\beta\mathbf{I}_m, \\
B_{11}^{LC}(\varepsilon) &= BDM\{B_{1,\varepsilon}^{LC}, \dots, B_{m,\varepsilon}^{LC}\}, \quad S_{11}^{LC} = BDM\{S_1^{LC}, \dots, S_m^{LC}\}, \\
A_{i,\varepsilon}^{LC} &= A_i - \frac{1}{\varepsilon^{\kappa_i}} \underline{\chi}_{\kappa_i}^{\kappa_i} \mathbf{a}_{i,\varepsilon}^T, \quad B_{i,\varepsilon}^{LC} = \frac{1}{\varepsilon^{\kappa_i}} \underline{\chi}_{\kappa_i}^{\kappa_i}, \quad S_i^{LC} = \begin{bmatrix} \underline{s}_{i,1} & \dots & \underline{s}_{i,\kappa_i-1} & 0 \end{bmatrix}^T.
\end{aligned} \tag{6.6}$$

1. **Espectro del sistema en lazo cerrado** De (6.5) y (6.6), se obtiene el

siguiente polinomio característico:

$$\begin{aligned}
 & \left| \begin{pmatrix} (s\mathbf{I} - A_{11}^{LC}(\varepsilon)) & -A_{12}^{LC}(\varepsilon) \\ -A_{21}^{LC}(\varepsilon) & (s\mathbf{I} - A_{22}^{LC}) \end{pmatrix} \right| = \\
 &= \prod_{i=1}^m |s\mathbf{I} - A_{i,\varepsilon}^{LC}| \det \left( (s + \beta)\mathbf{I}_m - A_{21}^{LC}(\varepsilon) (s\mathbf{I} - A_{11}^{LC}(\varepsilon))^{-1} A_{12}^{LC}(\varepsilon) \right) \\
 &= \left( \prod_{i=1}^m \varepsilon^{-\kappa_i} \Delta_{B,i}(\varepsilon s) \right) \prod_{j=1}^m \left( (s + \beta) + \varepsilon C_j (s\mathbf{I} - A_{j,\varepsilon}^{LC})^{-1} B_j \right) \\
 &= \left( \prod_{i=1}^m \varepsilon^{-\kappa_i} \Delta_{B,i}(\varepsilon s) \right) \prod_{j=1}^m \left( (s + \beta) + \varepsilon \frac{1}{\varepsilon^{-\kappa_j} \Delta_{B,j}(\varepsilon s)} \right) \\
 &= \prod_{i=1}^m ((s + \beta) (\varepsilon^{-\kappa_i} \Delta_{B,i}(\varepsilon s)) + \varepsilon)
 \end{aligned} \tag{6.7}$$

Entonces existe,  $\varepsilon^* > 0$ , tal que para todo  $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$ , el sistema en lazo cerrado, representado por (6.5), es Hurwitz estable. En efecto:

- a) Las raíces del polinomio de Butterworth,  $\varepsilon^{-\kappa_i} \Delta_{B,i}(\varepsilon s)$ , se encuentran equidistantes (en ángulo) sobre un círculo centrado en el origen de radio  $1/\varepsilon$ , en su parte del semiplano izquierdo abierto de  $\mathbb{C}$ .
- b) Entonces por el lugar de las raíces, existe un  $\varepsilon$ , suficientemente pequeño, tal que las raíces del polinomio,  $(s + \beta) (\varepsilon^{-\kappa_i} \Delta_{B,i}(\varepsilon s)) + \varepsilon$ , se encuentran en el semiplano izquierdo abierto de  $\mathbb{C}$ .

**2. Modelo singularmente perturbado** La representación de estado del sistema en lazo cerrado, (6.5), se puede reescribir en la forma de un modelo

singularmente perturbado:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} P_\ell x_f \\ \tilde{x}_f \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} P_\ell A_{11}^{LC}(\varepsilon) Q_\ell & P_\ell A_{12}^{LC}(\varepsilon) \\ A_{21}^{LC}(\varepsilon) Q_\ell & A_{22}^{LC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_\ell x_f \\ \tilde{x}_f \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} P_\ell A_{11}^{LC}(\varepsilon) Q_r \\ A_{21}^{LC}(\varepsilon) Q_r \end{bmatrix} P_r x_f + \begin{bmatrix} P_\ell B_{11}^{LC}(\varepsilon) & P_\ell S_{11}^{LC} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g \\ q \end{bmatrix} \\
K_\varepsilon \frac{d}{dt} P_r x_f &= \begin{bmatrix} K_\varepsilon P_r A_{11}^{LC}(\varepsilon) Q_\ell & K_\varepsilon P_r A_{12}^{LC}(\varepsilon) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_\ell x_f \\ \tilde{x}_f \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} K_\varepsilon P_r A_{11}^{LC}(\varepsilon) Q_r \end{bmatrix} P_r x_f + \begin{bmatrix} K_\varepsilon P_r B_{11}^{LC}(\varepsilon) & K_\varepsilon P_r S_{11}^{LC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g \\ q \end{bmatrix} \\
y &= \begin{bmatrix} C Q_\ell & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_\ell x_f \\ \tilde{x}_f \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{6.8}$$

donde:

$$\begin{aligned}
P_\ell &= BDM\{N_1^\ell, \dots, N_m^\ell\}, \quad P_r = BDM\{N_1^r, \dots, N_m^r\}, \\
Q_\ell &= BDM\{K_1^\ell, \dots, K_m^\ell\}, \quad Q_r = BDM\{K_1^r, \dots, K_m^r\}, \\
K_i^\ell &= \begin{bmatrix} \underline{\chi}_{\kappa_i}^1 & \dots & \underline{\chi}_{\kappa_i}^{\kappa_i-1} \end{bmatrix}, \quad K_r^\ell = \underline{\chi}_{\kappa_i}^{\kappa_i}, \quad N_i^\ell = (K_i^\ell)^T, \quad N_r^\ell = (K_r^\ell)^T.
\end{aligned} \tag{6.9}$$

Note que:

$$\begin{aligned}
P_\ell A_{11}^{LC}(\varepsilon) Q_\ell &= BDM\{T_u\{(\underline{\chi}_{\kappa_1-1}^2)^T\}, \dots, T_u\{(\underline{\chi}_{\kappa_m-1}^2)^T\}\}, \\
P_\ell A_{11}^{LC}(\varepsilon) Q_r &= BDM\{\underline{\chi}_{\kappa_1-1}^{\kappa_1-1}, \dots, \underline{\chi}_{\kappa_m-1}^{\kappa_m-1}\}, \\
P_\ell A_{12}^{LC}(\varepsilon) &= 0, \quad P_\ell B_{11}^{LC}(\varepsilon) = 0, \quad A_{21}^{LC}(\varepsilon) Q_r = 0, \\
K_\varepsilon P_r A_{12}^{LC}(\varepsilon) &= K_\varepsilon P_r B_{11}^{LC}(\varepsilon) = \mathbf{I}_m, \quad K_\varepsilon P_r S_{11}^{LC}(\varepsilon) = 0
\end{aligned} \tag{6.10}$$

$$\begin{aligned}
A_{21}^{LC}(0) Q_\ell &= 0, \quad K_0 P_r A_{11}^{LC}(0) Q_r = 0, \\
K_0 P_r A_{11}^{LC}(0) Q_\ell &= -BDM\{(\underline{\chi}_{\kappa_1-1}^1)^T, \dots, (\underline{\chi}_{\kappa_m-1}^1)^T\} = -C Q_\ell, \\
P_\ell A_{11}^{LC}(0) Q_r &= BDM\{\underline{\chi}_{\kappa_1-1}^{\kappa_1-1}, \dots, \underline{\chi}_{\kappa_m-1}^{\kappa_m-1}\}, \\
P_\ell A_{11}^{LC}(0) Q_\ell &= BDM\{T_u\{(\underline{\chi}_{\kappa_1-1}^2)^T\}, \dots, T_u\{(\underline{\chi}_{\kappa_m-1}^2)^T\}\}
\end{aligned} \tag{6.11}$$

$$K_\varepsilon P_r A_{11}^{LC}(\varepsilon) Q_r = -BDM\{\varepsilon^{\kappa_1-1} \mathbf{b}_{1,1}^B, \dots, \varepsilon^{\kappa_m-1} \mathbf{b}_{m,1}^B\} \tag{6.12}$$

3. **Sistema lento** Para obtener el modelo del *sistema lento*, en (6.8) se hace

$\varepsilon = 0$  (ver (6.10), (6.11), (6.6) y (6.3)):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} P_\ell \bar{x}_f \\ \bar{\tilde{x}}_f \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} P_\ell A_{11}^{LC}(\mathbf{0}) Q_\ell & 0 \\ 0 & -\beta \mathbf{I}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_\ell \bar{x}_f \\ \bar{\tilde{x}}_f \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} P_\ell A_{11}^{LC}(\mathbf{0}) Q_r \\ 0 \end{bmatrix} P_r \bar{x}_f + \begin{bmatrix} 0 & P_\ell S_{11}^{LC} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g \\ q \end{bmatrix} \\ 0 &= \begin{bmatrix} -C Q_\ell & \mathbf{I}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_\ell \bar{x}_f \\ \bar{\tilde{x}}_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g \\ q \end{bmatrix} \\ \bar{y} &= \begin{bmatrix} C Q_\ell & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_\ell \bar{x}_f \\ \bar{\tilde{x}}_f \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.13)$$

Las trayectorias solución de (6.13) son (recordar (6.11), (6.1) y (6.2)):

$$\begin{aligned} \bar{\tilde{x}}_f(t) &= \mathbf{e}^{-\beta t} \bar{\tilde{x}}_f(0) \\ \bar{x}_f(t) &= \mathbf{e}^{-\beta t} k_\beta + k_0 q(t) + \sum_{i=1}^{\bar{\kappa}-1} k_i \frac{d^i}{dt^i} q(t) \\ \bar{y}(t) &= g(t) + \mathbf{e}^{-\beta t} \bar{\tilde{x}}_f(0) \end{aligned} \quad (6.14)$$

donde  $\bar{\kappa} = \max\{\kappa_1, \dots, \kappa_m\}$ , y,  $k_\beta \in \mathbb{R}^n$ ,  $k_0, k_1, \dots, k_{\bar{\kappa}-1} \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$ , son vector y matrices de condiciones iniciales.

4. **Sistema rápido de tiempo congelado** Para obtener el modelo del *sistema rápido de tiempo congelado*, se define la variable  $P_r \widehat{x}_f = P_r x_f - P_r \bar{x}_f$ , y se escala al tiempo:  $\tau = t/\varepsilon$ , obteniéndose de (6.8), (6.13) y (6.12):

$$\frac{d}{d\tau} P_r \widehat{x}_f = -BDM\{\mathbf{b}_{1,1}^B, \dots, \mathbf{b}_{m,1}^B\} P_r \widehat{x}_f \quad (6.15)$$

Las trayectorias solución de (6.15) son:

$$P_r \widehat{x}_f(t/\varepsilon) = BDM\{\mathbf{e}^{-\mathbf{b}_{1,1}^B t/\varepsilon}, \dots, \mathbf{e}^{-\mathbf{b}_{m,1}^B t/\varepsilon}\} P_r \widehat{x}_f(0) \quad (6.16)$$

5. **Trayectorias solución** Puesto que (6.15) implica que el *sistema rápido de tiempo congelado* es Hurwitz estable, se tiene entonces del Teorema 5.1 del Capítulo 2 de [15], que existe un  $\varepsilon^*$  tal que, para todo  $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$ , las trayectorias solución del modelo singularmente perturbado (6.8) son



aproximadas para todo  $t > 0$  por:

$$\begin{aligned}\tilde{x}_f(t) &= \mathbf{e}^{-\beta t} \tilde{x}_f(0) + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ x_f(t) &= \mathbf{e}^{-\beta t} k_\beta + k_0 q(t) + \sum_{i=1}^{\bar{\kappa}-1} k_i \frac{d^i}{dt^i} q(t) \\ &\quad + Q_r BDM \{ \mathbf{e}^{-b_{1,1}^B t/\varepsilon}, \dots, \mathbf{e}^{-b_{m,1}^B t/\varepsilon} \} P_r \widehat{x}_f(0) + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ y(t) &= g(t) + \mathbf{e}^{-\beta t} \tilde{x}_f(0) + \mathcal{O}(\varepsilon)\end{aligned}\tag{6.17}$$

Puesto que también el polinomio característico (6.7), del sistema en lazo cerrado (6.5), es Hurwitz, se tiene que las trayectorias solución (6.17) se verifican para todo  $t \in [0, \infty)$ .

Más aún, la corrección de *capa frontera*  $P_r \widehat{x}_f$  (6.16) es significativa únicamente durante el corto intervalo de tiempo  $[0, t_1]$ ,  $t_1 = \mathcal{O}(\varepsilon \ln(1/\varepsilon))$ , después del cual:

$$x_f(t) = \mathbf{e}^{-\beta t} k_\beta + k_0 q(t) + \sum_{i=1}^{\bar{\kappa}-1} k_i \frac{d^i}{dt^i} q(t) + \mathcal{O}(\varepsilon)\tag{6.18}$$

Por otro lado, en la subsección (4.3.3), también se mostro:

$$y(t) = g(t) + \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}), \quad \text{para todo } t \geq t^*\tag{6.19}$$

para  $\beta = \mathcal{O}(1/\varepsilon)$  y donde  $t^* = \mathcal{O}(\varepsilon \ln(1/\sqrt{\varepsilon}))$ . Mas aún, si  $\varepsilon$  y  $\beta$  son seleccionados como en el Teorema 10 de [18], entonces los márgenes de ganancias de las funciones características del sistema en lazo cerrado Hurwitz estable,  $\ell_i(j\omega)$ ,  $i \in [1, m]$ , están acotadas por:

$$\text{Margen de ganancia } (\ell_i(j\omega)) \geq \mathcal{O}((1/\varepsilon)^{\underline{\kappa}+2})\tag{6.20}$$

donde:  $\underline{\kappa} = \min\{\kappa_1, \dots, \kappa_m\}$ .

6. **Retroalimentación proporcional derivativa** Note que la ley de control *singularmente perturbada* (6.3) es una aproximación propia de la retroalimentación proporcional derivativa,

$$u = B^T dx_f/dt - Cx_f + g - B^T Sq, \quad g(0) = y(0),\tag{6.21}$$

cuyo objetivo es la de invertir al sistema (6.1):

$$\begin{aligned}
 y_i(t) &= C_i e^{A_i t} x_{f,i}(0) + C_i \int_0^t e^{A_i(t-\tau)} \left( B_i \left( B_i^T \frac{d}{d\tau} x_{f,i}(\tau) - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. y_i(\tau) + g_i(\tau) - B_i^T S q(\tau) \right) + S_i q(\tau) \right) d\tau \\
 d^{\kappa_i} y_i(t)/dt^{\kappa_i} &= B_i^T dx_{f,i}(t)/dt - y_i(t) + g_i(t) - B_i^T S q(t) \\
 &\quad + C_i \left( \sum_{i=1}^{\kappa_i-1} A_i^{i-1} S_i d^{\kappa_i-i} q(t)/dt^{\kappa_i-i} + A_i^{\kappa_i-1} S q(t) \right) \\
 &= d^{\kappa_i} y_i(t)/dt^{\kappa_i} - y_i(t) + g_i(t)
 \end{aligned} \tag{6.22}$$

### 6.2.2. Retroalimentación Singularmente Perturbada

Basada en la ley de control *singularmente perturbada* (6.3), aproximación propia de la retroalimentación proporcional derivativa (6.21), se proponen las siguientes aproximaciones propias de la ley de control (3.20)-(3.21):

$$g = 0, \quad y = P_3 x_a, \quad S q = A_{32} x_s,$$

entonces se tiene la siguiente aproximación propia de la ley de control (3.20c):

$$\begin{aligned}
 u_a &= K_{3,\varepsilon}^{-1} (\bar{F}_{3,\varepsilon} x_a + \tilde{x}_a) - B_3^T A_{32} x_s \\
 d\tilde{x}_a/dt &= -\beta \tilde{x}_a - \varepsilon K_{3,\varepsilon} P_3 x_a
 \end{aligned} \tag{6.23}$$

Comparando (3.20a) y (3.1) con (6.21) y (6.1), respectivamente, se deduce:

$$g = h_m, \quad y = \bar{A}_{2,1} x_m, \quad S q = \begin{bmatrix} A_{12} & A_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s \\ x_a \end{bmatrix},$$

entonces se tiene la siguiente aproximación propia de la ley de control (3.20a):

$$\begin{aligned}
 u_m &= K_{1,\varepsilon}^{-1} (\bar{F}_{1,\varepsilon} x_m + \tilde{x}_m + h_m) - B_1^T [A_{12} \ A_{13}] \begin{bmatrix} x_s \\ x_a \end{bmatrix} \\
 d\tilde{x}_m/dt &= -\beta \tilde{x}_m - \varepsilon K_{1,\varepsilon} \bar{A}_{21} x_m
 \end{aligned} \tag{6.24}$$

#### Ley de Control para el *Subsistema Esclavo*

En vista de la suprayectividad de  $W_2$  (ver (3.3)), se tiene que si se aplica la ley de control algebraica:

$$\begin{bmatrix} y_m \\ u_s \end{bmatrix} = W_2^{-1} (-A_{22} x_s - A_{23} x_a + \bar{u}_s) \tag{6.25}$$

al *subsistema esclavo*, (3.2), se obtiene:

$$\frac{d}{dt}x_s = [0]x_s + [\mathbf{I}]\bar{u}_s, \quad \bar{y}_s = [\mathbf{I}]x_s. \quad (6.26)$$

Note que los índices de controlabilidad,  $\kappa_i$ , del *subsistema esclavo*, pre retroalimentado por (6.25), son todos iguales a uno. Por lo que las matrices,  $K_\varepsilon$  y  $\bar{F}_\varepsilon$  de la ley de control (6.3) serán igual a:

$$K_\varepsilon = \varepsilon \mathbf{I}, \quad \bar{F}_\varepsilon = -\mathbf{I}. \quad (6.27)$$

Finalmente comparando (6.26) con (6.1), se deduce:

$$g = h_s, \quad y = x_s, \quad q = 0.$$

Por lo que de (6.25), (6.27) y (6.3), se tiene la siguiente aproximación propia de la ley de control (3.20b):

$$\begin{aligned} W_2 \begin{bmatrix} h_m \\ u_s \end{bmatrix} &= -\left(A_{22} + \frac{1}{\varepsilon}I\right)x_s - A_{23}x_a + \frac{1}{\varepsilon}(h_s + \tilde{x}_s) \\ d\tilde{x}_s/dt &= -\beta\tilde{x}_s - \varepsilon^2 x_s \end{aligned} \quad (6.28)$$

Con respecto a la función  $h_s$ , en el caso de que  $\text{Im } A_{32} \subset \langle A_{33} \mid \text{Im } B_3 \rangle$ , se puede hacer la selección (c.f. (3.21a)):

$$h_s(t) = \begin{cases} x_s(0)\mathbf{e}^{-(t/T)^2/(1-(t/T)^2)}, & 0 \leq t < T \\ 0, & t \geq T \end{cases}, \quad (6.29)$$

con  $T \gg \varepsilon \ln(1/\sqrt{\varepsilon})$ . En caso contrario, una selección trivial es (c.f. (3.21b)):

$$h_s(t) = 0 \quad (6.30)$$

En [8] se mostró el siguiente resultado (comparar con el Teorema 3):

**Teorema 9 ([8])** Sea  $x_0 \in \mathcal{S}_\mathcal{K}^\infty$  una condición inicial para (2.4). Para cualquier  $\rho > 0$  existe una retroalimentación singularmente perturbada,  $u = (F_\varepsilon + F_d)x_f + K_\varepsilon h - \varepsilon \int_0^t \mathbf{e}^{-\beta(t-\tau)} y(\tau) d\tau$ ,  $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{U})$ , y un tiempo finito,  $T > 0$ , tal que la trayectoria  $(u^*, x_f) \in \tilde{\mathfrak{B}}_{[A_{F^*}, B]}^{\text{pol}}$  satisface  $d_\infty(x_f, \mathcal{S}_\mathcal{K}^\infty) \leq \rho$  y  $x_f(t) = \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$  para todo  $t \geq T$ .

A fin de clarificar este resultado continuamos con el ejemplo ilustrativo de la Sección 3.3.4.

### 6.3. Ejemplo Ilustrativo (Parte 5)

Sea el sistema (2.4), (2.5) y (3.39). Dadas las matrices mostradas en (3.39) y (3.40), se tiene entonces que las matrices para la ley de control singularmente perturbada (6.24), (6.28) y (6.23), son:

$$\begin{aligned} K_{1,\varepsilon} &= BDM\{\varepsilon, \varepsilon^2\}, \quad \bar{F}_{1,\varepsilon} = BDM\{\mathbf{a}_{1,\varepsilon}, \mathbf{a}_{2,\varepsilon}\} \\ \mathbf{a}_{1,\varepsilon} &= [-1], \quad \mathbf{a}_{2,\varepsilon} = [-1 \quad -\varepsilon\sqrt{2}] \\ K_{3,\varepsilon} &= [\varepsilon^2], \quad \bar{F}_{3,\varepsilon} = [0 \quad -1 \quad -\varepsilon\sqrt{2}] \end{aligned} \tag{6.31}$$

Substituyendo (6.31) en (6.24), (6.28) y (6.23), se tiene que la ley de control para este ejemplo es:

$$\left\{ \begin{aligned} \begin{bmatrix} u_{m1} \\ u_{m2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \varepsilon^{-1} & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-2} \end{bmatrix} \left( \left[ \begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\varepsilon\sqrt{2} \end{array} \right] x_m + \tilde{x}_m + h_m \right) \\ &\quad - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_s \\ x_a \end{bmatrix} \\ \frac{d}{dt} \tilde{x}_m &= -\beta \tilde{x}_m - \varepsilon \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^2 \end{bmatrix} \left[ \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right] x_m \end{aligned} \right. \tag{6.32}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} h_{m1} \\ h_{m2} \\ u_s \end{bmatrix} = - \left( \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{\varepsilon} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) x_s \\ \quad - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_a + \frac{1}{\varepsilon} (h_s + \tilde{x}_s) \\ \frac{d}{dt} \tilde{x}_s = -\beta \tilde{x}_s - \varepsilon^2 x_s \end{array} \right. \quad (6.33)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_a = [\varepsilon^{-2}] \left( \begin{bmatrix} 0 & -1 & -\varepsilon \sqrt{2} \end{bmatrix} x_a + \tilde{x}_a \right) - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_s \\ \frac{d}{dt} \bar{x}_a = -\beta \bar{x}_a - \varepsilon [\varepsilon^2] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x_a \end{array} \right. \quad (6.34)$$

Simplificando, se tiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} u_{m1} \\ u_{m2} \end{bmatrix} = - \left[ \begin{array}{c|cc} \frac{1}{\varepsilon} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{\varepsilon^2} & \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon} \end{array} \right] x_m + \left[ \begin{array}{c|c} \frac{1}{\varepsilon} & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{\varepsilon^2} \end{array} \right] (\tilde{x}_m + h_m) \\ \frac{d}{dt} \tilde{x}_m = -\beta \tilde{x}_m - \left[ \begin{array}{c|cc} \varepsilon^2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \varepsilon^3 & 0 \end{array} \right] x_m \end{array} \right. \quad (6.35)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} h_{m1} \\ h_{m2} \\ u_s \end{bmatrix} = - \left[ \begin{array}{c|cc} \frac{1}{\varepsilon} & 1 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{\varepsilon} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\varepsilon} \end{array} \right] x_s - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_a + \frac{1}{\varepsilon} (h_s + \bar{x}_s) \\ \frac{d}{dt} \tilde{x}_s = -\beta \tilde{x}_s - \varepsilon^2 x_s \end{array} \right. \quad (6.36)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_a = - \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\varepsilon^2} & \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon} \end{bmatrix} x_a + \frac{1}{\varepsilon^2} \tilde{x}_a \\ \frac{d}{dt} \tilde{x}_a = -\beta \tilde{x}_a - \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon^3 & 0 \end{bmatrix} x_a \end{array} \right. \quad (6.37)$$

### 6.3.1. Simulaciones

En las figuras 6.1, 6.2, 6.3 y 6.4 se muestra una simulación MATLAB<sup>R</sup>-Simulink, con los parámetros de simulación (2.42).

#### Aproximación del Subespacio Supremo de Casi Contralabilidad

Primero, en las gráficas de la figura 6.1 se muestra el sistema descrito por (2.8), con la ley de control:<sup>2</sup> (6.35), (6.36),

$$u_a = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} x_a, \quad (6.38)$$

y para  $h_s$  se tomó la selección trivial (6.30), con:  $\varepsilon = 1/100$  y  $\beta = 100$ , con la condición inicial (2.43); comparar con los resultados de la figura 2.1.

Posteriormente en las gráficas de la figura 6.2 se muestran las acciones de control; comparar con los resultados de la figura 2.2. Por último, se muestra en la figura 6.3 el comportamiento del subespacio casi  $(A, B)$ -invariante:  $\mathcal{S}_K^\infty = \mathfrak{L}_1 \oplus \mathfrak{L}_2 \oplus \mathfrak{L}_3$ ; comparar con los resultados de la figura 2.4.

#### Tendencia

En la figura 6.4 mostramos las gráficas del sistema descrito por (2.8), con la ley de control, (6.35), (6.36), (6.38), con:  $\varepsilon = 1/100$  y  $\beta = 100$ , para este caso, para  $h_s$ , se tomó la selección (6.29), en vez de la selección trivial (6.30), con  $T = 1/10$ , con la condición inicial (2.43); comparar con los resultados de la figura 2.5. (2.30), (2.19) y (2.27), con  $\varepsilon = 1/100$ , con la condición inicial

## 6.4. Conclusión

En este capítulo, aplicando técnicas de perturbaciones singulares al ejemplo ilustrativo, se mostró que las retroalimentaciones de altas ganancias de Tren-telman, obtenidas a partir del Teorema 2, convergen (cuando  $\varepsilon$  tiende a cero)

---

<sup>2</sup>A fin de comparar con los resultados obtenidos en la Subsección 2.6.6, para el *subsistema casi de desacoplamiento* se tomo la ley de control (6.38) en vez de (6.37) (*c.f.* matriz  $F_{p1}$  de (3.18)).

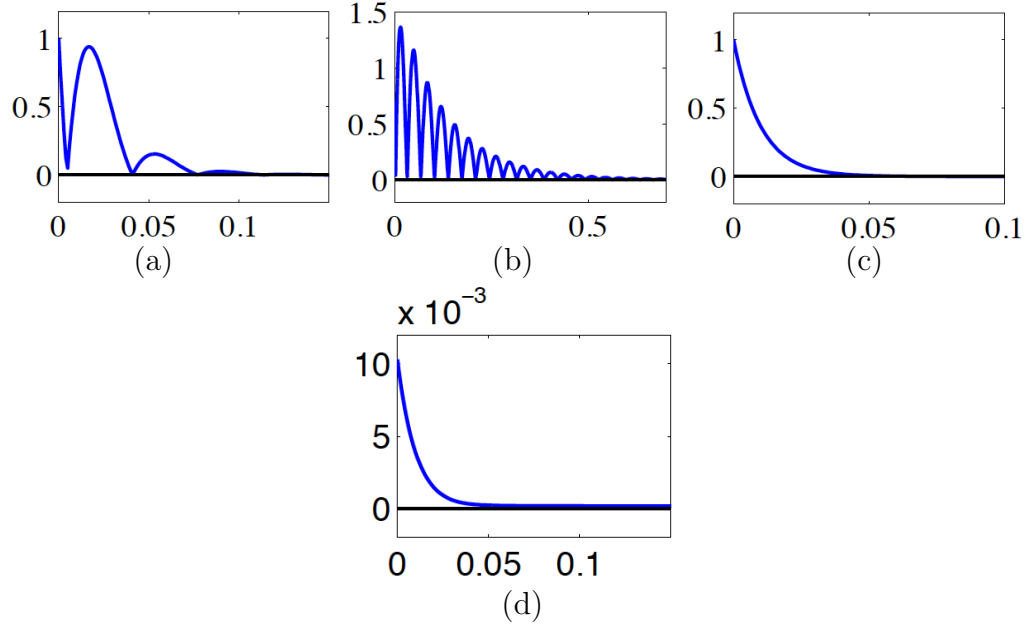


Figura 6.1: Gráficas de simulación del sistema descrito por (2.8), con la ley de control, (6.35), (6.36), (6.38) y (6.30), con:  $\varepsilon = 1/100$  y  $\beta = 100$ , con la condición inicial (2.43). Subespacios casi  $(A, B)$ -invariante,  $\mathcal{S}_{\mathcal{K}}^{\infty}$  (2.14)-(2.15). (a)  $\|\mathcal{L}_1\|$  v.s.  $t$ , (b)  $\|\mathcal{L}_2\|$  v.s.  $t$ , (c)  $\|\mathcal{L}_3\|$  v.s.  $t$ . Espacios complementario. (d)  $\|\mathcal{X}_{fed}/\mathcal{L}\|$  v.s.  $t$ .

a una retroalimentación proporcional derivativa, la cual es directamente obtenida a partir de (2.12) (ver (3.19), (3.18) y (2.27)). Así, un subespacio casi de controlabilidad puede también ser interpretado como un subespacio que puede hacerse inobservable (cuando  $\mathcal{K} = \text{Ker } C$ ) por medio de una retroalimentación proporcional derivativa.

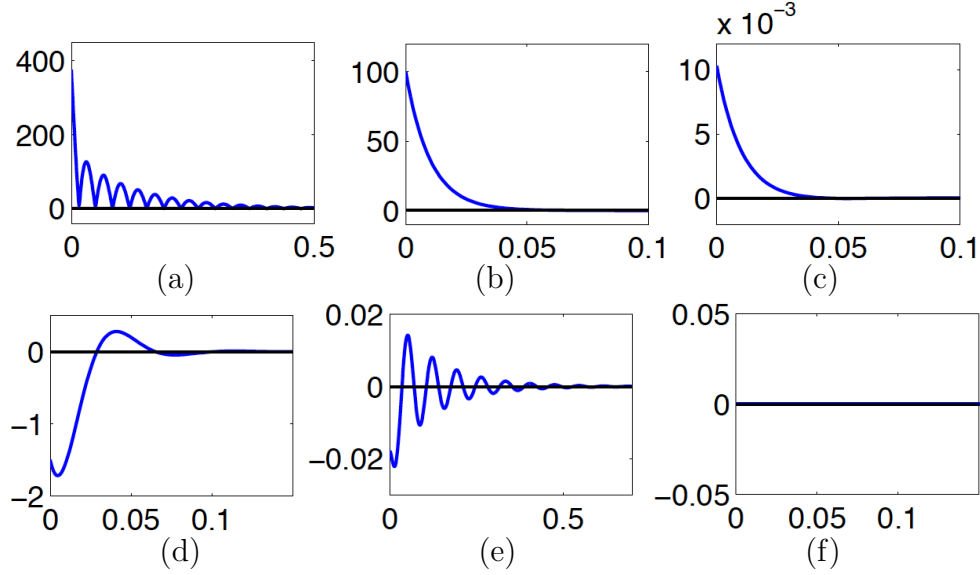


Figura 6.2: Gráficas de simulación del sistema descrito por (2.8), con la ley de control, (6.35), (6.36), (6.38) y (6.30), con:  $\varepsilon = 1/100$  y  $\beta = 100$ , con la condición inicial (2.43). Señales de control. (a)  $\|\mathcal{U}_1\|$  v.s.  $t$ , (b)  $\|\mathcal{U}_2\|$  v.s.  $t$ , (c)  $\|\mathcal{U}_3\|$  v.s.  $t$ , (d)  $\|h_{m,1}\|$  v.s.  $t$ , (e)  $\|h_{m,2}\|$  v.s.  $t$ , (f)  $\|h_s\|$  v.s.  $t$ ,

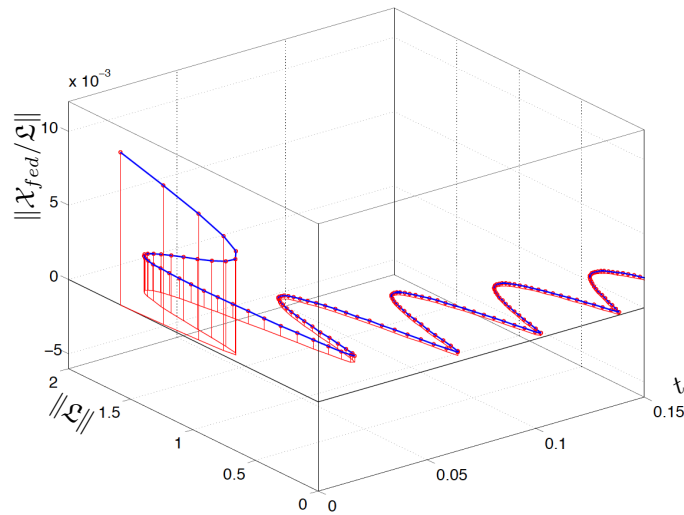


Figura 6.3: Comportamiento del subespacio casi  $(A, B)$ -invariante:  $\mathcal{S}_K^\infty = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2 \oplus \mathcal{L}_3$



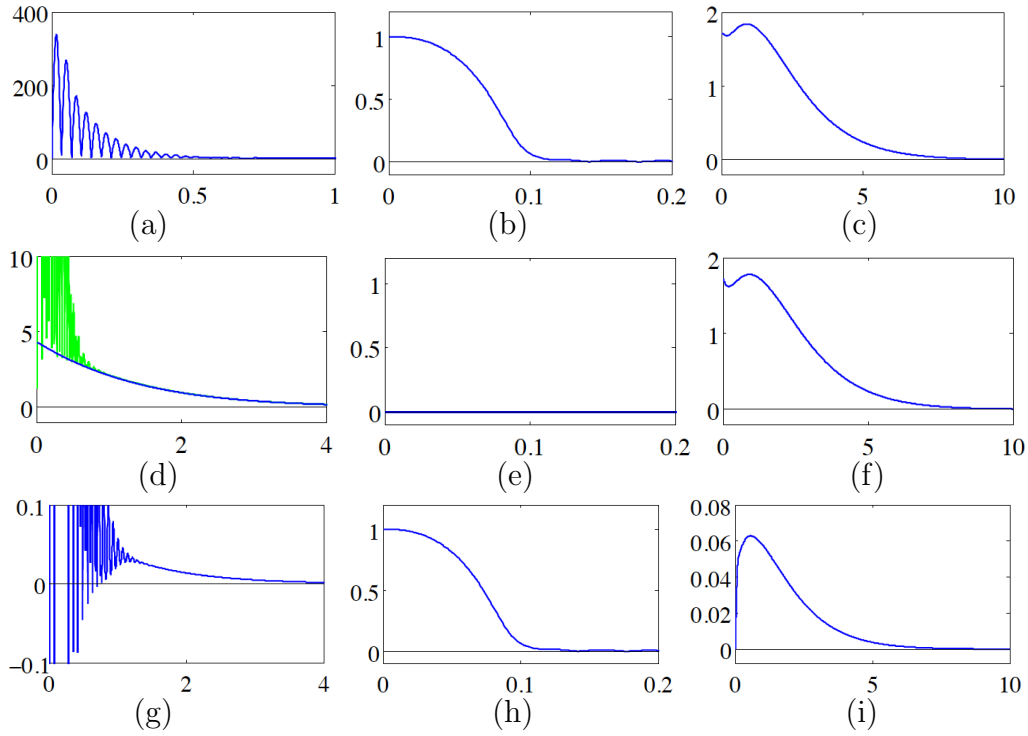


Figura 6.4: Gráficas de simulación del sistema descrito por (2.8), con la ley de control, (6.35), (6.36), (6.38) y (6.29), con:  $\varepsilon = 1/100$  y  $\beta = 100$ , con la condición inicial (2.43). Comparación con el comportamiento límite,  $\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ t > 0}} x_f(t)$  (2.39). (a)  $\|x_m\|$  v.s.  $t$ , (b)  $\|x_s\|$  v.s.  $t$ , (c)  $\|x_a\|$  v.s.  $t$ , (d)  $\|\bar{x}_m\|$  (trayectoria azul) y  $\|x_m\|$  (trayectoria verde) v.s.  $t$ , (e)  $\|\bar{x}_s\|$  v.s.  $t$ , (f)  $\|\bar{x}_a\|$  v.s.  $t$ , (g)  $\|x_m\| - \|\bar{x}_m\|$  v.s.  $t$ , (h)  $\|x_s\| - \|\bar{x}_s\|$  v.s.  $t$ , (i)  $\|x_a\| - \|\bar{x}_a\|$  v.s.  $t$ .



## Capítulo 7

# Conclusiones y Perspectivas

### 7.1. Conclusiones

En este trabajo de tesis se mostró que las retroalimentaciones de alta ganancia, propuestas por Trentelman [27], son también aproximaciones de leyes de control del tipo proporcional y derivativa.

En el Capítulo 3, se mostró que a partir de la retroalimentación de altas ganancias de Trentelman [27] se puede obtener una retroalimentación de estado proporcional y derivativa que también resuelve el *problema de casi rechazo de perturbaciones*. Utilizando técnicas de perturbaciones singulares [15] se mostró que la secuencia de retroalimentaciones de altas ganancias de Trentelman tienden a tal retroalimentación proporcional y derivativa (ver Teorema 9).

En el Capítulo 4, se resolvió el problema de aproximación de leyes de control impropias por controladores propios (Problema 1 del Capítulo 4.2) para el caso SISO. Para esto, se modificó la proposición dada en [21], para poder utilizar la sólida teoría de Perturbaciones Singulares [15] como herramienta de análisis. Básicamente la modificación consistió en la substitución del filtro  $\frac{1}{(\varepsilon s + 1)^\kappa}$  por un filtro Butterword pasa bajas, el cual nos permitió utilizar los resultados de [15]. La solución propuesta permitio una agradable separación de la calidad de

la aproximación, dada por el subsistema rápido, parametrizado por la inversa del parámetro positivo (que también garantiza la estabilidad del sistema en lazo cerrado, ver Teorema 4),  $\varepsilon$ , de la velocidad de convergencia, dada por el subsistema lento, parametrizado por el parámetro positivo,  $\beta$ .

En el Capítulo 5, se extendieron los resultados del Capítulo 4 para el caso MIMO. El parámetro  $\varepsilon$  se selecciona de tal manera que: (i) se garantiza la separación de las dos escalas de tiempo, la lenta y la rápida, mediante una diagonalización de los subsistemas lento y rápido, (ii) se garantiza la estabilidad del Filtro SPDC (4.2), y (iii) se toma en cuenta la función característica de la señal continua Lipschitz acotada  $u(t)$  (reflejada por su norma  $L_\infty$ ,  $\bar{K}_0$ , y su constante de Lipschitz,  $\bar{L}_0$ ) para resolver el Problema 2, del Capítulo 5.1, para el caso MIMO (ver Teorema 7). También se mostró que la selección del parámetro  $\beta$  está directamente relacionada con la estabilidad relativa de la aproximación (ver Teorema 6 y 8). En el Corolario 2 se probó que los sistemas lineales propios invariantes en el tiempo son densos en los sistemas descriptores regulares. Esto implica que cada sistema no propio puede aproximarse arbitrariamente cerca (orden  $\varepsilon$ ) por un sistema propio, mas aún, este procedimiento de aproximación se realiza asegurando una convergencia exponencial (dinámica  $\beta$ ) y una estabilidad relativa (margen de ganancia). Hay que notar que la proposición de este capítulo no es del todo una aproximación de altas ganancias, sino una aproximación singularmente perturbada. También hay que notar que para evitar altos transitorios, debidos a las posibles discontinuidades (señales no derivables), se deben poner las condiciones iniciales correctas.

En el Capítulo 6, aplicando técnicas de perturbaciones singulares se mostró que las retroalimentaciones de altas ganancias de Trentelman, obtenidas a partir del Teorema 2, convergen (cuando  $\varepsilon$  tiende a cero) a una retroalimentación proporcional derivativa, la cual es directamente obtenida a partir de (2.12) (ver (3.19), (3.18) y (2.27)). Así, un subespacio casi de controlabilidad puede también ser interpretado como un subespacio que puede hacerse inobservable (cuando

$\mathcal{K} = \text{Ker } C$ ) por medio de una retroalimentación proporcional derivativa.

## 7.2. Perspectivas

Un aporte muy importante a la Teoría de Control fue dada por Willems al introducir los *subespacios casi  $(A, B)$ -invariantes* y *subespacios casi de controlabilidad*. Su importancia radica en el hecho de que algunas propiedades estructurales importantes de los sistemas lineales pueden interpretarse en términos de estos subespacios *casi  $(A, B)$ -invariantes* y *casi de controlabilidad*, los cuales están relacionados con las transformaciones lineales de las representaciones del estado de los sistemas lineales [29, 30, 32]. Estos subespacios son útiles cuando no es posible tener soluciones exactas. Los subespacios *Casi  $(A, B)$ -Invariantes* y *Casi de Controlabilidad* han sido relacionados con la retroalimentación de estado de altas ganancias y con retroalimentaciones de estado de tipo distribucional.

Basados en los subespacios introducidos por Willems, se han escrito libros [26, 24, 28], y se han realizado numerosos estudios estructurales de problemas típicos de control, *e.g.* [31, 25, 27, 1, 2, 35].

Dado que en este trabajo de tesis se mostró que:

1. Las retroalimentaciones de alta ganancia, propuestas por Trentelman [27] (aproximaciones de leyes de control del tipo distribucional), son también aproximaciones de leyes de control del tipo proporcional y derivativa.
2. Las retroalimentaciones de altas ganancias de Trentelman, obtenidas a partir del Teorema 2, convergen (cuando  $\varepsilon$  tiende a cero) a una retroalimentación proporcional derivativa.
3. Un subespacio casi de controlabilidad puede también ser interpretado como un subespacio que puede hacerse inobservable (cuando  $\mathcal{K} = \text{Ker } C$ ) por medio de una retroalimentación proporcional derivativa.

Entonces una perspectiva de este trabajo de tesis, es aplicar todo el estudio estructural que se ha hecho para los subespacios de Willems, al caso de controladores del tipo proporcional y derivativo.

Otra perspectiva es estudiar la posibilidad de dotar de una estructura algebraica al conjunto de señales distribucionales y al conjunto de señales, expresadas como combinaciones lineales de derivadas de orden diferente, y encontrar un isomorfismo de estructura entre ellos.

# Apéndice A

## Definición de Parámetros

### Definición de parámetros

Para hacer más agradable el manejo de las entradas de las matrices trabajadas, denotamos de la siguiente forma a los siguientes polinomios en la variable  $\varepsilon$  :

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= \varepsilon^3 - 2\varepsilon^2 + \varepsilon + 1, & \alpha_2 &= -\frac{\varepsilon^3}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + 1, & \alpha_3 &= -\varepsilon^2 + \varepsilon + 1, \\
 \alpha_4 &= -\varepsilon^3 + 3\varepsilon^2 + 3\varepsilon + 1, & \alpha_5 &= -\varepsilon + 1, & \alpha_6 &= -\frac{\varepsilon^4}{6} + \varepsilon^3 - \varepsilon^2 - \frac{2\varepsilon}{3} + 1, \\
 \alpha_7 &= \varepsilon^4 - \frac{3\varepsilon^3}{2} + 1, & \alpha_8 &= -\frac{2\varepsilon^2}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} + 1, & \alpha_9 &= -\frac{3\varepsilon^3}{2} + \varepsilon^2 + 2\varepsilon + 1, \\
 \beta_1 &= -\frac{\varepsilon^5}{3} + 2\varepsilon^4 - \varepsilon^3 - \frac{5\varepsilon^2}{3} - 3\varepsilon + 1, & \beta_2 &= \frac{2\varepsilon^5}{3} - \varepsilon^4 - 2\varepsilon^3 + \varepsilon^2 + \varepsilon + 1, \\
 \beta_3 &= 3\varepsilon^6 - 3\varepsilon^5 - 9\varepsilon^4 - 2\varepsilon^3 + 9\varepsilon^2 + 3\varepsilon + 1, & \beta_4 &= \varepsilon^2 - \varepsilon + 1, & \beta_5 &= \varepsilon + 1, \\
 \beta_6 &= -2\varepsilon + 1, & \beta_7 &= 3\varepsilon^3 + \varepsilon^2 + \varepsilon + 1, & \beta_8 &= 2\varepsilon^3 + 4\varepsilon^2 + 2\varepsilon + 1, \\
 \beta_9 &= \varepsilon^4 + 2\varepsilon^3 - 2\varepsilon^2 - \varepsilon + 1, & \gamma_1 &= \frac{\varepsilon}{2} + 1, & \gamma_2 &= -2\varepsilon^5 + 5\varepsilon^2 + \varepsilon + 1, \\
 \gamma_3 &= 2\varepsilon^2 + 1, & \gamma_4 &= -2\varepsilon^3 - 3\varepsilon + 1, & \gamma_5 &= -\frac{\varepsilon^3}{2} + \varepsilon^2 + 1,
 \end{aligned}$$

$$\gamma_6 = -6\varepsilon^2 - 4\varepsilon + 1, \quad \gamma_7 = -3\varepsilon^5 + 4\varepsilon^4 - 2\varepsilon^3 - 3\varepsilon^2 + 2\varepsilon + 1,$$

$$\gamma_8 = 3\varepsilon^3 - \varepsilon^2 + 1, \quad \gamma_9 = 3\varepsilon^2 + 3\varepsilon + 1, \quad \delta_1 = 3\varepsilon + 1,$$

$$\delta_2 = 6\varepsilon^4 - 4\varepsilon^3 - 2\varepsilon^2 + 2\varepsilon + 1, \quad \delta_3 = -6\varepsilon^6 + 10\varepsilon^5 - 2\varepsilon^4 - 7\varepsilon^3 + 3\varepsilon^2 + 6\varepsilon + 1,$$

$$\delta_4 = \frac{6\varepsilon^2}{5} + \frac{8\varepsilon}{5} + 1, \quad \delta_5 = \varepsilon^4 + \frac{\varepsilon^3}{2} + 3\varepsilon^2 + \varepsilon + 1, \quad \delta_6 = -2\varepsilon^3 - \varepsilon^2 + 4\varepsilon + 1,$$

$$\delta_7 = \frac{2\varepsilon^5}{3} - \frac{7\varepsilon^4}{3} - \frac{\varepsilon^3}{3} + \frac{5\varepsilon^2}{3} + \varepsilon + 1, \quad \delta_8 = -\frac{4\varepsilon^4}{3} + 2\varepsilon^3 + 3\varepsilon^2 + \varepsilon + 1,$$

$$\delta_9 = 5\varepsilon^3 + 6\varepsilon^2 + 3\varepsilon + 1, \quad \eta_1 = \varepsilon^3 - \frac{8\varepsilon^2}{5} - \varepsilon + 1, \quad \eta_2 = \varepsilon^2 + \varepsilon + 1,$$

$$\eta_3 = -3\varepsilon^4 + 3\varepsilon^3 + 6\varepsilon^2 + 3\varepsilon + 1, \quad \eta_4 = -3\varepsilon^5 + 3\varepsilon^4 - \varepsilon^2 + 2\varepsilon + 1,$$

$$\eta_5 = 1 - \frac{\varepsilon}{2}, \quad \eta_6 = 1 + 2\varepsilon, \quad \eta_7 = 1 + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Para hacer más agradable el manejo de las entradas de las matrices trabajadas, denotamos de la siguiente forma a las siguientes fracciones de polinomios en la variable  $\varepsilon$  :

$$p_{1,7}(t) = \frac{\gamma_9\delta_1(-2\gamma_9\delta_1\varepsilon + \alpha_5\beta_7)}{\varepsilon} + \frac{\alpha_5\gamma_9\delta_1(-\gamma_9\delta_1\varepsilon + \alpha_5\beta_7)t}{\varepsilon^2},$$

$$q_{1,7}(t) = \frac{\gamma_9\delta_1(2\gamma_9\delta_1\varepsilon - \alpha_5\beta_7)}{\varepsilon} - \frac{(\alpha_5(\gamma_9\delta_1)^2)t}{\varepsilon},$$

$$p_{1,8}(t) = p_{1,9}(t) = \gamma_9\delta_1 + \frac{(\alpha_5\gamma_9\delta_1)t}{\varepsilon}, \quad q_{1,8}(t) = q_{1,9}(t) = -\gamma_9\delta_1,$$

$$p_{2,7}(t) = \frac{\gamma_9\delta_1(\gamma_9\delta_1\varepsilon - \alpha_5\beta_7)}{\varepsilon}, \quad q_{2,7}(t) = \frac{\gamma_9\delta_1(-\gamma_9\delta_1\varepsilon + \alpha_5\beta_7)}{\varepsilon} + \frac{(\alpha_5(\gamma_9\delta_1)^2)t}{\varepsilon},$$

$$p_{3,7}(t) = \frac{-4\alpha_5\gamma_9\delta_1\delta_3\varepsilon + 2\alpha_5^2\beta_7\delta_3 - 2\alpha_1\alpha_5\beta_7\delta_2 + 2\alpha_1\gamma_9\delta_1\delta_2\eta_6}{\varepsilon} +$$

$$\frac{(-2\alpha_5^2\gamma_9\delta_1\delta_3\varepsilon - 2\alpha_1\alpha_5^2\delta_2\beta_7 + 2\alpha_1\alpha_5\beta_5\gamma_9\delta_1\delta_2 + 2\alpha_5^3\beta_7\delta_3)t}{\varepsilon^2} +$$

$$\frac{\alpha_1\alpha_5^2\delta_2(\gamma_9\delta_1\varepsilon - \alpha_5\beta_7)t^2}{\varepsilon^4},$$

$$q_{3,7}(t) = \frac{4\alpha_5\gamma_9\delta_1\delta_3\varepsilon + 2\alpha_5\beta_7(\alpha_1\delta_2 - \alpha_5\delta_3) - 2\alpha_1\gamma_9\delta_1\delta_2\eta_6}{\varepsilon^4} +$$

$$+ \frac{2\alpha_5\gamma_9\delta_1(\alpha_1\delta_2 - \alpha_5\delta_3)t}{\varepsilon},$$



$$\begin{aligned}
p_{3,8}(t) = p_{3,9}(t) &= 2\alpha_5\delta_3 - 2\alpha_1\delta_2 + \frac{2\alpha_5(\alpha_5\delta_3 - \alpha_1\delta_2)t}{\varepsilon} - \frac{(\alpha_1\alpha_5^2\delta_2)t^2}{\varepsilon^3}, \\
q_{3,8}(t) = q_{3,9}(t) &= 2\alpha_1\delta_2 - 2\alpha_5\delta_3, \\
p_{4,7}(t) &= \frac{\alpha_5\gamma_9\delta_1\delta_3\varepsilon^2 - \alpha_5^2\beta_7\delta_3\varepsilon - 2\alpha_1\gamma_9\delta_1\delta_2\varepsilon + \alpha_1\alpha_5\beta_7\delta_2}{\varepsilon^2} \\
&\quad + \frac{\alpha_1\alpha_5\delta_2(-\gamma_9\delta_1\varepsilon + \alpha_5\beta_7)t}{\varepsilon^3}, \\
q_{4,7}(t) &= \frac{-\alpha_5\gamma_9\delta_1\delta_3\varepsilon^2 + \alpha_5^2\beta_7\delta_3\varepsilon + 2\alpha_1\gamma_9\delta_1\delta_2\varepsilon - \alpha_1\alpha_5\beta_7\delta_2}{\varepsilon^2} \\
&\quad + \frac{\alpha_5\gamma_9\delta_1(\alpha_5\delta_3\varepsilon - \alpha_1\delta_2)t}{\varepsilon^2}, \\
p_{4,8}(t) = p_{4,9}(t) &= \frac{-\alpha_5\delta_3\varepsilon + \alpha_1\delta_2}{\varepsilon} + \frac{(\alpha_1\alpha_5\delta_2)t}{\varepsilon^2}, \\
q_{4,8}(t) = q_{4,9}(t) &= \frac{\alpha_5\delta_3\varepsilon - \alpha_1\delta_2}{\varepsilon}, \\
p_{5,7}(t) &= \frac{\alpha_1\delta_2(\gamma_9\delta_1\varepsilon - \alpha_5\beta_7)}{\varepsilon}, \\
q_{5,7}(t) &= \frac{\alpha_1\delta_2(-\gamma_9\delta_1\varepsilon + \alpha_5\beta_7)}{\varepsilon} + \frac{(\alpha_1\alpha_5\gamma_9\delta_1\delta_2)t}{\varepsilon}.
\end{aligned}$$



## Apéndice B

### Forma de Kronecker

#### Forma de Kronocker

Considere el abanico  $A + \lambda B$ . Si existen  $P, Q$  matrices de orden  $m \times n$ , tales que  $P(A + \lambda B)Q = A_1 + \lambda B_1$ , se dice que los abanicos son estrictamente equivalentes y dichos abanicos tienen la misma forma de Kronecker.

La forma de Kronecker esta representada por:

$$diag[J_{\gamma_1}(\lambda_1) - \lambda I, \dots, J_{\gamma_k}(\lambda_k) - \lambda I, L_{\varepsilon_1}, \dots, L_{\varepsilon_s}, L_{\eta_1}^T, \dots, L_{\eta_t}^T, I - \lambda J_{\delta_1}(0), \dots, I - \lambda J_{\delta_\ell}(0)]$$

Donde no necesariamente todos los bloques diagonales aparecen.

Los bloques  $J_{\gamma_i}(\lambda_i) - \lambda I$  tienen dimensión  $\gamma_i \times \gamma_i$ , donde  $J_{\gamma_i}(\lambda_i)$  es una matriz en forma canónica de Jordan de orden  $\gamma_i \times \gamma_i$  y cuyos valores propios son solamente  $\lambda_i$ .

Los bloques  $J_{\gamma_i}(\lambda_i) - \lambda I$  tienen la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \lambda_i - \lambda & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \lambda_i - \lambda & 1 & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & \lambda_i - \lambda \end{bmatrix}$$

Estos bloques son llamados divisores elementales finitos (d.e.f.).

Los bloques  $L_{\varepsilon_i}$  tienen dimensión  $\varepsilon_i \times (\varepsilon_i + 1)$ ; incluso puede suceder que  $\varepsilon_i = 0$ . Los bloques  $L_{\varepsilon_i}$  tienen la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -\lambda & 1 \end{bmatrix}$$

Estos bloques son llamados bloques de índice mínimo por columnas (i.m.c.).

Los bloques  $L_{\eta_i}^T$  tienen dimensión  $(\eta_i + 1) \times \eta_i$ ; incluso puede suceder que  $\eta_i = 0$ . Los bloques  $L_{\eta_i}^T$  tienen la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} -\lambda & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & -\lambda & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

Estos bloques son llamados bloques de índice mínimo por renglón (i.m.r.).

Los bloques  $I - \lambda J_{\delta_i}(0)$  tienen dimensión  $\delta_i \times \delta_i$ , donde  $J_{\delta_i}(0)$  es una matriz en forma canónica de Jordan de orden  $\delta_i \times \delta_i$  y cuyos valores propios son solamente 0.

Los bloques  $I - \lambda J_{\delta_i}(0)$  tienen la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -\lambda \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

Estos bloques son llamados divisores elementales infinitos (d.e.i.).

Sea  $(A + \lambda B) : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ , entonces existen  $\mathcal{V}_\gamma$ ,  $\mathcal{V}_\varepsilon$ ,  $\mathcal{V}_\eta$ ,  $\mathcal{V}_\delta$ ,  $\mathcal{W}_\gamma$ ,  $\mathcal{W}_\varepsilon$ ,  $\mathcal{W}_\eta$ , y  $\mathcal{W}_\delta$ , tales que la forma de Kronecker se expresa como:

$$K_{A+\lambda B} \begin{bmatrix} \boxed{\text{d.e.f.}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\text{i.m.c.}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\text{i.m.r.}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{\text{d.e.i.}} \end{bmatrix}$$

Donde  $\mathcal{V} = \mathcal{V}_\gamma \oplus \mathcal{V}_\varepsilon \oplus \mathcal{V}_\eta \oplus \mathcal{V}_\delta$  y  $\mathcal{W} = \mathcal{W}_\gamma \oplus \mathcal{W}_\varepsilon \oplus \mathcal{W}_\eta \oplus \mathcal{W}_\delta$



# Apéndice C

## Publicaciones





# Singular Perturbed Derivative Coupling-Filter: The SISO Case

*SSSC07, Foz do Iguassu, Brazil, October 17-19th, 2007*



# Singular Perturbed Derivative Coupling-Filter

*17th IFAC World Congress, Seoul, Korea, July 6-11, 2008*



**Almost Invariant Subspaces:  
-High Gain Feedback? or  
-Singularly Perturbed Feedback?**

*47th IEEE Conference on Decision and Control, Cancun, Mexico, Dec.*

*9-11, 2008*



# More About Almost Controllability Subspaces

*Submitted to 50th IEEE Conference on Decision and Control and*

*European Control Conference, 2011*





# Bibliografía

- [1] Armentano, V. (1986). *Almost disturbance decoupling by a proportional derivative state feedback law*. Automatica 22(4), 449–456.
- [2] Basile, G. and Marro, G. (1992). *Controlled and Conditioned Invariants in Linear System Theory*. Prentice Hall.
- [3] Bonilla, M. and Lozano, R. (1997). *Adaptive Precompensator for Rejecting Output Disturbances in Non minimum Phase SISO Systems*. In: 37th IEEE Conference on Decision and Control, 3996–4001.
- [4] Bonilla, M. and Malabre, M. (1999). *Necessary and Sufficient Conditions for Disturbance Decoupling with Stability using PID Control Laws*. IEEE Transactions on Automatic Control. AC-44(6), 1311–1315.
- [5] Bonilla, M. and Malabre, M. (2000). *Proportional and Derivative State Feedback Decoupling of Linear Systems*. IEEE Transactions on Automatic Control. AC-45(4), 730–733.
- [6] Bonilla, M. and Malabre, M. (2001). *Structural Conditions for Disturbance Decoupling with Stability using Proportional and Derivative Control Laws*. IEEE Transactions on Automatic Control. AC-46(1), 160–165.
- [7] Bonilla, M., Malabre, M. and Fonseca, M. (1997). *On the approximation of non-proper control laws*. Int. J. Control, Vol 68, No. 4, pp. 775–796.
- [8] Méndez, H., M. Bonilla, M. Malabre and R.M Zou (2008). *Almost Invariant Subspaces: -High Gain Feedback? or -Singularity Perturbed*. In: *47th IEEE-CDC*, pp. 5164–5169, Cancun, Mexico, December 9–11, 2008.

- 
- [9] Brunovsky, P. (1970). *A classification of linear controllable systems*. Kybernetika, 6 , 173-188.
  - [10] Coinsidine, D.M. (1957). *Process Instruments and Controls Handbook*. New York: McGraw-Hill.
  - [11] Daniells, R. W. (1974). *Approximation Methods for electronic Filter Design*. New York: McGraw-Hill.
  - [12] Gantmacher, F.R. (1959). *The theory of matrices*, Vol. I. New York: Chelsea Pub. Co.
  - [13] Hardy, G.H. (1975). *A course of pure mathematics*. Cambridge: Cambridge University Press, 10th edition.
  - [14] Jackson, A.S. (1960). *Analog Computation*. New York: McGraw-Hill.
  - [15] P. Kokotović, (1999). *Singular Perturbation Methods in Control: Analysis and Design*. London: SIAM.
  - [16] MacFarlane, A.G.J and Postlethwaite, I. (1977). *The generalized Nyquist stability criterion and multivariable root locus*. International Journal of Control, 25, 81–127. Reprinted in Frequency–Response Methods in Control Systems, edited by Alistar G.J. MacFarlane (1979), New York: IEEE PRESS.
  - [17] Méndez, H., M. Bonilla, and M. Malabre (2007). *Singularly perturbed derivative coupling-filter: the SISO case*. In: 3rd IFAC Symposium on System, Structure and Control, 6 pp., Iguassu Falls, Brazil, October 17-19th, 2007.
  - [18] Méndez, H., M. Bonilla, M. Malabre, and J. Pacheco (2008). *Singularly Perturbed Derivative Coupling-Filter*. In: 17th IFAC World Congress, 6 pp. in CD, Seoul, Korea July 6-11, 2008.
  - [19] Morse, A.S. (1973). *Structural Invariants of Linear Multivariable Systems*. SIAM J. Control. 11(3), 446–465.
  - [20] Papoulis, A. (1962). *The Fourier Integral and its Applications*. New York: McGraw-Hill.
  - [21] Pacheco, J., Bonilla, M. and Malabre, M. (2003). *Proper Exponential Approximation of Non Proper Compensators: The MIMO Case*. In: 42nd IEEE Conference on Decision and Control. 110–115.

- 
- [22] Polderman, J.W. and J.C. Willems (1998). *Introduction to Mathematical Systems Theory: A Behavioral Approach*. New York: Springer-Verlag.
  - [23] Rosenbrock, H.H. (1970). *State-Space and Multivariable Theory*. London: Nelson.
  - [24] Saberi, A., Stoorvogelk, A.A., and Sannuti, P. (1999). *Control of Linear Systems with Regulation and Input Constraints*. London: Springer Verlag.
  - [25] Schumacher J. (1984). *Almost stabilizability subspaces and high gain feedback*. IEEE Transactions on Automatic Control, AC-29, 620–627.
  - [26] Stoorvogelk, A.A. (1992). *The  $H_\infty$  Control Problem*. New York: Prentice Hall.
  - [27] Trentelman, H.L. (1985). *Almost Invariant Subspaces and High Gain Feedback*. Ph.D. Thesis, may 31, 1985. Department of Mathematics & Computing Science, Eindhoven University of Technology, Netherlands.
  - [28] Trentelman H.L., Stoorvogelk, A.A., and Hautus, M. (2001). *Control Theory for Linear Systems*. London: Springer Verlag.
  - [29] Willems, J.C. (1980). *Almost  $A(\text{mod})B$ -invariant subspace*. Astérisque, 75–76, 239–248.
  - [30] Willems, J.C. (1981). *Almost invariant subspace: An approach to high gain feedback design – Part I: Almost controlled invariant subspace*. IEEE Transactions on Automatic Control, AC-26, 235–252.
  - [31] Willems, J.C. (1982). *Feedforward control, PID control laws, and almost invariant subspaces*. Systems & Control Letters, 1(4), 277–282.
  - [32] Willems, J.C. (1982a). *Almost invariant subspace: An approach to high gain feedback design – Part II: Almost conditionally invariant subspace*. IEEE Transactions on Automatic Control, **AC-27**, 1071–1085.
  - [33] Willems, J.C.(1991). *Paradigms and puzzles in the Theory of dynamical systems*. IEEE Transactions on Automatic Control, AC-36(3), 259–264.

- [34] Wonham, W.M. (1985). *Linear Multivariable Control: A Geometric Approach*. 3rd ed. Springer-Verlag, New York.
- [35] Zou, R. (2009). *Sur les pôles fixes de certains problèmes de commande*. Thèse de Doctorat, le 4 décembre 2009. École Centrale de Nantes, Université de Nantes, Nantes Francia.