

CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL
INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

DEPARTAMENTO DE CONTROL AUTOMÁTICO

**Control subóptimo para el clima dentro de un invernadero: cultivo de la
lechuga**

TESIS QUE PRESENTA:

M. en C. Erik Leal Enríquez

para obtener el Grado de:

Doctor en Ciencias

en la Especialidad de

Control Automático

Director de tesis:

Dr. Moisés Bonilla Estrada

Mexico, Distrito Federal.

Junio, 2011

Indice

Tabla de acrónimos	viii
Notación	x
Resumen	xi
Abstract	xiii
	xv
1 Introducción	1
1.1 Objetivo de investigación	1
1.1.1 Estructura de la Tesis	2
2 Modelo del crecimiento de la lechuga cultivada en invernadero	3
2.1 Modelo fotosíntesis-respiración en el cultivo de la lechuga en invernadero	3
2.2 Modelo para describir el clima dentro del invernadero	4
2.3 Modelo clima-crecimiento	4
2.4 Modelo singularmente perturbado	5
2.5 Radiación fotosintéticamente activa	7
2.5.1 Radiación fotosintéticamente activa promedio	7
2.6 Comportamiento logístico de la materia seca	12
2.7 Conclusiones	13
Parte I Simplificación del modelo de van Henten	
3 Modelo Día-Noche para el crecimiento de la lechuga cultivada en invernadero ..	17
3.1 Modelo para la etapa de día	18
3.2 Modelo para la etapa de noche	19
3.3 Modelo Día-Noche para el cultivo de la lechuga en invernadero	19
3.3.1 Simulaciones y Resultados	20
3.4 Conclusiones	20
4 Razón relativa de crecimiento	23
4.1 Relación entre la aceleración de producción de la materia seca y la RRC para el período de luz	23
4.2 Razón relativa de crecimiento en etapa de día, RRC_D	25
4.3 Aproximación de la razón relativa de crecimiento para la etapa de día	26

4.4	Relación entre la aceleración de producción de la materia seca y la RRC para la etapa de noche	26
4.5	Simulaciones y resultados	26
4.6	Conclusiones	27
5	Análisis del parámetro de crecimiento específico, $r_{b,D}$: caso de una RFA con coeficiente de nubosidad unitario	29
5.1	Estudio del parámetro de crecimiento específico, $r_{b,D}$	29
5.2	Simulaciones y resultados	30
5.3	Conclusiones	30
6	Análisis de la fotosíntesis máxima de asimilación de CO_2, $\phi_{phot,max}$	33
6.1	Aproximación de $\phi_{c,al,pl}$	33
6.2	Aproximación de $\phi_{phot,max}$	34
6.3	Simulaciones y resultados	34
6.4	Conclusiones	34
Parte II Ley de Control Subóptima		
7	Ley de Control Subóptima	39
7.1	Hamiltoniano para el período de luz	39
7.1.1	Condiciones de optimalidad	40
7.2	Coestado λ_{Ds} : valores pequeños de materia seca	40
7.3	Coestado $\lambda_{D\ell}$: valores grandes de la materia seca	41
7.4	Ley de control subóptima	42
7.5	Simulaciones y Resultados	43
7.6	Conclusiones	44
8	Conclusiones y Perspectivas	45
8.1	Conclusiones	45
8.2	Perspectivas	45
Parte III Apéndices		
A	Modelos de crecimiento en cultivos	49
A.1	Crecimiento exponencial	49
A.2	Crecimiento lineal	49
A.3	Crecimiento exponencial-lineal	50
A.4	Crecimiento logístico	51
A.4.1	Características del crecimiento logístico	52
B	Radiación fotosintéticamente activa real	57
C	Simplificación de la conductancia de CO_2 a través de las hojas	67
C.1	Valor promedio de la conductancia de CO_2 a través de las hojas para el cultivo de la lechuga en invernadero para el período de luz	67
C.2	Simulaciones y resultados	67
D	Desarrollo matemático: capítulo 4	71
D.1	Derivadas parciales, a_D , b_D y c_D	71
D.2	Aproximación del parámetro de crecimiento específico, κ	72

Indice	vii
E Función, $f_b^*(\bar{U}_{c,D})$	73
F Método de paso descendente	77
Parte IV Publicaciones	
ICBB: First International Congress on Biotechnology and Bioengineering	82
CDC2010: 49th IEEE Conference on Decision and Control	83
ISHS: Acta Horticulturae	84
CDC2010: 50th IEEE Conference on Decision and Control (sometido)	85
Referencias	87

Tabla de acrónimos

Acrónimo	Descripción
CO_2 :	bióxido de Carbono
RFA:	radiación fotosintéticamente activa
RRC:	razón relativa de crecimiento
RRC_D :	razón relativa de crecimiento para la etapa de día
RRC_N :	razón relativa de crecimiento para la etapa de noche

Notación

Símbolo	Descripción
$[\cdot]$	sin unidades
X_D	envolvente superior de la variable, X
X_N	envolvente inferior de la variable, X

Resumen

Uno de los más importantes trabajos para la optimización de la producción de materia seca en invernaderos es hecha por van Henten. Una dificultad para sintetizar el esquema de control óptimo de van Henten es debido a las no linealidades presentadas en su modelo. De hecho, debido a esas no linealidades, el procedimiento para la síntesis de la ley de control es una tarea difícil. En particular, la ley de control propuesta para este modelo no puede ser expresada de una forma analítica, y es necesario resolver un algoritmo de programación no lineal. Con la finalidad de atacar este problema, en esta tesis se encuentra una ley de control subóptima analítica. Para esto, primero se separa el modelo de perturbaciones singulares de van Henten en dos modelos independientes: uno para el período de día y otro para el período de noche. Luego, se resuelve el problema de control subóptimo en dos pasos: primero se considera los valores pequeños de materia seca y luego se consideran los valores grandes.

Abstract

One of the most important works for optimizing the dry matter production in greenhouses is the one done by van Henten. A difficulty for synthesizing the van Henten's optimal control scheme is due to the high non-linearities presented in the model. Because of these high non-linearities, the control law synthesis procedure is a challenging task, indeed. In particular, the optimal control law proposed for this model can not be expressed in an analytical way, and it is necessary to solve a nonlinear programming algorithm. In order to tackle this difficulty, in this thesis we find an analytical suboptimal control law. For this, firstly we separate the van Henten's model into two independent models: one for the day period and the other one to the night period. Then, we solved the suboptimal control problem in two steps: we first consider small values of the dry matter and we then consider larger values.

Capítulo 1

Introducción

Uno de los progresos más importantes en la agricultura moderna es la utilización de modelos matemáticos para describir el comportamiento fisiológico del crecimiento de las plantas (ver [22] por ejemplo). La incorporación de tales modelos matemáticos en la producción de plantas y cultivos, ha permitido el uso de técnicas de control avanzado para controlar el clima en invernaderos (ver [14] por ejemplo).

La explotación de cultivos en entornos artificiales es interesante, tanto cualitativamente como cuantitativamente, tanto para el productor como para el consumidor. El controlar los ciclos de crecimiento y de la cosecha, mediante el establecimiento de condiciones climáticas, optimiza el manejo y la confiabilidad de la producción del cultivo [16]. Recientemente las técnicas de control óptimo comienzan a ser utilizadas en la producción de cultivos en invernaderos, porque conducen a un mejor manejo en la producción y gasto de la energía [19].

Una contribución importante a la optimización del control de clima en invernaderos se debe a van Henten [24]. En este trabajo, van Henten sigue un enfoque de control óptimo para la producción de lechugas en invernaderos. La dificultad para sintetizar el esquema de control óptimo de van Henten se debe a la presencia de fuertes no linealidades presentadas en su modelo. Debido a éstas la síntesis de la ley de control es una tarea difícil. En particular, la ley de control óptimo propuesta para este modelo no puede ser expresada de forma analítica, y es necesario resolver un algoritmo de programación no lineal en cada periodo de muestreo. Esto lleva a utilizar una aproximación numérica para resolver la ecuación Hamiltoniana [25]. Posterior a este trabajo se realizaron mejoras para optimizar la producción de la lechuga y jitomate en invernaderos, pero siempre siguiendo un enfoque algorítmico (ver [16], [20], [19] y [21] por ejemplo). Esto es, no se establece una ley de control óptimo analítica en términos de los parámetros del crecimiento del cultivo, en particular el de la lechuga.

Trabajos recientes han tratado de establecer leyes de control óptimo mediante la forma de la curva de crecimiento de la materia seca del cultivo (ver [1] y [13] por ejemplo), los cuales parten de la observación de que los datos experimentales obtenidos de la materia seca se ajustan a una curva logística. En estos trabajos se encuentra una ley de control óptimo para la entrada del suministro de bióxido de carbono (CO_2), mediante algoritmos computacionales. Recientemente, van Straten *et.al.* han editado un libro [26], en donde se resumen los principales avances de la aplicación de las técnicas de control óptimas a la gestión del cultivo de hortalizas en invernadero.

1.1 Objetivo de investigación

Establecer una ley de control subóptima analítica para el suministro de CO_2 al invernadero en términos de los parámetros del crecimiento de la lechuga.

1.1.1 Estructura de la Tesis

En el capítulo 2 se muestra el modelo de van Henten para el crecimiento de la lechuga en invernadero y se obtiene una expresión analítica de la radiación fotosintéticamente activa mediante una serie de Fourier. En este capítulo se observa que el comportamiento de la materia seca para el cultivo de la lechuga en invernadero es logístico.

En el capítulo 3 se muestra que el modelo de van Henten, puede separarse en dos partes: uno correspondiente a la presencia de radiación fotosintéticamente activa y otro en ausencia de ésta radiación. Estos modelos independientes actúan como envolventes¹ superior e inferior del modelo de van Henten.

En el capítulo 4 se encuentra la razón relativa de crecimiento para el cultivo de la lechuga en invernadero para los períodos de luz y de oscuridad. Para el período de luz se muestra que la razón relativa de crecimiento puede describirse mediante una curva logística, donde su parámetro de crecimiento específico esta relacionado directamente con la fotosíntesis máxima de asimilación de CO_2 . Para el período de oscuridad se muestra que la razón relativa de crecimiento puede describirse mediante una función lineal, donde su parámetro de crecimiento específico es una constante en la dinámica del crecimiento de la lechuga en invernadero.

En el capítulo 5 se analiza el parámetro de crecimiento específico, para el caso de una radiación fotosintéticamente activa con coeficiente de nubosidad unitario. En este caso se muestra que el parámetro de crecimiento específico puede ser aproximado por una función lineal que depende únicamente del CO_2 suministrado al invernadero.

En el capítulo 6 se muestra que la fotosíntesis máxima de asimilación de CO_2 se puede aproximar por una función que depende del CO_2 suministrado en el invernadero.

En el capítulo 7 se calcula una ley de control. Esta ley de control es desarrollada en términos de los parámetros de la lechuga cultivada en invernadero.

¹ En el capítulo 3 se muestran más detalles del concepto de envolvente utilizado en este trabajo de tesis.

Capítulo 2

Modelo del crecimiento de la lechuga cultivada en invernadero

En este capítulo se muestra el modelo de van Henten para el crecimiento de la lechuga en invernadero, el cual integra la materia seca con el clima¹ dentro del invernadero.

En este capítulo, con la finalidad de acelerar las simulaciones numéricas para obtener el comportamiento de la materia seca, se obtiene una expresión analítica de la radiación fotosintéticamente activa mediante una serie de Fourier truncada.

Finalmente, se muestra que el comportamiento de la materia seca para el cultivo de la lechuga en invernadero es logístico.

2.1 Modelo fotosíntesis-respiración en el cultivo de la lechuga en invernadero

El modelo para describir la producción de la materia seca² en términos de la fotosíntesis y respiración del cultivo es [18]:

$$\frac{dX_d}{dt} = c_\beta c_\alpha \phi_{fot} - c_\beta \phi_{resp}, \quad (2.1)$$

donde X_d [kg/m^2] es la materia seca dada en kilogramos por metro cuadrado de suelo cultivable, ϕ_{fot} [$kg/m^2 s$] es la fotosíntesis bruta del cultivo, tomada como asimilación de CO_2 . ϕ_{resp} [$kg/m^2 s$] es la respiración de mantenimiento expresada en términos de la cantidad de carbohidratos consumidos. c_β [-] es el parámetro de respiración y pérdida de síntesis durante la conversión de carbohidratos a materia estructural, el cual tiene un valor entre cero y uno. c_α [-] es el parámetro para convertir el CO_2 asimilado en su equivalente en azúcares.

Para el cultivo de la lechuga en invernadero, la fotosíntesis bruta ϕ_{fot} se describe por la siguiente ecuación [24]:

$$\phi_{fot} = (1 - e^{-c_{pl,d} X_d}) \phi_{phot,max}, \quad (2.2)$$

donde $c_{pl,d} X_d$ [-] es el índice de área de hoja. El término $\phi_{phot,max}$ [$kg/m^2 s$], es la fotosíntesis máxima de asimilación de CO_2 del dosel por metro cuadrado de suelo cultivable, el cual está dado por [5]:

¹ El clima está integrado por la temperatura, la humedad y la concentración de CO_2 dentro del invernadero.

² La materia seca de un cultivo se obtiene cuando una muestra del cultivo es colocada en un horno a una temperatura de $100^\circ C$ durante 24 horas, el agua se evapora y lo que resta se denomina materia seca. La materia seca de un cultivo contiene la mayoría de sus nutrientes (ver [15] por ejemplo).

$$\phi_{phot,max} = \frac{c_1 V_i \rho (X_c - c_\Gamma)}{c_1 V_i + \rho (X_c - c_\Gamma)}, \quad (2.3)$$

donde $X_c [kg/m^3]$ es la concentración de CO_2 dentro del invernadero. La variable $V_i [W/m^2]$ es la radiación fotosintéticamente activa. El factor $c_\Gamma [kg/m^3]$ es el punto de compensación del CO_2 [4]. La constante $c_1 [kg/J]$ es el parámetro de eficiencia de la luz [5]. La variable $\rho [m/s]$ es la conductancia de bióxido de carbono a través de las hojas [3].

La respiración, ϕ_{resp} , es descrita por [24]:

$$\phi_{resp} = c_{resp,1} X_d 2^{(0.1 X_t - 2.5)}, \quad (2.4)$$

donde $X_d [kg/m^2]$ y $X_t [^\circ C]$ son la materia seca y la temperatura dentro del invernadero respectivamente. El factor $c_{resp,1} [1/s]$ toma en cuenta la conversión de carbohidratos en materia estructural.

2.2 Modelo para describir el clima dentro del invernadero

El modelo para describir el comportamiento del clima dentro del invernadero, que toma la temperatura y la concentración de bióxido de carbono CO_2 como variables de estado, está dado por [24]:

$$\frac{dX_t}{dt} = \frac{1}{c_{cap,q}} (Q_{pl,al} - Q_{al,ou} + Q_{rad}), \quad (2.5)$$

$$\frac{dX_c}{dt} = \frac{1}{c_{cap,c}} (U_c - \phi_{c,al,ou} - \phi_{c,al,pl}), \quad (2.6)$$

donde $X_t [^\circ C]$ y $X_c [kg/m^3]$, son la temperatura y la concentración de CO_2 dentro del invernadero. La entrada de control $U_c [kg/m^2 s]$, es la razón de CO_2 suministrado al invernadero³. Las variables $Q_{pl,al} [W/m^2]$, $Q_{al,ou} [W/m^2]$, y $Q_{rad} [W/m^2]$, son respectivamente la energía suministrada por el sistema de calefacción, la pérdida de energía debida al flujo natural del aire a través de las ventanas del invernadero y la energía debida al sol por metro cuadrado de suelo cultivado. Los términos $\phi_{c,al,pl} [kg/m^2 s]$ y $\phi_{c,al,ou} [kg/m^2 s]$, son el CO_2 dado por el cultivo y la ventilación con el aire exterior. Las constantes $c_{cap,q} [J/m^2 \circ C]$ y $c_{cap,c} [m]$ son las capacidades de calor y aire dentro del invernadero.

2.3 Modelo clima-crecimiento

En su tesis doctoral, van Henten integra el modelo fotosíntesis-respiración (2.1) del cultivo de la lechuga con el modelo del clima dentro del invernadero (2.5)-(2.6) y al realizar un análisis de sensibilidad sobre las variables que afectan al desarrollo del crecimiento de la lechuga, obtuvo el siguiente modelo:

$$\frac{dX_d}{dt} = c_{\alpha\beta} (1 - e^{-c_{pl,d} X_d}) \frac{c_1 V_i (-c_{co2,1} X_t^2 + c_{co2,2} X_t - c_{co2,3}) (X_c - c_\Gamma)}{c_1 V_i + (-c_{co2,1} X_t^2 + c_{co2,2} X_t - c_{co2,3}) (X_c - c_\Gamma)} - c_{resp,1} X_d 2^{(0.1 X_t - 2.5)}, \quad (2.7)$$

³ En un invernadero usualmente el CO_2 se suministra mediante un tanque de gas regulado por una válvula que se abre y se cierra para controlar el suministro de CO_2 al invernadero [26]

$c_{\alpha\beta} = 0.544$	$[-]$
$c_{pl,d} = 53$	$[m^2/Kg]$
$c_1 = 3.55 \times 10^{-9}$	$[kg/J]$
$c_{co2,1} = 5.11 \times 10^{-6}$	$[m/sC^2]$
$c_{co2,2} = 2.3 \times 10^{-4}$	$[m/sC]$
$c_{co2,3} = 6.29 \times 10^{-4}$	$[m/s]$
$c_\Gamma = 5.2 \times 10^{-5}$	$[Kg/m^3]$
$c_{resp,1} = 2.65 \times 10^{-7}$	$[1/s]$
$c_{cap,c} = 4.1$	$[m]$
$c_{resp,2} = 4.8 \times 10^{-7}$	$[1/s]$
$c_{leak} = 0.75 \times 10^{-4}$	$[m/s]$
$c_{cap,q} = 3 \times 10^5$	$[J/m^2C]$
$c_{cap,q,v} = 1290$	$[J/m^3C]$
$c_{al,ou} = 6$	$[W/m^2C]$
$c_{rad} = 0.2$	$[-]$

Tabla 2.1 Parámetros para el modelo del crecimiento de la lechuga en invernadero (ver tabla 3.6 de [24])

$$\frac{dX_c}{dt} = \frac{1}{c_{cap,c}} \left[- \left(1 - e^{-c_{pl,d}X_d} \right) \frac{c_1 V_i (-c_{co2,1} X_t^2 + c_{co2,2} X_t - c_{co2,3}) (X_c - c_\Gamma)}{c_1 V_i + (-c_{co2,1} X_t^2 + c_{co2,2} X_t - c_{co2,3}) (X_c - c_\Gamma)} + c_{resp,2} X_d 2^{(0.1 X_t - 2.5)} \right] \\ + \frac{1}{c_{cap,c}} [+U_c - (U_v + c_{leak}) (X_c - V_c)], \quad (2.8)$$

$$\frac{dX_t}{dt} = \frac{1}{c_{cap,q}} (U_q - (c_{cap,q,v} U_v + c_{al,ou}) (X_t - V_t) + c_{rad} V_i), \quad (2.9)$$

donde X_d [kg/m^2], X_c [kg/m^3], y X_t [$^\circ C$] son la materia seca de la lechuga, la concentración de CO_2 , y la temperatura dentro del invernadero respectivamente. U_v [m/s] es la ventilación a través de las ventanas. U_q [W/m^2] es la energía suministrada por el sistema de calefacción y U_c [$kg/m^2 s$] es el suministro de CO_2 . Además, se identifican las entradas externas que son la radiación fotosintéticamente activa V_i [W/m^2], la concentración de CO_2 V_c [$kg/m^2 s$], y la temperatura V_t [$^\circ C$] fuera del invernadero. El resto de los parámetros se muestran en la tabla 2.1 y se obtienen mediante experimentos y a partir de un análisis de sensibilidad para el desarrollo del cultivo de la lechuga en invernadero [24].

Tomando en cuenta que el crecimiento de la lechuga en un invernadero se lleva a cabo en 57 días y que el clima dentro del invernadero se mide en escala de minutos (ver [24] y [6] por ejemplo). En (2.7)-(2.9), se observa que existen dos diferentes escalas de tiempo, una en días (2.7) y la otra en minutos (2.8) y (2.9). Esto se debe a la integración del modelo de crecimiento con el clima dentro del invernadero [24].

2.4 Modelo singularmente perturbado

Para simplificar las simulaciones numéricas y la síntesis de la ley de Control Óptimo, van Henten, al igual que Udink [23], divide su modelo en una dinámica lenta (escala en días), dada por el comportamiento de X_d y una dinámica rápida (escala en minutos) dada por el comportamiento del clima en el invernadero, esto es, los cambios en las condiciones de temperatura y concentración del CO_2 son muy rápidos en comparación con el comportamiento de la materia seca. Esto permitió a van Henten diseñar un esquema de Control Óptimo basado en técnicas de perturbaciones singulares [9].

El modelo al cual se le aplica la técnica de perturbaciones singulares es:

$$\frac{dX_d}{dt} = c_{\alpha\beta} \left(1 - e^{-c_{pl,d}X_d}\right) \frac{c_1 V_i (-c_{co2,1} Z_t^2 + c_{co2,2} Z_t - c_{co2,3}) (Z_c - c_\Gamma)}{c_1 V_i + (-c_{co2,1} Z_t^2 + c_{co2,2} Z_t - c_{co2,3}) (Z_c - c_\Gamma)} - c_{resp,1} X_d 2^{(0.1 Z_t - 2.5)}, \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dZ_c}{dt} &= \frac{1}{c_{cap,c}} \left[- \left(1 - e^{-c_{pl,d}X_d}\right) \frac{c_1 V_i (-c_{co2,1} Z_t^2 + c_{co2,2} Z_t - c_{co2,3}) (Z_c - c_\Gamma)}{c_1 V_i + (-c_{co2,1} Z_t^2 + c_{co2,2} Z_t - c_{co2,3}) (Z_c - c_\Gamma)} \right] + c_{resp,2} X_d 2^{(0.1 Z_t - 2.5)} \\ &\quad + U_c - (U_v + c_{leak}) (Z_c - V_c), \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\varepsilon \frac{dZ_t}{dt} = \frac{1}{c_{cap,q}} (U_q - (c_{cap,q,v} U_v + c_{al,ou}) (Z_t - V_t) + c_{rad} V_i), \quad (2.12)$$

donde Z_c [kg/m^3], Z_t [$^\circ C$] son los estados rápidos de la concentración de CO_2 y temperatura dentro del invernadero. ε es la perturbación aplicada al sistema.

Para simplificar (2.10)-(2.12), van Henten hace la suposición que los cambios en el crecimiento del cultivo de la lechuga en un invernadero son muy lentos en relación con los cambios en las condiciones de temperatura y concentración de CO_2 en el invernadero. Con esta suposición y tomando $\varepsilon = 0$ se obtiene el siguiente modelo singularmente perturbado:

$$\frac{d\bar{X}_d}{dt} = c_{\alpha\beta} \left(1 - e^{-c_{pl,d}\bar{X}_d}\right) \frac{c_1 V_i (-c_{co2,1} \bar{Z}_t^2 + c_{co2,2} \bar{Z}_t - c_{co2,3}) (\bar{Z}_c - c_\Gamma)}{c_1 V_i + (-c_{co2,1} \bar{Z}_t^2 + c_{co2,2} \bar{Z}_t - c_{co2,3}) (\bar{Z}_c - c_\Gamma)} - c_{resp,1} \bar{X}_d 2^{(0.1 \bar{Z}_t - 2.5)}, \quad (2.13)$$

$$\bar{Z}_c = \frac{-(\omega\alpha\rho + \alpha\tau - \delta\rho) + \sqrt{(\omega\alpha\rho + \alpha\tau - \delta\rho)^2 + 4\delta\alpha\tau\rho}}{2\tau\rho} + c_\Gamma, \quad (2.14)$$

$$\bar{Z}_t = \frac{(c_{cap,q,v} \bar{U}_v + c_{al,ou}) \bar{V}_t - c_{rad} V_i + \bar{U}_q}{(c_{cap,q,v} \bar{U}_v + c_{al,ou})}. \quad (2.15)$$

Los términos α , ρ , ω , δ , y τ están dados por:

$$\alpha = c_1 V_i, \quad (2.16)$$

$$\rho = -c_{co2,1} \bar{Z}_t^2 + c_{co2,2} \bar{Z}_t - c_{co2,3}, \quad (2.17)$$

$$\omega = \left(1 - e^{-c_{pl,d}\bar{X}_d}\right), \quad (2.18)$$

$$\delta = c_{resp,2} \bar{X}_d 2^{(0.1 \bar{Z}_t - 2.5)} + \bar{U}_c + (\bar{U}_v + c_{leak}) (\bar{V}_c - c_\Gamma), \quad (2.19)$$

$$\tau = (\bar{U}_v + c_{leak}). \quad (2.20)$$

En el modelo dinámico (2.13)-(2.15), se distinguen las salidas \bar{X}_d [kg/m^2], \bar{Z}_c [kg/m^3] y \bar{Z}_t [$^\circ C$], que son la materia seca, la concentración de CO_2 , y la temperatura del aire dentro del invernadero. Las entradas de control \bar{U}_v , \bar{U}_q y \bar{U}_c son la ventilación a través de las ventanas, la energía del

$\bar{U}_{c,\min}$	0 [$kg/m^2 s$]
$\bar{U}_{c,\max}$	1.2×10^{-6} [$kg/m^2 s$]
$\bar{U}_{v,\min}$	0 [m/s]
$\bar{U}_{v,\max}$	7.5×10^{-3} [m/s]
$\bar{U}_{q,\min}$	0 [W/m^2]
$\bar{U}_{q,\max}$	150 [W/m^2]
$\bar{Z}_{c,\min}$	0 [kg/m^3]
$\bar{Z}_{c,\max}$	2.75×10^{-3} [kg/m^3]
$\bar{Z}_{t,\min}$	6.5 [$^{\circ}C$]
$\bar{Z}_{t,\max}$	40 [$^{\circ}C$]

Tabla 2.2 Cotas para las variables del crecimiento de la lechuga en invernadero (ver tabla 6.1 de [24])

sistema calefactor y el suministro de CO_2 . Además, se identifican las siguientes entradas externas: la concentración de CO_2 ambiental, \bar{V}_c , la temperatura, \bar{V}_t , fuera del invernadero y la radiación fotosintéticamente activa, V_i . En la tabla 2.2 se muestran las cotas para las variables de estado, las entradas de control y las entradas externas para el cultivo de la lechuga en invernadero [24].

2.5 Radiación fotosintéticamente activa

Con la finalidad de acelerar las simulaciones numéricas se obtiene una expresión analítica de la Radiación fotosintéticamente activa (RFA), proporcionada por la Universidad de Wageningen en Holanda del 21 de enero al 17 de marzo de 1992 (ver apéndice B).

2.5.1 Radiación fotosintéticamente activa promedio

La RFA promedio con coeficiente de nubosidad para el crecimiento de la lechuga en invernadero V_i , es (ver [5] y [1] por ejemplo):

$$V_i = \begin{cases} \bar{V}_{i,\tau_n} & \forall t \in [12 - \frac{d}{2}, 12 + \frac{d}{2}] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}, \quad (2.21)$$

donde

$$\bar{V}_{i,\tau_n} = \frac{1}{d} V_o \tau_n \int_{12 - \frac{d}{2}}^{12 + \frac{d}{2}} \sin \beta dt \left(1 + 0.033 \cos \left(2\pi \frac{(t_d - 10)}{365} \right) \right) \quad (2.22)$$

y

$$\tau_n = \frac{V_{i,p}}{\bar{V}_{i,\tau_n=1}}. \quad (2.23)$$

El término $\bar{V}_{i,\tau_n=1}$ es la RFA teórica promedio, tomando el valor de $\tau_n = 1$ (ver figura 2.2 y (2.22)). El factor $V_{i,p}$ [W/m^2], es la RFA obtenida de forma experimental para el período del 21 de enero al 17 de marzo (ver figura 2.1) [24]. $V_o = 1367$ [W/m^2] es la constante solar. El término β [rad] es el ángulo de elevación del sol a un punto dado sobre la superficie terrestre, medido con respecto al horizonte. La constante t_d , es el día fenológico, el cual toma el valor de uno para el primero de enero y se cuenta consecutivamente hasta el día fenológico 365 que equivale al 31 de diciembre para el caso de año no

bisiesto. El término d , es la duración del día solar, el cual influye en el desarrollo del cultivo por efectos foto-periódicos [5].

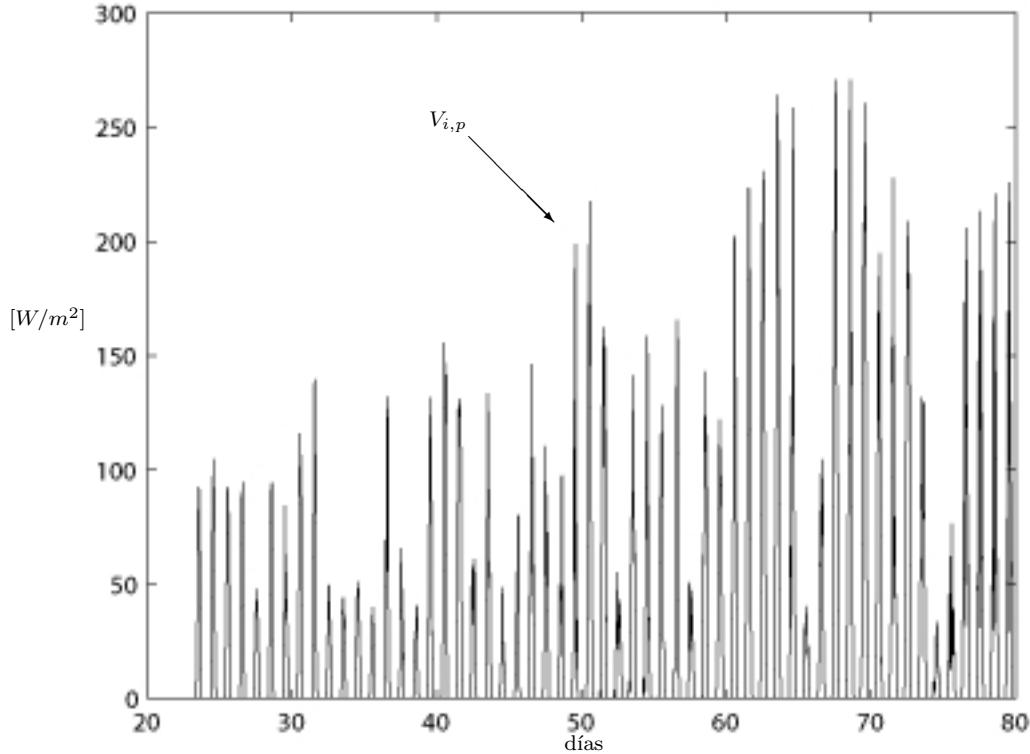


Figura 2.1 Radiación fotosintéticamente activa, $V_{i,p}$ vs t , para el período del 21 de enero al 17 de marzo de 1992, Wageningen Holanda (ver apéndice B)

En el artículo de Bonilla et al. [1], se obtiene de manera empírica el coeficiente de nubosidad τ_n ,⁴ (2.22), por medio de una serie de Fourier truncada:

$$\tau_n \simeq \frac{1}{2}a_o + \sum_{n=1}^p a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^p a_n \sin(n\omega t). \quad (2.24)$$

En la tesis de maestría de Cordova [2], se obtienen estos coeficientes mediante redes neuronales. Analizando la transformada de Fourier de τ_n , se infirió una frecuencia fundamental $\omega = 0.01$ y se seleccionaron 17 términos, i.e., $p = 17$. En la tabla 2.3, se muestran los coeficientes a_n y b_n obtenidos. Se infirió un valor para el primer coeficiente de la serie de Fourier $\frac{1}{2}a_o = 0.207$ (ver figura 2.3).

Con el objetivo de obtener una mejor descripción de la RFA con respecto a la obtenida por [2], se hace un ajuste por mínimos cuadrados para el coeficiente de nubosidad τ_n . El ajuste se realiza usando el comando *fminsearch* de MatLab® tomando los valores: $\omega = 0.01$, $p = 17$, $\frac{1}{2}a_o = 0.1123$, y tomando como valores iniciales los dados por la tabla 2.3. En la tabla 2.4 se muestran los resultados obtenidos para los coeficientes a_n y b_n para un ajuste por mínimos cuadrados (comparar figuras 2.3 y 2.5 con

⁴ Para aproximar τ_n por una serie de Fourier, se hace la suposición que es una función periódica.

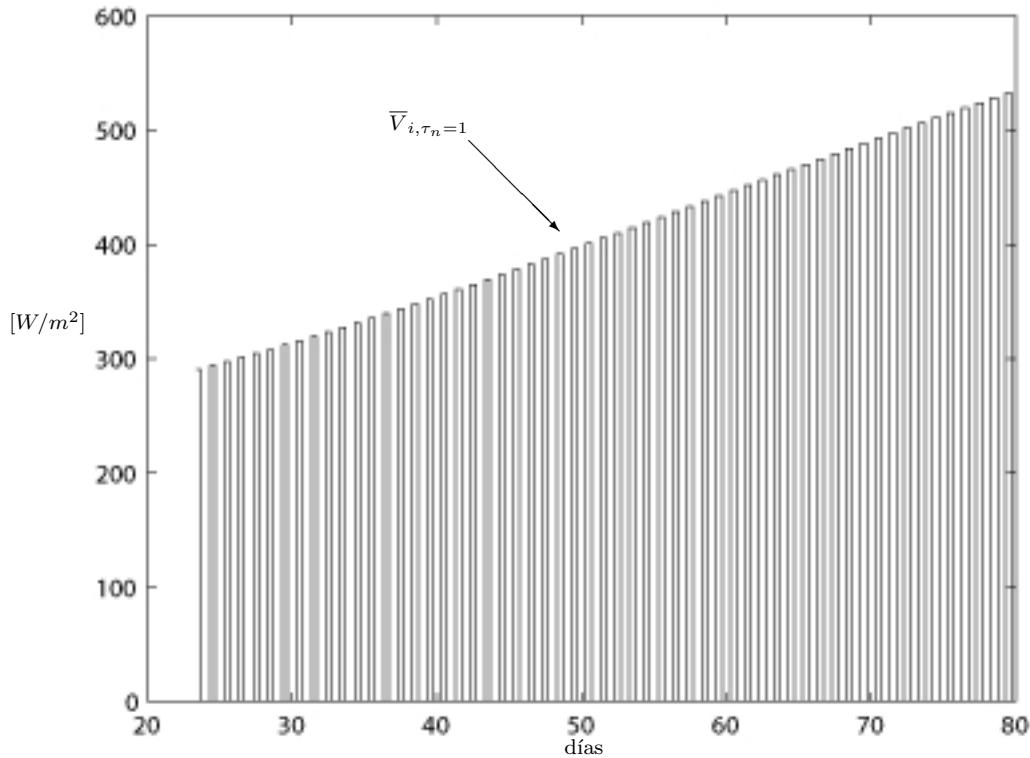


Figura 2.2 Radiación fotosintéticamente activa teórica promedio, $\bar{V}_{i,\tau_n=1}$ vs t

n	1	2	3	4	5
a_n	-0.0289	0.0262	0.0457	0.0234	0.0464
b_n	-0.0573	-0.0369	-0.027	-0.0136	-0.0143
n	6	7	8	9	10
a_n	0.0110	0.0529	0.0455	-0.0118	0.0190
b_n	-0.0158	0.0241	0.0559	0.0342	0.0147
n	11	12	13	14	15
a_n	-0.0075	-0.0158	-0.0273	-0.0150	-0.0236
b_n	0.0205	-0.0080	-0.0026	0.0245	0.0109
n	16	17			
a_n	-0.0127	-0.0078			
b_n	-0.0138	-0.0176			

Tabla 2.3 Coeficientes a_n y b_n obtenidos por medio de Redes Neuronales [2].

la figura 2.1). En la figura 2.4 se muestra la gráfica para el coeficiente de nubosidad obtenido a partir de (2.24).

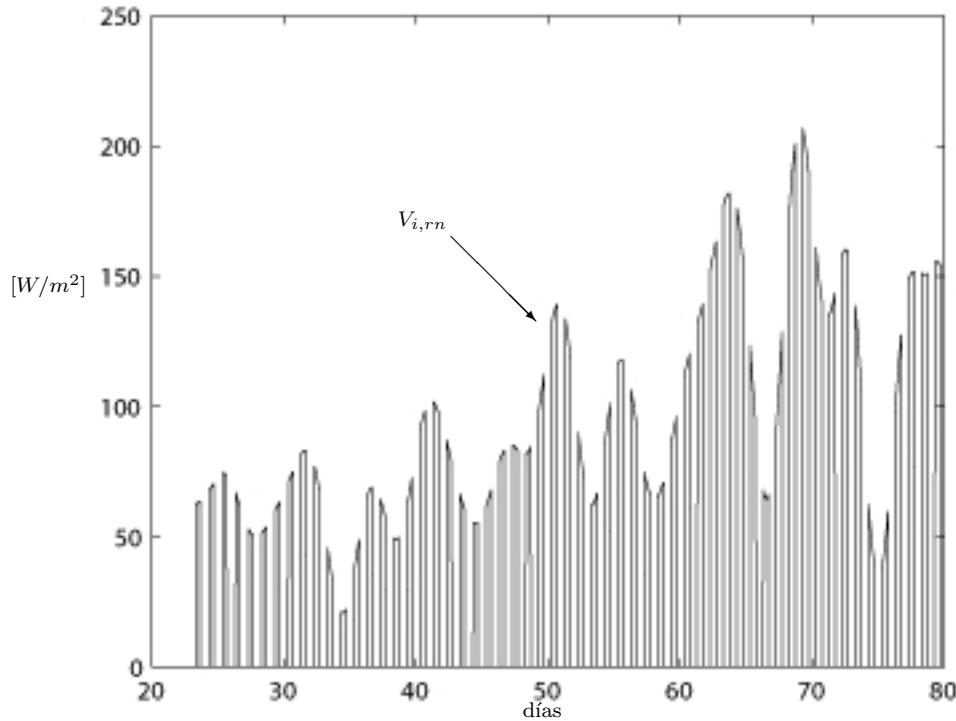


Figura 2.3 Radiación fotosintéticamente activa promedio, $V_{i,rn}$ vs t , con coeficiente de nubosidad obtenido por medio de redes neuronales

n	1	2	3	4	5
a_n	0.0495	0.0560	0.0512	0.0583	$7.741e - 4$
b_n	-0.0475	-0.0119	-0.0079	-0.0029	-0.057
n	6	7	8	9	10
a_n	0.0157	0.0556	0.0378	-0.0031	0.0092
b_n	0.0035	0.0303	0.0408	0.0377	0.0229
n	11	12	13	14	15
a_n	-0.0053	-0.0304	-0.0233	0.0109	-0.0166
b_n	0.0246	0.0012	-0.0031	0.0105	0.0089
n	16	17			
a_n	-0.0039	-0.0067			
b_n	-0.0069	-0.0024			

Tabla 2.4 Coeficientes a_n y b_n obtenidos por ajuste de mínimos cuadrados.

2.5.1.1 Simulaciones numéricas y resultados

Se realizaron simulaciones MatLab® -Simulink con los parámetros de la tabla 2.5

En la figura 2.5 se muestra la RFA promedio (2.21), (2.22) y (2.24) con los valores de a_n y b_n dados en la tabla 2.4.

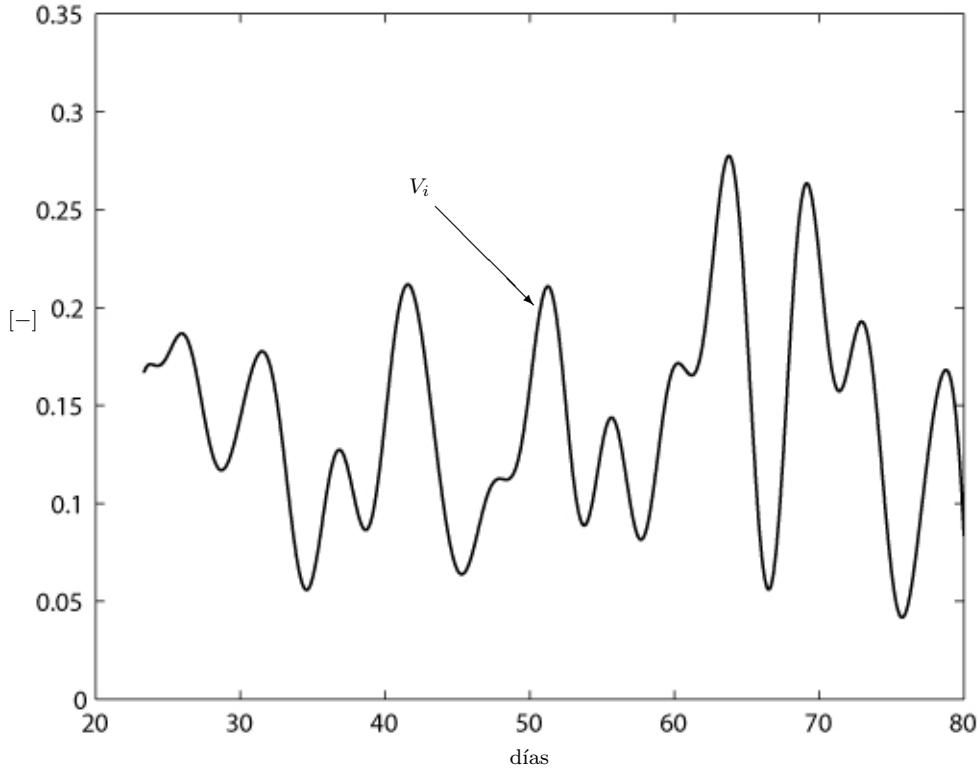


Figura 2.4 Coeficiente de nubosidad, τ_n vs t

<i>Start-time</i>	23.35
<i>Stop-time</i>	80
<i>Type</i>	<i>Variable-step</i>
<i>Solver</i>	<i>Ode45(Dormand - Prince)</i>
<i>Max-step-size</i>	0.01
<i>Min-step-size</i>	0.009
<i>Initial-step-size</i>	1e-3
<i>Relative-tolerance</i>	<i>auto</i>
<i>Absolute-tolerance</i>	<i>auto</i>
<i>Zero-crossing-control</i>	<i>Use-local-settings</i>

Tabla 2.5 Parámetros Simulink.

En la figura 2.6 se comparan los comportamientos de la materia seca obtenida con los datos proporcionados por la Universidad de Wageningen, $\bar{X}_{d,w}$, (ver figura 2.1 y apéndice B) y la RFA promedio (ver figura 2.5), \bar{X}_d , al resolver numéricamente (2.13)-(2.15). Para esto se tomaron los siguientes valores para las entradas suministradas y las entradas externas:

i) Entradas suministradas:

$$U_v = 1 \times 10^{-3} \text{ [m/s]}, U_q = 0 \text{ [W/m}^2\text{]} \text{ y } U_c = 1.2 \times 10^{-6} \text{ [kg/m}^2\text{s].}$$

ii) Entradas externas:

$$V_t = 12.5 \text{ [}^\circ\text{C}] \text{ y } V_c = 6.41 \times 10^{-4} \text{ [Kg/m}^3\text{]}$$

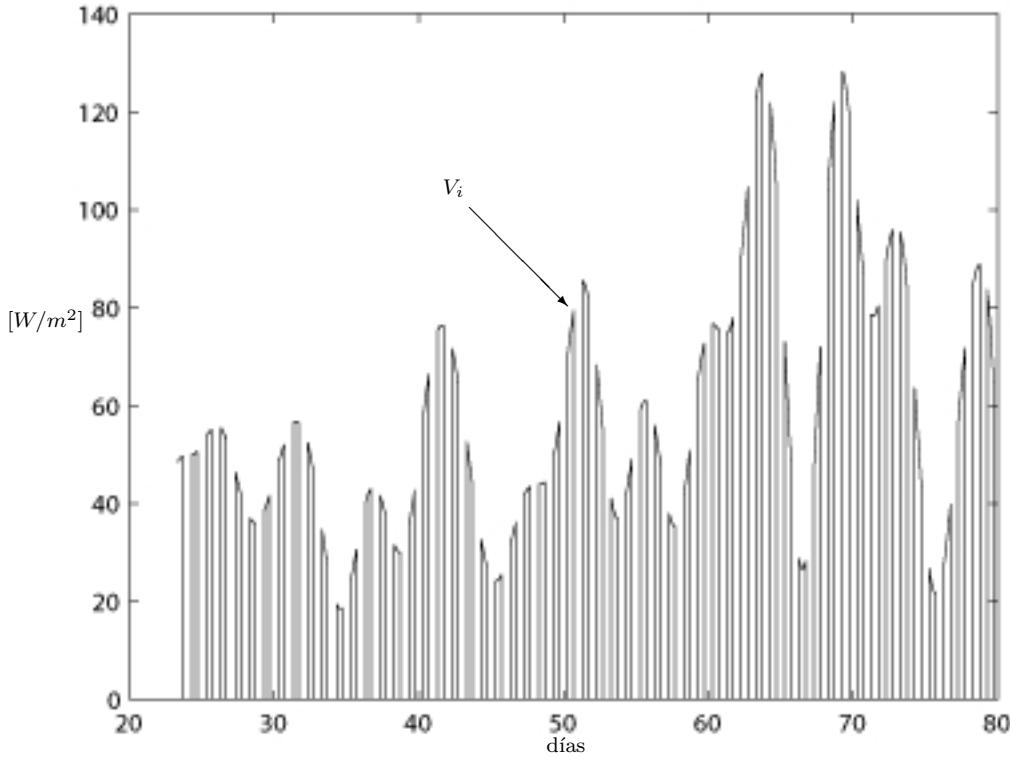


Figura 2.5 Radiación fotosintéticamente activa teórica promedio, V_i vs t

2.6 Comportamiento logístico de la materia seca

Experimentalmente se ha observado que el comportamiento de la materia seca, \bar{X}_d , para el cultivo de la lechuga en invernadero tiene un comportamiento logístico (ver apéndice A).

Esto es, la evolución de la materia seca puede ajustarse a una curva logística:

$$X_{d,\log} = c_m \frac{e^{r_b(t-t_b)}}{1 + e^{r_b(t-t_b)}}, \quad (2.25)$$

donde $X_{d,\log}$ [kg/m^2] es la materia seca modelada por un crecimiento logístico, t_b [d] es el tiempo cuando comienza la fase lineal de crecimiento, c_m [$kg/m^2 d$] es el parámetro de crecimiento máximo y r_b [$1/d$] es el parámetro de crecimiento específico.

En la figura 2.7 se observa que ciertamente la solución numérica de (2.13) se ajusta a (2.25), donde los parámetros de crecimiento obtenidos del ajuste por mínimos cuadrados son: $c_m = 0.1761$ [$kg/m^2 d$], $r_b = 0.0999$ [$1/d$] y $t_b = 67.3185$ [d]. La observación de que la materia seca \bar{X}_d se puede ajustar a una ley de crecimiento logístico nos da la pauta para estudiar y analizar en el capítulo 4 el modelo de van Henten, (2.13)-(2.15), tomando en cuenta las características de un comportamiento logístico.

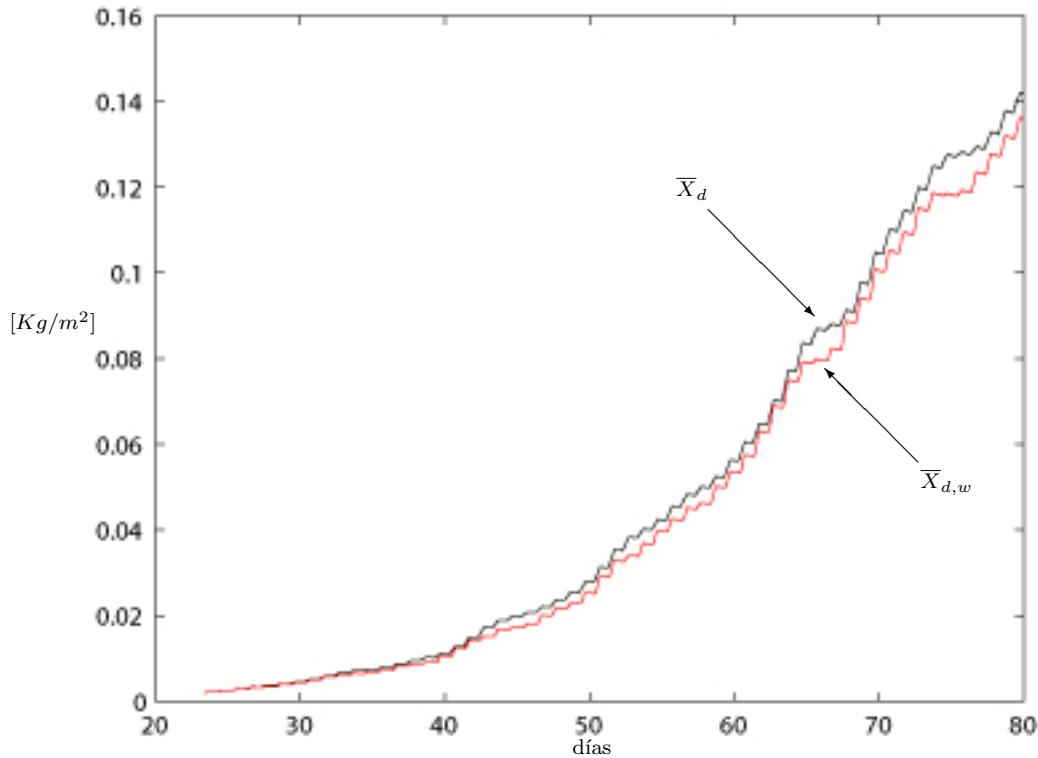


Figura 2.6 Comportamiento de la materia seca para una RFA teórica promedio (ver figura 2.5), \bar{X}_d vs t , comparada con el comportamiento de la materia seca obtenida al tomar la RFA proporcionada por la Universidad de Wageningen (ver figura 2.1), $\bar{X}_{d,w}$ vs t

2.7 Conclusiones

En este capítulo se mostró que el modelo de van Henten para el crecimiento de la lechuga en invernadero (ver (2.13)- (2.15)), genera curvas de producción de materia seca que pueden aproximarse mediante una ecuación logística, (ver figura 2.7 y (2.25)). Este modelo depende de la radiación fotosintéticamente activa la cual puede aproximarse por una serie de Fourier truncada a 17 términos, (ver (2.21)-(2.24) y tabla 2.4).

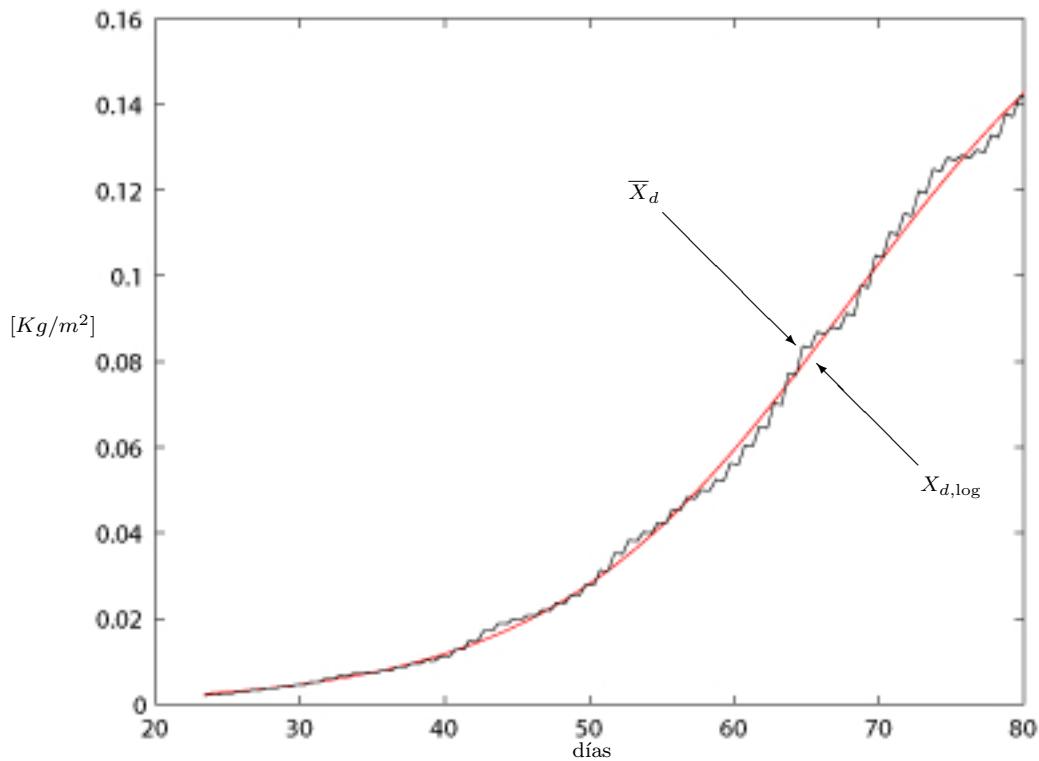


Figura 2.7 Ajuste de la materia seca \bar{X}_d , a una ecuación logística, $X_{d,\text{log}}$, con $c_m = 0.1761 \text{ [kg/m}^2\text{d]}$, $r_b = 0.0999 \text{ [1/d]}$ y $t_b = 67.3185 \text{ [d]}$

Parte I

Simplificación del modelo de van Henten

Capítulo 3

Modelo Día-Noche para el crecimiento de la lechuga cultivada en invernadero

En este capítulo se muestra que el modelo (2.13)-(2.15) puede separarse en dos partes: uno correspondiente a la presencia de RFA (modelo de día) y otro correspondiente a la ausencia de RFA (modelo de noche).

Con este fin se expresa el modelo de van Henten (2.13)-(2.15) en términos de la variable α , (2.16). Lo cual permite estudiar el comportamiento de la materia seca en presencia y ausencia de RFA.

Tomando en cuenta (2.16)-(2.20) en (2.13)-(2.15) y definiendo $\tilde{Z}_c = \bar{Z}_c - c_T$ se obtiene:

$$\frac{d\bar{X}_d}{dt} = c_{\alpha\beta}\omega \frac{\alpha\rho\tilde{Z}_c}{\alpha + \rho\tilde{Z}_c} - c_{resp,1}\bar{X}_d 2^{(0.1\bar{Z}_t - 2.5)}, \quad (3.1)$$

$$\tilde{Z}_c = \frac{-(\omega\alpha\rho + \alpha\tau - \delta\rho) + \sqrt{(\omega\alpha\rho + \alpha\tau - \delta\rho)^2 + 4\delta\alpha\tau\rho}}{2\tau\rho}, \quad (3.2)$$

$$\bar{Z}_t = \frac{(c_{cap,q,v}\bar{U}_v + c_{al,ou})\bar{V}_t - \frac{c_{rad}}{c_1}\alpha + \bar{U}_q}{(c_{cap,q,v}\bar{U}_v + c_{al,ou})}. \quad (3.3)$$

Definiendo las variables auxiliares $a [m/s]$, $b [kg/ms^2]$ y $c [kg^2/m^3J]$ como:

$$a = \rho\tau, \quad (3.4)$$

$$b = \omega\alpha\rho + \alpha\tau - \delta\rho, \quad (3.5)$$

$$c = -\delta\alpha, \quad (3.6)$$

en (3.2) y tomando en cuenta que $c_{\alpha\beta} = \frac{c_{resp,1}}{c_{resp,2}}$ en (3.1), se encuentra:

$$\frac{d\bar{X}_d}{dt} = c_{\alpha\beta}\omega \frac{\alpha\rho\tilde{Z}_c}{\alpha + \rho\tilde{Z}_c} - c_{\alpha\beta}c_{resp,2}\bar{X}_d 2^{(0.1\bar{Z}_t - 2.5)}, \quad (3.7)$$

$$\tilde{Z}_c = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (3.8)$$

Finalmente, al sustituir (3.3) en (3.7), se obtiene la dinámica de la materia seca:

$$\frac{d\bar{X}_d}{dt} = c_{\alpha\beta}\omega \frac{\alpha\rho\tilde{Z}_c}{\alpha + \rho\tilde{Z}_c} - c_{\alpha\beta}c_3\bar{X}_d 2^{c_o\alpha}, \quad (3.9)$$

donde $c_o = \frac{c_4}{c_1} [^oCm^2s/kg]$, $c_4 = 0.1 \frac{c_{rad}}{(c_{cap,q,v}\bar{U}_v + c_{al,ou})} [^oCm^2/W]$ y $c_3 = c_{resp,2} 2^{(0.1\bar{V}_t - 2.5)} [1/s]$.

Las ecuaciones (3.8) y (3.9) son válidas para todo el proceso de fotosíntesis y respiración, esto es, son válidas para el día y la noche. Se observa además que (3.8) y (3.9) dependen de forma directa de la variable α , (2.16), la cual es proporcional a V_i . Este hecho permite separar el comportamiento de la materia seca en dos etapas: una de estas etapas es en presencia de RFA, $V_i \neq 0$, y la otra en ausencia de esta radiación, $V_i = 0$.

3.1 Modelo para la etapa de día

Para obtener el modelo para la etapa de día, se considera que $\alpha = c_1 V_i$, (2.16), es decir, se toma la envolvente superior de α y se denotara como α_D . Sustituyendo $\alpha_D = c_1 V_i$, en (3.5)-(3.6) y (3.8) se encuentra que la envolvente superior para la concentración de bióxido de carbono denotada por $\tilde{Z}_{c,D}$ es:

$$\tilde{Z}_{c,D} = \frac{-b_D + \sqrt{b_D^2 - 4a_D c_D}}{2a_D}, \quad (3.10)$$

donde $\tilde{Z}_{c,D} [kg/m^3]$, $a_D [m/s]$, $b_D [kg/ms^2]$, y $c_D [kg^2/m^3 J]$ son las envolventes superiores de los parámetros a , b , y c en presencia de RFA.

De (3.4)-(3.6) se tiene que los parámetros a_D , b_D , y c_D son:

$$a_D = \rho_D \tau, \quad (3.11)$$

$$b_D = \rho_D (\omega_D + \tau) \alpha_D - \rho_D \delta_D, \quad (3.12)$$

$$c_D = -\alpha_D \delta_D, \quad (3.13)$$

donde

$$\delta_D = c_3 \bar{X}_D 2^{c_o \alpha_D} + \bar{U}_{c,D} + \tau (\bar{V}_{c,D} - c_\Gamma), \quad (3.14)$$

$$\omega = \omega_D, \quad (3.15)$$

$\bar{V}_{c,D} = \bar{V}_c$, y $\bar{U}_{c,D}$ es el suministro de CO_2 .

La variable

$$\rho_D = -c_{co2,1} \bar{Z}_{t,D}^2 + c_{co2,2} \bar{Z}_{t,D} - c_{co2,3}, \quad (3.16)$$

puede ser aproximada como (ver apéndice C):

$$\rho_D \simeq 1.933611100102 \times 10^{-3}. \quad (3.17)$$

Finalmente, al tomar en cuenta (3.11)-(3.13) en (3.8) y (3.7), se obtiene que el modelo para la etapa de día es:

$$\frac{d\bar{X}_D}{dt} = -c_{\alpha\beta} (\tau \tilde{Z}_{c,D} - \bar{U}_{c,D} - \tau (\bar{V}_c - c_\Gamma)), \quad (3.18)$$

$$\tilde{Z}_{c,D} = \frac{-b_D + \sqrt{b_D^2 - 4a_D c_D}}{2a_D}, \quad (3.19)$$

donde \bar{X}_D [kg/m²], $\tilde{Z}_{c,D}$ [kg/m³] son la materia seca y la concentración de CO_2 en presencia de RFA. Note que cada una de las variables presentes en (3.18) y (3.19), solo representan el comportamiento de los procesos involucrados en el período de día y que la ecuación (3.18) no depende explícitamente de \bar{X}_D . Esta dependencia se encuentra implícita en la concentración $\tilde{Z}_{c,D}$ de CO_2 .

3.2 Modelo para la etapa de noche

Para el modelo de la etapa de noche, no hay presencia de RFA, por lo cual $\alpha = 0$. Tomando esta consideración en (3.8) y (3.9) se obtiene que el modelo para la etapa de noche es:

$$\frac{d\bar{X}_N}{dt} = -c_{\alpha\beta} \left(\tau \tilde{Z}_{c,N} - \bar{U}_{c,N} - \tau (\bar{V}_c - c_\Gamma) \right), \quad (3.20)$$

$$\tilde{Z}_{c,N} = \frac{\delta_N}{\tau}, \quad (3.21)$$

donde \bar{X}_N [kg/m²] es la materia seca durante esta etapa y $\delta_N = c_3 \bar{X}_N + \bar{U}_{c,N} + \tau (\bar{V}_{c,D} - c_\Gamma)$. En esta etapa los estomas de la lechuga permanecen cerrados (ver [17] por ejemplo), esto es, $\bar{U}_{c,N} = 0$.

3.3 Modelo Día-Noche para el cultivo de la lechuga en invernadero

Las ecuaciones (3.18)-(3.19) y (3.20)-(3.21) representan por separado el comportamiento de día y noche. Para integrar estos dos modelos hay que introducir una señal auxiliar, sw , que lleve a cabo la interacción diaria del proceso de la fotosíntesis con la respiración del cultivo.

Por lo tanto, el comportamiento de la materia seca, $\bar{X}_{d,DN}$, es:

$$\frac{d\bar{X}_{d,DN}}{dt} = \frac{d\bar{X}_D}{dt} sw + \frac{d\bar{X}_N}{dt} (1 - sw), \quad (3.22)$$

con

$$\frac{d\bar{X}_D}{dt} = -c_{\alpha\beta} \left(\tau \tilde{Z}_{c,D} - \bar{U}_{c,D} - \tau (\bar{V}_c - c_\Gamma) \right), \quad (3.23)$$

$$\frac{d\bar{X}_N}{dt} = -c_{\alpha\beta} \left(\tau \tilde{Z}_{c,N} - \bar{U}_{c,N} - \tau (\bar{V}_c - c_\Gamma) \right), \quad (3.24)$$

$$\tilde{Z}_{c,D} = \frac{-b_D + \sqrt{b_D^2 - 4a_D c_D}}{2a_D}, \quad (3.25)$$

$$\tilde{Z}_{c,N} = \frac{\delta_N}{\tau}, \quad (3.26)$$

y

$$sw = \begin{cases} 1 & \forall t \in [12 - \frac{d}{2}, 12 + \frac{d}{2}] \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}, \quad (3.27)$$

donde $d[\text{hrs}]$ es la longitud del día solar (ver sección 3.2 de [5]). Observe que la señal sw hace que el modelo de día interactúe diariamente con el modelo de noche para el cultivo de la lechuga en invernadero.

3.3.1 Simulaciones y Resultados

En la figura 3.2 se muestra la simulación para (3.18)-(3.19) y (3.20)-(3.21) tomando la RFA teórica promedio de la figura 2.5, donde se observa que la velocidad de variación de las materias secas de los modelos de día y de noche actúan como envolventes superior e inferior de la velocidad de variación de la materia seca del modelo de van Henten (3.1)-(3.3).

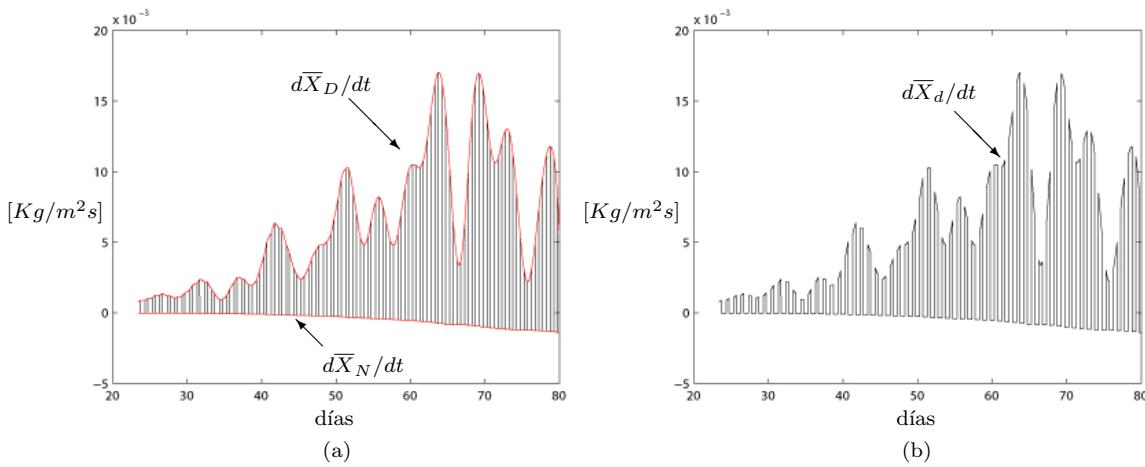


Figura 3.1 (a) Modelo de día, $d\bar{X}_D/dt$ vs t , y noche, $d\bar{X}_N/dt$ vs t , para el crecimiento de la lechuga en invernadero. Se observa que el modelo de día y noche actúan como envolventes superior e inferior del modelo de van Henten respectivamente. (b) Modelo de van Henten, $d\bar{X}_d/dt$ vs t

En la figura 3.2 se compara la materia seca, $\bar{X}_{d,DN}$, obtenida por (3.22)-(3.27), con la materia seca, \bar{X}_d , obtenida por (3.1)-(3.3).

Para ésto se tomaron los siguientes valores para las entradas suministradas y las entradas externas:

i) Entradas suministradas:

$$U_v = 1 \times 10^{-3} [\text{m/s}], U_q = 0 [\text{W/m}^2] \text{ y } \bar{U}_{c,D} = 1.2 \times 10^{-6} [\text{kg/m}^2 \text{s}].$$

ii) Entradas externas:

$$V_t = 12.5 [\text{°C}] \text{ y } V_c = 6.41 \times 10^{-4} [\text{Kg/m}^3]$$

3.4 Conclusiones

En este capítulo se mostró que el modelo de van Henten (2.13)-(2.15), puede ser separado en dos modelos matemáticos independientes que interactúan entre sí diariamente, (3.22). Un modelo independiente es para el período de luz, (3.18)-(3.19), y el otro modelo para el período de oscuridad, (3.20)-(3.21). Estos modelos independientes actúan como envolventes superior e inferior del modelo de van Henten

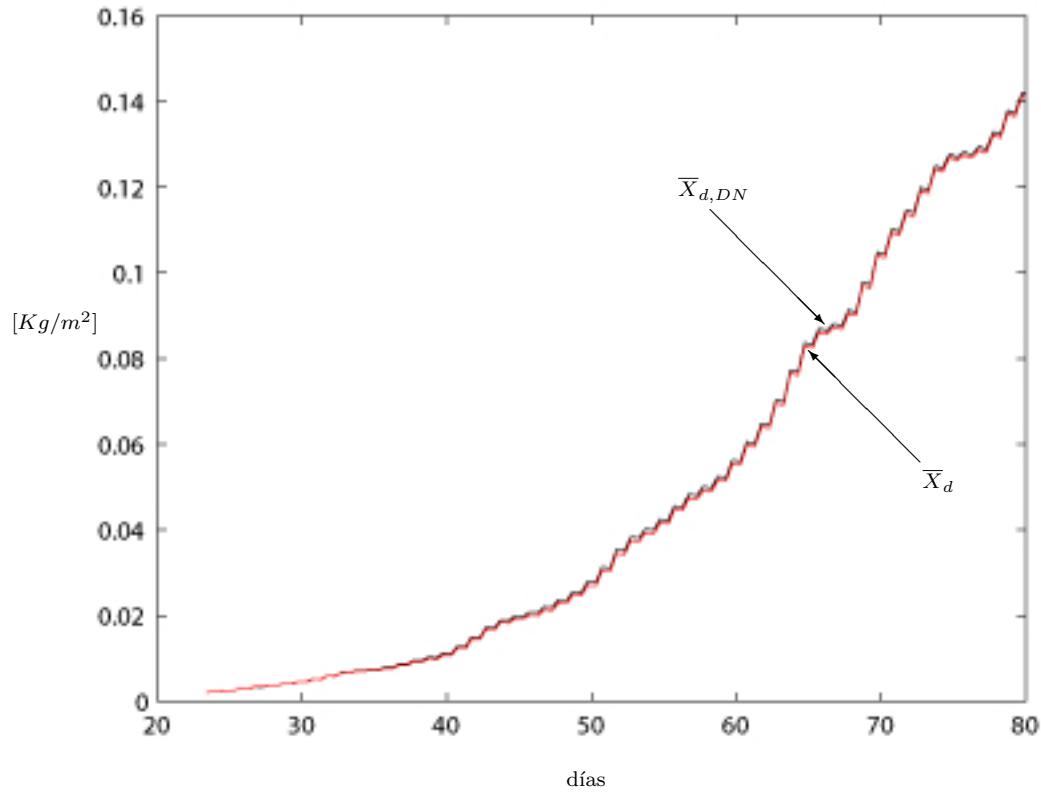


Figura 3.2 Comparación del comportamiento de la materia seca (3.22), $\bar{X}_{d,DN}$ vs t , con el comportamiento obtenido a partir de (3.1), \bar{X}_d vs t . Se observa que ambas ecuaciones producen el mismo comportamiento

(ver figura 3.1). Al integrar diariamente estos modelos independientes se obtiene el comportamiento de la materia seca (ver (3.22) y figura 3.2).

Capítulo 4

Razón relativa de crecimiento

En este capítulo se determina la Razón Relativa de Crecimiento (RRC) [7] para el cultivo de la lechuga en invernadero para el modelo día-noche, (3.22). La RRC es una variable importante para el análisis del crecimiento de los cultivos [7], se muestra que la RRC puede también describirse mediante una curva logística (ver (4.18)-(4.20)), donde su parámetro de crecimiento específico, $r_{b,D}$, está relacionado directamente con la fotosíntesis máxima de asimilación de CO_2 , $\phi_{phot,max}$ (ver (2.3)). Gracias a este hecho, la fotosíntesis máxima se aproxima por una función algebraica que solo depende de las variables externas, $\bar{U}_{c,D}$ y V_i ; este hecho es lo que nos permitirá proponer en el capítulo 7 una ley de control subóptima analítica.

Para ésto se procede de la siguiente manera:

1. Primero, en la sección 4.1 se encuentra la relación entre la aceleración de producción de la materia seca y la RRC para el período de luz.
2. En la sección 4.2, se encuentra la RRC para el período de luz, $RRC_D = \frac{\partial(\bar{X}_D/dt)}{\partial \bar{X}_D}$, en términos de los procesos naturales del crecimiento del cultivo.
3. En la sección 4.3, se aproxima la RRC para el período de luz.
4. Finalmente, en la sección 4.4 se relaciona la aceleración de producción de la materia seca y la RRC para el período de noche, $RRC_N = \frac{\partial(\bar{X}_N/dt)}{\partial \bar{X}_N}$, en términos de los parámetros del cultivo.

4.1 Relación entre la aceleración de producción de la materia seca y la RRC para el período de luz

A partir del modelo para la etapa de día (3.18), se obtiene que la aceleración de producción de la materia seca para el período de luz es:

$$\frac{d^2\bar{X}_D}{dt^2} = -c_{\alpha\beta}\tau \frac{d\tilde{Z}_{c,D}}{dt} + c_{\alpha\beta}\tau \frac{d\bar{U}_{c,D}}{dt}, \quad (4.1)$$

donde \bar{X}_D , $\tilde{Z}_{c,D}$, y $\bar{U}_{c,D}$ son la materia seca, la concentración de CO_2 dentro del invernadero y el bióxido de carbono suministrado durante esta etapa.

A continuación se expresará la aceleración de la producción de la materia seca en términos de la RRC. Para esto hay que observar que (4.1) depende de la velocidad de variación de la concentración de CO_2 , $\tilde{Z}_{c,D}$, la cual depende de los parámetros a_D , b_D y c_D (ver (3.19)). Entonces, por cálculo elemental se encuentra que la velocidad de variación de la concentración de CO_2 dentro del invernadero, $\tilde{Z}_{c,D}$, (3.19) es:

$$\begin{aligned}
\frac{d\tilde{Z}_{c,D}}{dt} &= \frac{\partial\tilde{Z}_{c,D}}{\partial a_D}(da_D/dt) + \frac{\partial\tilde{Z}_{c,D}}{\partial b_D}(db_D/dt) + \frac{\partial\tilde{Z}_{c,D}}{\partial c_D}(dc_D/dt) \\
&= -\frac{1}{a_D}\left[\tilde{Z}_{c,D} + \frac{c_D}{2a_D\tilde{Z}_{c,D} + b_D}\right](da_D/dt) + \frac{1}{2a_D}\left[-1 + \frac{b_D}{\sqrt{b_D^2 - 4a_Dc_D}}\right](db_D/dt) \\
&\quad + \frac{1}{2a_D}\left[-\frac{2a_D}{\sqrt{b_D^2 - 4a_Dc_D}}\right](dc_D/dt). \tag{4.2}
\end{aligned}$$

Se observa que (4.2), depende de las derivadas con respecto al tiempo de los parámetros a_D , b_D , y c_D . Calculando sus derivadas se obtiene (ver sección D.1):

$$\begin{aligned}
\frac{d\tilde{Z}_{c,D}}{dt} &= \frac{\partial\tilde{Z}_{c,D}}{\partial\alpha_D}(d\alpha_D/dt) + \frac{\partial\tilde{Z}_{c,D}}{\partial\bar{X}_D} + \left(\frac{1}{2a_D}\left(-1 + \frac{b_D}{2a_D\tilde{Z}_{c,D} + b_D}\right)\frac{\partial b_D}{\partial\rho_D} + \frac{\partial\tilde{Z}_{c,D}}{\partial\rho_D}\right)(d\rho_D/dt) \\
&\quad + \frac{1}{2a_D}\left(\rho + \frac{2a_D\alpha_D - \rho_D b_D}{2a_D\tilde{Z}_{c,D} + b_D}\right)(d\bar{U}_{c,D}/dt), \tag{4.3}
\end{aligned}$$

donde:

$$\frac{\partial\tilde{Z}_{c,D}}{\partial\alpha_D} = \frac{1}{2a_D}\left[-\frac{\partial b_D}{\partial\alpha_D} + \frac{b_D\frac{\partial b_D}{\partial\alpha_D} - 2a_D\frac{\partial c_D}{\partial\alpha_D}}{\sqrt{b_D^2 - 4a_Dc_D}}\right], \tag{4.4}$$

$$\frac{\partial\tilde{Z}_{c,D}}{\partial\bar{X}_D} = \frac{\partial\tilde{Z}_{c,D}}{\partial\omega}(d\omega/dt) + \frac{\partial\tilde{Z}_{c,D}}{\partial\delta_D}(d\delta_D/dt). \tag{4.5}$$

Finalmente sustituyendo (4.3) en (4.1) se obtiene que la aceleración de producción de la materia seca para el período de luz, se puede expresar en términos de la RRC como:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\bar{X}_D}{dt^2} &= \frac{\partial(d\bar{X}_D/dt)}{\partial\bar{X}_D}(d\bar{X}_D/dt) + \frac{\partial(d\bar{X}_D/dt)}{\partial\alpha_d}(d\alpha_d/dt) + \frac{c_{\alpha\beta}\tau}{2a_D}\left(-\rho_D - \frac{2a_D\alpha_D - \rho_D b_D}{2a_D\tilde{Z}_{c,D} + b_D} + \frac{2a_D}{\tau}\right)(d\bar{U}_{c,D}/dt) \\
&\quad - c_{\alpha\beta}\tau\left(\frac{1}{2a_D}\left(-1 + \frac{b_D}{2a_D\tilde{Z}_{c,D} + b_D}\right)\frac{\partial b_D}{\partial\rho_D} + \frac{\partial\tilde{Z}_{c,D}}{\partial\rho_D}\right)(d\rho_D/dt), \tag{4.6}
\end{aligned}$$

donde

$$\frac{\partial(d\bar{X}_D/dt)}{\partial\bar{X}_D} = -c_{\alpha\beta}\tau\frac{\partial\tilde{Z}_{c,D}}{\partial\bar{X}_D}, \tag{4.7}$$

$$\frac{\partial(d\bar{X}_D/dt)}{\partial\alpha_d} = -c_{\alpha\beta}\tau\frac{\partial\tilde{Z}_{c,D}}{\partial\alpha_d}. \tag{4.8}$$

Note que la ecuación (4.7) es la razón relativa de crecimiento RRC_D para la lechuga en invernadero durante la etapa de día.

4.2 Razón relativa de crecimiento en etapa de día, RRC_D

A partir de (3.18) se obtiene que la concentración de CO_2 para la etapa de día, $\tilde{Z}_{c,D}$, es:

$$\tilde{Z}_{c,D} = -\frac{d\bar{X}_D/dt}{c_{\alpha\beta}\tau} + \frac{\bar{U}_{c,D}}{\tau} + (\bar{V}_c - c_\Gamma), \quad (4.9)$$

tomando en cuenta, (3.7), se tiene:

$$\tilde{Z}_{c,D} = -\frac{\omega_D}{\tau} \left(\frac{\alpha_D \rho_D \tilde{Z}_{c,D}}{\alpha_D + \rho_D \tilde{Z}_{c,D}} \right) + \frac{\delta_D}{\tau}. \quad (4.10)$$

Derivando a (4.9) y (4.10), con respecto a \bar{X}_d , se tiene respectivamente que:

$$\frac{\partial \tilde{Z}_{c,D}}{\partial \bar{X}_D} = -\frac{1}{c_{\alpha\beta}\tau} \left(\frac{\partial (d\bar{X}_D/dt)}{\partial \bar{X}_D} \right) \quad (4.11)$$

y

$$\frac{\partial \tilde{Z}_{c,D}}{\partial \bar{X}_D} = -\frac{1}{\tau} \left[\left(\frac{\alpha_D \rho_D \tilde{Z}_{c,D}}{\alpha_D + \rho_D \tilde{Z}_{c,D}} \right) \left(\frac{\partial \omega_D}{\partial \bar{X}_D} \right) + \frac{\omega_D \alpha_D^2 \rho}{(\alpha_D + \rho_D \tilde{Z}_{c,D})^2} \left(\frac{\partial \tilde{Z}_{c,D}}{\partial \bar{X}_D} \right) \right] + \frac{1}{\tau} \left(\frac{\partial \delta_D}{\partial \bar{X}_D} \right). \quad (4.12)$$

Al igualar (4.11) y (4.12) y despejar $RRC_D = \frac{\partial(d\bar{X}_D/dt)}{\partial \bar{X}_D}$ se obtiene:

$$\frac{\partial (d\bar{X}_D/dt)}{\partial \bar{X}_D} = \frac{1}{\kappa} \left[-c_{pl,d} \frac{d\bar{X}_D}{dt} - c_{pl,d} c_{\alpha\beta} \bar{X}_d \left(\frac{\partial \delta_D}{\partial \bar{X}_D} \right) + c_{pl,d} c_{\alpha\beta} \left(\frac{\alpha_D \rho_D \tilde{Z}_{c,D}}{\alpha_D + \rho_D \tilde{Z}_{c,D}} \right) - c_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial \delta_D}{\partial \bar{X}_D} \right) \right], \quad (4.13)$$

donde

$$\left(\frac{\partial \omega_D}{\partial \bar{X}_D} \right) = c_{pl,d} (1 - \omega_D), \quad (4.14)$$

$$\left(\frac{\partial \delta_D}{\partial \bar{X}_D} \right) = c_3 2^{c_o \alpha_D}, \quad (4.15)$$

$$\kappa = \left[1 + \frac{1}{\tau} \frac{\omega_D \alpha_D^2 \rho_D}{(\alpha_D + \rho_D \tilde{Z}_{c,D})^2} \right]. \quad (4.16)$$

Al término $\kappa [-]$, se le denomina parámetro de ajuste de crecimiento relativo [10]. El cual puede ser aproximado por (ver sección D.2):

$$\kappa [-] \approx 1. \quad (4.17)$$

4.3 Aproximación de la razón relativa de crecimiento para la etapa de día

A partir de (4.13) y (4.17), la razón relativa de crecimiento para la etapa de día se puede aproximar mediante la siguiente ecuación algebraica:

$$\frac{\partial(\bar{X}_D/dt)}{\partial\bar{X}_D} \simeq -\frac{r_{b,D}}{c_{m,D}} \frac{d\bar{X}_D}{dt} + r_{b,D}, \quad (4.18)$$

donde

$$\frac{r_{b,D}}{c_{m,D}} = c_{pl,d} \quad (4.19)$$

y

$$r_{b,D} = c_{pl,d} c_{\alpha\beta} \left(\frac{\alpha_D \rho_D \tilde{Z}_{c,D}}{\alpha_D + \rho_D \tilde{Z}_{c,D}} \right) - c_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial \delta_D}{\partial \bar{X}_D} \right) (c_{pl,d} \bar{X}_D + 1). \quad (4.20)$$

Los parámetros $r_{b,D}$ [1/s] y $c_{m,D}$ [kg/m²s] son el crecimiento específico y crecimiento máximo para el cultivo de la lechuga en invernadero para el período de luz [5].

4.4 Relación entre la aceleración de producción de la materia seca y la RRC para la etapa de noche

Para el caso de la etapa de noche, la velocidad de producción de la materia seca (3.24), toma la siguiente forma:

$$\frac{d\bar{X}_N}{dt} = -c_{\alpha\beta} c_3 \bar{X}_N. \quad (4.21)$$

Por lo que la aceleración de producción de la materia seca para el período de oscuridad es:

$$\frac{d^2\bar{X}_N}{dt^2} = \frac{\partial(d\bar{X}_N/dt)}{\partial\bar{X}_N} (d\bar{X}_N/dt), \quad (4.22)$$

donde

$$\frac{\partial(d\bar{X}_N/dt)}{\partial\bar{X}_N} = -r_{b,N} \quad (4.23)$$

y

$$r_{b,N} = c_{\alpha\beta} c_3 = 1.1142 \times 10^{-7}. \quad (4.24)$$

La ecuación (4.23) es la razón relativa de crecimiento para el período de oscuridad y $r_{b,N}$ es el parámetro de crecimiento específico para este período.

4.5 Simulaciones y resultados

En la figura 4.1 se muestra la RRC para el período de día, $\frac{\partial(d\bar{X}_D/dt)}{\partial\bar{X}_D}$, (4.18). En donde se observa la forma lineal característica para el crecimiento logístico (ver figura A.6 del apéndice A.4). La simulación

se realizó tomando una RFA teórica promedio con coeficiente de nubosidad τ_n igual a uno (ver figura 2.2).

En la figura 4.2 se muestra el término $\frac{\partial(d\bar{X}_D/dt)}{\partial\bar{X}_D}$ ($d\bar{X}_D/dt$), (4.18), para el período de día. En donde se observa la forma característica de una parábola para el crecimiento logístico (ver figura A.5 del apéndice A.4). La simulación se realizó tomando una RFA teórica promedio con coeficiente de nubosidad igual a uno (ver figura 2.2).

Para ésto se tomaron los siguientes valores para las entradas suministradas y las entradas externas:

i) Entradas suministradas:

$$U_v = 1 \times 10^{-3} [m/s], U_q = 0 [W/m^2] \text{ y } \bar{U}_c = 1.2 \times 10^{-6} [kg/m^2 s].$$

ii) Entradas externas:

$$V_t = 12.5 [^\circ C] \text{ y } V_c = 6.41 \times 10^{-4} [Kg/m^3]$$

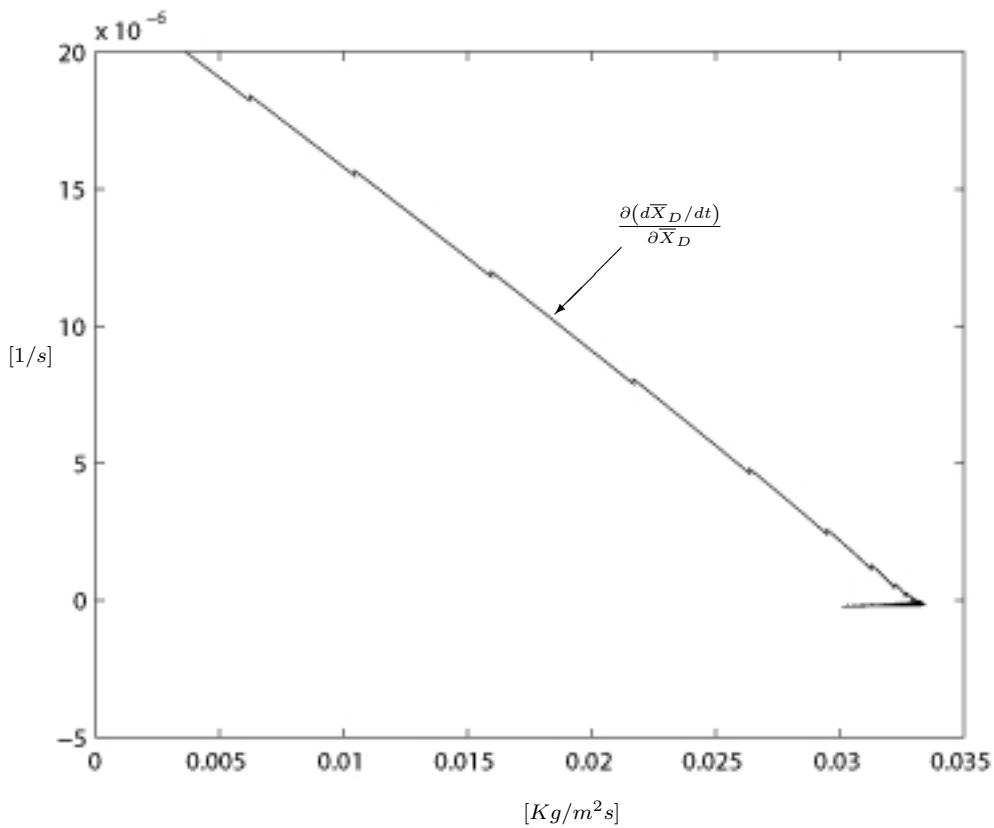


Figura 4.1 Razón relativa de crecimiento, $\frac{\partial(d\bar{X}_D/dt)}{\partial\bar{X}_D}$ vs $(d\bar{X}_D/dt)$, para el cultivo de la lechuga en invernadero

4.6 Conclusiones

En este capítulo se mostró que la razón relativa de crecimiento para el modelo de día, (4.7) tiene las características de un comportamiento logístico (ver (4.18)-(4.20) y figuras 4.1 y 4.2); donde su parámetro

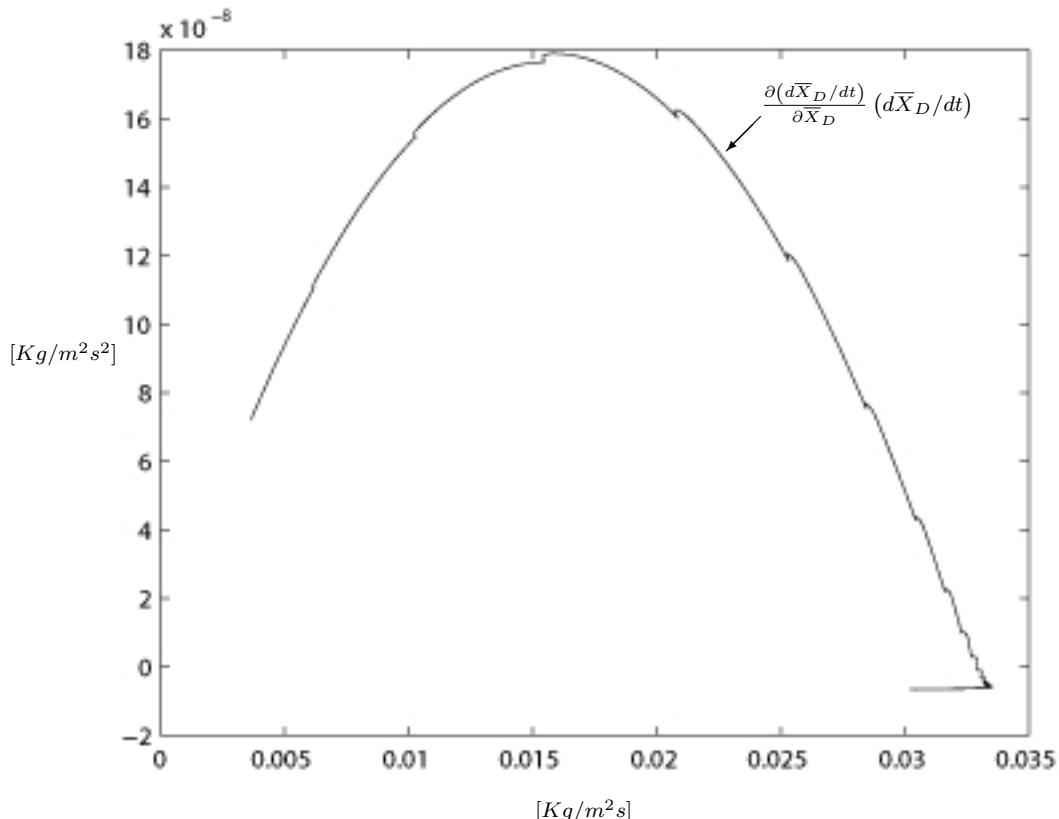


Figura 4.2 $\frac{\partial(\bar{X}_D/dt)}{\partial \bar{X}_D} (\bar{X}_D/dt)$ vs (\bar{X}_D/dt) , donde se observa la parábola característica del crecimiento logístico para el crecimiento de la lechuga en invernadero

de crecimiento específico $r_{b,D}$, (4.20), está relacionado con la fotosíntesis máxima de asimilación de CO_2 , $\phi_{phot,max}$, (2.3).

Con respecto a la etapa de noche se encuentra que la razón relativa de crecimiento, (4.23)-(4.24), es una constante en la dinámica del crecimiento de la lechuga en invernadero.

Capítulo 5

Análisis del parámetro de crecimiento específico, $r_{b,D}$: caso de una RFA con coeficiente de nubosidad unitario

En este capítulo se analiza el parámetro de crecimiento específico $r_{b,D}$, (4.20), para el caso de una RFA con coeficiente de nubosidad unitario. Este análisis nos servirá para relacionar, en el capítulo 6, la fotosíntesis máxima de asimilación de CO_2 , $\phi_{phot,max}$, con una función que solamente depende de la entrada de control, $\bar{U}_{c,D}$.

5.1 Estudio del parámetro de crecimiento específico, $r_{b,D}$

Con la finalidad de relacionar el parámetro de crecimiento específico, $r_{b,D}$, con la entrada de control, $\bar{U}_{c,D}$, se realizan simulaciones para diferentes valores de $\bar{U}_{c,D}$ tomando una RFA teórica promedio con coeficiente de nubosidad igual a uno (ver figura 2.2).

Para realizar estas simulaciones se procede como sigue:

1. Se realizan simulaciones del parámetro de crecimiento específico $r_{b,D}$, (4.20), para los siguientes valores de la entrada de control $\bar{U}_{c,D} : \bar{U}_{c,D} \in [0.1, 0.2, \dots, 0.9, 1] \bar{U}_{c,D}$ (ver figura 5.1).
2. Para cada simulación, se toma el valor promedio del parámetro de crecimiento específico, $r_{b,D,prom}$ (ver figura 5.1).
3. Con los valores promedios obtenidos en el punto 2, se realiza una interpolación a una ecuación lineal (ver figura 5.2).

A partir de esta interpolación se obtiene que el parámetro de crecimiento específico, $r_{b,D}$, se puede aproximar por:

$$r_{b,D} \simeq r_{b,o} + \frac{r_{b,u} - r_{b,o}}{\bar{U}_{c,D,max}} \bar{U}_{c,D} \simeq 1.03 \times 10^{-5} + 8.245 \bar{U}_{c,D}, \quad (5.1)$$

donde $r_{b,o}$ y $r_{b,u}$ son los parámetros de crecimiento específico tomando los valores de $\bar{U}_{c,D} = 0$ y $\bar{U}_{c,D,max} = 1.2 \times 10^{-6}$ respectivamente.

Tomando en cuenta (5.1) en (4.18) se obtiene que la RRC para el período de día se puede aproximar por:

$$\frac{\partial(d\bar{X}_D/dt)}{\partial\bar{X}_D} \simeq \left[-c_{pl,d} \frac{d\bar{X}_D}{dt} + 1.03 \times 10^{-5} + 8.245 \bar{U}_{c,D} \right]. \quad (5.2)$$

Esta aproximación da la pauta de la relación que existe entre $\frac{\partial(d\bar{X}_D/dt)}{\partial\bar{X}_D}$ y la variable de control, $\bar{U}_{c,D}$. Lo cual indica que es posible establecer una ley de control óptima basada únicamente en el período de día.

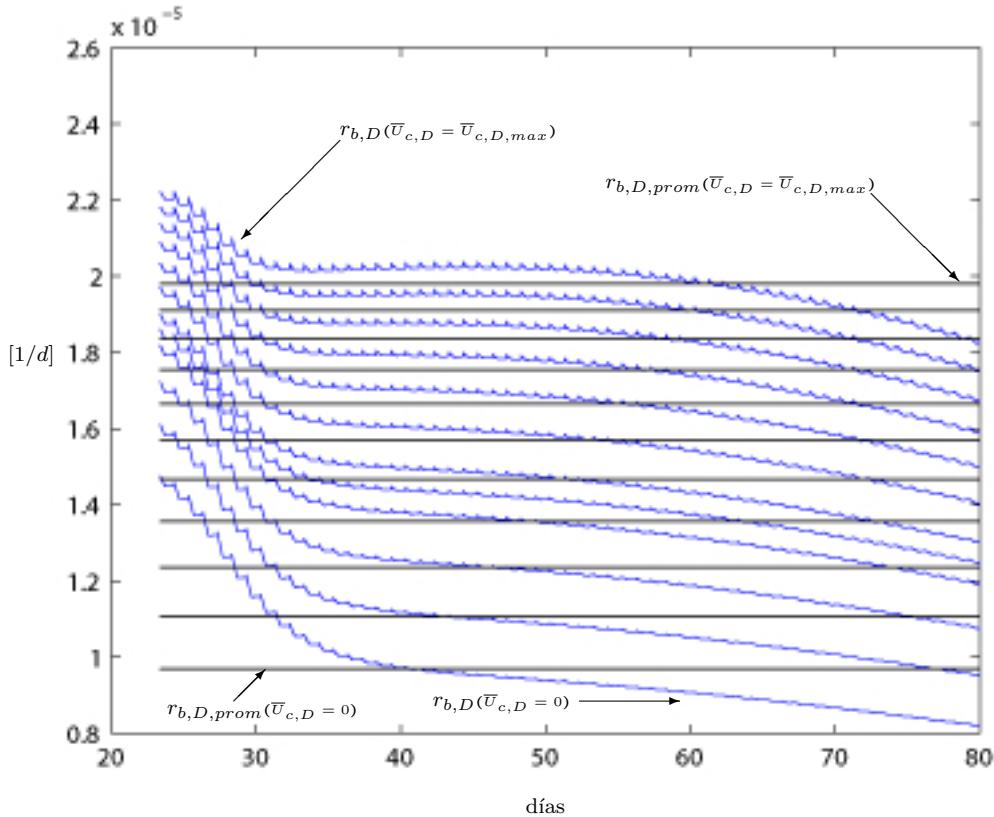


Figura 5.1 Curvas de $r_{b,D}$ vs t y valores promedio del parámetro de crecimiento específico, $r_{b,D,prom}$, a diferentes valores de $\bar{U}_{c,D}$

5.2 Simulaciones y resultados

En la figura 5.3 se muestra la materia seca, \bar{X}_d , para el modelo de van Henten, (3.1)-(3.3), comparada con la materia seca obtenida a partir de (3.22), (5.2), (3.24)-(3.27), $\bar{X}_{d,lin}$.

Para ésto se tomaron los siguientes valores para las entradas suministradas y las entradas externas:

i) Entradas suministradas:

$$U_v = 1 \times 10^{-3} [m/s], U_q = 0 [W/m^2] \text{ y } U_c = 1.2 \times 10^{-6} [kg/m^2 s].$$

ii) Entradas externas:

$$V_t = 12.5 [^\circ C] \text{ y } V_c = 6.41 \times 10^{-4} [Kg/m^3]$$

5.3 Conclusiones

En este capítulo se mostró que el parámetro de crecimiento específico $c_{m,D}$, (4.20), puede ser aproximado por una función lineal que depende únicamente de la entrada de control $\bar{U}_{c,D}$ (ver (5.1) y figura 5.2), cuando incide una RFA con coeficiente de nubosidad τ_n unitario (ver figura 2.2). Este hecho permite aproximar la razón relativa de crecimiento para el período de día por una función lineal que depende de la velocidad de producción de materia seca, \bar{X}_d , y la entrada de control $\bar{U}_{c,D}$ (ver (5.2)).

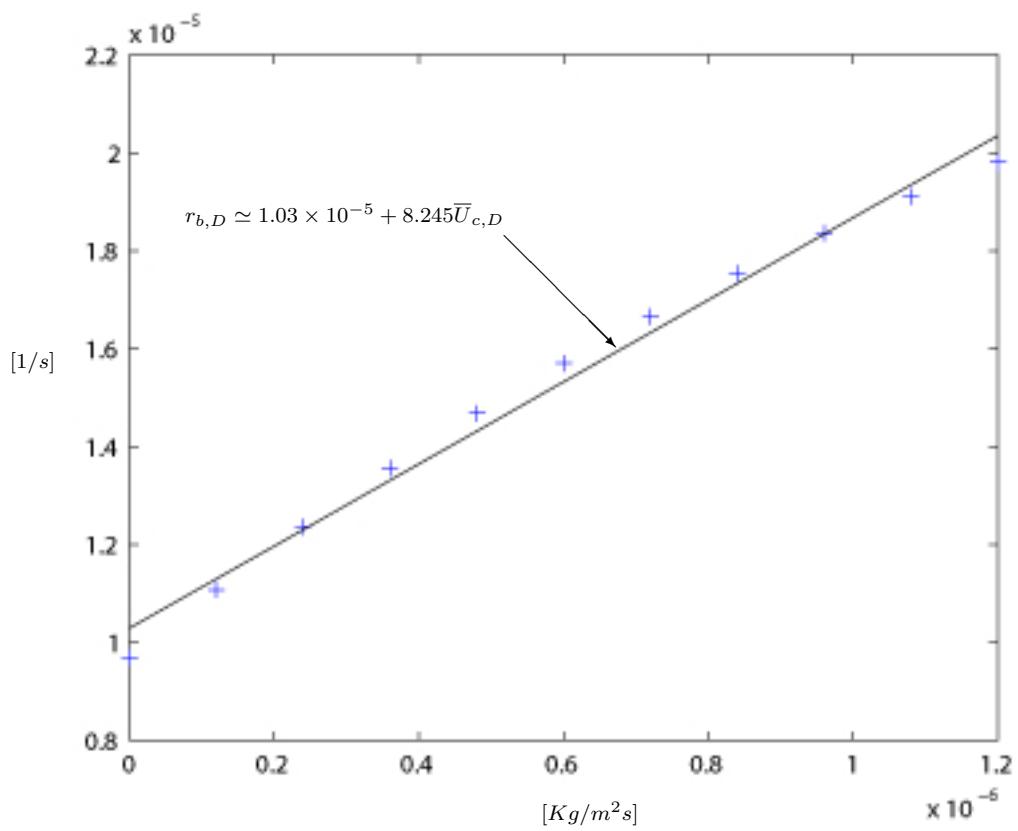


Figura 5.2 Interpolación de los valores promedio del parámetro de crecimiento específico, $r_{b,D,prom}$ vs $\bar{U}_{c,D}$ (ver figura 5.1), a una función lineal con respecto a la variable de control $\bar{U}_{c,D}$

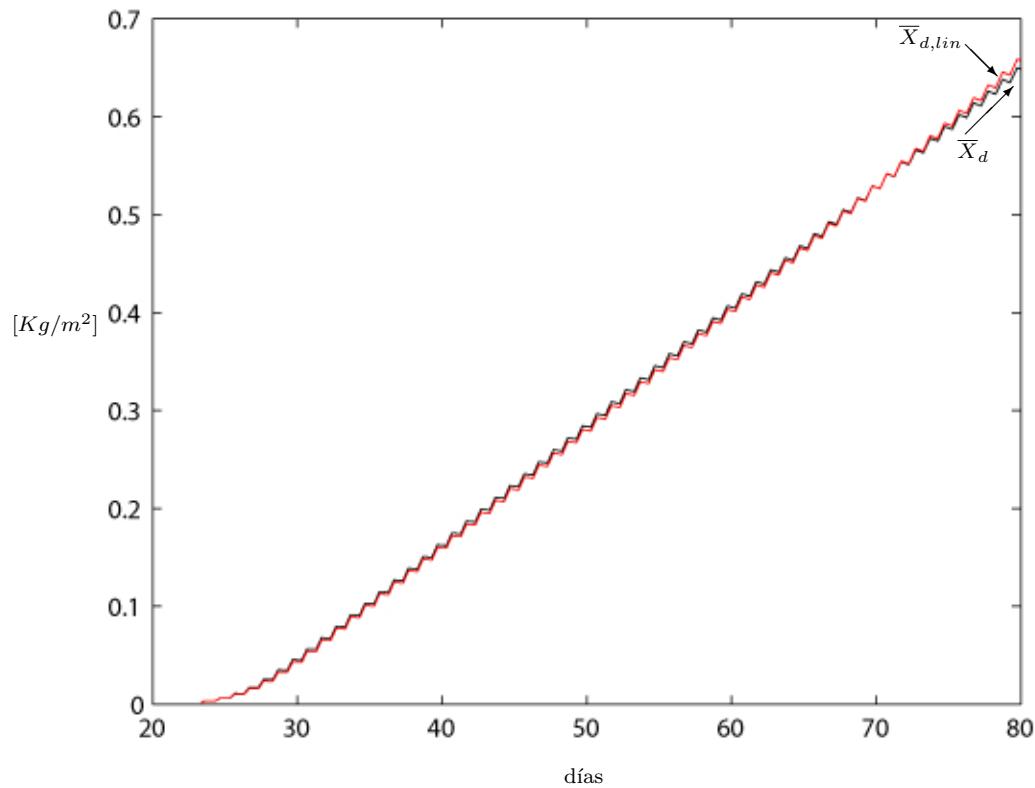


Figura 5.3 Materia seca, \bar{X}_d vs t , para el modelo de van Henten, (3.1)-(3.3), comparada con la materia seca, $\bar{X}_{d,lin}$, obtenida a partir de (3.22) al tomar en cuenta la linealización para $r_{b,D}$, (5.1)

Capítulo 6

Análisis de la fotosíntesis máxima de asimilación de CO_2 , $\phi_{phot,max}$

En este capítulo se muestra que la *fotosíntesis máxima de asimilación de CO_2* , $\phi_{phot,max}$ (ver (2.3) y (4.10)),

$$\phi_{phot,max} = \left(\frac{\alpha_D \rho_D \tilde{Z}_{c,D}}{\alpha_D + \rho \tilde{Z}_{c,D}} \right) \quad (6.1)$$

$$= -\frac{\tau}{\omega} \left(\tilde{Z}_{c,D} - \frac{\delta_D}{\tau} \right), \quad (6.2)$$

se puede aproximar por una función $f_b^*(\bar{U}_{c,D})$ (ver apéndice E), que depende del CO_2 suministrado en el invernadero, $\bar{U}_{c,D}$. Esta aproximación es utilizada en el capítulo 7 para encontrar una ley de control subóptima analítica.

Para esto:

1. Primero, en la sección 6.1 se aproxima el CO_2 neto suministrado por el cultivo¹,

$$\phi_{c,al,pl} = \bar{U}_{c,D} + \tau (\bar{V}_c - c_\Gamma) - \tau \tilde{Z}_{c,D}, \quad (6.3)$$

por una función $f_b^*(\bar{U}_{c,D})$.

2. En la sección 6.2, se muestra que la *fotosíntesis máxima de asimilación de CO_2* , $\phi_{phot,max}$, es también aproximada por tal función $f_b^*(\bar{U}_{c,D})$.

6.1 Aproximación de $\phi_{c,al,pl}$

En el apéndice E se muestra un proceso experimental, mediante el cual el CO_2 neto suministrado por el cultivo, $\phi_{c,al,pl}$, puede ser aproximado por la siguiente función que sólo depende de la razón de suministro de CO_2 , $\bar{U}_{c,D}$:

$$\phi_{c,al,pl} \simeq \left(\frac{\tau}{\rho_D} \alpha_D + \tau \tilde{Z}_{c,D} \right) f_b^*(\bar{U}_{c,D}), \quad (6.4)$$

$$f_b^*(\bar{U}_{c,D}) \simeq \left(-2 + \frac{\rho_D}{\tau} \right) + \frac{\frac{\rho_D}{\tau}}{\frac{\bar{U}_{c,D}}{\bar{U}_{c,D,\max}} + \left(\frac{\rho_D}{\tau} \right)^2}, \quad (6.5)$$

¹ ver capítulo 3.2 de van Henten [24].

donde $\bar{U}_{c,D,max} = 1.2 \times 10^{-6} [Kg/m^2 s]$ es el valor máximo de la razón de suministro de CO_2 . Esta aproximación fue hecha para el rango:² $\bar{V}_i \in [20 \text{--} 200] [W/m^2]$.

6.2 Aproximación de $\phi_{phot,max}$

A partir (6.2) y (6.3), se obtiene la siguiente relación entre $\phi_{phot,max}$ y $\phi_{c,al,pl}$:

$$\phi_{phot,max} = \frac{\alpha_D \rho_D / \tau [\bar{U}_c + \tau (\bar{V}_c - c_\Gamma) - \phi_{c,al,pl}]}{\alpha_D + \rho_D \bar{Z}_{c,D}}. \quad (6.6)$$

Substituyendo (6.3), (6.4) y (6.5) en (6.6) y realizando manipulaciones algebraicas se obtiene:

$$\phi_{phot,max} \simeq (1 - f_b^*(\bar{U}_{c,D})) \phi_{phot,\infty} + f_b^*(\bar{U}_{c,D}) \alpha_D, \quad (6.7)$$

donde $\phi_{phot,\infty}$ es definida como:

$$\phi_{phot,\infty} = \frac{\alpha_D (\rho_D / \tau) (\bar{U}_{c,D} + \tau (\bar{V}_c - c_\Gamma))}{\alpha_D + (\rho_D / \tau) (\bar{U}_{c,D} + \tau (\bar{V}_c - c_\Gamma))}. \quad (6.8)$$

La variable, $\phi_{phot,\infty}$, puede ser interpretada como una fotosíntesis de asimilación obtenida con una saturación³ de CO_2 [12].

6.3 Simulaciones y resultados

En la figura 6.1 se muestra la materia seca, \bar{X}_d , para el modelo de van Henten, (3.1)-(3.3), comparada con la materia seca, $\bar{X}_{d,DN}$, obtenida a partir de (3.22), (3.24)-(3.27), tomando en cuenta, (6.7), (6.8) en (4.18)-(4.20). Se presentan los dos casos extremos: $\bar{U}_{c,D} = \bar{U}_{c,D,max}$ y $\bar{U}_{c,D} = 0$. A partir de esta figura se observa que los dos comportamientos son similares, obteniendo al tiempo $t = 60$ días el máximo error del 5%. Se observa que el error es mayor cuando no hay suministro de CO_2 y va aumentando con el tiempo. Esto se debe a que la simplificación del modelo se realizó sin tomar en cuenta que mientras aumenta el tiempo aumenta la producción de materia seca.

Para ésto se tomaron los siguientes valores para las entradas suministradas y las entradas externas:

i) Entradas suministradas:

$$U_v = 1 \times 10^{-3} [m/s] \text{ y } U_q = 0 [W/m^2].$$

ii) Entradas externas:

$$V_t = 12.5 [^\circ C] \text{ y } V_c = 6.41 \times 10^{-4} [Kg/m^3]$$

6.4 Conclusiones

En este capítulo se mostró que la *fotosíntesis máxima de asimilación de CO_2* , $\phi_{phot,max}$ (ver (6.1) y (6.2)) puede ser aproximada por una función que depende de la entrada de control, $\bar{U}_{c,D}$ (ver (6.7), (6.8), (6.5) y figura 6.1).

² Se propone este rango en base a datos estadísticos promedios (ver Capítulo 3.2 de van Henten [24]).

³ Estado de la planta que ya no admite más cantidad de CO_2 para ser utilizado en la conversión de materia estructural [17]

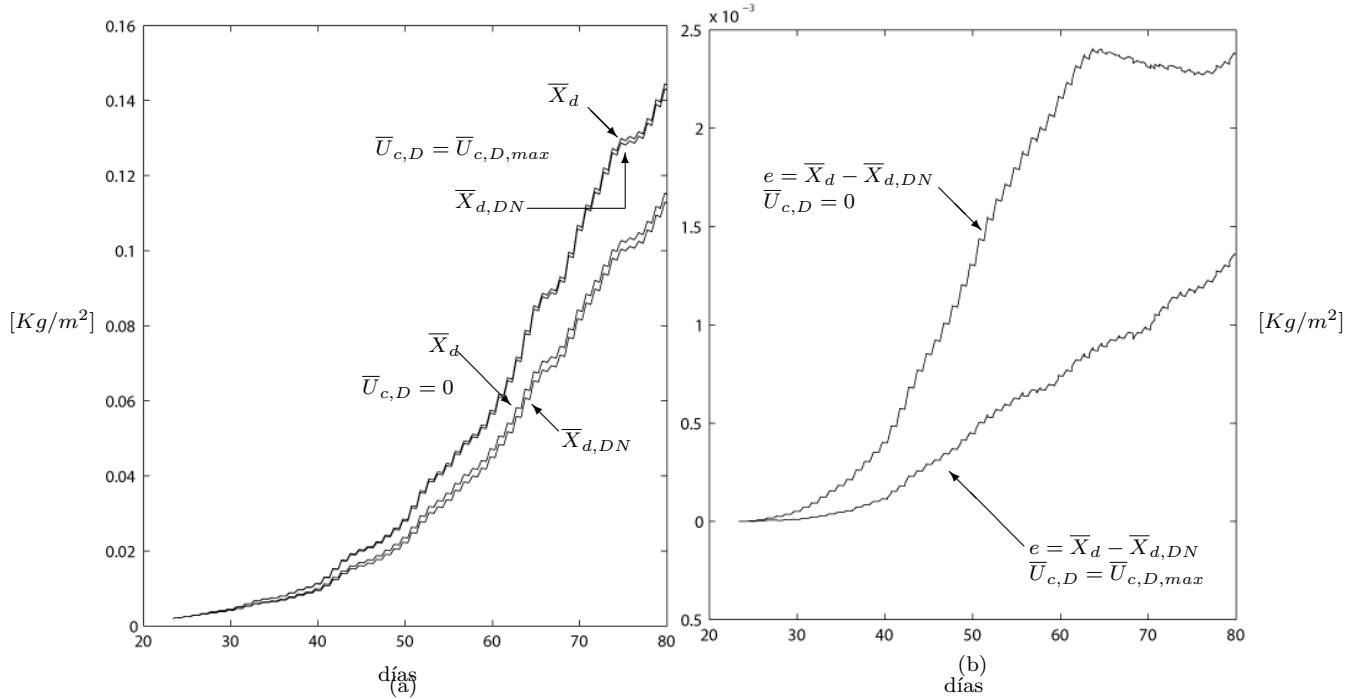


Figura 6.1 Comportamiento de la materia seca obtenido con (i) el modelo de van Henten, \bar{X}_d , (3.1)-(3.3) y (ii) la interacción diaria de la producción de materia seca para los períodos de día y noche, $\bar{X}_{d,DN}$ vs t [días] (ver (3.22), (3.24)-(3.27), (6.7), (6.8) y (4.18)-(4.20)). (b) Señal del error entre, \bar{X}_d y $\bar{X}_{d,DN}$ vs t

Parte II
Ley de Control Subóptima

Capítulo 7

Ley de Control Subóptima

En este capítulo, se encuentra una ley de control subóptima analítica para el período de día, (3.18) y (3.19), la cual maximiza el siguiente criterio de desempeño económico, $J_{(\bar{U}_{c,D})}$ ¹ (ver Capítulo 4 de van Henten [24]):

$$J_{(\bar{U}_{c,D})} = \alpha + \beta \bar{X}_{D(t_f)} - \int_{t_b}^{t_f} \gamma \bar{U}_{c,D} dt \quad [ct/m^2], \quad (7.1)$$

donde $\alpha = 180$ [ct/m^2], $\beta = 1600$ [ct/Kg] y $\gamma = 42$ [ct/Kg] son respectivamente: el precio básico por cabeza de lechuga por metro cuadrado, la ganancia adicional por buena cosecha y el precio por unidad de bióxido de carbono por Kilogramo. $t_b = 23$ es la fecha de plantación del cultivo y $t_f = 80$ es el día de la cosecha. $\bar{U}_{c,D}$ es la entrada de control la cual esta restringida por la siguiente desigualdad (ver tabla 2.2):

$$0 \leq \bar{U}_{c,D} \leq \bar{U}_{c,D,max}. \quad (7.2)$$

Para esto:

1. Primero, en la sección 7.1 se encuentra el Hamiltoniano para el período de luz y se establecen las condiciones de optimalidad.
2. Luego, en la sección 7.2 se encuentra el coestado $\lambda_{D\ell}$, para valores pequeños de materia seca.
3. Luego, en la sección 7.3 se encuentra el coestado $\lambda_{D\ell}$, para valores grandes de materia seca.
4. Finalmente, en la sección 7.4 se establece la ley de control subóptima analítica para el crecimiento de la lechuga en invernadero.

7.1 Hamiltoniano para el período de luz

El Hamiltoniano para el período de luz es definido como (ver capítulo cuatro de [24] y [8]):

$$H_D = -\gamma \bar{U}_{c,D} + \lambda_D \frac{d\bar{X}_D}{dt}, \quad (7.3)$$

donde λ_D es el multiplicador de Lagrange que representa el costo marginal [26]. El Hamiltoniano, (7.3), puede ser visto como una tasa de ganancia momentánea en el que los costos actuales se equilibran con

¹ Se supone que los factores de producción, tales como el suministro de nutrientes, agua y aquellos que no están directamente relacionadas con el control del clima en el invernadero, como el control de plagas y enfermedades, no afectan a las estrategias de control. En consecuencia, no se incluyen en el criterio del índice de desempeño económico [26].

los ingresos futuros [26]. De esta manera, el Hamiltoniano es una gran fuente de información para la interpretación del problema de control óptimo.

Sustituyendo (3.18) en (7.3) se tiene que el Hamiltoniano para el período de luz está dado por:

$$H_D = -\gamma \bar{U}_{c,D} + \lambda_D \left(-c_{\alpha\beta} \left(\tau \tilde{Z}_{c,D} - \bar{U}_{c,D} - \tau (\bar{V}_c - c_I) \right) \right). \quad (7.4)$$

7.1.1 Condiciones de optimidad

Para encontrar la ley de control que maximiza (7.1), son necesarias las siguientes condiciones de optimidad (ver capítulo cuatro de [24] y [8]):

$$\frac{dX_D}{dt} = \frac{\partial H_D}{\partial \lambda_D}, \quad (7.5)$$

$$\frac{\partial H_D}{\partial \bar{U}_{c,D}} = 0, \quad (7.6)$$

$$-\frac{d\lambda_D}{dt} = \frac{\partial H_D}{\partial \bar{X}_D}, \quad (7.7)$$

La ecuación (7.6), es la viabilidad económica con respecto a un cambio de control sobre la variable de estado [26]. La condición inicial y de frontera están dadas por:

$$\bar{X}_{D(t_b)} = \bar{X}_{D,b}, \quad (7.8)$$

$$\lambda_{(t_f)} = \frac{\partial}{\partial \bar{X}_d} (\alpha + \beta \bar{X}_{d(t_f)}). \quad (7.9)$$

Calculando la derivada parcial de (7.3) con respecto a $\bar{U}_{c,D}$, se tiene que la condición de optimidad (7.6) toma la siguiente forma:

$$\frac{\partial H}{\partial \bar{U}_{c,D}} = -\gamma - c_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial \bar{U}_{c,D}} [\lambda_D (\tau \tilde{Z}_{c,D} - \bar{U}_{c,D})] = 0. \quad (7.10)$$

Para establecer la ley de control es necesario resolver (7.10), la cual depende del coestado λ_D , van Henten resuelve esta ecuación utilizando el algoritmo, de programación no lineal, del paso descendente (ver apéndice F). A continuación se obtiene una solución analítica subóptima, la cual consiste en resolver la condición de optimidad (7.10), tomando en cuenta la aproximación (6.7) en (6.1) y (6.2). Se resuelven dos casos: el caso de valores pequeños de materia seca, \bar{X}_D , y el caso de valores grandes de \bar{X}_D .

7.2 Coestado λ_{Ds} : valores pequeños de materia seca

Para los valores pequeños de materia seca, \bar{X}_D , (2.18) puede ser aproximada por:

$$\omega \approx c_{pl,d} \bar{X}_D. \quad (7.11)$$

Tomando en cuenta las aproximaciones (6.7) y (7.11) en (6.2), se tiene que $\tilde{Z}_{c,D}$ puede ser aproximado por:

$$\begin{aligned}\tilde{Z}_{c,Ds} \simeq & \frac{\bar{X}_D}{\tau} \left[-c_{pl,d} [(1 - f_b^*) \phi_{phot,\infty} + f_b^* \alpha_D] + c_{resp,2} 2^{(0.1 \bar{Z}_t - 2.5)} \right] \\ & + \frac{\bar{U}_{c,D}}{\tau} + (V_c - c_F).\end{aligned}\quad (7.12)$$

donde

$$f_b^*(\bar{U}_{c,D}) \simeq \left(-2 + \frac{\rho_D}{\tau} \right) + \frac{\frac{\rho_D}{\tau}}{\frac{\bar{U}_{c,D}}{\bar{U}_{c,D,\max}} + \left(\frac{\rho_D}{\tau} \right)^2}, \quad (7.13)$$

y

$$\alpha = c_1 V_i \quad (7.14)$$

Substituyendo (7.12) en (7.4) y calculando la derivada parcial de (7.7), se tiene:

$$\begin{aligned}-\frac{d\lambda_{Ds}}{dt} \simeq & -c_{\alpha\beta} \lambda_{Ds} \left[-c_{pld} [(1 - f_b^*(\bar{U}_{c,D})) \phi_{phot,\max} + f_b^*(\bar{U}_{c,D}) \alpha] \right. \\ & \left. + c_{resp,2} 2^{(0.1 \bar{Z}_T - 2.5)} \right].\end{aligned}\quad (7.15)$$

Por lo tanto:

$$\lambda_{Ds} \simeq e^{\int_{t_b}^{t_f} c_{\alpha\beta} \left[-c_{pld} [(1 - f_b^*(\bar{U}_{c,D})) \phi_{phot,\max} + f_b^*(\bar{U}_{c,D}) \alpha] + c_{resp,2} 2^{(0.1 \bar{Z}_t - 2.5)} \right] dt}. \quad (7.16)$$

Con la condición de frontera (ver (7.9)):

$$\lambda_{Ds(t_f)} = \beta. \quad (7.17)$$

De esta manera se ha obtenido una expresión analítica para el coestado para el caso de valores pequeños de materia seca. Se nota también que (7.16) únicamente depende de la variable de control, $\bar{U}_{c,D}$, y de la variable externa, V_i ².

7.3 Coestado $\lambda_{D\ell}$: valores grandes de la materia seca

Para el caso de valores grandes, se iguala la ecuación (6.7) con (6.1). Entonces $\tilde{Z}_{c,D}$ puede ser aproximada por:

$$\tilde{Z}_{c,D\ell} \simeq \frac{\alpha_D}{\rho(\alpha_D - \phi_{phot,\infty})} \left[\phi_{phot,\infty} + \frac{f_b^*(\bar{U}_{c,D})}{(1 - f_b^*(\bar{U}_{c,D}))} \alpha_D \right]. \quad (7.18)$$

donde

$$f_b^*(\bar{U}_{c,D}) \simeq \left(-2 + \frac{\rho_D}{\tau} \right) + \frac{\frac{\rho_D}{\tau}}{\frac{\bar{U}_{c,D}}{\bar{U}_{c,D,\max}} + \left(\frac{\rho_D}{\tau} \right)^2}, \quad (7.19)$$

y

$$\alpha = c_1 V_i. \quad (7.20)$$

Substituyendo (7.18) en (7.4) y calculando la derivada parcial de (7.7), se tiene:

² Para éste trabajo de tesis se tomarón los siguientes valores para las entradas suministradas: $U_v = 1 \times 10^{-3} [m/s]$ y $U_q = 0 [W/m^2]$

$$-\frac{d\lambda_{D\ell}}{dt} \simeq 0. \quad (7.21)$$

A partir de la condición de frontera, $\lambda_{(t_f)} = \frac{\partial}{\partial X_d} (\alpha + \beta \bar{X}_{d(t_f)})$, se tiene:

$$\lambda_{D\ell} \simeq \beta. \quad (7.22)$$

De esta forma se ha obtenido un valor constante para el valor del coestado para valores grandes de materia seca.

7.4 Ley de control subóptima

A partir de (7.16) y (7.22), se tiene la siguiente ley de control subóptima para el período de luz:

$$\bar{U}_{c,D}^* = \begin{cases} \bar{U}_{c,Ds}^* & \text{si } \lambda_{D\ell} \leq \lambda_{Ds}, \\ \bar{U}_{c,D\ell}^* & \text{si } \lambda_{Ds} < \lambda_{D\ell}, \end{cases} \quad (7.23)$$

donde $\bar{U}_{c,Ds}^*$ y $\bar{U}_{c,D\ell}^*$ son las soluciones de (7.10) cuando $\lambda_D = \lambda_{Ds}$ y $\lambda_D = \lambda_{D\ell}$.

Tomando en cuenta los dos casos (7.16) y (7.22), en (7.10), approximando $\tilde{Z}_{c,D}$ por (7.12) y (7.18) para valores pequeños y grandes de materia seca \bar{X}_D respectivamente, se obtiene:

$$\frac{\partial H_D}{\partial \bar{U}_{c,D}} \simeq \begin{cases} -\gamma + c_{\alpha\beta} e^{g_b} \left[-\tau \frac{\partial \tilde{Z}_{c,Ds}}{\partial \bar{U}_{c,D}} + 1 \right] = 0; & \text{si } \lambda_{D\ell} \leq \lambda_{Ds}, \\ -\gamma + c_{\alpha\beta} \beta \left[-\tau \frac{\partial \tilde{Z}_{c,D\ell}}{\partial \bar{U}_{c,D}} + 1 \right] = 0; & \text{si } \lambda_{Ds} < \lambda_{D\ell}, \end{cases} \quad (7.24)$$

donde

$$\frac{\partial \tilde{Z}_{c,Ds}}{\partial \bar{U}_{c,D}} \simeq \frac{\bar{X}_{d,D}}{\tau} \left[-c_{pl,d} \left[(1 - f_b^*) \frac{\partial}{\partial \bar{U}_{c,D}} \phi_{phot,\infty} - \phi_{phot,\infty} \frac{\partial}{\partial \bar{U}_{c,D}} f_b^* + \alpha_D \frac{\partial}{\partial \bar{U}_{c,D}} f_b^* \right] \right] + \frac{1}{\tau}, \quad (7.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{Z}_{c,D\ell}}{\partial \bar{U}_{c,D}} \simeq & \frac{\alpha_D}{\rho_D (\alpha_D - \phi_{phot,\infty})} \left[\frac{\partial}{\partial \bar{U}_{c,D}} \phi_{phot,\infty} + \alpha_D \frac{\partial}{\partial \bar{U}_{c,D}} \frac{f_b^*}{1 - f_b^*} \right] \\ & + \frac{\alpha_D}{\rho_D} \left[\phi_{phot,\infty} + \alpha_D \frac{f_b^*}{1 - f_b^*} \frac{\partial}{\partial \bar{U}_{c,D}} \frac{1}{\alpha_D - \phi_{phot,\infty}} \right], \end{aligned} \quad (7.26)$$

$$g_b = \int_{t_b}^{t_f} c_{\alpha\beta} [-c_{pld} [(1 - f_b^*) \phi_{phot,max} + f_b^* \alpha] + c_{resp,2} (2^{(0.1 \bar{Z}_t - 2.5)})] dt, \quad (7.27)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{U}_{c,D}} f_b^* = -\frac{\frac{\rho_D}{\tau} \left(\frac{1}{\bar{U}_{c,D,max}} \right)}{\left[\frac{\bar{U}_{c,D}}{\bar{U}_{c,D,max}} + \left(\frac{\rho_D}{\tau} \right)^2 \right]^2}, \quad (7.28)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{U}_{c,D}} \phi_{phot,\infty} = \frac{\frac{\rho_D}{\tau} \alpha_D^2}{[\alpha_D + \frac{\rho_D}{\tau} (\bar{U}_{c,D} + \tau (\bar{V}_c - c_T))]^2}, \quad (7.29)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{U}_{c,D}} \frac{f_b^*}{1 - f_b^*} = -\frac{1}{(1 - f_b^*)^2} \frac{\frac{\rho_D}{\tau} \left(\frac{1}{\bar{U}_{c,D,max}} \right)}{\left[\frac{\bar{U}_{c,D}}{\bar{U}_{c,D,max}} + \left(\frac{\rho_D}{\tau} \right)^2 \right]^2}, \quad (7.30)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{U}_{c,D}} \frac{1}{\alpha_D - \phi_{phot,\infty}} = \frac{1}{(\alpha_D - \phi_{phot,\infty})^2} \frac{\frac{\rho_D}{\tau} \alpha_D^2}{[\alpha_D + \frac{\rho_D}{\tau} (\bar{U}_{c,D} + \tau (\bar{V}_c - c_R))]^2}. \quad (7.31)$$

La ecuación (7.24) se resuelve aplicando el comando "fzero" de MatLab® sujeta a la restricción:

$$0 \leq \bar{U}_{c,D} \leq \bar{U}_{c,D,\max} \quad (7.32)$$

Finalmente la ley de control subóptima es:

$$\bar{U}_c^* = \begin{cases} \bar{U}_{c,D}^* & \text{si } V_i \neq 0 \\ \bar{U}_{c,N}^* = 0 & \text{si } V_i = 0 \end{cases}. \quad (7.33)$$

7.5 Simulaciones y Resultados

En la figura 7.1(a), se muestra la ley de control subóptima analítica, (7.33), \bar{U}_c^* .

En la figura 7.1(b), se compara la ley de control subóptima analítica, \bar{U}_c^* , con respecto a la ley de control óptima, $\bar{U}_{c,pd}^*$, obtenida mediante el método de paso descendente [24] (ver apéndice F).

En la figura 7.2(a), se compara la materia seca, \bar{X}_d , obtenida con la ley de control óptimo, $\bar{U}_{c,pd}^*$, con respecto a la obtenida con la ley de control subóptima analítica, \bar{U}_c^* .

En la figura 7.2(b), se muestra los valores del criterio de desempeño, (7.1), obtenido con la ley de control subóptima analítica, \bar{U}_c^* , y la obtenida con la ley de control óptimo, $\bar{U}_{c,pd}^*$.

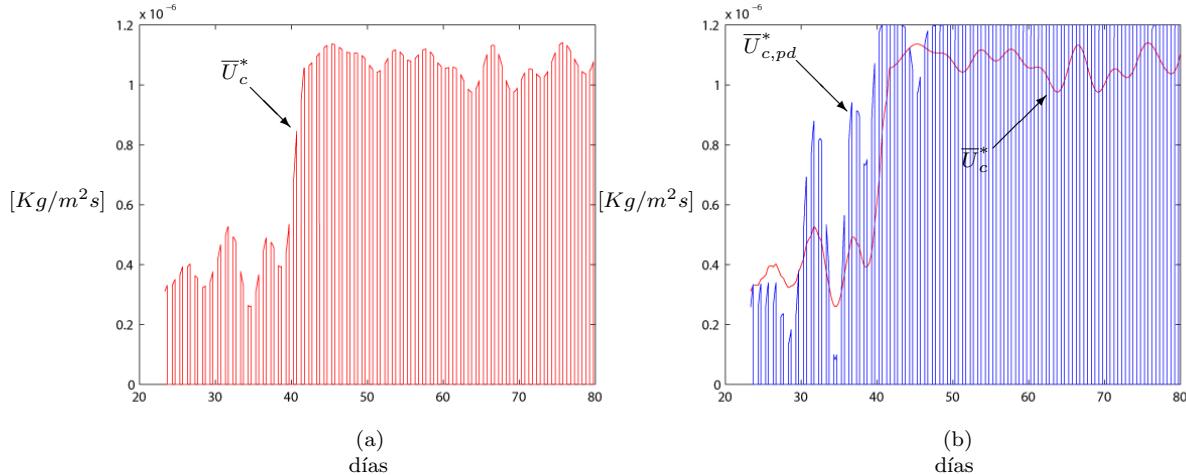


Figura 7.1 (a) Ley de control subóptima para el cultivo de la lechuga en invernadero, \bar{U}_c^* v.s. t [días]. (b) Ley de control óptima obtenida mediante el método de paso descendente, $\bar{U}_{c,pd}^*$ v.s. t [días]

Los valores para las entradas suministradas y las entradas externas que se tomaron fueron:

i) Entradas suministradas:

$$U_v = 1 \times 10^{-3} [m/s], U_q = 0 [W/m^2].$$

ii) Entradas externas:

$$V_t = 12.5 [^\circ C] \text{ y } V_c = 6.41 \times 10^{-4} [Kg/m^3]$$

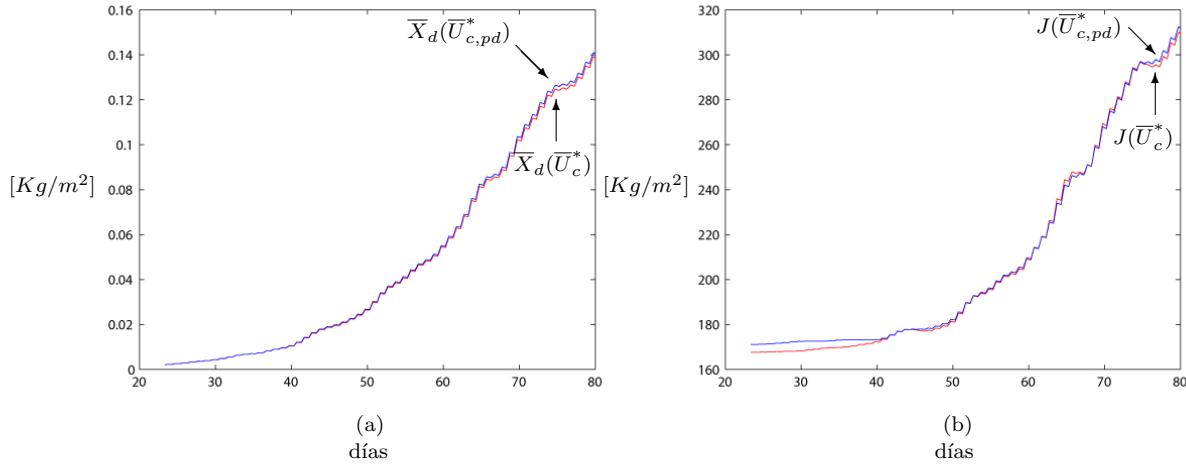


Figura 7.2 (a) Comportamiento de la materia seca, $\bar{X}_d(\bar{U}_{c,pd}^*)$ y $\bar{X}_d(\bar{U}_c^*)$ v.s. t [días]. (b) Criterio de desempeño, $J(\bar{U}_{c,pd}^*)$ y $J(\bar{U}_c^*)$ v.s. t [días], obtenido con: (i) el método de paso descendente, y (ii) aplicando el control subóptimo para el modelo de día-noche, $J(\bar{U}_{c,pd}^*) = 317$ y $J(\bar{U}_c^*) = 313$

7.6 Conclusiones

En este capítulo se encontró una ley de control subóptima analítica para el crecimiento de la lechuga en invernadero (ver sección 7.4) y figura 7.1). Para aplicar esta ley de control solo se necesita resolver una ecuación algebraica en términos de los parámetros de la lechuga cultivada en invernadero (ver (7.24)-(7.31)).

Capítulo 8

Conclusiones y Perspectivas

8.1 Conclusiones

El modelo de van Henten para el comportamiento de la materia seca, para el crecimiento de la lechuga en invernadero (ver (2.13)- (2.15)), puede ser separado en dos modelos matemáticos independientes. Un modelo independiente es para el período de luz,(ver (3.18)-(3.19) y figura 3.2), y el otro modelo para el período de oscuridad (ver (3.20)-(3.21)). Al integrar diariamente estos modelos independientes se obtiene el comportamiento de la materia seca (ver (3.22) y figura 3.2).

La razón relativa de crecimiento para el cultivo de la lechuga en invernadero para el modelo de día-noche, (3.22). tiene las características de un comportamiento logístico (ver (4.18)-(4.20) y figuras 4.1 y 4.2). Esta razón relativa de crecimiento esta directamente relacionada con la *fotosíntesis máxima de asimilación de CO₂*, $\phi_{phot,max}$ (ver (6.2)), la cual puede ser aproximada por una función que depende de la entrada de control, $\bar{U}_{c,D}$ (ver (6.7), (6.8), (6.5) y figura 6.1). Este hecho permite que se encuentre una ley de control subóptima analítica para el crecimiento de la lechuga en invernadero (ver (7.33) y figura 7.1). Esta ley de control subóptima analítica esta en términos de los parámetros de la lechuga cultivada en invernadero (ver (7.24)-(7.31)).

Finalmente como una conclusión de este trabajo de tesis es proponer un procedimiento simplificado de como obtener una ley de control que maximize (minimize) un índice de desempeño. Este procedimiento está basado en el control del clima dentro del invernadero en su período de luz y su período de oscuridad. En la figura 8.1 se muestra este diagrama de flujo simplificado. Este procedimiento puede variar con respecto al cultivo que se esté estudiando.

8.2 Perspectivas

1. Extender los resultados de este trabajo de tesis a otros cultivos en invernadero.
2. Llevar a la práctica los resultados de este trabajo de tesis.

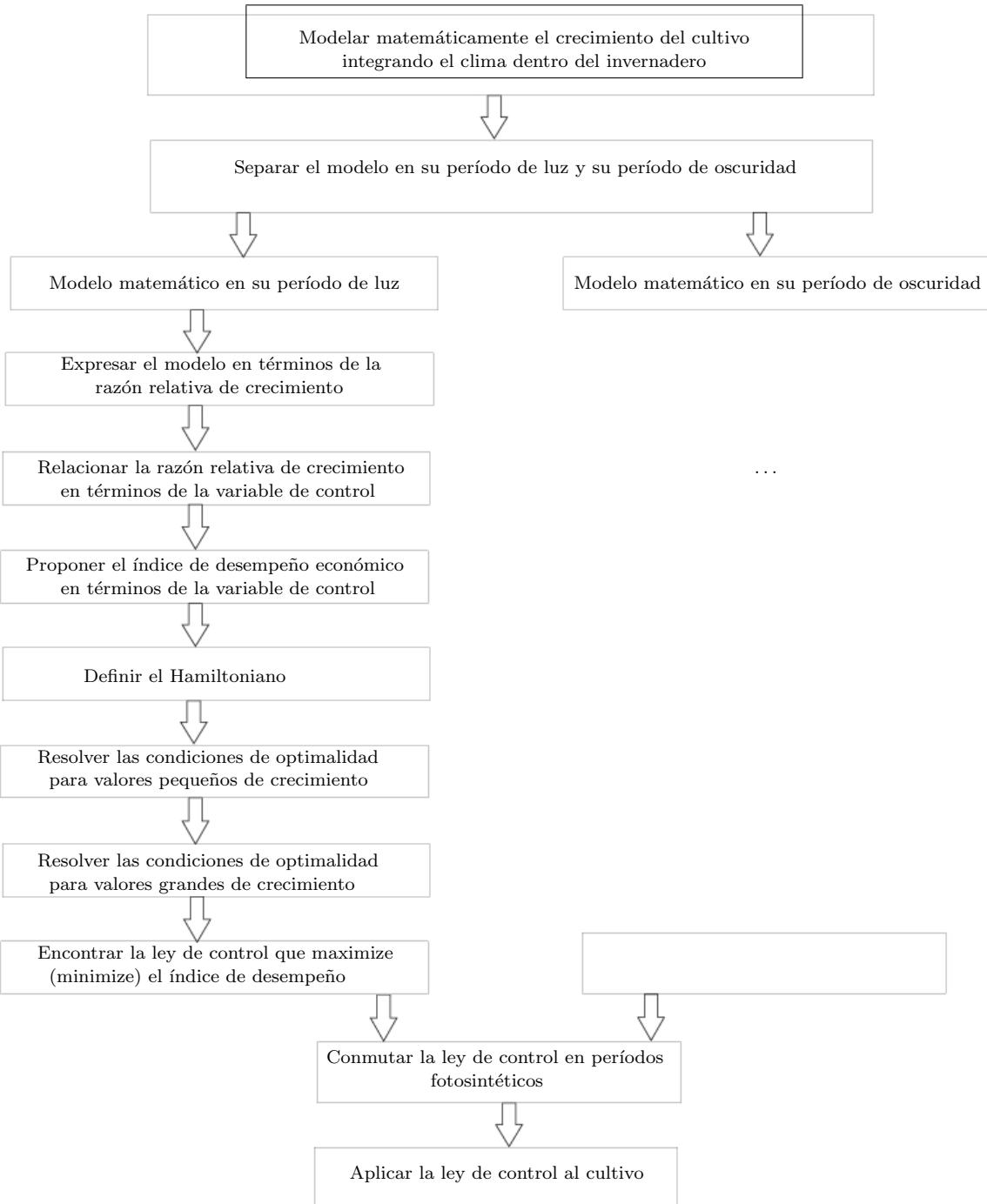


Figura 8.1 Diagrama de flujo simplificado propuesto para encontrar una ley de control subóptima para plantas C3, cultivadas dentro de un invernadero. Esta propuesta está basada en el control del crecimiento del cultivo en su período de luz y su período de oscuridad

Parte III

Apéndices

Apendice A

Modelos de crecimiento en cultivos

A.1 Crecimiento exponencial

Durante esta fase de crecimiento, las plantas que componen al cultivo tienen mucho espacio entre si, por lo cual no compiten entre ellas por interceptar luz. Cada nueva hoja que se forma aumenta la luz interceptada (ver [5] por ejemplo).

La ecuación diferencial para este modelo es:

$$\frac{dX_{d,e}}{dt} = r_b X_{d,e}, \quad (\text{A.1})$$

donde $X_{d,e}$ [kg/m^2] es la materia seca modelada por un crecimiento exponencial y r_b [$1/\text{s}$] es el parámetro de crecimiento específico el cual se supone constante (ver [22] por ejemplo). Al resolver (A.1) se obtiene que el comportamiento de $X_{d,e}$ [kg/m^2] está dado por:

$$X_{d,e} = X_{d,e0} e^{r_b t}, \quad (\text{A.2})$$

donde $X_{d,e0}$ [kg/m^2] es la condición inicial de materia seca y t [d] es el tiempo de crecimiento y desarrollo del cultivo dado en días.

La figura A.1 es una gráfica típica de (A.2), para parámetros positivos arbitrarios $X_{d,e}$ y r_b .

Este modelo de crecimiento es independiente de la disponibilidad de substrato y representa la primera fase de crecimiento. En esta fase cada nueva hoja formada contribuye a interceptar más luz. A medida que se forman nuevas hojas mayor es el sombreado que existe entre ellas, por lo cual esta fase de crecimiento solo dura un determinado tiempo.

A.2 Crecimiento lineal

Cuando las hojas de la plantas comienzan a hacerse sombra entre ellas, hasta que el índice de área de hoja dado por:

$$I = \frac{\text{área total de hoja}}{\text{área de terreno cultivado}} \left[\frac{m^2(\text{hoja})}{m^2(\text{terreno})} \right], \quad (\text{A.3})$$

esta por arriba de 3 [–], difícilmente hay una gran intercepción de luz (ver [5] por ejemplo). Por lo cual el cultivo pasa de una fase de crecimiento exponencial a una fase de crecimiento lineal. La ecuación diferencial para modelar este fase de crecimiento es:

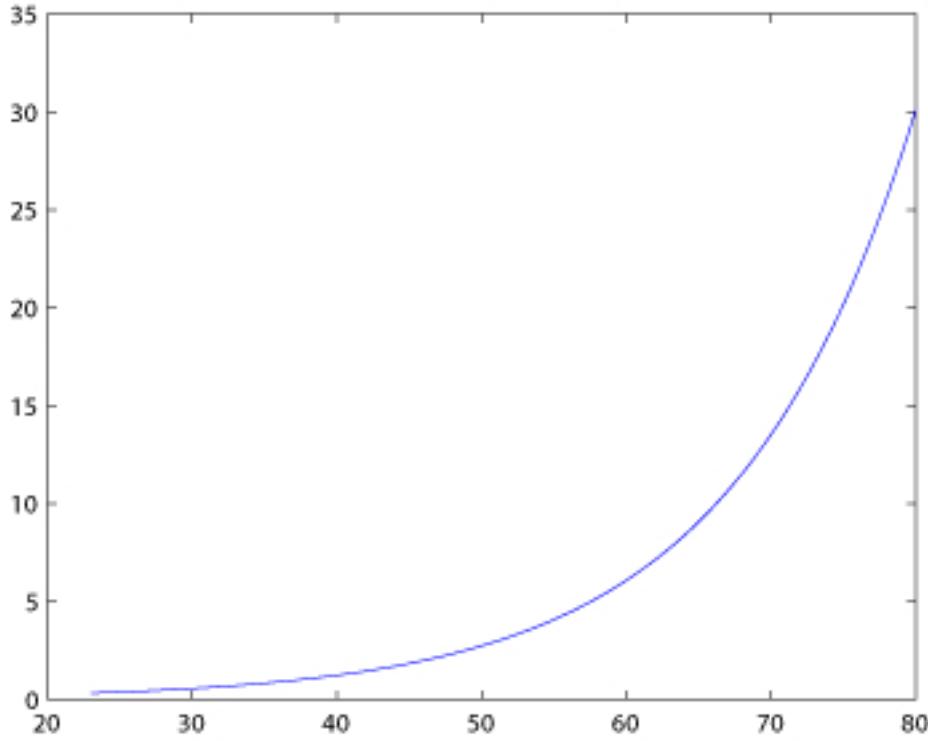


Figura A.1 Crecimiento exponencial (A.2), $X_{d,e}$ vs t , para parámetros positivos arbitrarios $X_{d,e0}=0.05$ y $r_b=0.08$

$$\frac{dX_{d,l}}{dt} = c_m, \quad (\text{A.4})$$

donde $X_{d,l}$ [kg/m^2] es la materia seca modelada por un crecimiento lineal y c_m [$\text{kg}/\text{m}^2\text{d}$] es el parámetro de crecimiento máximo. Al resolver (A.4) se obtiene que el comportamiento de $X_{d,l}$ esta dado por:

$$X_{d,l} = c_m(t - t_b), \quad (\text{A.5})$$

donde t_b [d] es el tiempo cuando comienza la fase lineal de crecimiento. En la figura A.2, se muestra el comportamiento de la materia seca $X_{d,l}$ dado por (A.5) tomando parámetros arbitrarios $t_b > 0$ y $c_m > 0$.

En este modelo se considera que el parámetro de crecimiento máximo c_m es una constante positiva.

A.3 Crecimiento exponencial-lineal

Goudriaann y Van Laar proponen un modelo que toma en cuenta la transición de la fase de crecimiento exponencial a la fase de crecimiento lineal, el cual denominaron crecimiento exponencial-lineal [5]. Este modelo esta dado por:

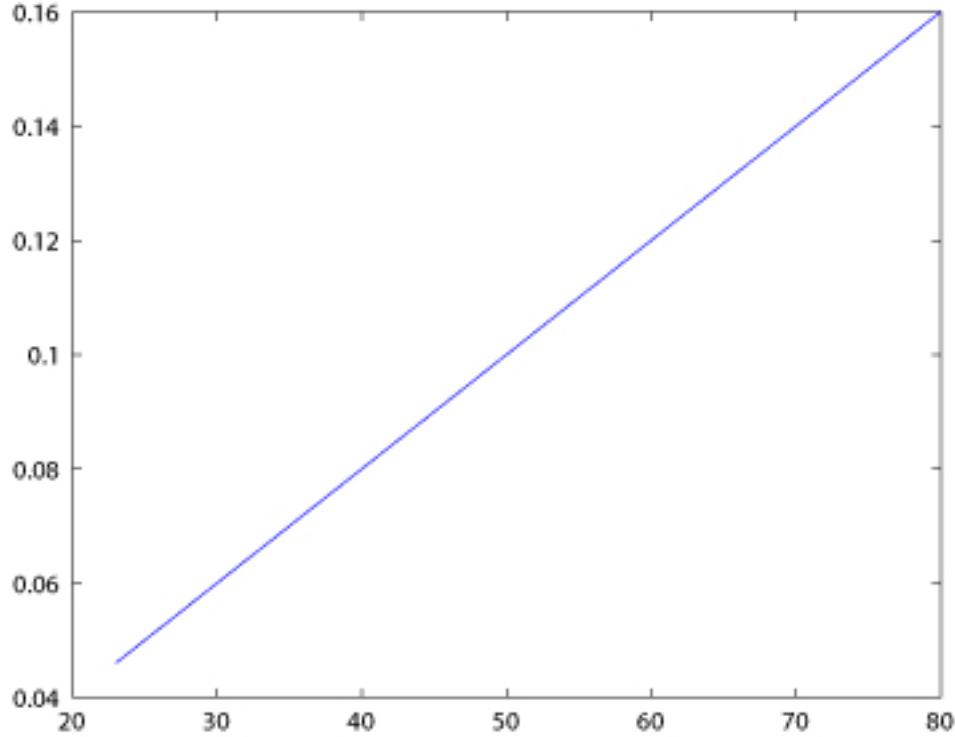


Figura A.2 Crecimiento lineal (A.5), $X_{d,l}$ vs t , para parámetros arbitrarios $c_m=0.002$ y $t_b = 0$

$$X_{d,\text{exp}} = \frac{c_m}{r_b} \ln \left(1 + e^{r_b(t-t_b)} \right), \quad (\text{A.6})$$

donde $X_{d,\text{exp}}$ [kg/m^2] es la materia seca modelada por un crecimiento exponencial-lineal, t_b [d] es el tiempo donde comienza la fase lineal de crecimiento, c_m [$\text{kg}/\text{m}^2\text{d}$] es el parámetro de crecimiento máximo y r_b [1/s] es el parámetro de crecimiento específico. En este modelo se toma en cuenta la transición de la fase de crecimiento exponencial a la fase de crecimiento lineal (figura A.3).

A.4 Crecimiento logístico

El modelo de crecimiento logístico es uno de los más importantes que describen el comportamiento de la materia seca en cultivos (ver [7] por ejemplo). Este modelo se obtiene al derivar con respecto al tiempo (A.6), esto es:

$$\frac{dX_{d,\text{exp}}}{dt} = c_m \frac{e^{r_b(t-t_b)}}{1 + e^{r_b(t-t_b)}}. \quad (\text{A.7})$$

Si ahora renombramos a $\frac{dX_{d,\text{exp}}}{dt}$ como $X_{d,\text{log}}$ en (A.7), tenemos que el modelo de crecimiento logístico es:

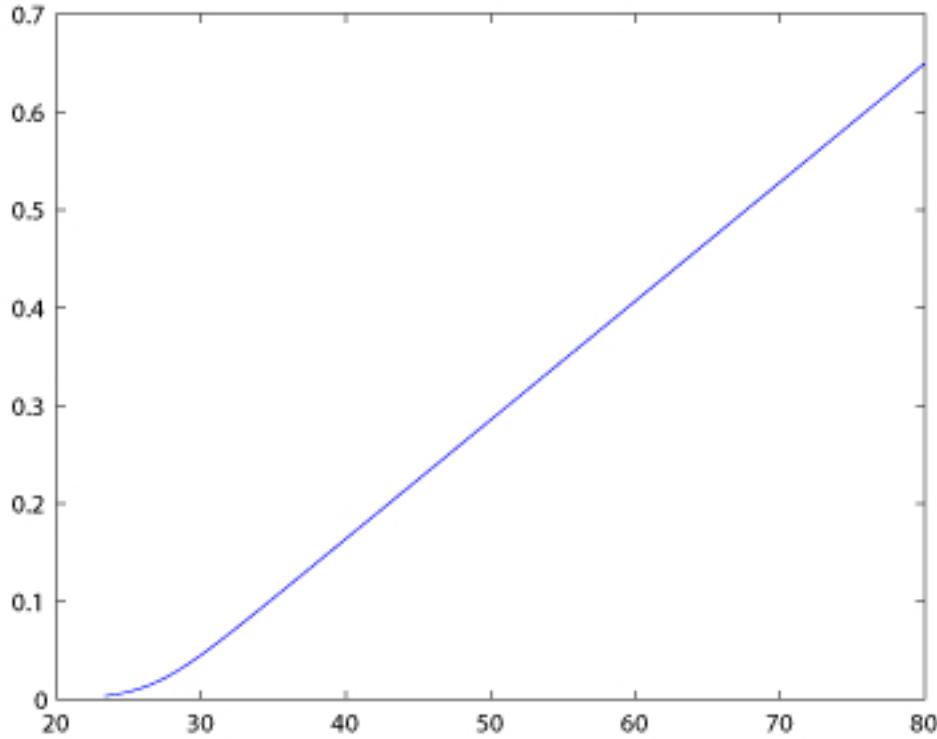


Figura A.3 Crecimiento exponencial-lineal (A.6), $X_{d,\text{exp}}$ vs t , para parámetros arbitrarios $c_m = 0.012$, $r_b = 0.562$, y $t_b = 2.65$

$$X_{d,\log} = c_m \frac{e^{r_b(t-t_b)}}{1 + e^{r_b(t-t_b)}}, \quad (\text{A.8})$$

donde $X_{d,\log}$ [kg/m^2] es la materia seca modelada por un crecimiento logístico, t_b [d] es el tiempo cuando comienza la fase lineal de crecimiento, c_m [$\text{kg}/\text{m}^2\text{d}$] es el parámetro de crecimiento máximo y r_b [$1/\text{d}$] es el parámetro de crecimiento específico. En la figura A.4, se muestra el comportamiento de la materia seca modelado por una ley de crecimiento logístico.

A.4.1 Características del crecimiento logístico

Una característica del modelo logístico (A.8), es que su derivada con respecto al tiempo, $\frac{dX_{d,\log}}{dt}$, dada por:

$$\frac{dX_{d,\log}}{dt} = (X_{d,\log}) \left(-\frac{r_b}{c_m} (X_{d,\log}) + r_b \right), \quad (\text{A.9})$$

es una parábola (ver [7] por ejemplo). En la figura A.5 se muestra la gráfica de (A.9) para parámetros $r_b > 0$ y $c_m > 0$ arbitrarios.

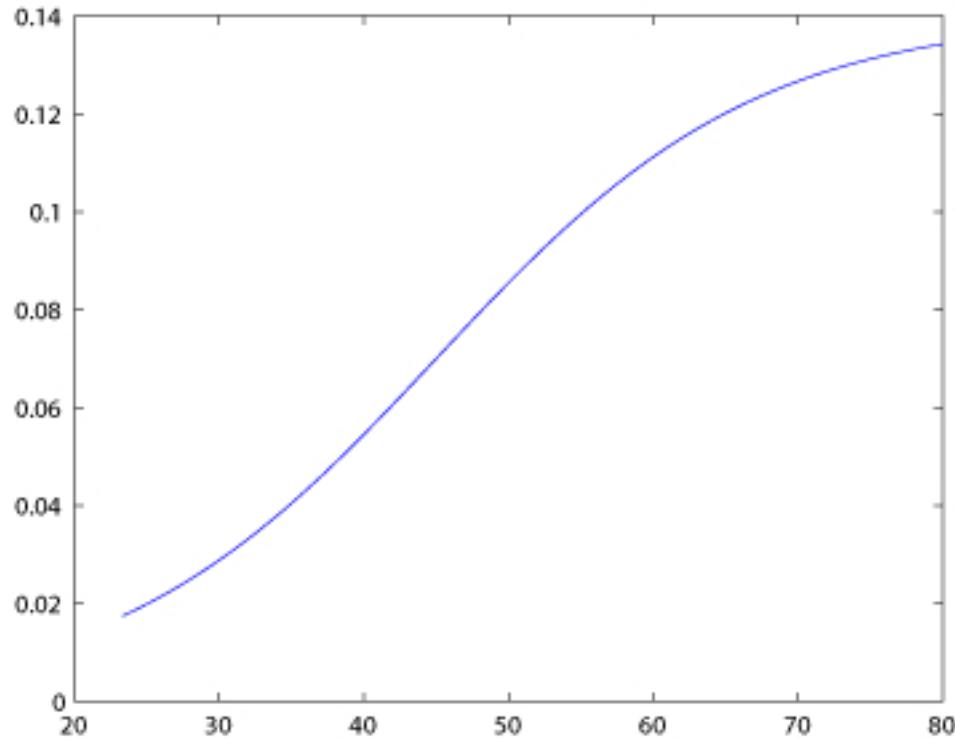


Figura A.4 Crecimiento logístico (A.8), $X_{d,\log}$ vs t , para parámetros arbitrarios $c_m = 45$, $r_b = 0.14$, y $t_b = 45$

El término $\left(-\frac{r_b}{c_m} (X_{d,\log}) + r_b\right)$ de (A.9), corresponde a la razón relativa de crecimiento de la velocidad de producción de materia seca, RRC¹, esto es:

$$RRC = \frac{dX_{d,\log}/dt}{X_{d,\log}} = \left(-\frac{r_b}{c_m} (X_{d,\log}) + r_b\right). \quad (\text{A.10})$$

En la figura A.6 se muestra la RRC, (A.10), donde se observa su comportamiento lineal para parámetros $r_b > 0$ y $c_m > 0$ arbitrarios.

¹ Por simplicidad se le llamará razón relativa de crecimiento.

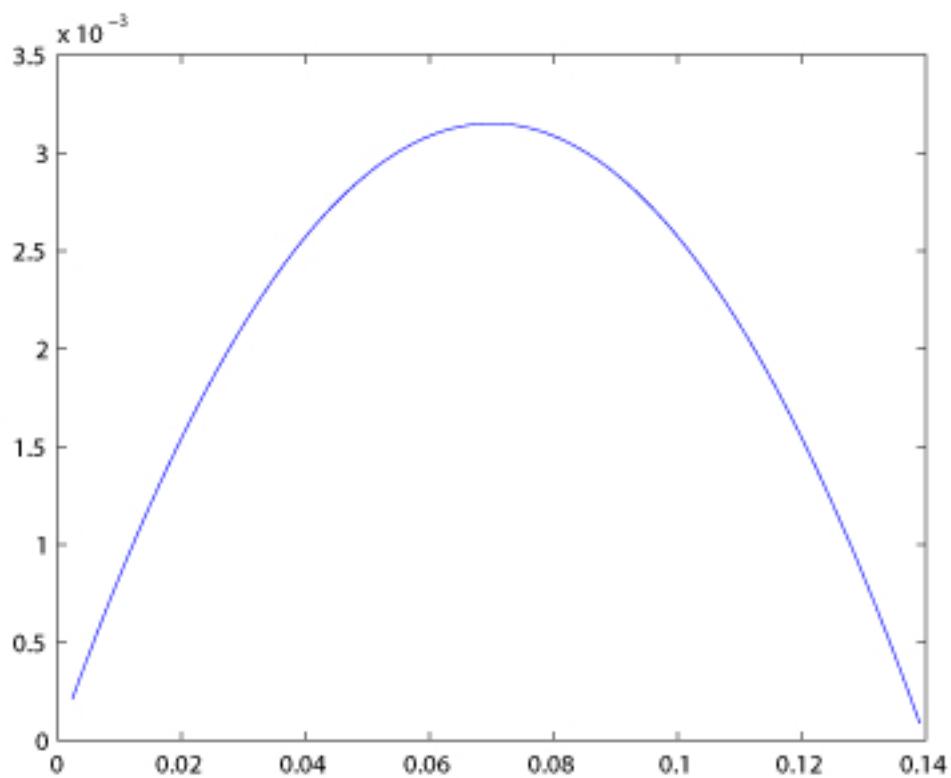


Figura A.5 $\frac{dX_{d,\log}}{dt}$ vs $X_{d,\log}$, (A.9), para parámetros arbitrarios positivos $c_m = 45$, $r_b = 0.14$, y $t_b = 45$

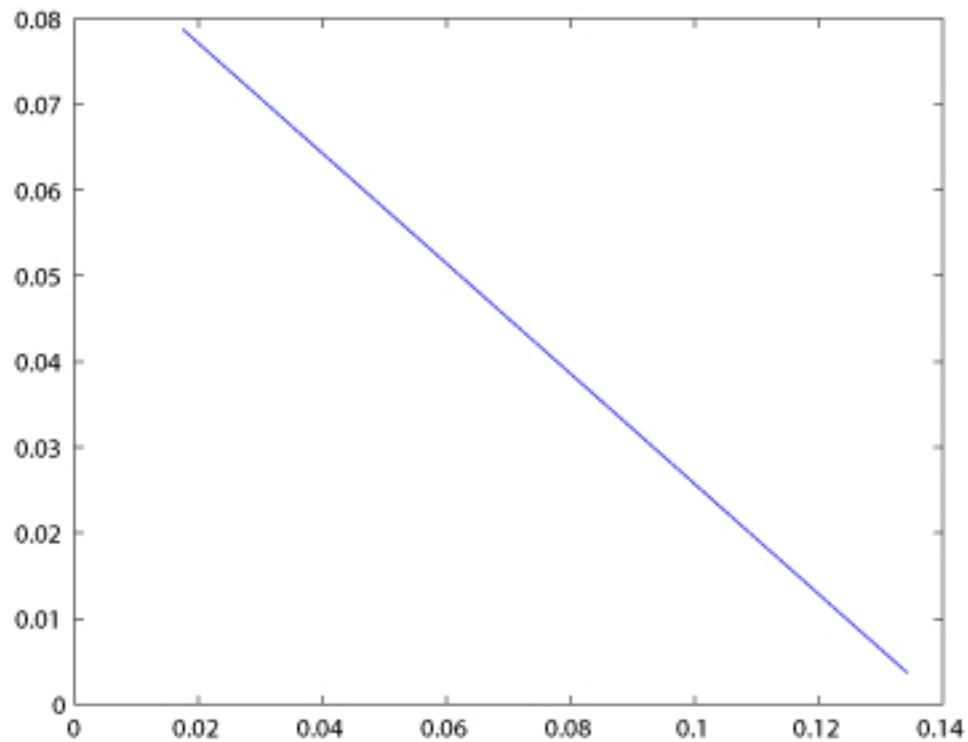


Figura A.6 Razón relativa de crecimiento $\frac{dX_{d,\log}/dt}{X_{d,\log}}$ vs $X_{d,\log}$, (A.10), donde se observa su comportamiento lineal para parámetros arbitrarios $c_m = 45$ y $r_b = 0.14$

Apendice B

Radiación fotosintéticamente activa real

En la siguiente tabla se muestran los datos de la Radiación fotosintéticamente activa, $V_{i,p}[W/m^2]$, del 21 de enero al 17 de marzo de 1992, proporcionados por la Universidad de Wageningen Holanda.

Tiempo	$V_{i,p}$	Tiempo	$V_{i,p}$	Tiempo	$V_{i,p}$	Tiempo	$V_{i,p}$	Tiempo	$V_{i,p}$
23.000000	0.000000	23.020833	0.000000	23.041667	0.000000	23.062500	0.000000	23.083333	0.000000
23.104167	0.000000	23.125000	0.000000	23.145833	0.000000	23.166667	0.000000	23.187500	0.000000
23.208333	0.000000	23.229167	0.000000	23.250000	0.000000	23.270833	0.000000	23.291667	0.000000
23.312500	0.000000	23.333333	0.000000	23.354167	0.000000	23.375000	2.010000	23.395833	13.377500
23.416667	28.407500	23.437500	41.505000	23.458333	49.832500	23.479167	67.170000	23.500000	72.647500
23.520833	86.670000	23.541667	90.440000	23.562500	92.772500	23.583333	84.772500	23.604167	70.567500
23.625000	58.752500	23.645833	44.367500	23.666667	32.222500	23.687500	19.615000	23.708333	7.757500
23.729167	0.000000	23.750000	0.000000	23.770833	0.000000	23.791667	0.000000	23.812500	0.000000
23.833333	0.000000	23.854167	0.000000	23.875000	0.000000	23.895833	0.000000	23.916667	0.000000
23.937500	0.000000	23.958333	0.000000	23.979167	0.000000	24.000000	0.000000	24.020833	0.000000
24.041667	0.000000	24.062500	0.000000	24.083333	0.000000	24.104167	0.000000	24.125000	0.000000
24.145833	0.000000	24.166667	0.000000	24.187500	0.000000	24.208333	0.000000	24.229167	0.000000
24.250000	0.000000	24.270833	0.000000	24.291667	0.000000	24.312500	0.000000	24.333333	0.000000
24.354167	0.000000	24.375000	2.450000	24.395833	14.055000	24.416667	29.392500	24.437500	43.920000
24.458333	50.747500	24.479167	68.700000	24.500000	78.130000	24.520833	95.887500	24.541667	98.982500
24.562500	106.085000	24.583333	88.550000	24.604167	73.497500	24.625000	59.430000	24.645833	43.070000
24.666667	30.472500	24.687500	18.657500	24.708333	7.992500	24.729167	1.880000	24.750000	0.000000
24.770833	0.000000	24.791667	0.000000	24.812500	0.000000	24.833333	0.000000	24.854167	0.000000
24.875000	0.000000	24.895833	0.000000	24.916667	0.000000	24.937500	0.000000	24.958333	0.000000
24.979167	0.000000	25.000000	0.000000	25.020833	0.000000	25.041667	0.000000	25.062500	0.000000
25.083333	0.000000	25.104167	0.000000	25.125000	0.000000	25.145833	0.000000	25.166667	0.000000
25.187500	0.000000	25.208333	0.000000	25.229167	0.000000	25.250000	0.000000	25.270833	0.000000
25.291667	0.000000	25.312500	0.000000	25.333333	0.000000	25.354167	0.000000	25.375000	2.010000
25.395833	13.377500	25.416667	28.407500	25.437500	41.505000	25.458333	49.832500	25.479167	67.170000
25.500000	72.647500	25.520833	86.670000	25.541667	90.440000	25.562500	92.772500	25.583333	84.772500
25.604167	70.567500	25.625000	58.752500	25.645833	44.367500	25.666667	32.222500	25.687500	19.615000
25.708333	7.757500	25.729167	0.000000	25.750000	0.000000	25.770833	0.000000	25.791667	0.000000
25.812500	0.000000	25.833333	0.000000	25.854167	0.000000	25.875000	0.000000	25.895833	0.000000
25.916667	0.000000	25.937500	0.000000	25.958333	0.000000	25.979167	0.000000	26.000000	0.000000
26.020833	0.000000	26.041667	0.000000	26.062500	0.000000	26.083333	0.000000	26.104167	0.000000

Tiempo	$V_{i,p}$								
76.125000	0.000000	76.145833	0.000000	76.166667	0.000000	76.187500	0.000000	76.208333	0.000000
76.229167	0.000000	76.250000	0.000000	76.270833	0.000000	76.291667	4.445000	76.312500	8.527500
76.333333	22.677500	76.354167	49.447500	76.375000	46.940000	76.395833	53.372500	76.416667	58.960000
76.437500	95.577500	76.458333	177.275000	76.479167	141.717500	76.500000	27.662500	76.520833	39.142500
76.541667	226.240000	76.562500	98.555000	76.583333	226.837500	76.604167	116.597500	76.625000	130.755000
76.645833	109.700000	76.666667	83.890000	76.687500	49.687500	76.708333	63.727500	76.729167	41.075000
76.750000	13.525000	76.770833	4.830000	76.791667	0.000000	76.812500	0.000000	76.833333	0.000000
76.854167	0.000000	76.875000	0.000000	76.895833	0.000000	76.916667	0.000000	76.937500	0.000000
76.958333	0.000000	76.979167	0.000000	77.000000	0.000000	77.020833	0.000000	77.041667	0.000000
77.062500	0.000000	77.083333	0.000000	77.104167	0.000000	77.125000	0.000000	77.145833	0.000000
77.166667	0.000000	77.187500	0.000000	77.208333	0.000000	77.229167	0.000000	77.250000	0.000000
77.270833	0.000000	77.291667	4.445000	77.312500	8.527500	77.333333	22.677500	77.354167	49.447500
77.375000	46.940000	77.395833	53.372500	77.416667	58.960000	77.437500	95.577500	77.458333	177.275000
77.479167	141.717500	77.500000	27.662500	77.520833	39.142500	77.541667	226.240000	77.562500	98.555000
77.583333	226.837500	77.604167	116.597500	77.625000	130.755000	77.645833	109.700000	77.666667	83.890000
77.687500	49.687500	77.708333	63.727500	77.729167	41.075000	77.750000	13.525000	77.770833	4.830000
77.791667	0.000000	77.812500	0.000000	77.833333	0.000000	77.854167	0.000000	77.875000	0.000000
77.895833	0.000000	77.916667	0.000000	77.937500	0.000000	77.958333	0.000000	77.979167	0.000000
78.000000	0.000000	78.020833	0.000000	78.041667	0.000000	78.062500	0.000000	78.083333	0.000000
78.104167	0.000000	78.125000	0.000000	78.145833	0.000000	78.166667	0.000000	78.187500	0.000000
78.208333	0.000000	78.229167	0.000000	78.250000	0.000000	78.270833	0.000000	78.291667	4.445000
78.312500	8.527500	78.333333	22.677500	78.354167	49.447500	78.375000	46.940000	78.395833	53.372500
78.416667	58.960000	78.437500	95.577500	78.458333	177.275000	78.479167	141.717500	78.500000	27.662500
78.520833	39.142500	78.541667	226.240000	78.562500	98.555000	78.583333	226.837500	78.604167	116.597500
78.625000	130.755000	78.645833	109.700000	78.666667	83.890000	78.687500	49.687500	78.708333	63.727500
78.729167	41.075000	78.750000	13.525000	78.770833	4.830000	78.791667	0.000000	78.812500	0.000000
78.833333	0.000000	78.854167	0.000000	78.875000	0.000000	78.895833	0.000000	78.916667	0.000000
78.937500	0.000000	78.958333	0.000000	78.979167	0.000000	79.000000	0.000000	79.020833	0.000000
79.041667	0.000000	79.062500	0.000000	79.083333	0.000000	79.104167	0.000000	79.125000	0.000000
79.145833	0.000000	79.166667	0.000000	79.187500	0.000000	79.208333	0.000000	79.229167	0.000000
79.250000	0.000000	79.270833	0.000000	79.291667	4.445000	79.312500	8.527500	79.333333	22.677500
79.354167	49.447500	79.375000	46.940000	79.395833	53.372500	79.416667	58.960000	79.437500	95.577500
79.458333	177.275000	79.479167	141.717500	79.500000	27.662500	79.520833	39.142500	79.541667	226.240000
79.562500	98.555000	79.583333	226.837500	79.604167	116.597500	79.625000	130.755000	79.645833	109.700000
79.666667	83.890000	79.687500	49.687500	79.708333	63.727500	79.729167	41.075000	79.750000	13.525000
79.770833	4.830000	79.791667	0.000000	79.812500	0.000000	79.833333	0.000000	79.854167	0.000000
79.875000	0.000000	79.895833	0.000000	79.916667	0.000000	79.937500	0.000000	79.958000	0.000000
79.979000	0.000000	80.000000	0.000000						

Tabla B.1 Radiación fotosintéticamente activa, $V_{i,p}$, tomada para el período del 21 de enero al 17 de marzo de 1992 por la Universidad de Wageningen Holanda.

Apendice C

Simplificación de la conductancia de CO_2 a través de las hojas

Con la finalidad de acelerar las simulaciones MatLab[®]-Simulink, se aproxima la conductancia de CO_2 a través de las hojas a su valor promedio en su período de luz.

C.1 Valor promedio de la conductancia de CO_2 a través de las hojas para el cultivo de la lechuga en invernadero para el período de luz

Al incidir una RFA teórica promedio con coeficiente de nubosidad igual a uno (ver figura 2.2) se encuentra que la temperatura $\bar{Z}_{t,D}$, promedio total dentro del invernadero, $\bar{Z}_{t,D,prom}$:

$$\bar{Z}_{t,D,prom} = \frac{1}{80 - 23} \int_{23}^{80} \left[\frac{(c_{cap,q,v} \bar{U}_v + c_{cal,ou})}{(c_{cap,q,v} \bar{U}_v + c_{cal,ou})} \bar{V}_t - \frac{c_{rad}}{c_1 (c_{cap,q,v} \bar{U}_v + c_{cal,ou})} \alpha_D \right] dt, \quad (\text{C.1})$$

se puede aproximar por:

$$\bar{Z}_{t,D,prom} \simeq 17.1 [{}^{\circ}\text{C}]. \quad (\text{C.2})$$

Por lo tanto, para acelerar las simulaciones MatLab[®]-Simulink, se aproxima la variable ρ_D a su valor promedio, $\rho_{D,prom}$, esto es:

$$\rho_D \simeq \rho_{D,prom} = -c_{co2,1} \bar{Z}_{t,D,prom}^2 + c_{co2,2} \bar{Z}_{t,D,prom} - c_{co2,3} \simeq 1.933611100102 \times 10^{-3} [\text{m/s}]. \quad (\text{C.3})$$

C.2 Simulaciones y resultados

En la figura C.1 se muestra la gráfica de ρ , (2.17), cuando incide una RFA teórica promedio con coeficiente de nubosidad igual a uno (ver figura 2.2 y (2.22)).

En la figura C.2 se muestra ρ_D y $\rho_{D,prom}$ cuando incide una RFA teórica promedio con coeficiente de nubosidad igual a uno (ver figura 2.2).

En la figura C.3 se compara el comportamiento de la materia seca \bar{X}_d cuando incide una RFA teórica promedio (ver figura 2.5) para una $\rho_{D,prom}$, (C.3), denotada por $\bar{X}_{d,prom}$, con respecto a la obtenida tomando una ρ_D sin promediar, (3.16).

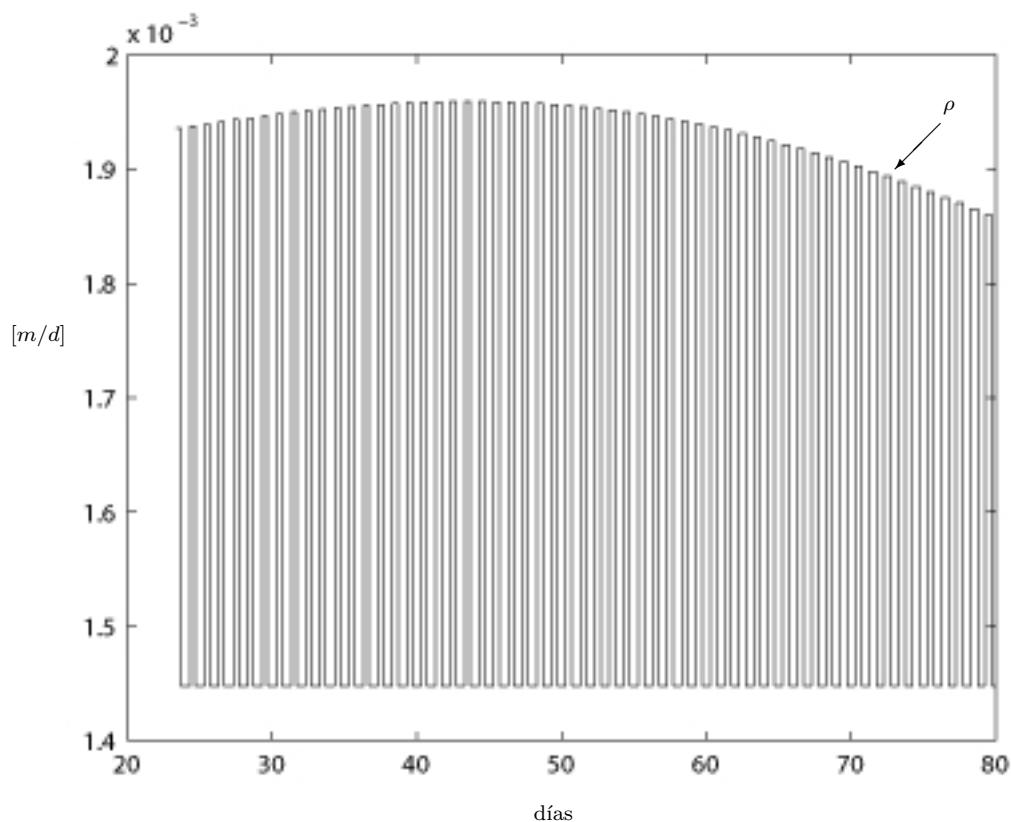


Figura C.1 Simulación de la conductancia del CO_2 , para una radiación fotosintéticamente activa teórica promedio con coeficiente de nubosidad igual a uno

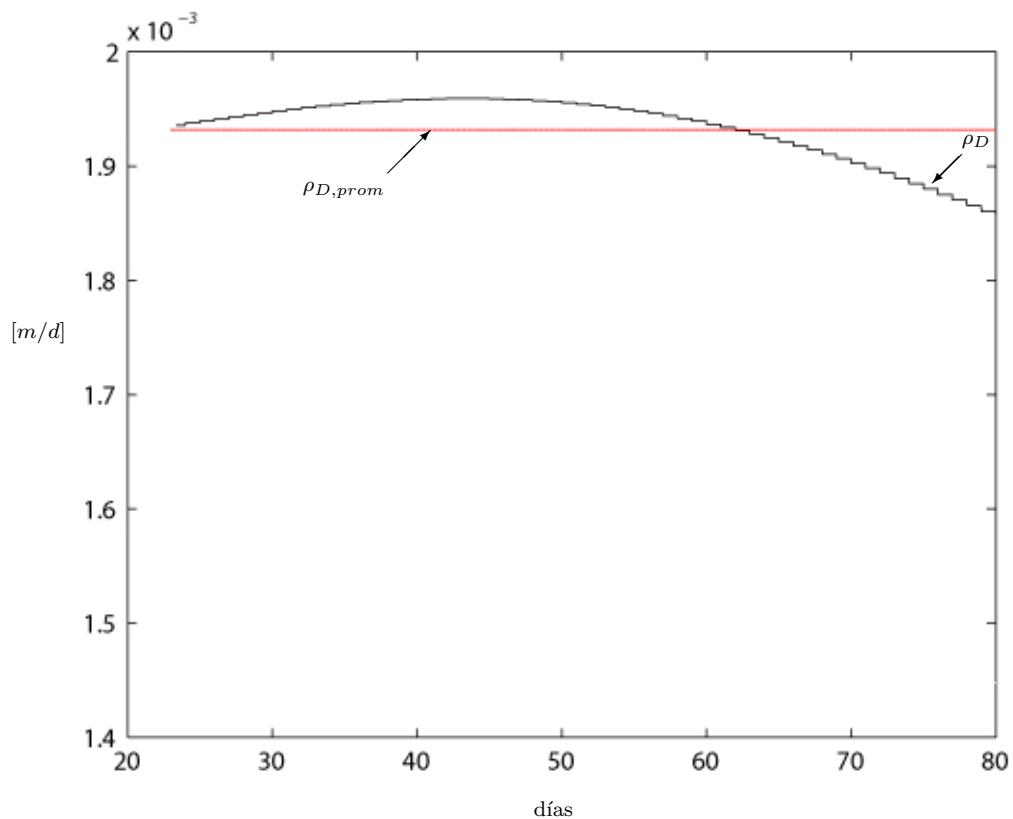


Figura C.2 Simulación de la conductancia del CO_2 en su período de luz, ρ_D y en su valor promedio, $\rho_{D,prom}$

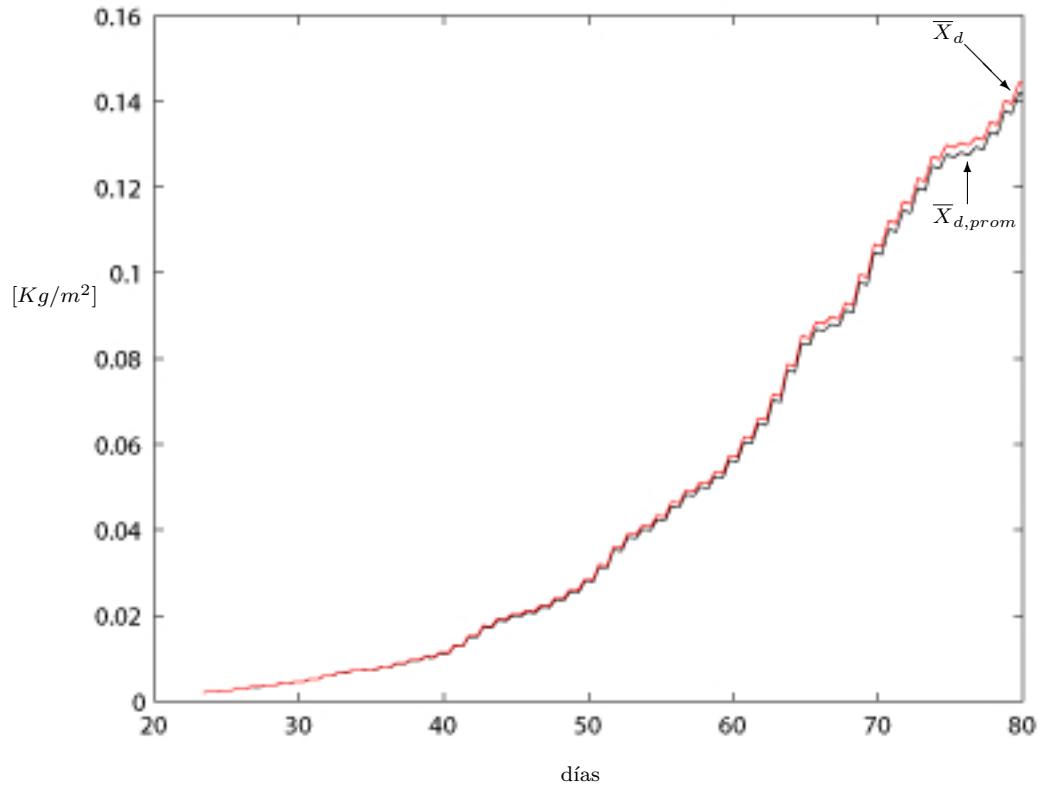


Figura C.3 Simulación de la materia seca, \bar{X}_d vs t , tomando ρ_D (ver (3.16)) comparada con la materia seca, $\bar{X}_{d,prom}$, tomando una $\rho_{D,prom}$ (ver (C.3))

Apendice D

Desarrollo matemático: capítulo 4

D.1 Derivadas parciales, a_D , b_D y c_D

A partir de (3.11) se tiene que la derivada respecto del tiempo del parámetro a_D es:

$$\frac{da_D}{dt} = \tau \frac{d\rho_D}{dt}, \quad (\text{D.1})$$

A partir de (3.12) se encuentra que la derivada respecto del tiempo del parámetro b_D es:

$$\begin{aligned} \frac{db_D}{dt} &= \frac{\partial b_D}{\partial \alpha_D} \left(\frac{d\alpha_D}{dt} \right) + \frac{\partial b_D}{\partial \bar{X}_D} \left(\frac{d\bar{X}_D}{dt} \right) + \frac{\partial b_D}{\partial \rho_D} \left(\frac{d\rho_D}{dt} \right) - \rho_D \frac{d\bar{U}_{c,D}}{dt} \\ &= \left(\rho_D \omega + \tau - \rho_D \frac{\partial \delta_D}{\partial \alpha_D} \right) \frac{d\alpha_D}{dt} + \rho_D \left(\alpha_D \frac{\partial \omega}{\partial \bar{X}_D} - \frac{\partial \delta_D}{\partial \bar{X}_D} \right) \left(\frac{d\bar{X}_D}{dt} \right) - \rho_D \frac{d\bar{U}_{c,D}}{dt} + (\alpha_D \omega - \delta_D) \left(\frac{d\rho_D}{dt} \right), \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

donde a partir de (3.14)-(3.15), se tiene:

$$\frac{d\delta_D}{dt} = \frac{\partial \delta_D}{\partial \bar{X}_D} \left(d\bar{X}_D/dt \right) + \frac{\partial \delta_D}{\partial \alpha_D} \left(d\alpha_D/dt \right) + \frac{d\bar{U}_{c,D}}{dt}, \quad (\text{D.3})$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial \omega}{\partial \bar{X}_D} \left(d\bar{X}_D/dt \right), \quad (\text{D.4})$$

$$\frac{\partial b_D}{\partial \bar{X}_D} = \rho_D \alpha_D \left(\frac{\partial \omega}{\partial \bar{X}_D} - \rho_D \frac{\partial \delta_D}{\partial \bar{X}_D} \right), \quad (\text{D.5})$$

$$\frac{\partial b_D}{\partial \alpha_D} = \left(\rho_D \omega + \tau - \rho_D \frac{\partial \delta_D}{\partial \alpha_D} \right), \quad (\text{D.6})$$

$$\frac{\partial b_D}{\partial \rho_D} = (\alpha_d \omega - \delta_D). \quad (\text{D.7})$$

A partir de (3.13), se encuentra que la derivada respecto del tiempo del parámetro c_D es:

$$\frac{dc_D}{dt} = \frac{\partial c_D}{\partial \alpha_D} \left(\frac{d\alpha_D}{dt} \right) + \frac{\partial c_D}{\partial \bar{X}_d} \left(\frac{d\bar{X}_d}{dt} \right) - \alpha_D \frac{d\bar{U}_{c,D}}{dt}, \quad (\text{D.8})$$

donde

$$\frac{\partial c_D}{\partial \bar{X}_D} = -\alpha_D \frac{\partial \delta_D}{\partial \bar{X}_D}, \quad (\text{D.9})$$

$$\frac{\partial c_D}{\partial \alpha_D} = -\delta_D. \quad (\text{D.10})$$

D.2 Aproximación del parámetro de crecimiento específico, κ

Con respecto al parámetro de crecimiento relativo $\kappa [-]$, (4.16), se observa que:

1. La variable $\tau = (\bar{U}_v + c_{leak})$ esta dada por:

$$\tau = 1.075 \times 10^{-3} [\text{m/s}]. \quad (\text{D.11})$$

2. La variable $\alpha_D = c_1 \bar{V}_i$ se puede expresar como:

$$\alpha_D = 3.55 \times 10^{-9} \bar{V}_i [\text{kg/m}^2 \text{s}] \quad (\text{D.12})$$

3. La variable $\omega [-]$ esta acotada por:

$$0 < \omega [-] \leq 1. \quad (\text{D.13})$$

4. La variable $\tilde{Z}_{c,D} [\text{kg/m}^3]$ esta acotada por (ver tabla 2.2):

$$0 \leq \tilde{Z}_{c,D} \leq 2.75 \times 10^{-3}. \quad (\text{D.14})$$

Al analizar el término, $\frac{1}{\tau} \frac{\omega_D \alpha_D^2 \rho_D}{(\alpha_D + \rho_D \tilde{Z}_{c,D})^2}$, y tomando en cuenta que $\alpha_D > 0$ se obtiene que,

$$\left(\alpha_D + \rho_D \tilde{Z}_{c,D} \right)^2 = \alpha_D^2 + 2\alpha_D \rho_D \tilde{Z}_{c,D} + \rho_D^2 \tilde{Z}_{c,D}^2, \quad (\text{D.15})$$

esta acotado por:

$$\alpha_D^2 \leq \left(\alpha_D + \rho_D \tilde{Z}_{c,D} \right)^2 \leq 2\alpha_D^2. \quad (\text{D.16})$$

Por lo tanto, el término $\frac{1}{\tau} \frac{\omega_D \alpha_D^2 \rho_D}{(\alpha_D + \rho_D \tilde{Z}_{c,D})^2}$ tomando en consideración (D.11)-(D.16) esta acotado por:

$$0 \leq \frac{1}{\tau} \frac{\omega_D \alpha_D^2 \rho_D}{\left(\alpha_D + \rho_D \tilde{Z}_{c,D} \right)^2} \leq 1.1 \times 10^{-6}. \quad (\text{D.17})$$

Finalmente, se tiene: $1 \leq \kappa \leq 1.0000011$

Apéndice E

Función, $f_b^*(\bar{U}_{c,D})$

Para obtener las aproximaciones (6.4) y (6.5), se expresa primero a (6.3) de la siguiente manera:

$$\phi_{c,al,pl} = \left(\frac{\tau}{\rho} \alpha + \tau \tilde{Z}_{c,D} \right) f_{b(t, v_i, \bar{U}_{c,D})}, \quad (\text{E.1})$$

donde

$$f_{b(t, v_i, \bar{U}_{c,D})} = \frac{(\bar{U}_{c,D} + \tau (\bar{V}_c - c_\Gamma)) - \tau \tilde{Z}_{c,D}}{\left(\frac{\tau}{\rho} \alpha_D + \tau \tilde{Z}_{c,D} \right)}. \quad (\text{E.2})$$

Enseguida se aproxima $f_{b(t, v_i, \bar{U}_{c,D})}$ por una curva $f_b''(\bar{U}_{c,D})$, siguiendo el siguiente procedimiento:

1. Se realizan simulaciones, para cada $\bar{U}_{c,D} \in [0, 0.1, \dots, 0.9, 1] \bar{U}_{c,D,\max}$, para diferentes valores de $V_i \in [20, 50, \dots, 170, 200]$ (ver figura E.1).
2. Se ajustan a líneas horizontales, $\bar{f}_{b(v_i, \bar{U}_{c,D})}$, para las diferentes curvas, $f_{b(t, v_i, \bar{U}_{c,D})}$, obtenidas para cada par de valores $(V_i, \bar{U}_{c,D})$ (ver figura E.2).
3. Con cada conjunto de líneas ajustadas, $\bar{f}_{b(v_i, \bar{U}_{c,D})}$, se obtiene una curva $f_b'(\bar{v}_i, \bar{U}_{c,D})$, para un valor dado de $\bar{U}_{c,D}$, como se muestra en la figura E.3(a).
4. Se ajustan a líneas horizontales, $\bar{f}'_{b(\bar{U}_{c,D})}$, las diferentes curvas, $f_b'(\bar{v}_i, \bar{U}_{c,D})$, obtenidas para cada $\bar{U}_{c,D}$ (ver figura E.3(b)).
5. Con el conjunto de líneas ajustadas, $\bar{f}'_{b(\bar{U}_{c,D})}$, se obtiene la curva $f_b''(\bar{U}_{c,D})$, mostrada en la figura E.4(a).

A partir de la curva, $f_b''(\bar{U}_{c,D})$, encontrada en la figura E.4(a), a continuación se encuentra una función algebraica, $f_b^*(\bar{U}_{c,D})$, que interpola a dicha función.

Interpolación de $f_b''(\bar{U}_{c,D})$.

Analizando la figura E.4(a) se infiere que $f_b''(\bar{U}_{c,D})$, puede ser interpolada por la siguiente función:

$$f_b^*(\bar{U}_{c,D}) = \theta_o + \frac{1}{\frac{1}{\theta_1} \bar{U}_{c,D} + \frac{\theta_2}{\theta_1}}. \quad (\text{E.3})$$

La interpolación y el procedimiento de ajuste fueron hechas mediante el comando “polyfit” de MatLab®. Los parámetros de $f_b^*(\bar{U}_{c,D})$ son:

$$\theta_o = -0.2, \theta_1 = 1.6174 \times 10^{-6} \text{ y } \theta_2 = 3.5147 \times 10^{-6}.$$

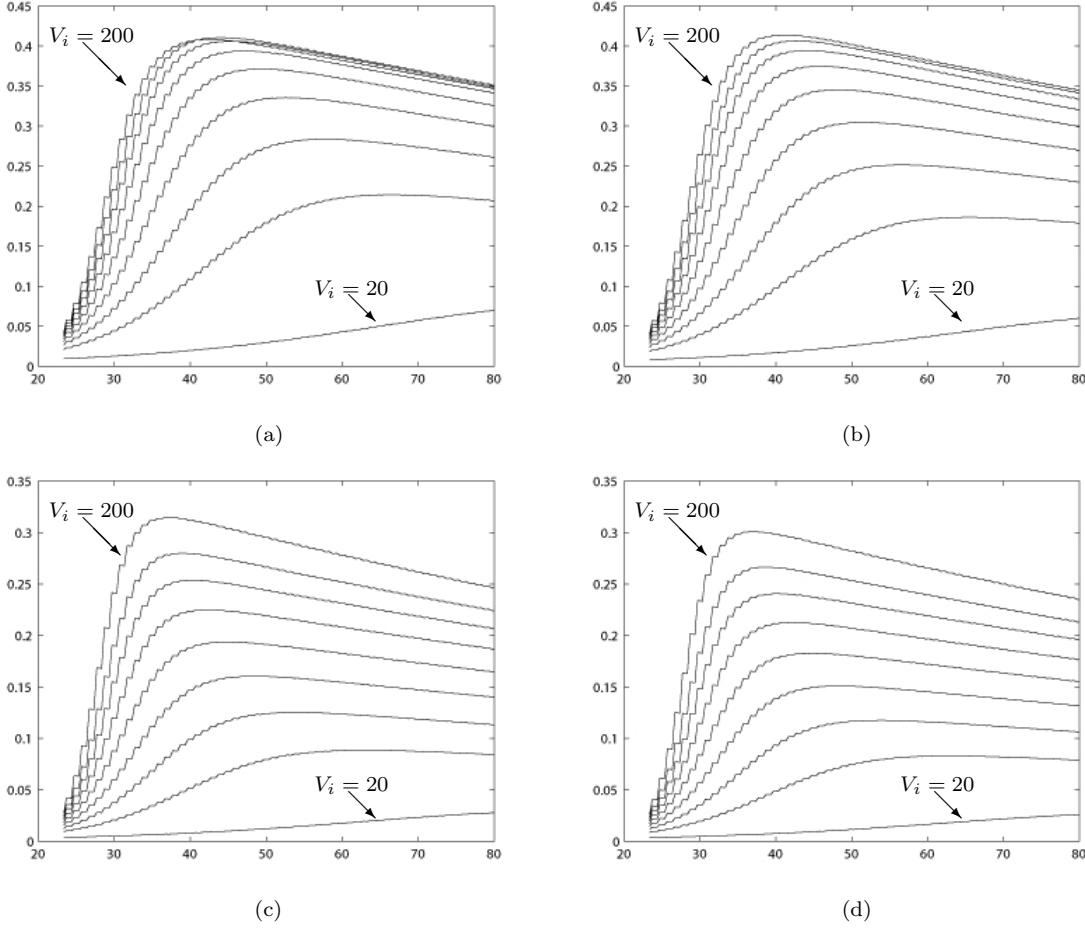


Figura E.1 Comportamiento $\text{def}_b(t, v_i, \bar{U}_{c,D})$ v.s. t [días], donde $V_i \in [20, 40, \dots, 200]$, para: (a) $\bar{U}_{c,D} = 0$, (b) $\bar{U}_{c,D} = 0.1\bar{U}_{c,D,\max}$, (c) $\bar{U}_{c,D} = 0.9\bar{U}_{c,D,\max}$, (d) $\bar{U}_{c,D} = \bar{U}_{c,D,\max}$

Hay que notar que estos parámetros pueden también ser aproximados en términos de los parámetros del crecimiento de la lechuga en invernadero, esto es:

$$\theta_o \simeq -2 + \frac{\rho_D}{\tau}, \quad \theta_1 \simeq \frac{\rho_D}{\tau} \bar{U}_{c,D,\max} \quad \text{y} \quad \theta_2 \simeq (\rho_D/\tau)^2 \bar{U}_{c,D,\max}.$$

De esta forma se ha aproximado $f_b''(\bar{U}_{c,D})$ por la función (ver figura E.4(b)):

$$f_b^*(\bar{U}_{c,D}) \simeq \left(-2 + \frac{\rho_D}{\tau} \right) + \frac{\frac{\rho_D}{\tau}}{\frac{\bar{U}_{c,D}}{\bar{U}_{c,D,\max}} + \left(\frac{\rho_D}{\tau} \right)^2} \in [0.13 \quad 0.35]. \quad (\text{E.4})$$

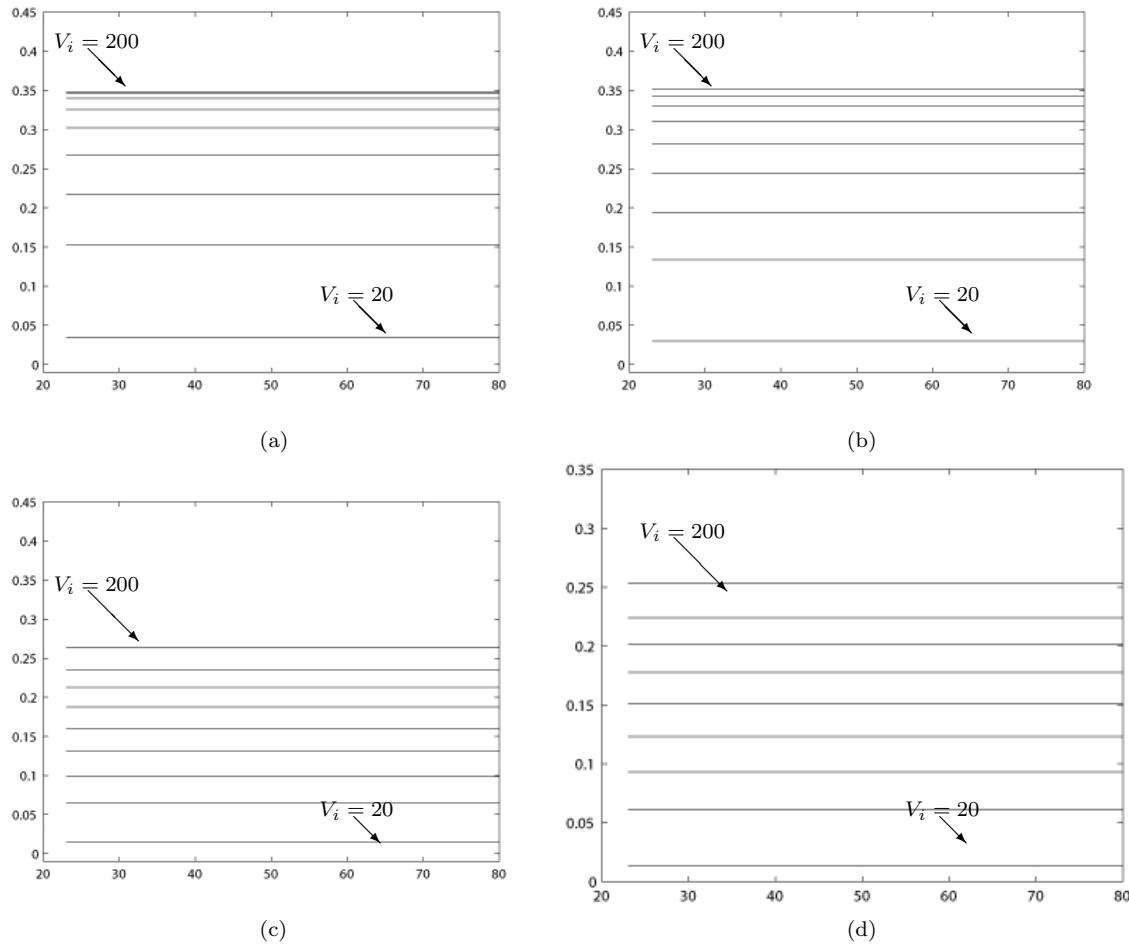


Figura E.2 Procedimiento de aproximación para el ajuste a líneas horizontales de las curvas obtenidas en el punto 1 (ver figura E.1). Comportamiento de $f_b(t, V_i, \bar{U}_{c,D})$ v.s. t [dfas], donde $V_i \in [20, 40, \dots, 200]$, para: (a) $\bar{U}_{c,D} = 0$, (b) $\bar{U}_{c,D} = 0.1\bar{U}_{c,D,\max}$, (c) $\bar{U}_{c,D} = 0.9\bar{U}_{c,D,\max}$, (d) $\bar{U}_{c,D} = \bar{U}_{c,D,\max}$.

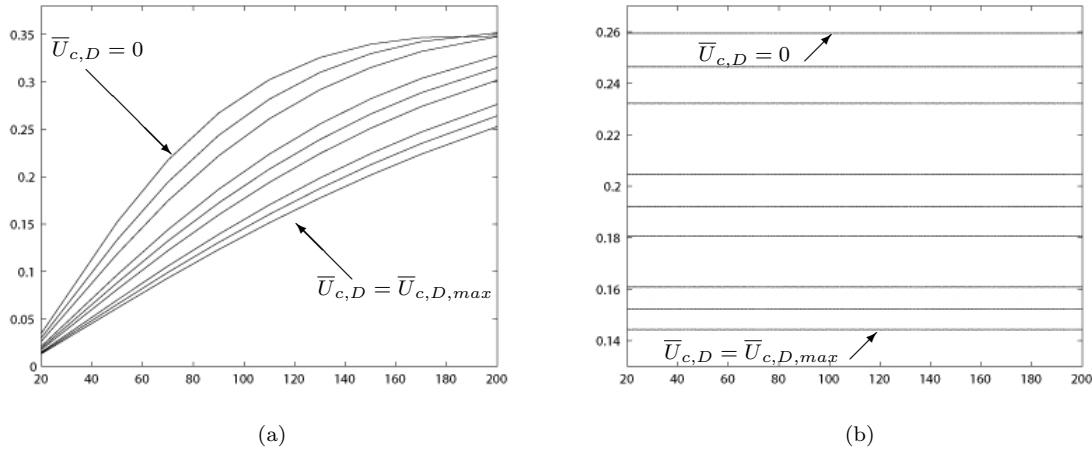


Figura E.3 (a) $f'_b(V_i, \bar{U}_{c,D})$ v.s. curvas V_i , definidas es el punto 2. (b) $\tilde{f}'_b(V_i, \bar{U}_{c,D})$ v.s. V_i ; procedimiento para el ajuste a líneas horizontales de las curvas obtenidas en el punto 3

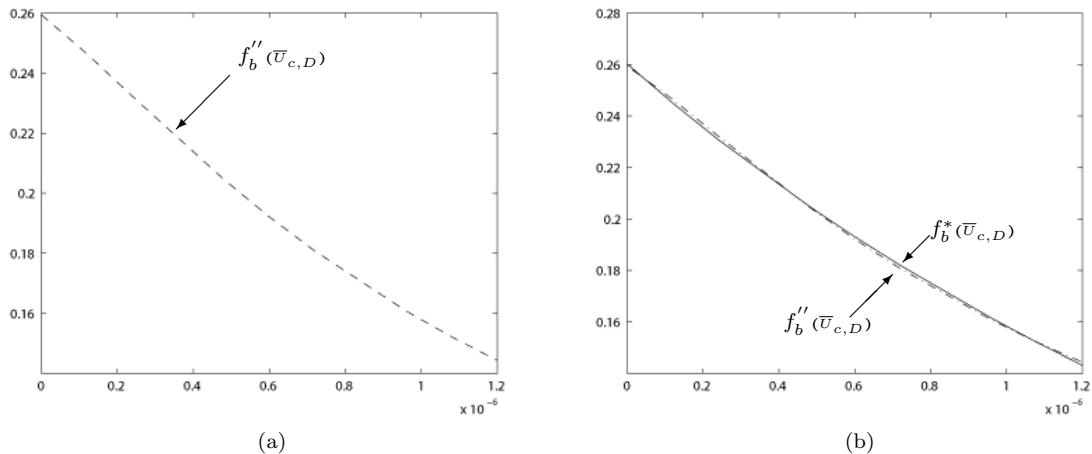


Figura E.4 (a) Gráfica de $f''_b(\bar{U}_{c,D})$ v.s. $\bar{U}_{c,D}$. (b) Interpolación $f''_b(\bar{U}_{c,D})$ por $f_b^*(\bar{U}_{c,D})$ v.s. $\bar{U}_{c,D}$

Apendice F

Método de paso descendente

Resumen del algoritmo del método de paso descendente propuesto por van Henten, para encontrar la ley de control óptimo en cada paso de muestreo (ver sección 5.7 de [24])

Para resolver el problema de control óptimo , mediante el método de paso descendente el algoritmo siguiente es implementado:

- 1 Se inicia el número de iteración $i = 0$, eligiendo una aproximación discreta de la trayectoria del control nominal $\bar{U}_c^{(0)}(t)$, $t \in [t_b, t_f]$ satisfaciendo las restricciones de control y se elige el valor deseado del criterio de convergencia.
- 2 Se integra la ecuación de estado (2.13) a partir de t_b a t_f usando la trayectoria del control nominal $\bar{U}_c^{(1)}(t)$ y las condiciones de frontera iniciales $\bar{X}_d(t_b) = \bar{X}_{d,b}$ y se almacena la trayectoria del estado nominal resultante $\bar{X}_d^{(i)}(t)$
- 3 Se calcula el criterio de desempeño $J^{(i)}$
- 4 Se integra la ecuación de coestado, (7.7) a partir de t_f a t_b usando el control nominal y las trayectorias de estado $\bar{X}_d^{(i)}(t)$ y $\bar{U}_c^{(i)}(t)$ y la condición final de frontera $\lambda^{(i)}(t_f) = \frac{\partial}{\partial \bar{X}_d} (\alpha + \beta \bar{X}_d^{(i)}(t_f))$ y se almacena el resultado de la trayectoria del coestado nominal $\lambda^{(i)}(t)$.
- 5 Se calcula el gradiente $\frac{\partial H^{(i)}}{\partial \bar{U}_c}(t)$ y se determina $\bar{\sigma}_{\max}$ así como $\delta \bar{U}_{c,j,\max}(t)$, $j = 1, \dots, m$, para todo $t = [t_b, t_f]$ usando las ecuaciones $\bar{\sigma}_{\max} = \min(\sigma_{j,\max}(t))$, $\sigma_{j,\max}(t) = 1 / \left| \frac{\partial H^{(i)}}{\partial \bar{U}_{c,j}(t)} \right|$ y
- $$\delta \bar{U}_{c,\max}(t) = \begin{cases} \bar{U}_{c,\max} - \bar{U}_c^{(i)}(t) & \text{if } \frac{\partial H^{(i)}}{\partial \bar{U}_c(t)}(t) > 0 \\ \bar{U}_c^{(i)}(t) - \bar{U}_{c,\min}(t) & \text{if } \frac{\partial H^{(i)}}{\partial \bar{U}_c(t)}(t) < 0 \end{cases}.$$
- 6 Usando el criterio $\bar{U}_c^{(i+1)} = \bar{U}_c^{(i)} + \frac{\partial H^{(i)}}{\partial \bar{U}_c}(t) \delta \bar{U}_{c,\max}(t)$, de búsqueda para σ^* tal que el criterio de desempeño $J^{(i+1)}$ se maximiza sujeto a la restricción $0 < \sigma^* \leq \bar{\sigma}_{\max}$
- 7 Sí $0 < J^{(i+1)} < \epsilon$ se almacena la trayectoria de control óptima $\bar{U}_c^{(i+1)}$ y se va al paso ocho, en caso contrario seguir con $i = i + 1$ e ir al paso dos.
- 8 Fin

Parte IV

Publicaciones

Publicaciones

ICBB: First International Congress on Biotechnology and Bioengineering

First International Congress on Biotechnology and Bioengineering
November 5-7, 2008, México City. México

CDC2010: 49th IEEE Conference on Decision and Control

49th IEEE Conference on Decision and Control
December 15-17,2010, Hilton Atlanta Hotel, Atlanta, GA, USA

Proc. IS on High Technology for Greenhouse Systems-GreenSys2009
Ed.: M. Dorais, *Acta Hort.* 893, ISHS 2011

CDC2011: 50th IEEE Conference on Decision and Control (sometido)

50th IEEE Conference on Decision and Control

Referencias

1. Bonilla E. and Martínez A., 2001. *Modelling the lettuce growing process by a set of linear systems.* Proceedings of the fourth International Symposium on Mathematical Modelling and Simulation in Agricultural and Bio-Industries. Haifa, Israel.
2. Córdova, Z.J., 2004. *Análisis del crecimiento de la lechuga.* Tesis de Maestría, CINVESTAV-IPN, México.
3. Goudriaan, J., 1987. *Course Theoretical Production Ecology.* Wageningen Agricultural University, Wageningen.
4. Goudriaan, J., Van Laar, Van Keulen and W. Louwerse., 1985. *Photosynthesis, CO₂ and plant production.* Plenum Press, New York.
5. Goudriann, J. and Van Laar, H.H., 1994. *Modelling Potential Crop Growth Processes.* Kluwer Academic Publishers, Current Issues in Production Ecology, Vol 2, Netherlands.
6. Irineo L., 2004. *Introducción a la simulación de crecimiento y desarrollo de cultivos usando Fortran simulation Translator (FST).* Primer congreso nacional de fenología agrícola y modelos de simulación aplicados a la agricultura. Universidad de Chapingo, México.
7. Hunt R., 1982. *Plant Growth Curves: The functional Approach to Plant Growth Analysis.* Ed.Thomson Litho Ltd.
8. Kirk, D.E., 1970. *Optimal control theory.* Prentice-Hall, New Jersey.
9. Kokotovic P.V, Kalil H.K, O'Reilly J.,1986. *Singular Perturbation Methods in Control: Analysis and Design.* Ed. Academic Press. London.
10. Leal Enríquez E. y Bonilla Estrada M., 2008. *Estudio del modelo matemático para el crecimiento y desarrollo el cultivo de la Lechuga en Invernadero.* e-book Cinvestav ISBN 978.607.95065.0.6
11. Leal-Enríquez, E. and Bonilla-Estrada, M., 2011. *MODELLING THE GREENHOUSE LETTUCE CROP BY MEANS OF THE COMMUTATION OF TWO INDEPENDENT MODELS - CASE: CONSTANT TRANSMITIVITY COEFFICIENT.* Acta Hort. (ISHS) 893:747-755.
12. E. Leal-Enríquez. and M. Bonilla-Estrada., 2010. *Modelling the greenhouse lettuce crop by means of the commutation of two independent models.* Proceedings of 49th IEEE Conference on Decision and Control, Atlanta, GA, pp 4667–4672.
13. Martinez, G. Abraham., 2001. *Descripción del proceso del crecimiento de la Lechuga por un conjunto de sistemas lineales.* Tesis de Maestría. Cinvestav-I.P.N
14. Munack A., tantau H.J., 1997. *Mathematical and Control Applications in Agriculture and Horticulture.* IFAC Workshop Hannover, Germany, 28 September-2 October 1997. Pergamon.
15. Ramírez A. A., I.L. L López, A. Rojano, A., 2001. *Calibration of a Dynamic Lettuce Growth Model for a Soilless System in a Mild Climate.* Proceedings of the fourth International Symposium on Mathematical Modelling and Simulation in Agricultural and Bio-Industries. Haifa, Israel.
16. rothwell J., Chotai A., Young P. 1997. *Optimal Control of Crop Production.* Horticultural Glasshouse Mathematical and Control Applications in Agriculture and Horticulturae 1997 (see Munack A., Tantau H.J (1997), pp. 103-108.
17. Sebánek Jiri., 1992. *Plant Physiology.* Elsevier Science.
18. Spitters, C. J. T, H.A.J.M. Toussaint and J. Goudriaan., 1986. *Separating the diffuse and direct component of global radiation and its implications for modelling canopy photosynthesis. Part I. Components of incoming radiation.* Agricultural and Forest Meteorology. 38: 217:229.
19. Tap R.F., van Straten G., van Willigenburg L.G., 1997. *Comparation of Classical and Optimal Control of Greenhouse Tomato Crop Production.* Mathematical and Control Applications in Agriculturae and Horticulturae 1997 (see Munack A., Tantau H.J. (1997) pp. 103-108.
20. tap R.F., van Willigenburg L.G., van Straten G., van Henten E.J., 1996. *Receding horizon optimal control of greenhouse climate based on the lazy man weather prediction.* 13th IFAC Triennial World Congresss, 4a-01(3), 387-392, San Francisco.
21. Tchamitchian M., 1993. *Optimal control applied to tomato crop.* ECC'93, 1348-1352, Groningen, The Netherlands.

22. Thornley H.M and Johnson I.R., 1990. *Plant and Crop Modelling: A Mathematical Approach to Plant and Crop Phys.* Clarendon Press.
23. Udink ten Cate, A.J., 1983. *Modelling an (adaptive) Control of Greenhouse Climates.* Ph.D. Thesis, Wageningen Agricultural University, Wageningen.
24. van Henten, E.J., 1994. *Greenhouse Climate Management: An optimal Control Approach.* Ph.D. Thesis, Wageningen Agricultural University, Wageningen.
25. van Henten E.J., Bontsema J., 1992. *Singular Perturbation Methods Applied to a Variational Problem in Greenhouse Climate Control.* 3st IEEE-CDC, 3068-3069.
26. van Straten G., van Willigenburg G., van Henten E.J., van Ooteghem R., 2011. *Optimal Control of Greenhouse Cultivation.* CRC Press.