CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

DEPARTAMENTO DE CONTROL AUTOMÁTICO

Control subóptimo para el clima dentro de un invernadero: cultivo de la lechuga

TESIS QUE PRESENTA:

M. en C. Erik Leal Enríquez

para obtener el Grado de:

Doctor en Ciencias

en la Especialidad de

Control Automático

Director de tesis:

Dr. Moisés Bonilla Estrada

Mexico, Distrito Federal.

Junio, 2011

Indice

Tal	ola d	e acrónimos	viii
No	tació	n	x
Re	sume	en	xi
Ab	strac	±	ciii
			xv
1	Intr	oducción	1
	1.1	Objetivo de investigación	1
		1.1.1 Estructura de la Tesis	2
2	Mo	delo del crecimiento de la lechuga cultivada en invernadero	3
	2.1	Modelo fotosíntesis-respiración en el cultivo de la lechuga en invernadero	3
	2.2	Modelo para describir el clima dentro del invernadero	4
	2.3	Modelo clima-crecimiento	4
	2.4	Modelo singularmente perturbado	5
	2.5	Radiación fotosintéticamente activa	7
		2.5.1 Radiación fotosintéticamente activa promedio	7
	2.6	Comportamiento logístico de la materia seca	12
	2.7	Conclusiones	13
Pa	te I	Simplificación del modelo de van Henten	
3	Mo	delo Día-Noche para el crecimiento de la lechuga cultivada en invernadero	17
	3.1	Modelo para la etapa de día	18
	3.2	Modelo para la etapa de noche	19
	3.3	Modelo Dia-Noche para el cultivo de la lechuga en invernadero	19
	9.4	3.3.1 Simulaciones y Resultados	20
	3.4	Conclusiones	20
4	Raz 4.1	ón relativa de crecimiento Relación entre la aceleración de producción de la materia seca y la RRC para el	23
	4.0	periodo de luz	23
	$4.2 \\ 4.3$	Razon relativa de crecimiento en etapa de dia, RRC_D Aproximación de la razón relativa de crecimiento para la etapa de día	25 26

Indice

	4.4	Relación entre la aceleración de producción de la materia seca y la RRC para la etapa			
	4 5	de noche	26 26		
	$4.5 \\ 4.6$	Conclusiones	$\frac{26}{27}$		
5	Ané	ilisis del parámetro de crecimiento específico, $r_{b,D}$: caso de una BFA con			
-	coe	ficiente de nubosidad unitario	29		
	5.1	Estudio del parámetro de crecimiento específico, $r_{b,D}$	29		
	5.2	Simulaciones y resultados	30		
	5.3	Conclusiones	30		
6	Aná	ilisis de la fotosíntesis máxima de asimilación de CO_2 , $\phi_{nhot max}$	33		
	6.1	Aproximación de $\phi_{c.al.pl}$	33		
	6.2	Aproximación de $\phi_{phot,max}$	34		
	6.3	Simulaciones y resultados	34		
	6.4	Conclusiones	34		
Pa	rte I	Ley de Control Subóptima			
7	Lov	de Control Subántima	30		
•	цеу 71	Hamiltoniano para el período de luz	39		
	1.1	7.1.1 Condiciones de optimalidad	40		
	7.2	Coestado λ_{Ds} : valores pequeños de materia seca	40		
	7.3	Coestado $\lambda_{D\ell}$: valores grandes de la materia seca	41		
	7.4	Ley de control subóptima	42		
	7.5	Simulaciones y Resultados	43		
	7.6	Conclusiones	44		
8	Cor	clusiones y Perspectivas	45		
	8.1	Conclusiones	45		
	8.2	Perspectivas	45		
Pa	rte I	II Apéndices			
Δ	Mo	delos de crecimiento en cultivos	/0		
11	A.1	Crecimiento exponencial	49		
	A.2	Crecimiento lineal	49		
	A.3	Crecimiento exponencial-lineal	50		
	A.4	Crecimiento logístico	51		
		A.4.1 Características del crecimiento logístico	52		
в	Rac	liación fotosintéticamente activa real	57		
\mathbf{C}	Sim	plificación de la conductancia de CO_2 a través de las hojas	67		
-	C.1	Valor promedio de la conductancia de CO_2 a través de las hojas para el cultivo de la	~.		
		lechuga en invernadero para el período de luz	67		
	C.2	Simulaciones y resultados	67		
D	Desarrollo matemático: capítulo 4				
	D.1	Derivadas parciales, a_D , b_D y c_D	71		
	D.2	Aproximación del parámetro de crecimiento específico, κ	72		

vi

Indice

\mathbf{E}	Función, $f_b^*(\overline{v}_{c,D})$	73
\mathbf{F}	Método de paso descendente	77
Pa	rte IV Publicaciones	
	ICBB: First International Congress on Biotechnology and Bioengineering CDC2010: 49th IEEE Conference on Decision and Control	82 83
	ISHS: Acta Horticulturae	84
	CDC2010: 50th IEEE Conference on Decision and Control (sometido)	85

vii

Tabla de acrónimos

Acrónimo	Descripción
CO_2 :	bióxido de Carbono
RFA:	radiación fotosintéticamente activa
RRC:	razón relativa de crecimiento
RRC_D :	razón relativa de crecimiento para la etapa de día
RRC_N :	razón relativa de crecimiento para la etapa de noche

Notación

Símbolo	Descripción
[-]	sin unidades
X_D	envolvente superior de la variable, \boldsymbol{X}
X_N	envolvente inferior de la variable, X

Resumen

Uno de los más importantes trabajos para la optimización de la producción de materia seca en invernaderos es hecha por van Henten. Una dificultad para sintetizar el esquema de control óptimo de van Henten es debido a las no linealidades presentadas en su modelo. De hecho, debido a esas no linealidades, el procedimiento para la síntesis de la ley de control es una tarea difícil. En particular, la ley de control propuesta para este modelo no puede ser expresada de una forma analítica, y es necesario resolver un algoritmo de programación no lineal. Con la finalidad de atacar este problema, en esta tesis se encuentra una ley de control subóptima analítica. Para esto, primero se separa el modelo de perturbaciones singulares de van Henten en dos modelos independientes: uno para el período de día y otro para el período de noche. Luego, se resuelve el problema de control subóptimo en dos pasos: primero se considera los valores pequeños de materia seca y luego se consideran los valores grandes.

Abstract

One of the most important works for optimizing the dry matter production in greenhouses is the one done by van Henten. A difficulty for synthesizing the van Henten's optimal control scheme is due to the high non-linearities presented in the model. Because of these high non-linearities, the control law synthesis procedure is a challenging task, indeed. In particular, the optimal control law proposed for this model can not be expressed in an analytical way, and it is necessary to solve a nonlinear programming algorithm. In order to tackle this difficulty, in this thesis we find an analytical suboptimal control law. For this, firstly we separate the van Henten's model into two independent models: one for the day period and the other one to the night period. Then, we solved the suboptimal control problem in two steps: we first consider small values of the dry matter and we then consider larger values.

Capítulo 1 Introducción

Uno de los progresos más importantes en la agricultura moderna es la utilización de modelos matemáticos para describir el comportamiento fisiológico del crecimiento de las plantas (ver [22] por ejemplo). La incorporación de tales modelos matemáticos en la producción de plantas y cultivos, ha permitido el uso de técnicas de control avanzado para controlar el clima en invernaderos (ver [14] por ejemplo).

La explotación de cultivos en entornos artificiales es interesante, tanto cualitativamente como cuantitativamente, tanto para el productor como para el consumidor. El controlar los ciclos de crecimiento y de la cosecha, mediante el establecimiento de condiciones climáticas, optimiza el manejo y la confiabilidad de la producción del cultivo [16]. Recientemente las técnicas de control óptimo comienzan a ser utilizadas en la producción de cultivos en invernaderos, porque conducen a un mejor manejo en la producción y gasto de la energía [19].

Una contribución importante a la optimización del control de clima en invernaderos se debe a van Henten [24]. En este trabajo, van Henten sigue un enfoque de control óptimo para la producción de lechugas en invernaderos. La dificultad para sintetizar el esquema de control óptimo de van Henten se debe a la presencia de fuertes no linealidades presentadas en su modelo. Debido a éstas la síntesis de la ley de control es una tarea difícil. En particular, la ley de control óptimo propuesta para este modelo no puede ser expresada de forma analítica, y es necesario resolver un algoritmo de programación no lineal en cada periodo de muestreo. Esto lleva a utilizar una aproximación numérica para resolver la ecuación Hamiltoniana [25]. Posterior a este trabajo se realizaron mejoras para optimizar la producción de la lechuga y jitomate en invernaderos, pero siempre siguiendo un enfoque algorítmico (ver [16], [20], [19] y [21] por ejemplo). Esto es, no se establece una ley de control óptimo analítica en términos de los parámetros del crecimiento del cultivo, en particular el de la lechuga.

Trabajos recientes han tratado de establecer leyes de control óptimo mediante la forma de la curva de crecimiento de la materia seca del cultivo (ver [1] y [13] por ejemplo), los cuales parten de la observación de que los datos experimentales obtenidos de la materia seca se ajustan a una curva logística. En estos trabajos se encuentra una ley de control óptimo para la entrada del suministro de bióxido de carbono (CO_2), mediante algoritmos computacionales. Recientemente, van Straten *et.al.* han editado un libro [26], en donde se resumen los principales avances de la aplicación de las técnicas de control óptimas a la gestión del cultivo de hortalizas en invernadero.

1.1 Objetivo de investigación

Establecer una ley de control subóptima analítica para el suministro de CO_2 al invernadero en términos de los parámetros del crecimiento de la lechuga.

1.1.1 Estructura de la Tesis

En el capítulo 2 se muestra el modelo de van Henten para el crecimiento de la lechuga en invernadero y se obtiene una expresión analítica de la radiación fotosintéticamente activa mediante una serie de Fourier. En este capítulo se observa que el comportamiento de la materia seca para el cultivo de la lechuga en invernadero es logístico.

En el capítulo 3 se muestra que el modelo de van Henten, puede separarse en dos partes: uno correspondiente a la presencia de radiación fotosintéticamente activa y otro en ausencia de ésta radiación. Estos modelos independientes actúan como envolventes¹ superior e inferior del modelo de van Henten.

En el capítulo 4 se encuentra la razón relativa de crecimiento para el cultivo de la lechuga en invernadero para los períodos de luz y de oscuridad. Para el período de luz se muestra que la razón relativa de crecimiento puede describirse mediante una curva logística, donde su parámetro de crecimiento específico esta relacionado directamente con la fotosíntesis máxima de asimilación de CO_2 . Para el período de oscuridad se muestra que la razón relativa de crecimiento puede describirse mediante una función lineal, donde su parámetro de crecimiento específico es una constante en la dinámica del crecimiento de la lechuga en inverandero.

En el capítulo 5 se analiza el parámetro de crecimiento específico, para el caso de una radiación fotosintéticamente activa con coeficiente de nubosidad unitario. En este caso se muestra que el parámetro de crecimiento específico puede ser aproximado por una función lineal que depende únicamente del CO_2 suministrado al invernadero.

En el capítulo 6 se muestra que la fotosíntesis máxima de asimilación de CO_2 se puede aproximar por una función que depende del CO_2 suministrado en el invernadero.

En el capítulo 7 se calcula una ley de control. Esta ley de control es desarrollada en términos de los parámetros de la lechuga cultivada en invernadero.

 $^{^1}$ En el capítulo 3 se muestran más detalles del concepto de envolvente utilizado en este trabajo de tesis.

Capítulo 2 Modelo del crecimiento de la lechuga cultivada en invernadero

En este capítulo se muestra el modelo de van Henten para el crecimiento de la lechuga en invernadero, el cual integra la materia seca con el clima¹ dentro del invernadero.

En este capítulo, con la finalidad de acelerar las simulaciones numéricas para obtener el comportamiento de la materia seca, se obtiene una expresión analítica de la radiación fotosintéticamente activa mediante una serie de Fourier truncada.

Finalmente, se muestra que el comportamiento de la materia seca para el cultivo de la lechuga en invernadero es logístico.

2.1 Modelo fotosíntesis-respiración en el cultivo de la lechuga en invernadero

El modelo para describir la producción de la materia seca² en términos de la fotosíntesis y respiración del cultivo es [18]:

$$\frac{dX_d}{dt} = c_\beta c_\alpha \phi_{fot} - c_\beta \phi_{resp},\tag{2.1}$$

donde $X_d [kg/m^2]$ es la materia seca dada en kilogramos por metro cuadrado de suelo cultivable, $\phi_{fot} [kg/m^2s]$ es la fotosíntesis bruta del cultivo, tomada como asimilación de CO_2 . $\phi_{resp} [kg/m^2s]$ es la respiración de mantenimiento expresada en términos de la cantidad de carbohidratos consumidos. $c_\beta[-]$ es el parámetro de respiración y pérdida de síntesis durante la conversión de carbohidratos a materia estructural, el cual tiene un valor entre cero y uno. $c_\alpha[-]$ es el parámetro para convertir el CO_2 asimilado en su equivalente en azúcares.

Para el cultivo de la lechuga en invernadero, la fotosíntesis bruta ϕ_{fot} se describe por la siguiente ecuación [24]:

$$\phi_{fot} = \left(1 - e^{-c_{pl,d}X_d}\right)\phi_{phot,\max},\tag{2.2}$$

donde $c_{pl,d}X_d[-]$ es el índice de área de hoja. El término $\phi_{phot,\max}[kg/m^2s]$, es la fotosíntesis máxima de asimilación de CO_2 del dosel por metro cuadrado de suelo cultivable, el cual está dado por [5]:

¹ El clima está integrado por la temperatura, la húmedad y la concentración de CO_2 dentro del invernadero.

² La materia seca de un cultivo se obtiene cuando una muestra del cultivo es colocada en un horno a una temperatura de $100^{\circ}C$ durante 24 horas, el agua se evapora y lo que resta se denomina materia seca. La materia seca de un cultivo contiene la mayoría de sus nutrientes (ver [15] por ejemplo).

 $2\;$ Modelo del crecimiento de la lechuga cultivada en invernadero

$$\phi_{phot,\max} = \frac{c_1 V_i \rho \left(X_c - c_\Gamma\right)}{c_1 V_i + \rho \left(X_c - c_\Gamma\right)},\tag{2.3}$$

donde $X_c[kg/m^3]$ es la concentración de CO_2 dentro del invernadero. La variable $V_i[W/m^2]$ es la radiación fotosintéticamente activa. El factor $c_{\Gamma}[kg/m^3]$ es el punto de compensación del CO_2 [4]. La constante $c_1[kg/J]$ es el parámetro de eficiencia de la luz [5]. La variable $\rho[m/s]$ es la conductancia de bióxido de carbono a través de las hojas [3].

La respiración, ϕ_{resp} , es descrita por [24]:

$$\phi_{resp} = c_{resp,1} X_d 2^{(0.1X_t - 2.5)}, \tag{2.4}$$

donde $X_d [kg/m^2]$ y $X_t [^{\circ}C]$ son la materia seca y la temperatura dentro del invernadero respectivamente. El factor $c_{resp,1}[1/s]$ toma en cuenta la conversión de carbohidratos en materia estructural.

2.2 Modelo para describir el clima dentro del invernadero

El modelo para describir el comportamiento del clima dentro del invernadero, que toma la temperatura y la concentración de bióxido de carbono CO_2 como variables de estado, está dado por [24]:

$$\frac{dX_t}{dt} = \frac{1}{c_{cap,q}} \left(Q_{pl,al} - Q_{al,ou} + Q_{rad} \right),$$
(2.5)

$$\frac{dX_c}{dt} = \frac{1}{c_{cap,c}} \left(U_c - \phi_{c,al,ou} - \phi_{c,al,pl} \right), \tag{2.6}$$

donde $X_t [^{\circ}C] \ y \ X_c \left[kg/m^3\right]$, son la temperatura y la concentración de CO_2 dentro del invernadero. La entrada de control $U_c \left[kg/m^2s\right]$, es la razón de CO_2 suministrado al invernadero³. Las variables $Q_{pl,al} \left[W/m^2\right]$, $Q_{al,ou} \left[W/m^2\right]$, y $Q_{rad} \left[W/m^2\right]$, son respectivamente la energía suministrada por el sistema de calefacción, la pérdida de energía debida al flujo natural del aire a través de las ventanas del invernadero y la energía debida al sol por metro cuadrado de suelo cultivado. Los términos $\phi_{c,al,pl} \left[kg/m^2s\right]$ y $\phi_{c,al,ou} \left[kg/m^2s\right]$, son el CO_2 dado por el cultivo y la ventilación con el aire exterior. Las constantes $c_{cap,q} \left[J/m^{2\circ}C\right]$ y $c_{cap,c} [m]$ son las capacidades de calor y aire dentro del invernadero.

2.3 Modelo clima-crecimiento

En su tesis doctoral, van Henten integra el modelo fotosíntesis-respiración (2.1) del cultivo de la lechuga con el modelo del clima dentro del invernadero (2.5)-(2.6) y al realizar un análisis de sensibilidad sobre las variables que afectan al desarrollo del crecimiento de la lechuga, obtuvo el siguiente modelo:

$$\frac{dX_d}{dt} = c_{\alpha\beta} \left(1 - e^{-c_{pl,d}X_d} \right) \frac{c_1 V_i \left(-c_{co2,1}X_t^2 + c_{co2,2}X_t - c_{co2,3} \right) \left(X_c - c_\Gamma \right)}{c_1 V_i + \left(-c_{co2,1}X_t^2 + c_{co2,2}X_t - c_{co2,3} \right) \left(X_c - c_\Gamma \right)} - c_{resp,1} X_d 2^{(0.1X_t - 2.5)}, \tag{2.7}$$

³ En un invernadero usualmente el CO_2 se suministra mediante un tanque de gas regulado por una válvula que se abre y se cierra para controlar el suministro de CO_2 al invernadero [26]

2.4 Modelo singularmente perturbado

$c_{\alpha\beta} = 0.544$	[-]
$c_{pl,d} = 53$	$\left[m^2/Kg\right]$
$c_1 = 3.55 \times 10^{-9}$	[kg/J]
$c_{co2,1} = 5.11 \times 10^{-6}$	$[m/sC^2]$
$c_{co2,2} = 2.3 \times 10^{-4}$	[m/sC]
$c_{co2,3} = 6.29 \times 10^{-4}$	[m/s]
$c_{\Gamma} = 5.2 \times 10^{-5}$	$\left[Kg/m^3\right]$
$c_{resp,1} = 2.65 \times 10^{-7}$	[1/s]
$c_{cap,c} = 4.1$	[m]
$c_{resp,2} = 4.8 \times 10^{-7}$	[1/s]
$c_{leak} = 0.75 \times 10^{-4}$	[m/s]
$c_{cap,q} = 3 \times 10^5$	$\left[J/m^2C\right]$
$c_{cap,q,v} = 1290$	$\left[J/m^{3}C\right]$
$c_{al,ou} = 6$	$\left[W/m^2C\right]$
$c_{rad} = 0.2$	[-]

Tabla 2.1 Parámetros para el modelo del crecimiento de la lechuga en invernadero (ver tabla 3.6 de [24])

$$\frac{dX_c}{dt} = \frac{1}{c_{cap,c}} \left[-\left(1 - e^{-c_{pl,d}X_d}\right) \frac{c_1 V_i \left(-c_{co2,1}X_t^2 + c_{co2,2}X_t - c_{co2,3}\right) \left(X_c - c_{\Gamma}\right)}{c_1 V_i + \left(-c_{co2,1}X_t^2 + c_{co2,2}X_t - c_{co2,3}\right) \left(X_c - c_{\Gamma}\right)} + c_{resp,2} X_d 2^{(0.1X_t - 2.5)} \right] \right]$$

$$+\frac{1}{c_{cap,c}}\left[+U_{c}-\left(U_{v}+c_{leak}\right)\left(X_{c}-V_{c}\right)\right],$$
(2.8)

$$\frac{dX_t}{dt} = \frac{1}{c_{cap,q}} \left(U_q - (c_{cap,q,v}U_v + c_{al,ou}) \left(X_t - V_t \right) + c_{rad}V_i \right),$$
(2.9)

donde $X_d [kg/m^2]$, $X_c [kg/m^3]$, y $X_t [^{\circ}C]$ son la materia seca de la lechuga, la concentración de CO_2 , y la temperatura dentro del invernadero respectivamente. $U_v [m/s]$ es la ventilación a través de las ventanas. $U_q [W/m^2]$ es la energía suministrada por el sistema de calefacción y $U_c [kg/m^2s]$ es el suministro de CO_2 . Además, se identifican las entradas externas que son la radiación fotosintéticamente activa $V_i [W/m^2]$, la concentración de $CO_2 V_c [kg/m^2s]$, y la temperatura $V_t [^{\circ}C]$ fuera del invernadero. El resto de los parámetros se muestran en la tabla 2.1 y se obtienen mediante experimentos y a partir de un análisis de sensibilidad para el desarrollo del cultivo de la lechuga en invernadero [24].

Tomando en cuenta que el crecimiento de la lechuga en un invernadero se lleva a cabo en 57 días y que el clima dentro del invernadero se mide en escala de minutos (ver [24] y [6] por ejemplo). En (2.7)-(2.9), se observa que existen dos diferentes escalas de tiempo, una en días (2.7) y la otra en minutos (2.8) y (2.9). Esto se debe a la integración del modelo de crecimiento con el clima dentro del invernadero [24].

2.4 Modelo singularmente perturbado

Para simplificar las simulaciones numéricas y la síntesis de la ley de Control Óptimo, van Henten, al igual que Udink [23], divide su modelo en una dinámica lenta (escala en días), dada por el comportamiento de X_d y una dinámica rápida (escala en minutos) dada por el comportamiento del clima en el invernadero, esto es, los cambios en las condiciones de temperatura y concentración del CO_2 son muy rápidos en comparación con el comportamiento de la materia seca. Esto permitió a van Henten diseñar un esquema de Control Óptimo basado en técnicas de perturbaciones singulares [9].

El modelo al cual se le aplica la técnica de perturbaciones singulares es:

2 Modelo del crecimiento de la lechuga cultivada en invernadero

$$\frac{dX_d}{dt} = c_{\alpha\beta} \left(1 - e^{-c_{pl,d}X_d} \right) \frac{c_1 V_i \left(-c_{co2,1} Z_t^2 + c_{co2,2} Z_t - c_{co2,3} \right) \left(Z_c - c_\Gamma \right)}{c_1 V_i + \left(-c_{co2,1} Z_t^2 + c_{co2,2} Z_t - c_{co2,3} \right) \left(Z_c - c_\Gamma \right)} - c_{resp,1} X_d 2^{(0.1Z_t - 2.5)}, \tag{2.10}$$

$$\varepsilon \frac{dZ_c}{dt} = \frac{1}{c_{cap,c}} \left[-\left(1 - e^{-c_{pl,d}X_d}\right) \frac{c_1 V_i \left(-c_{co2,1}Z_t^2 + c_{co2,2}Z_t - c_{co2,3}\right) \left(Z_c - c_{\Gamma}\right)}{c_1 V_i + \left(-c_{co2,1}Z_t^2 + c_{co2,2}Z_t - c_{co2,3}\right) \left(Z_c - c_{\Gamma}\right)} \right] + c_{resp,2} X_d 2^{(0.1Z_t - 2.5)}$$

$$+U_{c} - (U_{v} + c_{leak}) (Z_{c} - V_{c}), \qquad (2.11)$$

$$\varepsilon \frac{dZ_t}{dt} = \frac{1}{c_{cap,q}} \left(U_q - \left(c_{cap,q,v} U_v + c_{al,ou} \right) \left(Z_t - V_t \right) + c_{rad} V_i \right), \tag{2.12}$$

donde $Z_c [kg/m^3]$, $Z_t [\circ C]$ son los estados rápidos de la concentración de CO_2 y temperatura dentro del invernadero. ε es la perturbación aplicada al sistema.

Para simplificar (2.10)-(2.12), van Henten hace la suposición que los cambios en el crecimiento del cultivo de la lechuga en un invernadero son muy lentos en relación con los cambios en las condiciones de temperatura y concentración de CO_2 en el invernadero. Con esta suposición y tomando $\varepsilon = 0$ se obtiene el siguiente modelo singularmente perturbado:

$$\frac{d\overline{X}_d}{dt} = c_{\alpha\beta} \left(1 - e^{-c_{pl,d}\overline{X}_d} \right) \frac{c_1 V_i \left(-c_{co2,1}\overline{Z}_t^2 + c_{co2,2}\overline{Z}_t - c_{co2,3} \right) \left(\overline{Z}_c - c_{\Gamma} \right)}{c_1 V_i + \left(-c_{co2,1}\overline{Z}_t^2 + c_{co2,2}Z_t - c_{co2,3} \right) \left(\overline{Z}_c - c_{\Gamma} \right)} - c_{resp,1}\overline{X}_d 2^{\left(0.1\overline{Z}_t - 2.5\right)},$$

$$(2.13)$$

$$\overline{Z}_{c} = \frac{-\left(\omega\alpha\rho + \alpha\tau - \delta\rho\right) + \sqrt{\left(\omega\alpha\rho + \alpha\tau - \delta\rho\right)^{2} + 4\delta\alpha\tau\rho}}{2\tau\rho} + c_{\Gamma}, \qquad (2.14)$$

$$\overline{Z}_{t} = \frac{\left(c_{cap,q,v}\overline{U}_{v} + c_{al,ou}\right)\overline{V}_{t} - c_{rad}V_{i} + \overline{U}_{q}}{\left(c_{cap,q,v}\overline{U}_{v} + c_{al,ou}\right)}.$$
(2.15)

Los términos $\alpha,\,\rho,\,\omega$, δ , y τ están dados por:

$$\alpha = c_1 V_i, \tag{2.16}$$

$$\rho = -c_{co2,1}\overline{Z}_t^2 + c_{co2,2}\overline{Z}_t - c_{co2,3}, \qquad (2.17)$$

$$\omega = \left(1 - e^{-c_{pl,d}\overline{X}_d}\right),\tag{2.18}$$

$$\delta = c_{resp,2} \overline{X}_d 2^{\left(0.1\overline{Z}_t - 2.5\right)} + \overline{U}_c + \left(\overline{U}_v + c_{leak}\right) \left(\overline{V}_c - c_{\Gamma}\right), \qquad (2.19)$$

$$\tau = \left(\overline{U}_v + c_{leak}\right). \tag{2.20}$$

En el modelo dinámico (2.13)-(2.15, se distinguen las salidas $\overline{X}_d [kg/m^2]$, $\overline{Z}_c [kg/m^3]$ y $\overline{Z}_t [^{\circ}C]$, que son la materia seca, la concentración de CO_2 , y la temperatura del aire dentro del invernadero. Las entradas de control \overline{U}_v , \overline{U}_q y \overline{U}_c son la ventilación a través de las ventanas, la energía del

$\overline{U}_{c,\min}$	$0 \; [kg/m^2s]$
$\overline{U}_{c,\max}$	$1.2 \times 10^{-6} \ [kg/m^2s]$
$\overline{U}_{v,\min}$	0 [m/s]
$\overline{U}_{v,\max}$	$7.5 imes 10^{-3} \ [m/s]$
$\overline{U}_{q,\min}$	$0 \; [W/m^2]$
$\overline{U}_{q,\max}$	$150 \ [W/m^2]$
$\overline{Z}_{c,\min}$	$0 \; [kg/m^3]$
$\overline{Z}_{c,\max}$	$2.75 \times 10^{-3} \ [kg/m^3]$
$\overline{Z}_{t,\min}$	$6.5 \ [^{\circ}C]$
$\overline{Z}_{t,\max}$	$40 \ [^{\circ}C]$

Tabla 2.2 Cotas para las variables del crecimiento de la lechuga en invernadero (ver tabla 6.1 de [24])

sistema calefactor y el suministro de CO_2 . Además, se identifican las siguientes entradas externas: la concentración de CO_2 ambiental, \overline{V}_c , la temperatura, \overline{V}_t , fuera del invernadero y la radiación fotosintéticamente activa, V_i . En la tabla 2.2 se muestran las cotas para las variables de estado, las entradas de control y las entradas externas para el cultivo de la lechuga en invernadero [24].

2.5 Radiación fotosintéticamente activa

Con la finalidad de acelerar las simulaciones numéricas se obtiene una expresión analítica de la Radiación fotosintéticamente activa (RFA), proporcionada por la Universidad de Wageningen en Holanda del 21 de enero al 17 de marzo de 1992 (ver apéndice B).

2.5.1 Radiación fotosintéticamente activa promedio

La RFA promedio con coeficiente de nubosidad para el crecimiento de la lechuga en invernadero V_i , es (ver [5] y [1] por ejemplo):

$$V_{i} = \left\{ \begin{array}{cc} \overline{V}_{i,\tau_{n}} & \forall t \in \left[12 - \frac{d}{2}, 12 + \frac{d}{2}\right] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{array} \right\},$$
(2.21)

donde

$$\overline{V}_{i,\tau_n} = \frac{1}{d} V_o \tau_n \int_{12 - \frac{d}{2}}^{12 + \frac{d}{2}} \sin\beta dt \left(1 + 0.033 \cos\left(2\pi \frac{(t_d - 10)}{365}\right) \right)$$
(2.22)

у

$$\tau_n = \frac{V_{i,p}}{\overline{V}_{i,\tau_n=1}}.$$
(2.23)

El término $\overline{V}_{i,\tau_n=1}$ es la RFA teórica promedio, tomando el valor de $\tau_n = 1$ (ver figura 2.2 y (2.22)). El factor $V_{i,p} \left[W/m^2 \right]$, es la RFA obtenida de forma experimental para el período del 21 de enero al 17 de marzo (ver figura 2.1) [24]. $V_o = 1367 \left[W/m^2 \right]$ es la constante solar. El término $\beta[rad]$ es el ángulo de elevación del sol a un punto dado sobre la superficie terrestre, medido con respecto al horizonte. La constante t_d , es el día fenológico, el cual toma el valor de uno para el primero de enero y se cuenta consecutivamente hasta el día fenológico 365 que equivale al 31 de diciembre para el caso de año no bisiesto. El término d, es la duración del día solar, el cual influye en el desarrollo del cultivo por efectos foto-periódicos [5].



Figura 2.1 Radiación fotosintéticamente activa, $V_{i,p}$ vs t, para el período del 21 de enero al 17 de marzo de 1992, Wageningen Holanda (ver apéndice B)

En el artículo de Bonilla et al. [1], se obtiene de manera empírica el coeficiente de nubosidad τ_n ,⁴ (2.22), por medio de una serie de Fourier truncada:

$$\tau_n \simeq \frac{1}{2}a_o + \sum_{n=1}^p a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^p a_n \sin(n\omega t).$$
 (2.24)

En la tesis de maestría de Cordova [2], se obtienen estos coeficientes mediante redes neuronales. Analizando la transformada de Fourier de τ_n , se infirió una frecuencia fundamental $\omega = 0.01$ y se seleccionaron 17 términos, i.e, p = 17. En la tabla 2.3, se muestran los coeficientes a_n y b_n obtenidos. Se infirió un valor para el primer coeficiente de la serie de Fourier $\frac{1}{2}a_o = 0.207$ (ver figura 2.3).

Con el objetivo de obtener una mejor descripción de la RFA con respecto a la obtenida por [2], se hace un ajuste por mínimos cuadrados para el coeficiente de nubosidad τ_n . El ajuste se realiza usando el comando *fminsearch* de MatLab[®] tomando los valores: $\omega = 0.01$, p = 17, $\frac{1}{2}a_o = 0.1123$, y tomando como valores iniciales los dados por la tabla 2.3. En la tabla 2.4 se muestran los resultados obtenidos para los coeficientes a_n y b_n para un ajuste por mínimos cuadrados (comparar figuras 2.3 y 2.5 con

 $^{^4}$ Para aproximar τ_n por una serie de Fourier, se hace la suposición que es una función periódica.



Figura 2.2 Radiación fotos
intéticamente activa teórica promedio, $\overline{V}_{i,\tau_n=1}$ v
st

$\left n \right $	1	2	3	4	5
a_n	-0.0289	0.0262	0.0457	0.0234	0.0464
b_n	-0.0573	-0.0369	-0.027	-0.0136	-0.0143
$\left n \right $	6	7	8	9	10
a_n	0.0110	0.0529	0.0455	-0.0118	0.0190
$ b_n $	-0.0158	0.0241	0.0559	0.0342	0.0147
$\left n \right $	11	12	13	14	15
a_n	-0.0075	-0.0158	-0.0273	-0.0150	-0.0236
b_n	0.0205	-0.0080	-0.0026	0.0245	0.0109
n	16	17			
a_n	-0.0127	-0.0078			
b_n	-0.0138	-0.0176			

Tabla 2.3 Coeficientes $a_n \ge b_n$ obtenidos por medio de Redes Neuronales [2].

la figura 2.1). En la figura 2.4 se muestra la gráfica para el coeficiente de nubosidad obtenido a partir de (2.24).



Figura 2.3 Radiación fotos
intéticamente activa promedio, $V_{i,rn}$ vs t, con coeficiente de nubosidad obtenido por medio de rede
s neuronales

n	1	2	3	4	5
$ a_n $	0.0495	0.0560	0.0512	0.0583	7.741e - 4
b_n	-0.0475	-0.0119	-0.0079	-0.0029	-0.057
n	6	7	8	9	10
a_n	0.0157	0.0556	0.0378	-0.0031	0.0092
b_n	0.0035	0.0303	0.0408	0.0377	0.0229
n	11	12	13	14	15
a_n	-0.0053	-0.0304	-0.0233	0.0109	-0.0166
$ b_n $	0.0246	0.0012	-0.0031	0.0105	0.0089
n	16	17			
$ a_n $	-0.0039	-0.0067			
b_n	-0.0069	-0.0024			

Tabla 2.4 Coeficientes a_n y b_n obtenidos por ajuste de mínimos cuadrados.

2.5.1.1 Simulaciones numéricas y resultados

Se realizaron simulaciones $\mathrm{MatLab}^{\ensuremath{\mathbb{B}}}$ -Simulink con los parámetros de la tabla 2.5

En la figura 2.5 se muestra la RFA promedio (2.21), (2.22) y (2.24) con los valores de a_n y b_n dados en la tabla 2.4.



Figura 2.4 Coefiente de nubosidad, τ_n vs t

Start-time	23.35
Stop-time	80
Type	Variable-step
Solver	Ode45(Dormand - Prince)
Max - step - size	0.01
Min - step - size	0.009
Initial - step - size	1e - 3
Relative-tolerance	auto
Absolute – tolerance	auto
Zero-crossing-control	Use-local-settings

Tabla 2.5 Parámetros Simulink.

En la figura 2.6 se comparan los comportamientos de la materia seca obtenida con los datos proporcionados por la Universidad de Wageningen, $\overline{X}_{d,w}$, (ver figura 2.1 y apéndice B) y la RFA promedio (ver figura 2.5), \overline{X}_d , al resolver numéricamente (2.13)-(2.15). Para esto se tomaron los siguientes valores para las entradas suministradas y las entradas externas:

i) Entradas suministradas:

 $U_v = 1 \times 10^{-3} [m/s], U_q = 0 [W/m^2] \text{ y } U_c = 1.2 \times 10^{-6} [kg/m^2s].$ ii) Entradas externas: $\stackrel{'}{V_t}=12.5\,[^\circ C]$ y $V_c=6.41\times 10^{-4}\left[Kg/m^3\right]$



Figura 2.5 Radiación fotosintéticamente activa teórica promedio, V_i vs t

2.6 Comportamiento logístico de la materia seca

Experimentalmente se ha observado que el comportamiento de la materia seca, \overline{X}_d , para el cultivo de la lechuga en invernadero tiene un comportamiento logístico (ver apéndice A).

Esto es, la evolución de la materia seca puede ajustarse a una curva logística:

$$X_{d,\log} = c_m \frac{e^{r_b(t-t_b)}}{1 + e^{r_b(t-t_b)}},$$
(2.25)

donde $X_{d,\log} [kg/m^2]$ es la materia seca modelada por un crecimiento logístico, $t_b [d]$ es el tiempo cuando comienza la fase lineal de crecimiento, $c_m [kg/m^2d]$ es el parámetro de crecimiento máximo y $r_b [1/d]$ es el parámetro de crecimiento específico.

En la figura 2.7 se observa que ciertamente la solución numérica de (2.13) se ajusta a (2.25), donde los parámetros de crecimiento obtenidos del ajuste por mínimos cuadrados son: $c_m = 0.1761 [kg/m^2d]$, $r_b = 0.0999 [1/d]$ y $t_b = 67.3185 [d]$. La observación de que la materia seca \overline{X}_d se puede ajustar a una ley de crecimiento logístico nos da la pauta para estudiar y analizar en el capítulo 4 el modelo de van Henten, (2.13)-(2.15), tomando en cuenta las características de un comportamiento logístico.



Figura 2.6 Comportamiento de la materia seca para una RFA teórica promedio (ver figura 2.5), \overline{X}_d vs t, comparada con el comportamiento de la materia seca obtenida al tomar la RFA proporcionada por la Universidad de Wageningen (ver figura 2.1), $\overline{X}_{d,w}$ vs t

2.7 Conclusiones

En este capítulo se mostró que el modelo de van Henten para el crecimiento de la lechuga en invernadero (ver (2.13)- (2.15)), genera curvas de producción de materia seca que pueden aproximarse mediante una ecuación logística, (ver figura 2.7 y (2.25)). Este modelo depende de la radiación fotosintéticamente activa la cual puede aproximarse por una serie de Fourier truncada a 17 términos, (ver (2.21)-(2.24) y tabla 2.4).



Figura 2.7 Ajuste de la materia seca \overline{X}_d , a una ecuación logística, $X_{d,\log}$, con $c_m = 0.1761 \left[kg/m^2 d \right]$, $r_b = 0.0999 \left[1/d \right]$ y $t_b = 67.3185 \left[d \right]$

Parte I Simplificación del modelo de van Henten

Capítulo 3 Modelo Día-Noche para el crecimiento de la lechuga cultivada en invernadero

En este capítulo se muestra que el modelo (2.13)-(2.15) puede separarse en dos partes: uno correspondiente a la presencia de RFA (modelo de día) y otro correspondiente a la ausencia de RFA (modelo de noche).

Con este fin se expresa el modelo de van Henten (2.13)-(2.15) en términos de la variable α , (2.16). Lo cual permite estudiar el comportamiento de la materia seca en presencia y ausencia de RFA.

Tomando en cuenta (2.16)-(2.20) en (2.13)-(2.15) y definiendo $\widetilde{Z}_c = \overline{Z}_c - c_{\Gamma}$ se obtiene:

$$\frac{d\overline{X}_d}{dt} = c_{\alpha\beta}\omega \frac{\alpha\rho \widetilde{Z}_c}{\alpha + \rho \widetilde{Z}_c} - c_{resp,1}\overline{X}_d 2^{\left(0.1\overline{Z}_t - 2.5\right)},\tag{3.1}$$

$$\widetilde{Z}_{c} = \frac{-\left(\omega\alpha\rho + \alpha\tau - \delta\rho\right) + \sqrt{\left(\omega\alpha\rho + \alpha\tau - \delta\rho\right)^{2} + 4\delta\alpha\tau\rho}}{2\tau\rho},$$
(3.2)

$$\overline{Z}_{t} = \frac{\left(c_{cap,q,v}\overline{U}_{v} + c_{al,ou}\right)\overline{V}_{t} - \frac{c_{rad}}{c_{1}}\alpha + \overline{U}_{q}}{\left(c_{cap,q,v}\overline{U}_{v} + c_{al,ou}\right)}.$$
(3.3)

Definiendo las variables auxiliares a [m/s], $b [kg/ms^2]$ y $c [kg^2/m^3J]$ como:

$$a = \rho \tau, \tag{3.4}$$

$$b = \omega \alpha \rho + \alpha \tau - \delta \rho, \tag{3.5}$$

$$c = -\delta\alpha,\tag{3.6}$$

en (3.2) y tomando en cuenta que $c_{\alpha\beta} = \frac{c_{resp,1}}{c_{resp,2}}$ en (3.1), se encuentra:

$$\frac{d\overline{X}_d}{dt} = c_{\alpha\beta}\omega \frac{\alpha\rho \widetilde{Z}_c}{\alpha + \rho \widetilde{Z}_c} - c_{\alpha\beta}c_{resp,2}\overline{X}_d 2^{\left(0.1\overline{Z}_t - 2.5\right)},\tag{3.7}$$

$$\widetilde{Z}_c = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$
(3.8)

Finalmente, al sustituir (3.3) en (3.7), se obtiene la dinámica de la materia seca:

$$\frac{d\overline{X}_d}{dt} = c_{\alpha\beta}\omega \frac{\alpha\rho \widetilde{Z}_c}{\alpha + \rho \widetilde{Z}_c} - c_{\alpha\beta}c_3 \overline{X}_d 2^{c_o\alpha}, \qquad (3.9)$$

17

3 Modelo Día-Noche para el crecimiento de la lechuga cultivada en invernadero

donde
$$c_o = \frac{c_4}{c_1} \left[{}^oCm^2s/kg \right], c_4 = 0.1 \frac{c_{rad}}{\left(c_{cap,q,v}\overline{U}_v + c_{al,ou} \right)} \left[{}^oCm^2/W \right]$$
 y $c_3 = c_{resp,2} 2^{\left(0.1V_t - 2.5 \right)} \left[1/s \right].$

Las ecuaciones (3.8) y (3.9) son válidas para todo el proceso de fotosíntesis y respiración, esto es, son válidas para el día y la noche. Se observa además que (3.8) y (3.9) dependen de forma directa de la variable α , (2.16), la cual es proporcional a V_i . Este hecho permite separar el comportamiento de la materia seca en dos etapas: una de estas etapas es en presencia de RFA, $V_i \neq 0$, y la otra en ausencia de esta radiación, $V_i = 0$.

3.1 Modelo para la etapa de día

Para obtener el modelo para la etapa de día, se considera que $\alpha = c_1 V_i$, (2.16), es decir, se toma la envolvente superior de α y se denotara como α_D . Sustituyendo $\alpha_D = c_1 V_i$, en (3.5)-(3.6) y (3.8) se encuentra que la envolvente superior para la concentración de bióxido de carbono denotada por $\widetilde{Z}_{c,D}$ es:

$$\widetilde{Z}_{c,D} = \frac{-b_D + \sqrt{b_D^2 - 4a_D c_D}}{2a_D},$$
(3.10)

donde $\widetilde{Z}_{c,D}$ $[kg/m^3]$, $a_D [m/s], b_D [kg/ms^2]$, y $c_D [kg^2/m^3 J]$ son las envolventes superiores de los parámetros a, b, y c en presencia de RFA.

De (3.4)-(3.6) se tiene que los parámetros a_D , b_D , y c_D son:

$$a_D = \rho_D \tau, \tag{3.11}$$

$$b_D = \rho_D \left(\omega_D + \tau\right) \alpha_D - \rho_D \delta_D, \qquad (3.12)$$

$$c_D = -\alpha_D \delta_D, \tag{3.13}$$

donde

$$\delta_D = c_3 \overline{X}_D 2^{c_o \alpha_D} + \overline{U}_{c,D} + \tau \left(\overline{V}_{c,D} - c_\Gamma \right), \qquad (3.14)$$

$$\omega = \omega_D, \tag{3.15}$$

 $\overline{V}_{c,D} = \overline{V}_c$, y $\overline{U}_{c,D}$ es el suministro de CO_2 .

La variable

$$\rho_D = -c_{co2,1}\overline{Z}_{t,D}^2 + c_{co2,2}\overline{Z}_{t,D} - c_{co2,3}, \qquad (3.16)$$

puede ser aproximada como (ver apéndice C):

$$\rho_D \simeq 1.933611100102 \times 10^{-3}. \tag{3.17}$$

Finalmente, al tomar en cuenta (3.11)-(3.13) en (3.8) y (3.7), se obtiene que el modelo para la etapa de día es:

$$\frac{d\overline{X}_D}{dt} = -c_{\alpha\beta} \left(\tau \widetilde{Z}_{c,D} - \overline{U}_{c,D} - \tau \left(\overline{V}_c - c_\Gamma \right) \right), \tag{3.18}$$

3.3 Modelo Día-Noche para el cultivo de la lechuga en invernadero

$$\widetilde{Z}_{c,D} = \frac{-b_D + \sqrt{b_D^2 - 4a_D c_D}}{2a_D},$$
(3.19)

donde $\overline{X}_D [kg/m^2]$, $\widetilde{Z}_{c,D} [kg/m^3]$ son la materia seca y la concentración de CO_2 en presencia de RFA. Note que cada una de las variables presentes en (3.18) y (3.19), solo representan el comportamiento de los procesos involucrados en el período de día y que la ecuación (3.18) no depende explícitamente de \overline{X}_D . Esta dependencia se encuentra implícita en la concentración $\widetilde{Z}_{c,D}$ de CO_2 , .

3.2 Modelo para la etapa de noche

Para el modelo de la etapa de noche, no hay presencia de RFA, por lo cual $\alpha = 0$. Tomando esta consideración en (3.8) y (3.9) se obtiene que el modelo para la etapa de noche es:

$$\frac{d\overline{X}_N}{dt} = -c_{\alpha\beta} \left(\tau \widetilde{Z}_{c,N} - \overline{U}_{c,N} - \tau \left(\overline{V}_c - c_\Gamma \right) \right), \tag{3.20}$$

$$\widetilde{Z}_{c,N} = \frac{\delta_N}{\tau},\tag{3.21}$$

donde $\overline{X}_N \left[kg/m^2 \right]$ es la materia seca durante esta etapa y $\delta_N = c_3 \overline{X}_N + \overline{U}_{c,N} + \tau \left(\overline{V}_{c,D} - c_\Gamma \right)$. En esta etapa los estomas de la lechuga permanecen cerrados (ver [17] por ejemplo), esto es, $\overline{U}_{c,N} = 0$.

3.3 Modelo Día-Noche para el cultivo de la lechuga en invernadero

Las ecuaciones (3.18)-(3.19) y (3.20)-(3.21) representan por separado el comportamiento de día y noche. Para integrar estos dos modelos hay que introducir una señal auxiliar, sw, que lleve a cabo la interacción diaria del proceso de la fotosíntesis con la respiración del cultivo.

Por lo tanto, el comportamiento de la materia seca, $\overline{X}_{d,DN}$, es:

$$\frac{d\overline{X}_{d,DN}}{dt} = \frac{d\overline{X}_D}{dt}sw + \frac{d\overline{X}_N}{dt}(1-sw),$$
(3.22)

 con

$$\frac{dX_D}{dt} = -c_{\alpha\beta} \left(\tau \widetilde{Z}_{c,D} - \overline{U}_{c,D} - \tau \left(\overline{V}_c - c_\Gamma \right) \right), \tag{3.23}$$

$$\frac{d\overline{X}_N}{dt} = -c_{\alpha\beta} \left(\tau \widetilde{Z}_{c,N} - \overline{U}_{c,N} - \tau \left(\overline{V}_c - c_\Gamma \right) \right), \qquad (3.24)$$

$$\widetilde{Z}_{c,D} = \frac{-b_D + \sqrt{b_D^2 - 4a_D c_D}}{2a_D},$$
(3.25)

$$\widetilde{Z}_{c,N} = \frac{\delta_N}{\tau},\tag{3.26}$$

у

$$sw = \begin{cases} 1 \quad \forall t \in \left[12 - \frac{d}{2}, 12 + \frac{d}{2}\right] \\ 0 \quad \text{en otro caso.} \end{cases}$$
(3.27)

donde d[hrs] es la longitud del día solar (ver sección 3.2 de [5]). Observe que la señal sw hace que el modelo de día interactúe diariamente con el modelo de noche para el cultivo de la lechuga en invernadero.

3.3.1 Simulaciones y Resultados

En la figura 3.2 se muestra la simulación para (3.18)-(3.19) y (3.20)-(3.21) tomando la RFA teórica promedio de la figura 2.5, donde se observa que la velocidad de variación de las materias secas de los modelos de día y de noche actúan como envolventes superior e inferior de la velocidad de variación de la materia seca del modelo de van Henten (3.1)-(3.3).



Figura 3.1 (a) Modelo de día, $d\overline{X}_D/dt$ vs t, y noche, $d\overline{X}_N/dt$ vs t, para el crecimiento de la lechuga en invernadero. Se observa que el modelo de día y noche actúan como envolventes superior e inferior del modelo de van Henten respectivamente. (b) Modelo de van Henten, $d\overline{X}_d/dt$ vs t

En la figura 3.2 se compara la materia seca, $\overline{X}_{d,DN}$, obtenida por (3.22)-(3.27), con la materia seca, \overline{X}_d , obtenida por (3.1)-(3.3).

Para ésto se tomaron los siguientes valores para las entradas suministradas y las entradas externas: i) Entradas suministradas:

 $\stackrel{\cdot}{U_v} = 1 \times 10^{-3} \ [m/s], U_q = 0 \ [W/m^2] \ y \ \overline{U}_{c,D} = 1.2 \times 10^{-6} \ [kg/m^2s].$ ii) Entradas externas: $V_t = 12.5 \ [^{\circ}C] \ y \ V_c = 6.41 \times 10^{-4} \ [Kg/m^3]$

3.4 Conclusiones

En este capítulo se mostró que el modelo de van Henten (2.13)-(2.15), puede ser separado en dos modelos matemáticos independientes que interactúan entre sí diariamente, (3.22). Un modelo independiente es para el período de luz, (3.18)-(3.19), y el otro modelo para el período de oscuridad, (3.20)-(3.21). Estos modelos independientes actúan como envolventes superior e inferior del modelo de van Henten



Figura 3.2 Comparación del comportamiento de la materia seca (3.22), $\overline{X}_{d,DN}$ vs t, con el comportamiento obtenido a partir de (3.1), \overline{X}_d vs t. Se observa que ambas ecuaciones producen el mismo comportamiento

(ver figura 3.1). Al integrar diariamente estos modelos independientes se obtiene el comportamiento de la materia seca (ver (3.22) y figura 3.2).
Capítulo 4 Razón relativa de crecimiento

En este capítulo se determina la Razón Relativa de Crecimiento (RRC) [7] para el cultivo de la lechuga en invernadero para el modelo día-noche, (3.22). La RRC es una variable importante para el análisis del crecimiento de los cultivos [7], se muestra que la RRC puede también describirse mediante una curva logística (ver (4.18)-(4.20)), donde su parámetro de crecimiento específico, $r_{b,D}$, está relacionado directamente con la fotosíntesis máxima de asimilación de CO_2 , $\phi_{phot,max}$ (ver (2.3)). Gracias a este hecho, la fotosíntesis máxima se aproxima por una función algebraica que solo depende de las variables externas, $\overline{U}_{c,D}$ y V_i ; este hecho es lo que nos permitirá proponer en el capítulo 7 una ley de control subóptima analítica.

Para ésto se procede de la siguiente manera:

- 1. Primero, en la sección 4.1 se encuentra la relación entre la aceleración de producción de la materia seca y la RRC para el período de luz.
- 2. En la sección 4.2, se encuentra la RRC para el período de luz, $RRC_D = \frac{\partial (d\overline{X}_D/dt)}{\partial \overline{X}_D}$, en términos de los procesos naturales del crecimiento del cultivo.
- 3. En la sección 4.3, se aproxima la RRC para el período de luz.
- 4. Finalmente, en la sección 4.4 se relaciona la aceleración de producción de la materia seca y la RRC para el período de noche, $RRC_N = \frac{\partial (d\overline{X}_N/dt)}{\partial \overline{X}_N}$, en términos de los parámetros del cultivo.

4.1 Relación entre la aceleración de producción de la materia seca y la RRC para el período de luz

A partir del modelo para la etapa de día (3.18), se obtiene que la aceleración de producción de la materia seca para el período de luz es:

$$\frac{d^2 \overline{X}_D}{dt^2} = -c_{\alpha\beta} \tau \frac{d \widetilde{Z}_{c,D}}{dt} + c_{\alpha\beta} \tau \frac{d \overline{U}_{c,D}}{dt}, \qquad (4.1)$$

donde \overline{X}_D , $\overline{Z}_{c,D}$, y $\overline{U}_{c,D}$ son la materia seca, la concentración de CO_2 dentro del invernadero y el bióxido de carbono suministrado durante esta etapa.

A continuación se expresará la aceleración de la producción de la materia seca en términos de la RRC. Para esto hay que observar que (4.1) depende de la velocidad de variación de la concentración de CO_2 , $\tilde{Z}_{c,D}$, la cual depende de los parámetros a_D , b_D y c_D (ver (3.19)). Entonces, por cálculo elemental se encuentra que la velocidad de variación de la concentración de CO_2 dentro del invernadero, $\tilde{Z}_{c,D}$, (3.19) es:

4 Razón relativa de crecimiento

$$\frac{d\widetilde{Z}_{c,D}}{dt} = \frac{\partial\widetilde{Z}_{c,D}}{\partial a_D} \left(da_D/dt \right) + \frac{\partial\widetilde{Z}_{c,D}}{\partial b_D} \left(db_D/dt \right) + \frac{\partial\widetilde{Z}_{c,D}}{\partial c_D} \left(dc_D/dt \right)$$

$$= -\frac{1}{a_D} \left[\widetilde{Z}_{c,D} + \frac{c_D}{2a_D\widetilde{Z}_{c,D} + b_D} \right] \left(da_D/dt \right) + \frac{1}{2a_D} \left[-1 + \frac{b_D}{\sqrt{b_D^2 - 4a_Dc_D}} \right] \left(db_D/dt \right)$$

$$+ \frac{1}{2a_D} \left[-\frac{2a_D}{\sqrt{b_D^2 - 4a_Dc_D}} \right] \left(dc_D/dt \right).$$
(4.2)

Se observa que (4.2), depende de las derivadas con respecto al tiempo de los parámetros a_D , b_D , y c_D . Calculando sus derivadas se obtiene (ver sección D.1):

$$\frac{d\widetilde{Z}_{c,D}}{dt} = \frac{\partial\widetilde{Z}_{c,D}}{\partial\alpha_D} \left(d\alpha_D / dt \right) + \frac{\partial\widetilde{Z}_{c,D}}{\partial\overline{X}_D} + \left(\frac{1}{2a_D} \left(-1 + \frac{b_D}{2a_D\widetilde{Z}_{c,D} + b_D} \right) \frac{\partial b_D}{\partial\rho_D} + \frac{\partial\widetilde{Z}_{c,D}}{\partial\rho_D} \right) \left(d\rho_D / dt \right) \\
+ \frac{1}{2a_D} \left(\rho + \frac{2a_D\alpha_D - \rho_D b_D}{2a_D\widetilde{Z}_{c,D} + b_D} \right) \left(d\overline{U}_{c,D} / dt \right),$$
(4.3)

donde:

$$\frac{\partial \widetilde{Z}_{c,D}}{\partial \alpha_D} = \frac{1}{2a_D} \left[-\frac{\partial b_D}{\partial \alpha_D} + \frac{b_D \frac{\partial b_D}{\partial \alpha_D} - 2a_D \frac{\partial c_D}{\partial \alpha_D}}{\sqrt{b_D^2 - 4a_D c_D}} \right],\tag{4.4}$$

$$\frac{\partial \widetilde{Z}_{c,D}}{\partial \overline{X}_D} = \frac{\partial \widetilde{Z}_{c,D}}{\partial \omega} \left(d\omega/dt \right) + \frac{\partial \widetilde{Z}_{c,D}}{\partial \delta_D} \left(d\delta_D/dt \right).$$
(4.5)

Finalmente sustituyendo (4.3) en (4.1) se obtiene que la aceleración de producción de la materia seca para el período de luz, se puede expresar en términos de la RRC como:

$$\frac{d^{2}\overline{X}_{D}}{dt^{2}} = \frac{\partial \left(d\overline{X}_{D}/dt\right)}{\partial \overline{X}_{D}} \left(d\overline{X}_{D}/dt\right) + \frac{\partial \left(d\overline{X}_{D}/dt\right)}{\partial \alpha_{d}} \left(d\alpha_{D}/dt\right) + \frac{c_{\alpha\beta}\tau}{2a_{D}} \left(-\rho_{D} - \frac{2a_{D}\alpha_{D} - \rho_{D}b_{D}}{2a_{D}\widetilde{Z}_{c,D} + b_{D}} + \frac{2a_{D}}{\tau}\right) \left(d\overline{U}_{c,D}/dt\right) - c_{\alpha\beta}\tau \left(\frac{1}{2a_{D}} \left(-1 + \frac{b_{D}}{2a_{D}\widetilde{Z}_{c,D} + b_{D}}\right) \frac{\partial b_{D}}{\partial \rho_{D}} + \frac{\partial\widetilde{Z}_{c,D}}{\partial \rho_{D}}\right) \left(d\rho_{D}/dt\right),$$
(4.6)

donde

$$\frac{\partial \left(d\overline{X}_D / dt \right)}{\partial \overline{X}_D} = -c_{\alpha\beta} \tau \frac{\partial \widetilde{Z}_{c,D}}{\partial \overline{X}_D},\tag{4.7}$$

$$\frac{\partial \left(d\overline{X}_D / dt \right)}{\partial \alpha_d} = -c_{\alpha\beta} \tau \frac{\partial \widetilde{Z}_{c,D}}{\partial \alpha_d}.$$
(4.8)

Note que la ecuación (4.7) es la razón relativa de crecimiento RRC_D para la lechuga en invernadero durante la etapa de día.

4.2 Razón relativa de crecimiento en etapa de día, RRC_D

4.2 Razón relativa de crecimiento en etapa de día, RRC_D

A partir de (3.18) se obtiene que la concentración de CO_2 para la etapa de día, $\widetilde{Z}_{c,D}$, es:

$$\widetilde{Z}_{c,D} = -\frac{d\overline{X}_D/dt}{c_{\alpha\beta}\tau} + \frac{\overline{U}_{c,D}}{\tau} + \left(\overline{V}_c - c_\Gamma\right),\tag{4.9}$$

tomando en cuenta, (3.7), se tiene:

$$\widetilde{Z}_{c,D} = -\frac{\omega_D}{\tau} \left(\frac{\alpha_D \rho_D \widetilde{Z}_{c,D}}{\alpha_D + \rho_D \widetilde{Z}_{c,D}} \right) + \frac{\delta_D}{\tau}.$$
(4.10)

Derivando a (4.9) y (4.10), con respecto a $\overline{X}_d,$ se tiene respectivamente que:

$$\frac{\partial \widetilde{Z}_{c,D}}{\partial \overline{X}_D} = -\frac{1}{c_{\alpha\beta}\tau} \left(\frac{\partial \left(d\overline{X}_D / dt \right)}{\partial \overline{X}_D} \right)$$
(4.11)

у

$$\frac{\partial \widetilde{Z}_{c,D}}{\partial \overline{X}_D} = -\frac{1}{\tau} \left[\left(\frac{\alpha_D \rho_D \widetilde{Z}_{c,D}}{\alpha_D + \rho_D \widetilde{Z}_{c,D}} \right) \left(\frac{\partial \omega_D}{\partial \overline{X}_D} \right) + \frac{\omega_D \alpha_D^2 \rho}{\left(\alpha_D + \rho \widetilde{Z}_{c,D} \right)^2} \left(\frac{\partial \widetilde{Z}_{c,D}}{\partial \overline{X}_D} \right) \right] + \frac{1}{\tau} \left(\frac{\partial \delta_D}{\partial \overline{X}_D} \right). \quad (4.12)$$

Al igualar (4.11) y (4.12) y despejar $RRC_D = \frac{\partial (d\overline{X}_D/dt)}{\partial \overline{X}_D}$ se obtiene:

$$\frac{\partial \left(d\overline{X}_D / dt \right)}{\partial \overline{X}_D} = \frac{1}{\kappa} \left[-c_{pl,d} \frac{d\overline{X}_D}{dt} - c_{pl,d} c_{\alpha\beta} \overline{X}_d \left(\frac{\partial \delta_D}{\partial \overline{X}_D} \right) + c_{pl,d} c_{\alpha\beta} \left(\frac{\alpha_D \rho_D \widetilde{Z}_{c,D}}{\alpha_D + \rho_D \widetilde{Z}_{c,D}} \right) - c_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial \delta_D}{\partial \overline{X}_D} \right) \right], \tag{4.13}$$

donde

$$\left(\frac{\partial \omega_D}{\partial \overline{X}_D}\right) = c_{pl,d} \left(1 - \omega_D\right),\tag{4.14}$$

$$\left(\frac{\partial \delta_D}{\partial \overline{X}_D}\right) = c_3 2^{c_o \alpha_D},\tag{4.15}$$

$$\kappa = \left[1 + \frac{1}{\tau} \frac{\omega_D \alpha_D^2 \rho_D}{\left(\alpha_D + \rho_D \widetilde{Z}_{c,D}\right)^2}\right].$$
(4.16)

Al término κ [-], se le denomina parámetro de ajuste de crecimiento relativo [10]. El cual puede ser aproximado por (ver sección D.2):

$$\kappa\left[-\right] \approx 1. \tag{4.17}$$

4.3 Aproximación de la razón relativa de crecimiento para la etapa de día

A partir de (4.13) y (4.17), la razón relativa de crecimiento para la etapa de día se puede aproximar mediante la siguiente ecuación algebraica:

$$\frac{\partial \left(d\overline{X}_D / dt \right)}{\partial \overline{X}_D} \simeq -\frac{r_{b,D}}{c_{m,D}} \frac{d\overline{X}_D}{dt} + r_{b,D}, \qquad (4.18)$$

donde

у

 $\frac{r_{b,D}}{c_{m,D}} = c_{pl,d} \tag{4.19}$

$$r_{b,D} = c_{pl,d} c_{\alpha\beta} \left(\frac{\alpha_D \rho_D \widetilde{Z}_{c,D}}{\alpha_D + \rho_D \widetilde{Z}_{c,D}} \right) - c_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial \delta_D}{\partial \overline{X}_D} \right) \left(c_{pl,d} \overline{X}_D + 1 \right).$$
(4.20)

Los parámetros $r_{b,D} [1/s]$ y $c_{m,D} [kg/m^2 s]$ son el crecimiento específico y crecimiento máximo para el cultivo de la lechuga en invernadero para el período de luz [5].

4.4 Relación entre la aceleración de producción de la materia seca y la RRC para la etapa de noche

Para el caso de la etapa de noche, la velocidad de producción de la materia seca (3.24), toma la siguiente forma:

$$\frac{d\overline{X}_N}{dt} = -c_{\alpha\beta}c_3\overline{X}_N.$$
(4.21)

Por lo que la aceleración de producción de la materia seca para el período de oscuridad es:

$$\frac{d^2 \overline{X}_N}{dt^2} = \frac{\partial \left(d \overline{X}_N / dt \right)}{\partial \overline{X}_N} \left(d \overline{X}_N / dt \right), \tag{4.22}$$

donde

$$\frac{\partial \left(d\overline{X}_N / dt \right)}{\partial \overline{X}_N} = -r_{b,N} \tag{4.23}$$

у

$$r_{b,N} = c_{\alpha\beta}c_3 = 1.1142 \times 10^{-7}.$$
(4.24)

La ecuación (4.23) es la razón relativa de crecimiento para el período de oscuridad y $r_{b,N}$ es el parámetro de crecimiento específico para este período.

4.5 Simulaciones y resultados

En la figura 4.1 se muestra la RRC para el período de día, $\frac{\partial (d\overline{X}_D/dt)}{\partial \overline{X}_D}$, (4.18). En donde se observa la forma lineal característica para el crecimiento logístico (ver figura A.6 del apéndice A.4). La simulación

4.6 Conclusiones

se realizó tomando una RFA teórica promedio con coeficiente de nubosidad τ_n igual a uno (ver figura 2.2).

En la figura 4.2 se muestra el término $\frac{\partial (d\overline{X}_D/dt)}{\partial \overline{X}_D} (d\overline{X}_D/dt)$, (4.18), para el período de día. En donde se observa la forma característica de una parábola para el crecimiento logístico (ver figura A.5 del apéndice A.4). La simulación se realizó tomando una RFA teórica promedio con coeficiente de nubosidad igual a uno (ver figura 2.2).

Para ésto se tomaron los siguientes valores para las entradas suministradas y las entradas externas: i) Entradas suministradas:

 $U_v = 1 \times 10^{-3} [m/s], U_q = 0 [W/m^2] \text{ y } \overline{U}_c = 1.2 \times 10^{-6} [kg/m^2s].$ ii) Entradas externas:

 $V_t = 12.5 [^{\circ}C] \text{ y } V_c = 6.41 \times 10^{-4} [Kg/m^3]$



Figura 4.1 Razón relativa de crecimiento, $\frac{\partial (d\overline{X}_D/dt)}{\partial \overline{X}_D}$ vs $(d\overline{X}_D/dt)$, para el cultivo de la lechuga en invernadero

4.6 Conclusiones

En este capítulo se mostró que la razón relativa de crecimiento para el modelo de día, (4.7) tiene las características de un comportamiento logístico (ver (4.18)-(4.20) y figuras 4.1 y 4.2); donde su parámetro



Figura 4.2 $\frac{\partial (d\overline{X}_D/dt)}{\partial \overline{X}_D} (d\overline{X}_D/dt)$ vs $(d\overline{X}_D/dt)$, donde se observa la parábola característica del crecimiento logístico para el crecimiento de la lechuga en invernadero

de crecimiento específico $r_{b,D}$, (4.20), está relacionado con la fotosíntesis máxima de asimilación de CO_2 , $\phi_{phot,max}$, (2.3).

Con respecto a la etapa de noche se encuentra que la razón relativa de crecimiento, (4.23)-(4.24), es una constante en la dinámica del crecimiento de la lechuga en invernadero.

Capítulo 5 Análisis del parámetro de crecimiento específico, $r_{b,D}$: caso de una RFA con coeficiente de nubosidad unitario

En este capítulo se analiza el parámetro de crecimiento específico $r_{b,D}$, (4.20), para el caso de una RFA con coeficiente de nubosidad unitario. Este análisis nos servirá para relacionar, en el capítulo 6, la fotosíntesis máxima de asimilación de CO_2 , $\phi_{phot,max}$, con una función que solamente depende de la entrada de control, $\overline{U}_{c,D}$.

5.1 Estudio del parámetro de crecimiento específico, $r_{b,D}$

Con la finalidad de relacionar el parámetro de crecimiento específico, $r_{b,D}$, con la entrada de control, $\overline{U}_{c,D}$, se realizan simulaciones para diferentes valores de $\overline{U}_{c,D}$ tomando una RFA teórica promedio con coeficiente de nubosidad igual a uno (ver figura 2.2).

Para realizar estas simulaciones se procede como sigue:

- 1. Se realizan simulaciones del parámetro de crecimiento específico $r_{b,D}$, (4.20), para los siguientes valores de la entrada de control $\overline{U}_{c,D} : \overline{U}_{c,D} \in [0.1, 0.2, \dots, 0.9, 1] \overline{U}_{c,D}$ (ver figura 5.1).
- 2. Para cada simulación, se toma el valor promedio del parámetro de crecimiento específico, $r_{b,D,prom}$ (ver figura 5.1).
- 3. Con los valores promedios obtenidos en el punto 2, se realiza una interpolación a una ecuación lineal (ver figura 5.2).

A partir de esta interpolación se obtiene que el parámetro de crecimiento específico, $r_{b,D}$, se puede aproximar por:

$$r_{b,D} \simeq r_{b,o} + \frac{r_{b,u} - r_{b,o}}{\overline{U}_{c,D,\max}} \overline{U}_{c,D} \simeq 1.03 \times 10^{-5} + 8.245 \overline{U}_{c,D},$$
(5.1)

donde $r_{b,o}$ y $r_{b,u}$ son los parámetros de crecimiento específico tomando los valores de $\overline{U}_{c,D} = 0$ y $\overline{U}_{c,D,\max} = 1.2 \times 10^{-6}$ respectivamente.

Tomando en cuenta (5.1) en (4.18) se obtiene que la RRC para el período de día se puede aproximar por:

$$\frac{\partial \left(d\overline{X}_D / dt \right)}{\partial \overline{X}_D} \simeq \left[-c_{pl,d} \frac{d\overline{X}_D}{dt} + 1.03 \times 10^{-5} + 8.245 \overline{U}_{c,D} \right].$$
(5.2)

Esta aproximación da la pauta de la relación que existe entre $\frac{\partial (d\overline{X}_D/dt)}{\partial \overline{X}_D}$ y la variable de control, $\overline{U}_{c,D}$. Lo cual indica que es posible establecer una ley de control óptima basada únicamente en el período de día.

30 5 Análisis del parámetro de crecimiento específico, $r_{b,D}$: caso de una RFA con coeficiente de nubosidad unitario



Figura 5.1 Curvas de $r_{b,D}$ vs t y valores promedio del parámetro de crecimiento específico, $r_{b,D,prom}$, a diferentes valores de $\overline{U}_{c,D}$

5.2 Simulaciones y resultados

En la figura 5.3 se muestra la materia seca, \overline{X}_d , para el modelo de van Henten, (3.1)-(3.3), comparada con la materia seca obtenida a partir de (3.22), (5.2), (3.24)-(3.27), $\overline{X}_{d,lin}$.

Para ésto se tomaron los siguientes valores para las entradas suministradas y las entradas externas: i) Entradas suministradas:

 $U_v = 1 \times 10^{-3} \ [m/s], U_q = 0 \ [W/m^2] \ y \ U_c = 1.2 \times 10^{-6} \ [kg/m^2s].$ ii) Entradas externas: $V_t = 12.5 \ [^{\circ}C] \ y \ V_c = 6.41 \times 10^{-4} \ [Kg/m^3]$

5.3 Conclusiones

En este capítulo se mostró que el parámetro de crecimiento específico $c_{m,D}$, (4.20), puede ser aproximado por una función lineal que depende únicamente de la entrada de control $\overline{U}_{c,D}$ (ver (5.1) y figura 5.2), cuando incide una RFA con coeficiente de nubosidad τ_n unitario (ver figura 2.2). Este hecho permite aproximar la razón relativa de crecimiento para el período de día por una función lineal que depende de la velocidad de producción de materia seca, \overline{X}_d , y la entrada de control $\overline{U}_{c,D}$ (ver (5.2)).



Figura 5.2 Interpolación de los valores promedio del parámetro de crecimiento específico, $r_{b,D,prom}$ vs $\overline{U}_{c,D}$ (ver figura 5.1), a una función lineal con respecto a la variable de control $\overline{U}_{c,D}$





Figura 5.3 Materia seca, \overline{X}_d vs t, para el modelo de van Henten, (3.1)-(3.3), comparada con la materia seca, $\overline{X}_{d,lin}$, obtenida a partir de (3.22) al tomar en cuenta la linealización para $r_{b,D}$, (5.1)

Capítulo 6 Análisis de la fotosíntesis máxima de asimilación de $CO_2, \phi_{phot,max}$

En este capítulo se muestra que la fotosíntesis máxima de asimilación de CO_2 , $\phi_{phot,max}$ (ver (2.3) y (4.10)),

$$\phi_{phot,\max} = \left(\frac{\alpha_D \rho_D \widetilde{Z}_{c,D}}{\alpha_D + \rho \widetilde{Z}_{c,D}}\right) \tag{6.1}$$

$$= -\frac{\tau}{\omega} \left(\widetilde{Z}_{c,D} - \frac{\delta_D}{\tau} \right), \tag{6.2}$$

se puede aproximar por una función $f_b^*(\overline{v}_{c,D})$ (ver apéndice E), que depende del CO_2 suministrado en el invernadero, $\overline{U}_{c,D}$. Esta aproximación es utilizada en el capítulo 7 para encontrar una ley de control subóptima analítica.

Para esto:

1. Primero, en la sección 6.1 se aproxima el CO_2 neto suministrado por el cultivo¹,

$$\phi_{c,al,pl} = \overline{U}_{c,D} + \tau \left(\overline{V}_c - c_\Gamma \right) - \tau \overline{Z}_{c,D}, \tag{6.3}$$

por una función $f_b^*(\overline{v}_{c,D})$.

2. En la sección 6.2, se muestra que la fotosíntesis máxima de asimilación de CO_2 , $\phi_{phot,max}$, es también aproximada por tal función $f_b^*(\overline{v}_{c,D})$.

6.1 Aproximación de $\phi_{c,al,pl}$

En el apéndice E se muestra un proceso experimental, mediante el cual el CO_2 neto suministrado por el cultivo, $\phi_{c,al,pl}$, puede ser aproximado por la siguiente función que sólo depende de la razón de suministro de CO_2 , $\overline{U}_{c,D}$:

$$\phi_{c,al,pl} \simeq \left(\frac{\tau}{\rho_D} \alpha_D + \tau \widetilde{Z}_{c,D}\right) f_b^*(\overline{\upsilon}_{c,D}),\tag{6.4}$$

$$f_b^*(\overline{v}_{c,D}) \simeq \left(-2 + \frac{\rho_D}{\tau}\right) + \frac{\frac{\rho_D}{\tau}}{\frac{\overline{U}_{c,D}}{\overline{U}_{c,D},\max} + \left(\frac{\rho_D}{\tau}\right)^2},\tag{6.5}$$

¹ ver capítulo 3.2 de van Henten [24].

donde $\overline{U}_{c,D,max} = 1.2 \times 10^{-6} \left[Kg/m^2 s \right]$ es el valor máximo de la razón de suministro de CO_2 . Esta aproximación fue hecha para el rango:² $\overline{V}_i \in [20 \ 200] \left[W/m^2 \right]$.

6.2 Aproximación de $\phi_{phot,max}$

A partir (6.2) y (6.3), se obtiene la siguiente relación entre $\phi_{phot,\max}$ y $\phi_{c,al,pl}$:

$$\phi_{phot,\max} = \frac{\alpha_D \rho_D / \tau \left[\overline{U}_c + \tau \left(\overline{V}_c - c_\Gamma \right) - \phi_{c,al,pl} \right]}{\alpha_D + \rho_D \widetilde{Z}_{c,D}}.$$
(6.6)

Substituyendo (6.3), (6.4) y (6.5) en (6.6) y realizando manipulaciones algebraicas se obtiene:

$$\phi_{phot,\max} \simeq \left(1 - f_b^*(\overline{\nu}_{c,D})\right) \phi_{phot,\infty} + f_b^*(\overline{\nu}_{c,D}) \alpha_D, \tag{6.7}$$

donde $\phi_{phot,\infty}$ es definida como:

$$\phi_{phot,\infty} = \frac{\alpha_D \left(\rho_D / \tau\right) \left(\overline{U}_{c,D} + \tau \left(\overline{V}_c - c_\Gamma\right)\right)}{\alpha_D + \left(\rho_D / \tau\right) \left(\overline{U}_{c,D} + \tau \left(\overline{V}_c - c_\Gamma\right)\right)}.$$
(6.8)

La variable, $\phi_{phot,\infty}$, puede ser interpretada como una fotosíntesis de asimilación obtenida con una saturación³ de CO_2 [12].

6.3 Simulaciones y resultados

En la figura 6.1 se muestra la materia seca, \overline{X}_d , para el modelo de van Henten, (3.1)-(3.3), comparada con la materia seca, $\overline{X}_{d,DN}$, obtenida a partir de (3.22), (3.24)-(3.27), tomando en cuenta, (6.7), (6.8) en (4.18)-(4.20). Se presentan los dos casos extremos: $\overline{U}_{c,D} = \overline{U}_{c,D,max}$ y $\overline{U}_{c,D} = 0$. A partir de esta figura se observa que los dos comportamientos son similares, obteniendo al tiempo t = 60 días el máximo error del 5%. Se observa que el error es mayor cuando no hay suministro de CO_2 y va aumentando con el tiempo. Esto se debe a que la simplificación del modelo se realizó sin tomar en cuenta que mientras aumenta el tiempo aumenta la producción de materia seca.

Para ésto se tomaron los siguientes valores para las entradas suministradas y las entradas externas: i) Entradas suministradas:

 $U_v = 1 \times 10^{-3} [m/s] \text{ y } U_q = 0 [W/m^2].$ ii) Entradas externas: $V_t = 12.5 [^{\circ}C] \text{ y } V_c = 6.41 \times 10^{-4} [Kg/m^3]$

6.4 Conclusiones

En este capítulo se mostró que la fotosíntesis máxima de asimilación de CO_2 , $\phi_{phot,max}$ (ver (6.1) y (6.2)) puede ser aproximada por una función que depende de la entrada de control, $\overline{U}_{c,D}$ (ver (6.7), (6.8), (6.5) y figura 6.1).

 $^{^{2}}$ Se propone este rango en base a datos estadísticos promedios (ver Capítulo 3.2 de van Henten [24]).

 $^{^3}$ Estado de la planta que ya no admite más cantidad de CO_2 para ser utilizado en la conversión de materia estructural [17]



Figura 6.1 Comportamiento de la materia seca obtenido con (i) el modelo de van Henten, \overline{X}_d , (3.1)-(3.3) y (ii) la interacción diaria de la producción de materia seca para los períodos de día y noche, $\overline{X}_{d,DN}$ vs t [días] (ver (3.22), (3.24)-(3.27), (6.7), (6.8) y (4.18)-(4.20)). (b) Señal del error entre, \overline{X}_d y $\overline{X}_{d,DN}$ vs t

Parte II Ley de Control Subóptima

Capítulo 7 Ley de Control Subóptima

En este capítulo, se encuentra una ley de control subóptima analítica para el período de día, (3.18) y (3.19), la cual maximiza el siguiente critero de desempeño económico, $J_{(\overline{v}_{c,D})}^{-1}$ (ver Capítulo 4 de van Henten [24]):

$$J_{(\overline{\nu}_{c,D})} = \alpha + \beta \overline{X}_{D(t_f)} - \int_{t_b}^{t_f} \gamma \overline{U}_{c,D} dt \qquad \left[ct/m^2 \right],$$
(7.1)

donde $\alpha = 180 \ [ct/m^2]$, $\beta = 1600 \ [ct/Kg]$ y $\gamma = 42 \ [ct/Kg]$ son respectivamente: el precio básico por cabeza de lechuga por metro cuadrado, la ganancia adicional por buena cosecha y el precio por unidad de bióxido de carbono por Kilogramo. $t_b = 23$ es la fecha de plantación del cultivo y $t_f = 80$ es el día de la cosecha. $\overline{U}_{c,D}$ es la entrada de control la cual esta restringida por la siguiente desigualdad (ver tabla 2.2):

$$0 \le \overline{U}_{c,D} \le \overline{U}_{c,D,max}.\tag{7.2}$$

Para esto:

- 1. Primero, en la sección 7.1 se encuentra el Hamiltoniano para el período de luz y se establecen las condiciones de optimalidad.
- 2. Luego, en la sección 7.2 se encuentra el coestado $\lambda_{D\ell}$, para valores pequeños de materia seca.
- 3. Luego, en la sección 7.3 se encuentra el coestado $\lambda_{D\ell}$, para valores grandes de materia seca.
- 4. Finalmente, en la sección 7.4 se establece la ley de control subóptima analítica para el crecimiento de la lechuga en invernadero.

7.1 Hamiltoniano para el período de luz

El Hamiltoniano para el período de luz es definido como (ver capítulo cuatro de [24] y [8]):

$$H_D = -\gamma \overline{U}_{c,D} + \lambda_D \frac{d\overline{X}_D}{dt},\tag{7.3}$$

donde λ_D es el multiplicador de Lagrange que representa el costo marginal [26]. El Hamiltoniano, (7.3), puede ser visto como una tasa de ganancia momentánea en el que los costos actuales se equilibran con

¹ Se supone que los factores de producción, tales como el suministro de nutrientes, agua y aquellos que no están directamente relacionadas con el control del clima en el invernadero, como el control de plagas y enfermedades, no afectan a las estrategias de control. En consecuencia, no se incluyen en el criterio del índice de desempeño económico [26].

los ingresos futuros [26]. De esta manera, el Hamiltoniano es una gran fuente de información para la interpretación del problema de control óptimo.

Sustituyendo (3.18) en (7.3) se tiene que el Hamiltoniano para el período de luz está dado por:

$$H_D = -\gamma \overline{U}_{c,D} + \lambda_D \left(-c_{\alpha\beta} \left(\tau \widetilde{Z}_{c,D} - \overline{U}_{c,D} - \tau \left(\overline{V}_c - c_\Gamma \right) \right) \right).$$
(7.4)

7.1.1 Condiciones de optimalidad

Para encontrar la ley de control que maximiza (7.1), son necesarias las siguientes condiciones de optimalidad (ver capítulo cuatro de [24] y [8]):

$$\frac{dX_D}{dt} = \frac{\partial H_D}{\partial \lambda_D},\tag{7.5}$$

$$\frac{\partial H_D}{\partial \overline{U}_{c,D}} = 0, \tag{7.6}$$

$$-\frac{d\lambda_D}{dt} = \frac{\partial H_D}{\partial \overline{X}_D},\tag{7.7}$$

La ecuación (7.6), es la viabilidad económica con respecto a un cambio de control sobre la variable de estado [26]. La condición inicial y de frontera están dadas por:

$$\overline{X}_{D(t_b)} = \overline{X}_{D,b},\tag{7.8}$$

$$\lambda_{(t_f)} = \frac{\partial}{\partial \overline{X}_d} \left(\alpha + \beta \overline{X}_{d(t_f)} \right).$$
(7.9)

Calculando la derivada parcial de (7.3) con respecto a $\overline{U}_{c,D}$, se tiene que la condición de optimalidad (7.6) toma la siguiente forma:

$$\frac{\partial H}{\partial \overline{U}_{c,D}} = -\gamma - c_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial \overline{U}_{c,D}} \left[\lambda_D \left(\tau \widetilde{Z}_{c,D} - \overline{U}_{c,D} \right) \right] = 0.$$
(7.10)

Para establecer la ley de control es necesario resolver (7.10), la cual depende del coestado λ_D , van Henten resuelve esta ecuación utilizando el algoritmo, de programación no lineal, del paso descendente (ver apéndice F). A continuación se obtiene una solución analítica subóptima, la cual consiste en resolver la condición de optimalidad (7.10), tomando en cuenta la aproximación (6.7) en (6.1) y (6.2). Se resuelven dos casos: el caso de valores pequeños de materia seca, \overline{X}_D , y el caso de valores grandes de \overline{X}_D .

7.2 Coestado λ_{Ds} : valores pequeños de materia seca

Para los valores pequeños de materia seca, \overline{X}_D , (2.18) puede ser aproximada por:

$$\omega \approx c_{pl,d} \overline{X}_D. \tag{7.11}$$

Tomando en cuenta las aproximaciones (6.7) y (7.11) en (6.2), se tiene que $\widetilde{Z}_{c,D}$ puede ser aproximado por:

7.3 Coestado $\lambda_{D\ell}:$ valores grandes de la materia seca

$$\widetilde{Z}_{c,Ds} \simeq \frac{\overline{X}_D}{\tau} \left[-c_{pl,d} \left[(1 - f_b^*) \phi_{phot,\infty} + f_b^* \alpha_D \right] + c_{resp,2} 2^{\left(0.1\overline{Z}_t - 2.5\right)} \right] \\ + \frac{\overline{U}_{c,D}}{\tau} + \left(V_c - c_\Gamma \right).$$

$$(7.12)$$

donde

$$f_b^*(\overline{v}_{c,D}) \simeq \left(-2 + \frac{\rho_D}{\tau}\right) + \frac{\frac{\rho_D}{\tau}}{\overline{\overline{v}}_{c,D,\max} + \left(\frac{\rho_D}{\tau}\right)^2},\tag{7.13}$$

у

$$\alpha = c_1 V_i \tag{7.14}$$

Substituyendo (7.12) en (7.4) y calculando la derivada parcial de (7.7), se tiene:

$$-\frac{d\lambda_{Ds}}{dt} \simeq -c_{\alpha\beta}\lambda_{Ds} \left[-c_{pld} \left[\left(1 - f_b^*(\overline{\upsilon}_{c,D})\right) \phi_{phot,\max} + f_b^*(\overline{\upsilon}_{c,D})\alpha \right] + c_{resp,2} 2^{\left(0.1\overline{Z}_T - 2.5\right)} \right].$$

$$(7.15)$$

Por lo tanto:

$$\lambda_{Ds} \simeq e^{\int_{t_b}^{t_f} c_{\alpha\beta} \left[-c_{pld} \left[\left(1 - f_b^*(\overline{U}_{c,D}) \right) \phi_{phot,\max} + f_b^*(\overline{U}_{c,D}) \alpha \right] + c_{resp,2} 2^{\left(0.1 \overline{Z}_t - 2.5 \right)} \right] dt}.$$
(7.16)

Con la condición de frontera (ver (7.9)):

$$\lambda_{Ds(t_f)} = \beta. \tag{7.17}$$

De esta manera se ha obtenido una expresión analítica para el coestado para el caso de valores pequeños de materia seca. Se nota también que (7.16) únicamente depende de la variable de control, $\overline{U}_{c,D}$, y de la variable externa, V_i^2 .

7.3 Coestado $\lambda_{D\ell}$: valores grandes de la materia seca

Para el caso de valores grandes, se iguala la ecuación (6.7) con (6.1). Entonces $\widetilde{Z}_{c,D}$ puede ser aproximada por:

$$\widetilde{Z}_{c,D\ell} \simeq \frac{\alpha_D}{\rho\left(\alpha_D - \phi_{phot,\infty}\right)} \left[\phi_{phot,\infty} + \frac{f_b^*(\overline{\upsilon}_{c,D})}{\left(1 - f_b^*(\overline{\upsilon}_{c,D})\right)} \alpha_D \right].$$
(7.18)

donde

$$f_b^*(\overline{v}_{c,D}) \simeq \left(-2 + \frac{\rho_D}{\tau}\right) + \frac{\frac{\rho_D}{\tau}}{\overline{\overline{v}}_{c,D,\max} + \left(\frac{\rho_D}{\tau}\right)^2},\tag{7.19}$$

у

$$\alpha = c_1 V_i. \tag{7.20}$$

Substituyendo (7.18) en (7.4) y calculando la derivada parcial de (7.7), se tiene:

 $^{^2}$ Para éste trabajo de tesis se tomarón los siguientes valores para las entradas suministradas: $U_v=1\times 10^{-3}\,[m/s]$ y $U_q=0\,\left[W/m^2\right]$

7 Ley de Control Subóptima

$$-\frac{d\lambda_{D\ell}}{dt} \simeq 0.$$
(7.21)

a, $\lambda_{(t_{\ell})} = \frac{\partial}{\partial \overline{X}} \left(\alpha + \beta \overline{X}_{d(t_{\ell})} \right)$, se tiene:

A partir de la condición de frontera, $\lambda_{(t_f)} = \frac{\partial}{\partial \overline{X}_d} \left(\alpha + \beta \overline{X}_{d(t_f)} \right)$, se tiene:

$$\lambda_{D\ell} \simeq \beta. \tag{7.22}$$

De esta forma se ha obtenido un valor constante para el valor del coestado para valores grandes de materia seca.

7.4 Ley de control subóptima

A partir de (7.16) y (7.22), se tiene la siguiente ley de control subóptima para el período de luz:

$$\overline{U}_{c,D}^* = \begin{cases} \overline{U}_{c,Ds}^* \text{ si } \lambda_{D\ell} \le \lambda_{Ds} \\ \overline{U}_{c,D\ell}^* \text{ si } \lambda_{Ds} < \lambda_{D\ell} \end{cases},$$
(7.23)

donde $\overline{U}_{c,Ds}^*$ y $\overline{U}_{c,D\ell}^*$ son las soluciones de (7.10) cuando $\lambda_D = \lambda_{Ds}$ y $\lambda_D = \lambda_{D\ell}$.

Tomando en cuenta los dos casos (7.16) y (7.22), en (7.10), aproximando $\widetilde{Z}_{c,D}$ por (7.12) y (7.18) para valores pequeños y grandes de materia seca \overline{X}_D respectivamente, se obtiene:

$$\frac{\partial H_D}{\partial \overline{U}_{c,D}} \simeq \begin{cases} -\gamma + c_{\alpha\beta} e^{g_b} \left[-\tau \frac{\partial \widetilde{Z}_{c,Ds}}{\partial \overline{U}_{c,D}} + 1 \right] = 0; & si \ \lambda_{D\ell} \le \lambda_{Ds} \\ -\gamma + c_{\alpha\beta} \beta \left[-\tau \frac{\partial \widetilde{Z}_{c,D\ell}}{\partial \overline{U}_{c,D}} + 1 \right] = 0; & si \ \lambda_{Ds} < \lambda_{D\ell} \end{cases},$$
(7.24)

donde

$$\frac{\partial \widetilde{Z}_{c,Ds}}{\partial \overline{U}_{c,D}} \simeq \frac{\overline{X}_{d,D}}{\tau} \left[-c_{pl,d} \left[(1 - f_b^*) \frac{\partial}{\partial \overline{U}_{c,D}} \phi_{phot,\infty} - \phi_{phot,\infty} \frac{\partial}{\partial \overline{U}_{c,D}} f_b^* + \alpha_D \frac{\partial}{\partial \overline{U}_{c,D}} f_b^* \right] \right] + \frac{1}{\tau}, \quad (7.25)$$

$$\frac{\partial \widetilde{Z}_{c,D\ell}}{\partial \overline{U}_{c,D}} \simeq \frac{\alpha_D}{\rho_D \left(\alpha_D - \phi_{phot,\infty} \right)} \left[\frac{\partial}{\partial \overline{U}_{c,D}} \phi_{phot,\infty} + \alpha_D \frac{\partial}{\partial \overline{U}_{c,D}} \frac{f_b^*}{1 - f_b^*} \right]$$

$$+ \frac{\alpha_D}{\rho_D} \left[\phi_{phot,\infty} + \alpha_D \frac{f_b^*}{1 - f_b^*} \frac{\partial}{\partial \overline{U}_{c,D}} \frac{1}{\alpha_D - \phi_{phot,\infty}} \right], \quad (7.26)$$

$$g_b = \int_{t_b}^{t_f} c_{\alpha\beta} \left[-c_{pld} \left[(1 - f_b^*) \phi_{phot, \max} + f_b^* \alpha \right] + c_{resp, 2} 2^{\left(0.1 \overline{Z}_t - 2.5 \right)} \right] dt, \tag{7.27}$$

$$\frac{\partial}{\partial \overline{U}_{c,D}} f_b^* = -\frac{\frac{\rho_D}{\tau} \left(\frac{1}{\overline{U}_{c,D,\max}}\right)}{\left[\frac{\overline{U}_{c,D,\max}}{\overline{U}_{c,D,\max}} + \left(\frac{\rho_D}{\tau}\right)^2\right]^2},\tag{7.28}$$

$$\frac{\partial}{\partial \overline{U}_{c,D}} \phi_{phot,\infty} = \frac{\frac{\rho_D}{\tau} \alpha_D^2}{\left[\alpha_D + \frac{\rho_D}{\tau} \left(\overline{U}_{c,D} + \tau \left(\overline{V}_c - c_\Gamma\right)\right)\right]^2},\tag{7.29}$$

$$\frac{\partial}{\partial \overline{U}_{c,D}} \frac{f_b^*}{1 - f_b^*} = -\frac{1}{\left(1 - f_b^*\right)^2} \frac{\frac{\rho_D}{\tau} \left(\frac{1}{\overline{U}_{c,D,\max}}\right)}{\left[\frac{\overline{U}_{c,D}}{\overline{U}_{c,D,\max}} + \left(\frac{\rho_D}{\tau}\right)^2\right]^2},\tag{7.30}$$

42

7.5 Simulaciones y Resultados

$$\frac{\partial}{\partial \overline{U}_{c,D}} \frac{1}{\alpha_D - \phi_{phot,\infty}} = \frac{1}{\left(\alpha_D - \phi_{phot,\infty}\right)^2} \frac{\frac{\rho_D}{\tau} \alpha_D^2}{\left[\alpha_D + \frac{\rho_D}{\tau} \left(\overline{U}_{c,D} + \tau \left(\overline{V}_c - c_\Gamma\right)\right)\right]^2}.$$
(7.31)

La ecuación (7.24) se resuelve aplicando el comando "fzero" de MatLab[®] sujeta a la restricción:

$$0 \le \overline{U}_{c,D} \le \overline{U}_{c,D,\max} \tag{7.32}$$

Finalmente la ley de control subóptima es:

$$\overline{U}_{c}^{*} = \begin{cases} \overline{U}_{c,D}^{*} & \text{si } V_{i} \neq 0\\ \overline{U}_{c,N}^{*} = 0 & \text{si } V_{i} = 0 \end{cases}$$
(7.33)

7.5 Simulaciones y Resultados

En la figura 7.1(a), se muestra la ley de control subóptima analítica, (7.33), \overline{U}_c^* .

En la figura 7.1(b), se compara la ley de control subóptima analítica, \overline{U}_c^* , con respecto a la ley de control óptima, $\overline{U}_{c,pd}^*$, obtenida mediante el método de paso descendente [24] (ver apéndice F).

En la figura 7.2(a), se compara la materia seca, \overline{X}_d , obtenida con la ley de control óptimo, $\overline{U}_{c,pd}^*$, con respecto a la obtenida con la ley de control subóptima analítica, \overline{U}_c^* .

En la figura 7.2(b), se muestra los valores del criterio de desempeño, (7.1), obtenido con la ley de control subóptima analítica, \overline{U}_{c}^{*} , y la obtenida con la ley de control óptimo, $\overline{U}_{c,pd}^{*}$.



Figura 7.1 (a) Ley de control subóptima para el cultivo de la lechuga en invernadero, \overline{U}_c^* v.s. t [días]. (b) Ley de control óptima obtenida mediante el método de paso descendente, $\overline{U}_{c,pd}^*$ v.s. t [días]

Los valores para las entradas suministradas y las entradas externas que se tomaron fueron: i) Entradas suministradas: $U_v = 1 \times 10^{-3} [m/s], U_q = 0 [W/m^2].$ ii) Entradas externas: $V_t = 12.5 [^{\circ}C]$ y $V_c = 6.41 \times 10^{-4} [Kg/m^3]$



Figura 7.2 (a) Comportamiento de la materia seca, $\overline{X}_d(\overline{U}_{c,pd}^*)$ y $\overline{X}_d(\overline{U}_c^*)$ v.s. t [días]. (b)Criterio de desempeño, $J(\overline{U}_{c,pd}^*)$ y $J(\overline{U}_c^*)$ v.s. t [días], obtenido con: (i) el método de paso descendente, y (ii) aplicando el control subóptimo para el modelo de día-noche, $J(\overline{U}_{c,pd}^*) = 317$ y $J(\overline{U}_c^*) = 313$

7.6 Conclusiones

En este capítulo se encontró una ley de control subóptima analítica para el crecimiento de la lechuga en invernadero (ver sección 7.4) y figura 7.1). Para aplicar esta ley de control solo se necesita resolver una ecuación algebraica en términos de los parámetros de la lechuga cultivada en invernadero (ver (7.24)-(7.31)).

Capítulo 8 Conclusiones y Perspectivas

8.1 Conclusiones

El modelo de van Henten para el comportamiento de la materia seca, para el crecimiento de la lechuga en invernadero (ver (2.13)-(2.15)), puede ser separado en dos modelos matemáticos independientes. Un modelo independiente es para el período de luz,(ver (3.18)-(3.19) y figura 3.2), y el otro modelo para el período de oscuridad (ver (3.20)-(3.21)). Al integrar diariamente estos modelos independientes se obtiene el comportamiento de la materia seca (ver (3.22) y figura 3.2).

La razón relativa de crecimiento para el cultivo de la lechuga en invernadero para el modelo de díanoche, (3.22). tiene las características de un comportamiento logístico (ver (4.18)-(4.20) y figuras 4.1 y 4.2). Esta razón relativa de crecimiento esta directamente relacionada con la *fotosíntesis máxima de asimilación de CO*₂, $\phi_{phot,max}$ (ver (6.2)), la cual puede ser aproximada por una función que depende de la entrada de control, $\overline{U}_{c,D}$ (ver (6.7), (6.8), (6.5) y figura 6.1). Este hecho permite que se encuentre una ley de control subóptima analítica para el crecimiento de la lechuga en invernadero (ver (7.33) y figura 7.1). Esta ley de control subóptima analítica esta en términos de los parámetros de la lechuga cultivada en invernadero (ver (7.24)-(7.31)).

Finalmente como una conclusión de este trabajo de tesis es proponer un procedimiento simplificado de como obtener una ley de control que maximize (minimize) un índice de desempeño. Este procedimiento está basado en el control del clima dentro del invernadero en su período de luz y su período de oscuridad. En la figura 8.1 se muestra este diagrama de flujo simplificado. Este procedimiento puede variar con respecto al cultivo que se esté estudiando.

8.2 Perspectivas

- 1. Extender los resultados de este trabajo de tesis a otros cultivos en invernadero.
- 2. Llevar a la práctica los resultados de este trabajo de tesis.



Figura 8.1 Diagrama de flujo simplificado propuesto para encontrar una ley de control subóptima para plantas C3, cultivadas dentro de un invernadero. Esta propuesta está basada en el control del crecimiento del cultivo en su período de luz y su período de oscuridad

Parte III Apéndices

Apendice A Modelos de crecimiento en cultivos

A.1 Crecimiento exponencial

Durante esta fase de crecimiento, las plantas que componen al cultivo tienen mucho espacio entre si, por lo cual no compiten entre ellas por interceptar luz. Cada nueva hoja que se forma aumenta la luz interceptada (ver [5] por ejemplo).

La ecuación diferencial para este modelo es:

$$\frac{dX_{d,e}}{dt} = r_b X_{d,e},\tag{A.1}$$

donde $X_{d,e} [kg/m^2]$ es la materia seca modelada por un crecimiento exponencial y $r_b [1/s]$ es el parámetro de crecimiento específico el cual se supone constante (ver [22] por ejemplo). Al resolver (A.1) se obtiene que el comportamiento de $X_{d,e} [kg/m^2]$ esta dado por:

$$X_{d,e} = X_{d,eo} e^{r_b t},\tag{A.2}$$

donde $X_{d,eo}[kg/m^2]$ es la condición inicial de materia seca y t[d] es el tiempo de crecimiento y desarrollo del cultivo dado en días.

La figura A.1 es una gráfica típica de (A.2), para parámetros positivos arbitrarios $X_{d,e}$ y r_b .

Este modelo de crecimiento es independiente de la disponibilidad de substrato y representa la primera fase de crecimiento. En esta fase cada nueva hoja formada contribuye a interceptar más luz. A medida que se forman nuevas hojas mayor es el sombreado que existe entre ellas, por lo cual esta fase de crecimiento solo dura un determinado tiempo.

A.2 Crecimiento lineal

Cuando las hojas de la plantas comienzan a hacerse sombra entre ellas, hasta que el índice de área de hoja dado por:

$$I = \frac{\text{área total de hoja}}{\text{área de terreno cultivado}} \left[\frac{m^2 \text{(hoja)}}{m^2 \text{(terreno)}} \right], \tag{A.3}$$

esta por arriba de 3[-], difícilmente hay una gran intercepción de luz (ver [5] por ejemplo). Por lo cual el cultivo pasa de una fase de crecimiento exponencial a una fase de crecimiento lineal. La ecuación diferencial para modelar este fase de crecimiento es:



Figura A.1 Crecimiento exponencial (A.2), $X_{d,e}$ vs t, para parámetros positivos arbitrarios $X_{d,eo}=0.05$ y $r_b=0.08$

$$\frac{dX_{d,l}}{dt} = c_m,\tag{A.4}$$

donde $X_{d,l} \left[kg/m^2 \right]$ es la materia seca modelada por un crecimiento lineal y $c_m \left[kg/m^2 d \right]$ es el parámetro de crecimiento máximo. Al resolver (A.4) se obtiene que el comportamiento de $X_{d,l}$ esta dado por:

$$X_{d,l} = c_m (t - t_b), \tag{A.5}$$

donde $t_b[d]$ es el tiempo cuando comienza la fase lineal de crecimiento. En la figura A.2, se muestra el comportamiento de la materia seca $X_{d,l}$ dado por (A.5) tomando parámetros arbitrarios $t_b > 0$ y $c_m > 0$.

En este modelo se considera que el parámetro de crecimiento máximo c_m es una constante positiva.

A.3 Crecimiento exponencial-lineal

Goudriaann y Van Laar proponen un modelo que toma en cuenta la transición de la fase de crecimiento exponencial a la fase de crecimiento lineal, el cual denominaron crecimiento exponencial-lineal [5]. Este modelo esta dado por:



Figura A.2 Crecimiento lineal (A.5), $X_{d,l}$ vs t, para parámetros arbitrarios c_m =0.002 y t_b = 0

$$X_{d,\exp} = \frac{c_m}{r_b} Ln \left(1 + e^{r_m(t-t_b)} \right), \tag{A.6}$$

donde $X_{d,\exp} [kg/m^2]$ es la materia seca modelada por un crecimiento exponencial-lineal, $t_b [d]$ es el tiempo donde comienza la fase lineal de crecimiento, $c_m [kg/m^2d]$ es el parámetro de crecimiento máximo y $r_b [1/s]$ es el parámetro de crecimiento específico. En este modelo se toma en cuenta la transición de la fase de crecimiento exponencial a la fase de crecimiento lineal (figura A.3).

A.4 Crecimiento logístico

El modelo de crecimiento logístico es uno de los más importantes que describen el comportamiento de la materia seca en cultivos (ver [7] por ejemplo). Este modelo se obtiene al derivar con respecto al tiempo (A.6), esto es:

$$\frac{dX_{d,\exp}}{dt} = c_m \frac{e^{r_b(t-t_b)}}{1+e^{r_b(t-t_b)}}.$$
(A.7)

Si ahora renombramos a $\frac{dX_{d,exp}}{dt}$ como $X_{d,\log}$ en (A.7), tenemos que el modelo de crecimiento logístico es:



Figura A.3 Crecimiento exponencial-lineal (A.6), $X_{d,exp}$ vs t, para parámetros arbitrarios $c_m = 0.012$, $r_b = 0.562$, y $t_b = 2.65$

$$X_{d,\log} = c_m \frac{e^{r_b(t-t_b)}}{1+e^{r_b(t-t_b)}},$$
(A.8)

donde $X_{d,\log} [kg/m^2]$ es la materia seca modelada por un crecimiento logístico, $t_b [d]$ es el tiempo cuando comienza la fase lineal de crecimiento, $c_m [kg/m^2d]$ es el parámetro de crecimiento máximo y $r_b [1/d]$ es el parámetro de crecimiento específico. En la figura A.4, se muestra el comportamiento de la materia seca modelado por una ley de crecimiento logístico.

A.4.1 Características del crecimiento logístico

Una característica del modelo logístico (A.8), es que su derivada con respecto al tiempo, $\frac{dX_{d,\log}}{dt}$, dada por:

$$\frac{dX_{d,\log}}{dt} = (X_{d,\log}) \left(-\frac{r_b}{c_m} \left(X_{d,\log} \right) + r_b \right),\tag{A.9}$$

es una parábola (ver [7] por ejemplo) . En la figura A.5 se muestra la gráfica de (A.9) para parámetros $r_b > 0$ y $c_m > 0$ arbitrarios.



Figura A.4 Crecimiento logístico (A.8), $X_{d,\log}$ vs t, para parámetros arbitrarios $c_m = 45, r_b = 0.14, y t_b = 45$

El término $\left(-\frac{r_b}{c_m}(X_{d,\log})+r_b\right)$ de (A.9), corresponde a la razón relativa de crecimiento de la velocidad de producción de materia seca, RRC¹, esto es:

$$RRC = \frac{dX_{d,\log}/dt}{X_{d,\log}} = \left(-\frac{r_b}{c_m}\left(X_{d,\log}\right) + r_b\right).$$
(A.10)

En la figura A.6 se muestra la RRC, (A.10), donde se observa su comportamiento lineal para parámetros $r_b > 0$ y $c_m > 0$ arbitrarios.

 $^{^{1}}$ Por simplicidad se le llamara razón relativa de crecimiento.



Figura A.5 $\frac{dX_{d,\log}}{dt}$ vs $X_{d,\log}$, (A.9), para parámetros arbitrarios positivos $c_m = 45$, $r_b = 0.14$, y $t_b = 45$



Figura A.6 Razón relativa de crecimiento $\frac{dX_{d,\log}/dt}{X_{d,\log}}$ vs $X_{d,\log}$, (A.10), donde se observa su comportamiento lineal para parámetros arbitrarios $c_m = 45$ y $r_b = 0.14$

Apendice B Radiación fotosintéticamente activa real

En la siguiente tabla se muestran los datos de la Radiación fotos
intéticamente activa, $V_{i,p}[W/m^2]$, del 21 de enero al 17 de marzo de 1992, proporcionados por la Universidad de Wageningen Holanda.

Tiempo	$V_{i,p}$	Tiempo	$V_{i,p}$	Tiempo	$V_{i,p}$	Tiempo	$V_{i,p}$	Tiempo	$V_{i,p}$
23.000000	0.000000	23.020833	0.000000	23.041667	0.000000	23.062500	0.000000	23.083333	0.000000
23.104167	0.000000	23.125000	0.000000	23.145833	0.000000	23.166667	0.000000	23.187500	0.000000
23.208333	0.000000	23.229167	0.000000	23.250000	0.000000	23.270833	0.000000	23.291667	0.000000
23.312500	0.000000	23.333333	0.000000	23.354167	0.000000	23.375000	2.010000	23.395833	13.377500
23.416667	28.407500	23.437500	41.505000	23.458333	49.832500	23.479167	67.170000	23.500000	72.647500
23.520833	86.670000	23.541667	90.440000	23.562500	92.772500	23.583333	84.772500	23.604167	70.567500
23.625000	58.752500	23.645833	44.367500	23.666667	32.222500	23.687500	19.615000	23.708333	7.757500
23.729167	0.000000	23.750000	0.000000	23.770833	0.000000	23.791667	0.000000	23.812500	0.000000
23.833333	0.000000	23.854167	0.000000	23.875000	0.000000	23.895833	0.000000	23.916667	0.000000
23.937500	0.000000	23.958333	0.000000	23.979167	0.000000	24.000000	0.000000	24.020833	0.000000
24.041667	0.000000	24.062500	0.000000	24.083333	0.000000	24.104167	0.000000	24.125000	0.000000
24.145833	0.000000	24.166667	0.000000	24.187500	0.000000	24.208333	0.000000	24.229167	0.000000
24.250000	0.000000	24.270833	0.000000	24.291667	0.000000	24.312500	0.000000	24.333333	0.000000
24.354167	0.000000	24.375000	2.450000	24.395833	14.055000	24.416667	29.392500	24.437500	43.920000
24.458333	50.747500	24.479167	68.700000	24.500000	78.130000	24.520833	95.887500	24.541667	98.982500
24.562500	106.085000	24.583333	88.550000	24.604167	73.497500	24.625000	59.430000	24.645833	43.070000
24.666667	30.472500	24.687500	18.657500	24.708333	7.992500	24.729167	1.880000	24.750000	0.000000
24.770833	0.000000	24.791667	0.000000	24.812500	0.000000	24.833333	0.000000	24.854167	0.000000
24.875000	0.000000	24.895833	0.000000	24.916667	0.000000	24.937500	0.000000	24.958333	0.000000
24.979167	0.000000	25.000000	0.000000	25.020833	0.000000	25.041667	0.000000	25.062500	0.000000
25.083333	0.000000	25.104167	0.000000	25.125000	0.000000	25.145833	0.000000	25.166667	0.000000
25.187500	0.000000	25.208333	0.000000	25.229167	0.000000	25.250000	0.000000	25.270833	0.000000
25.291667	0.000000	25.312500	0.000000	25.333333	0.000000	25.354167	0.000000	25.375000	2.010000
25.395833	13.377500	25.416667	28.407500	25.437500	41.505000	25.458333	49.832500	25.479167	67.170000
25.500000	72.647500	25.520833	86.670000	25.541667	90.440000	25.562500	92.772500	25.583333	84.772500
25.604167	70.567500	25.625000	58.752500	25.645833	44.367500	25.666667	32.222500	25.687500	19.615000
25.708333	7.757500	25.729167	0.000000	25.750000	0.000000	25.770833	0.000000	25.791667	0.000000
25.812500	0.000000	25.833333	0.000000	25.854167	0.000000	25.875000	0.000000	25.895833	0.000000
25.916667	0.000000	25.937500	0.000000	25.958333	0.000000	25.979167	0.000000	26.000000	0.000000
26.020833	0.000000	26.041667	0.000000	26.062500	0.000000	26.083333	0.000000	26.104167	0.000000

B Radiación fotosintéticamente activa real

								· _ ·	
Tiempo	$V_{i,p}$	Tiempo	$V_{i,p}$	Tiempo	$V_{i,p}$	Tiempo	$V_{i,p}$	Tiempo	$V_{i,p}$
26.125000	0.000000	26.145833	0.000000	26.166667	0.000000	26.187500	0.000000	26.208333	0.000000
26.229167	0.000000	26.250000	0.000000	26.270833	0.000000	26.291667	0.000000	26.312500	0.000000
26.333333	0.000000	26.354167	0.000000	26.375000	4.087500	26.395833	16.085000	26.416667	31,272500
26 437500	47 837500	26 458333	64 785000	26 479167	71 347500	26 500000	81 387500	26 520833	90.912500
26.101000	70 710000	26.100000	82.055000	26.110101	05 155000	26.600060	70 322500	26.625000	60 105000
20.341007	79.710000	20.302300	32.055000	20.000000	90.10000	20.004107	79.322500	20.025000	00.105000
20.040805	0.307500	20.000007	35.137300	20.087500	20.042500	20.708555	7.717500	20.729107	0.000000
26.750000	0.000000	26.770833	0.000000	26.791667	0.000000	26.812500	0.000000	26.833333	0.000000
26.854167	0.000000	26.875000	0.000000	26.895833	0.000000	26.916667	0.000000	26.937500	0.000000
26.958333	0.000000	26.979167	0.000000	27.000000	0.000000	27.020833	0.000000	27.041667	0.000000
27.062500	0.000000	27.083333	0.000000	27.104167	0.000000	27.125000	0.000000	27.145833	0.000000
27.166667	0.000000	27.187500	0.000000	27.208333	0.000000	27.229167	0.000000	27.250000	0.000000
27.270833	0.000000	27.291667	0.000000	27.312500	0.000000	27.3333333	0.000000	27.354167	0.000000
27.375000	1.857500	27.395833	7.167500	27.416667	13,895000	27.437500	20.660000	27.458333	28,460000
27.479167	35 527500	27.500000	42 732500	27.520833	41 115000	27.541667	46 867500	27.562500	47 692500
27.470107	40 105000	27.604167	28.005000	27.625000	22 467500	27.041001	26 282500	27.666667	10.805000
27.383555	40.1950000	27.004107	38.003000	27.025000	0.000000	27.045855	20.382500	27.000007	19.895000
27.087500	10.250000	27.708333	2.987500	27.729167	0.000000	27.750000	0.000000	27.770833	0.000000
27.791667	0.000000	27.812500	0.000000	27.833333	0.000000	27.854167	0.000000	27.875000	0.000000
27.895833	0.000000	27.916667	0.000000	27.937500	0.000000	27.958333	0.000000	27.979167	0.000000
28.000000	0.000000	28.020833	0.000000	28.041667	0.000000	28.062500	0.000000	28.083333	0.000000
28.104167	0.000000	28.125000	0.000000	28.145833	0.000000	28.166667	0.000000	28.187500	0.000000
28.208333	0.000000	28.229167	0.000000	28.250000	0.000000	28.270833	0.000000	28.291667	0.000000
28.312500	0.000000	28.333333	0.000000	28.354167	0.000000	28.375000	3.920000	28.395833	16.905000
28.416667	30.095000	28.437500	36.047500	28.458333	46.892500	28.479167	62.107500	28.500000	81.547500
28.520833	82.312500	28.541667	91.732500	28.562500	89.850000	28.583333	94.727500	28.604167	93.000000
28.625000	75.242500	28.645833	55,202500	28.666667	42,927500	28.687500	22,495000	28,708333	9.105000
28 729167	1 255000	28 750000	0.000000	28 770833	0.000000	28 791667	0.000000	28 812500	0.000000
28.120101	0.000000	28.160000	0.000000	28.875000	0.000000	28.101001	0.000000	28.916667	0.000000
28.033333	0.000000	20.054107	0.000000	28.875000	0.000000	20.090000	0.000000	20.910007	0.000000
28.937500	0.000000	20.950555	0.000000	28.979107	0.000000	29.000000	0.000000	29.020855	0.000000
29.041007	0.000000	29.062500	0.000000	29.083333	0.000000	29.104167	0.000000	29.125000	0.000000
29.145833	0.000000	29.166667	0.000000	29.187500	0.000000	29.208333	0.000000	29.229167	0.000000
29.250000	0.000000	29.270833	0.000000	29.291667	0.000000	29.312500	0.000000	29.333333	0.000000
29.354167	0.000000	29.375000	3.140000	29.395833	15.135000	29.416667	25.357500	29.437500	28.397500
29.458333	29.680000	29.479167	60.635000	29.500000	85.467500	29.520833	51.722500	29.541667	49.165000
29.562500	56.277500	29.583333	38.667500	29.604167	33.537500	29.625000	45.085000	29.645833	35.015000
29.666667	27.507500	29.687500	23.525000	29.708333	9.660000	29.729167	1.432500	29.750000	0.000000
29.770833	0.000000	29.791667	0.000000	29.812500	0.000000	29.833333	0.000000	29.854167	0.000000
29.875000	0.000000	29.895833	0.000000	29.916667	0.000000	29.937500	0.000000	29.958333	0.000000
29.979167	0.000000	30.000000	0.000000	30.020833	0.000000	30.041667	0.000000	30.062500	0.000000
30.083333	0.000000	30,104167	0.000000	30,125000	0.000000	30,145833	0.000000	30,166667	0.000000
30 187500	0.000000	30 208333	0.000000	30 229167	0.000000	30 250000	0.000000	30 270833	0.000000
30.201667	0.000000	30.312500	0.000000	30 222222	0.000000	30.354167	0.000000	30.375000	6.135000
20 205822	18 207500	20 416667	24.250000	20 427500	51 142500	20 459222	62 740000	30.375000	0.133000
20.520000	10.001000	20.410007	100 517500	20 5/1227	108 610000	20 269200	117 000500	20.419107	04 565000
20.604107	92.902000	20.020003	100.017000	20.041007	100.010000	20.002000	111.902000	20.0000000	94.000000
30.004167	93.015000	30.025000	80.840000	30.045833	000000	30.000007	36.220000	30.087500	23.247500
30.708333	10.835000	30.729167	1.517500	30.750000	0.000000	30.770833	0.000000	30.791667	0.000000
30.812500	0.000000	30.833333	0.000000	30.854167	0.000000	30.875000	0.000000	30.895833	0.000000
30.916667	0.000000	30.937500	0.000000	30.958333	0.000000	30.979167	0.000000	31.000000	0.000000
31.020833	0.000000	31.041667	0.000000	31.062500	0.000000	31.083333	0.000000	31.104167	0.000000
31.125000	0.000000	31.145833	0.000000	31.166667	0.000000	31.187500	0.000000	31.208333	0.000000
31.229167	0.000000	31.250000	0.000000	31.270833	0.000000	31.291667	0.000000	31.312500	0.000000
31.333333	0.000000	31.354167	0.000000	31.375000	5.930000	31.395833	17.755000	31.416667	35.962500
31.437500	48.207500	31.458333	68.505000	31.479167	69.817500	31.500000	88.695000	31.520833	121.780000
31.541667	141.045000	31.562500	134.527500	31.583333	103.412500	31.604167	81.265000	31.625000	84.552500
31.645833	61.727500	31.666667	28.285000	31.687500	15.887500	31.708333	10.107500	31.729167	2.072500
31.750000	0.000000	31.770833	0.000000	31.791667	0.000000	31.812500	0.000000	31.833333	0.000000
31 85/167	0.000000	31 875000	0.000000	31 805833	0.000000	31 916667	0.000000	31 937500	0.000000
21 050999	0.000000	31.070167	0.000000	33 000000	0.000000	30 00001	0.000000	32 0/1667	0.000000
01.900000	0.000000	01.9(910)	0.000000	20.104107	0.000000	20 105000	0.000000	02.041007	0.000000
32.002500	0.000000	32.083333 20.107500	0.000000	32.104107	0.000000	32.120000	0.000000	32.140833	0.000000
32.166667	0.000000	32.187500	0.000000	32.208333	0.000000	32.229167	0.000000	32.250000	0.000000
32.270833	0.000000	32.291667	0.000000	32.312500	0.000000	32.3333333	0.000000	32.354167	0.000000

58
B Radiación fotosintéticamente activa real

Tiempo	Vin	Tiempo	Vin	Tiempo	Vin	Tiempo	Vin	Tiempo	Vin
32 375000	2.742500	32 395833	7 842500	32 416667	14700000	32 437500	21.735000	32 458333	27 147500
32 479167	32 717500	32 500000	48 645000	32 520833	49.657500	32 541667	37 940000	32 562500	38 947500
32.473107	43 400000	32.000000	32 160000	32.520055	49.057500	32.041007	21.032500	32.502500	15 155000
32.687500	9.897500	32.004107	5.090000	32.025000	1 125000	32.040000	0.000000	32.000007	0.000000
32,791667	0.000000	32.100500	0.000000	32.123101	0.000000	32.150000	0.000000	32.875000	0.000000
32.191007	0.000000	32.012000	0.000000	32.033555	0.000000	32.054107	0.000000	32.875000	0.000000
33,000000	0.000000	33 020833	0.000000	33 041667	0.000000	33.062500	0.000000	32.979107	0.000000
33.000000	0.000000	33 125000	0.000000	33.041007	0.000000	33 166667	0.000000	33 187500	0.000000
33.104107	0.000000	33 220167	0.000000	33 250000	0.000000	33.100007	0.000000	33 201667	0.000000
33 312500	0.000000	22 222222	0.000000	33.250000	0.000000	33 375000	3.030000	33 305833	8.025000
33 416667	14 110000	33 437500	25 107500	33.458333	35.077500	33 470167	38 305000	33 500000	41 082500
33 520833	44.075000	33541667	42 550000	33 562500	38.070000	33 583333	34 042500	33 60/167	30 237500
33 625000	34 687500	33 645833	29 412500	33 666667	21 107500	33 687500	10 675000	33 708333	5 867500
33 729167	1 157500	33 750000	0.000000	33 770833	0.000000	33 791667	0.000000	33 812500	0.000000
33 833333	0.000000	33 854167	0.000000	33 875000	0.000000	33 895833	0.000000	33 916667	0.000000
33 937500	0.000000	33 958333	0.000000	33 979167	0.000000	34 000000	0.000000	34 020833	0.000000
34 041667	0.000000	34.062500	0.000000	34 083333	0.000000	34 104167	0.000000	34 125000	0.000000
34.145833	0.000000	34 166667	0.000000	34 187500	0.000000	34 208333	0.000000	34 220167	0.000000
34.250000	0.000000	34 270833	0.000000	34 201667	0.000000	34 312500	0.000000	34 2223101	0.000000
34.354167	0.000000	34.375000	3 687500	34.205833	11 647500	34.416667	10.765000	34.437500	26 610000
34.004107	36 757500	34 470167	42 747500	34 500000	46 670000	34 520822	51 645000	34 541667	44 530000
34 562500	44 885000	34 582222	47 010000	34 60/167	43.820000	34 625000	34 307500	34 645822	29 077500
34.666667	23 210000	34.687500	47.310000	34.004107	6.010000	34.023000 34.720167	1 1 2 2 5 0 0	34.045855	29.011500
34.000007	23.210000	34.087500	0.000000	34.100000	0.010000	34.123101	0.000000	34.750000	0.000000
34.770833	0.000000	24.791007	0.000000	24.012000	0.000000	24.027500	0.000000	24.059222	0.000000
34.873000	0.000000	25 000000	0.000000	25 020822	0.000000	25 041667	0.000000	25 062500	0.000000
34.979107	0.000000	25 104167	0.000000	25 125000	0.000000	25 145922	0.000000	25 166667	0.000000
25 187500	0.000000	25 208222	0.000000	25 220167	0.000000	25 250000	0.000000	25 270922	0.000000
35.167300	0.000000	35.208333	0.000000	35.229107	0.000000	35.250000	0.000000	35.270633	2 122500
35.291007	7 520000	35.312300	12 282500	25 427500	17 207500	35.334107	0.000000	35.373000	3.132000
35.595655	7.520000	35.410007	13.362300	35.457500	17.397300	30.408333	40.060000	35.479107	26.137300
35.500000	31.373000	35.520855	30.307300	35.541007	33.300000	35.302300	40.000000	30.000000	34.300000
35.004107	32.047300	35.025000	27.992500	25 750000	19.470000	35.000007	12.037300	25 701667	9.955000
25 912500	4.012000	25 022222	0.000000	25 954167	0.000000	25 975000	0.000000	25 905922	0.000000
35.016667	0.000000	35 037500	0.000000	35 058333	0.000000	35.070167	0.000000	36.000000	0.000000
35.910007	0.000000	26 041667	0.000000	26 062500	0.000000	26 092222	0.000000	26 104167	0.000000
30.020833	0.000000	26 145922	0.000000	26 166667	0.000000	26 197500	0.000000	26 208222	0.000000
30.123000	0.000000	26 250000	0.000000	26 270822	0.000000	26 201667	0.000000	26 212500	0.000000
30.229107	0.000000	30.230000	0.000000	30.270033	7.150000	30.291007	0.000000	30.312300	42.820000
30.333333	57 625000	30.334107	70.475000	30.373000	7.150000	30.393833	23.382300	30.410007	42.830000
30.437300	02 245000	30.436333	120.710000	30.479107	110.780000	30.300000	124.085000	30.320833	55.702500 60.079500
30.341007	92.345000	26 666667	27 120000	26 697500	119.780000	30.004107	5 560000	30.023000	09.072500
30.043833	40.040000	26 770822	0.000000	26 701667	12.387300	26 912500	0.000000	26 922222	0.000000
36.854167	0.000000	36 875000	0.000000	36 805822	0.000000	36 016667		36 027500	0.000000
36 052222	0.000000	36 070167	0.000000	37 000000	0.000000	37 00007	0.000000	37 041667	0.000000
37 062500	0.000000	37 00000	0.000000	37 10/167	0.000000	37 125000	0.000000	37 1/5022	0.000000
37.166667	0.000000	37 197500	0.000000	37 200222	0.000000	37 220167	0.000000	37 250000	0.000000
37.100007	0.000000	31.101000	0.000000	27 21 2500	0.000000	31.229101	0.000000	31.200000	0.000000
37.270833	0.000000	37.291007	0.000000	37.312300	11.750000	37.333333	0.000000	37.334107	0.000000
37.375000	1.890000	37.395833	4.077500	37.410007	11.750000	37.437500	12.122500	37.458333	20.212500
37.479167	35.540000	37.00000	44.952500	37.320833	00.952500	37.341667	00.000000	37.362500	39.045000
31.383333	48.010000	37.004167	47.00000	31.025000	55.720000	31.045833	23.097500	37.000007	10.175000
37.087500	19.752500	37.108333	19.742500	31.129107	0.000000	37.130000	0.000000	31.110833	0.000000
37.191007	0.000000	37.812500	0.000000	27 027500	0.000000	37.059222	0.000000	31.815000	0.000000
31.895833	0.000000	37.910007	0.000000	31.937500	0.000000	31.958333	0.000000	31.979167	0.000000
38.000000	0.000000	38.020833	0.000000	38.041007	0.000000	38.002500	0.000000	20 107500	0.000000
38.104167	0.000000	38.125000	0.000000	38.145833	0.000000	38.100007	0.000000	38.187500	0.000000
38.208333	0.000000	38.229167	0.000000	38.250000	0.000000	38.270833	0.000000	38.291667	0.000000
38.312500	10.700000	08.333333		38.334107	0.000000	38.375000	1.80/500	38.395833	0.095000
38.410007	10.720000	38.437500	14.062500	38.458333	11.170000	38.479167	18.860000	38.000000	25.827500
38.520833	28.250000	38.541667	27.305000	38.562500	41.437500	38.583333	36.282500	38.604167	41.897500

B Radiación fotosintéticamente activa real

Tiempo	$V_{i,p}$	Tiempo	$V_{i,p}$	Tiempo	$V_{i,p}$	Tiempo	$V_{i,p}$	Tiempo	$V_{i,p}$
38.625000	28.730000	38.645833	37.550000	38.666667	20.232500	38.687500	10.107500	38.708333	3.027500
38.729167	1.412500	38.750000	0.000000	38.770833	0.000000	38.791667	0.000000	38.812500	0.000000
38.833333	0.000000	38.854167	0.000000	38.875000	0.000000	38.895833	0.000000	38.916667	0.000000
38.937500	0.000000	38.958333	0.000000	38.979167	0.000000	39.000000	0.000000	39.020833	0.000000
39.041667	0.000000	39.062500	0.000000	39.083333	0.000000	39.104167	0.000000	39.125000	0.000000
39.145833	0.000000	39.166667	0.000000	39.187500	0.000000	39.208333	0.000000	39.229167	0.000000
39.250000	0.000000	39.270833	0.000000	39.291667	0.000000	39.312500	0.000000	39.333333	0.000000
39.354167	0.000000	39.375000	6.770000	39.395833	18.042500	39.416667	31.305000	39.437500	45.927500
39.458333	58.787500	39.479167	85.377500	39.500000	116.495000	39.520833	109.222500	39.541667	104.845000
39.562500	125.547500	39.583333	134.010000	39.604167	78.552500	39.625000	51,142500	39.645833	27.122500
39 666667	29 737500	39 687500	22 410000	39 708333	11 210000	39 729167	4 447500	39 750000	0.000000
39 770833	0.000000	39 791667	0.000000	39.812500	0.000000	30 833333	0.000000	39.854167	0.000000
30.875000	0.000000	30 805833	0.000000	30.0126667	0.000000	30.037500	0.000000	30.058333	0.000000
39.875000	0.000000	40.000000	0.000000	40.020833	0.000000	40.041667	0.000000	40.062500	0.000000
39.979107	0.000000	40.000000	0.000000	40.020833	0.000000	40.041007	0.000000	40.002300	0.000000
40.083333	0.000000	40.104167	0.000000	40.125000	0.000000	40.145833	0.000000	40.166667	0.000000
40.187500	0.000000	40.208333	0.000000	40.229167	0.000000	40.250000	0.000000	40.270833	0.000000
40.291667	0.000000	40.312500	0.000000	40.333333	0.000000	40.354167	2.035000	40.375000	12.825000
40.395833	27.597500	40.416667	49.565000	40.437500	59.372500	40.458333	87.660000	40.479167	129.690000
40.500000	136.972500	40.520833	161.105000	40.541667	131.200000	40.562500	126.920000	40.583333	143.322500
40.604167	118.155000	40.625000	143.932500	40.645833	84.955000	40.666667	54.442500	40.687500	34.672500
40.708333	19.077500	40.729167	7.502500	40.750000	0.000000	40.770833	0.000000	40.791667	0.000000
40.812500	0.000000	40.833333	0.000000	40.854167	0.000000	40.875000	0.000000	40.895833	0.000000
40.916667	0.000000	40.937500	0.000000	40.958333	0.000000	40.979167	0.000000	41.000000	0.000000
41.020833	0.000000	41.041667	0.000000	41.062500	0.000000	41.083333	0.000000	41.104167	0.000000
41.125000	0.000000	41.145833	0.000000	41.166667	0.000000	41.187500	0.000000	41.208333	0.000000
41.229167	0.000000	41.250000	0.000000	41.270833	0.000000	41.291667	0.000000	41.312500	0.000000
41.3333333	0.000000	41.354167	2.797500	41.375000	14.337500	41.395833	29.392500	41.416667	50.162500
41,437500	68.337500	41.458333	98.667500	41.479167	127.327500	41.500000	124,690000	41.520833	122,855000
41 541667	127 700000	41 562500	131 295000	41 583333	126 397500	41 604167	129.015000	41 625000	119 502500
41.645833	76 567500	41.666667	54 432500	41.687500	34 430000	41 708333	20 200000	41 720167	8.055000
41.045855	0.000000	41.000007	0.000000	41.087500	0.00000	41.708555	20.290000	41.729107	0.00000
41.750000	0.000000	41.770833	0.000000	41.791007	0.000000	41.812500	0.000000	41.035555	0.000000
41.654107	0.000000	41.873000	0.000000	41.695655	0.000000	41.910007	0.000000	41.937300	0.000000
41.958555	0.000000	41.979107	0.000000	42.000000	0.000000	42.020855	0.000000	42.041007	0.000000
42.062500	0.000000	42.083333	0.000000	42.104167	0.000000	42.125000	0.000000	42.145833	0.000000
42.166667	0.000000	42.187500	0.000000	42.208333	0.000000	42.229167	0.000000	42.250000	0.000000
42.270833	0.000000	42.291667	0.000000	42.312500	0.000000	42.333333	0.000000	42.354167	3.220000
42.375000	14.217500	42.395833	31.020000	42.416667	48.987500	42.437500	58.625000	42.458333	33.467500
42.479167	31.957500	42.500000	34.312500	42.520833	45.630000	42.541667	53.547500	42.562500	60.202500
42.583333	60.815000	42.604167	52.802500	42.625000	31.382500	42.645833	15.770000	42.666667	8.322500
42.687500	4.927500	42.708333	3.100000	42.729167	1.560000	42.750000	0.000000	42.770833	0.000000
42.791667	0.000000	42.812500	0.000000	42.833333	0.000000	42.854167	0.000000	42.875000	0.000000
42.895833	0.000000	42.916667	0.000000	42.937500	0.000000	42.958333	0.000000	42.979167	0.000000
43.000000	0.000000	43.020833	0.000000	43.041667	0.000000	43.062500	0.000000	43.083333	0.000000
43.104167	0.000000	43.125000	0.000000	43.145833	0.000000	43.166667	0.000000	43.187500	0.000000
43.208333	0.000000	43.229167	0.000000	43.250000	0.000000	43.270833	0.000000	43.291667	0.000000
43.312500	0.000000	43.333333	0.000000	43.354167	1.445000	43.375000	7.575000	43.395833	20.162500
43.416667	31.570000	43.437500	53.730000	43.458333	62.235000	43.479167	81.007500	43.500000	103.020000
43.520833	135.092500	43.541667	101.715000	43.562500	99.095000	43.583333	64.525000	43.604167	64.125000
43,625000	45.677500	43.645833	63,055000	43.666667	47.820000	43.687500	21.662500	43,708333	16,115000
43,729167	9.865000	43,750000	1.165000	43.770833	0.000000	43,791667	0.000000	43.812500	0.000000
43 833333	0.000000	43 854167	0.000000	43 875000	0.000000	43 805833	0.000000	43 916667	0.000000
43 937500	0.000000	43 958222	0.000000	43 970167		44 000000	0.000000	44 020833	0.000000
44 041667	0.000000	44 062500	0.000000	44 082222		44 10/167	0.000000	44 125000	0.000000
44 145099	0.000000	44 166667	0.000000	44 197500	0.000000	44 900999	0.000000	44 990167	0.000000
44.140000	0.000000	44.100007	0.000000	44.10100	0.000000	44.200000	0.000000	44.229107	0.000000
44.200000	1.007500	44.275000	6.170500	44.291007	6.040000	44.312300	0.000000	44.000000	15 240500
44.354167	1.927500	44.3/5000	0.172500	44.395833	0.040000	44.410007	8.075000	44.437500	15.342500
44.458333	14.840000	44.479167	14.222500	44.500000	27.490000	44.520833	38.477500	44.541667	48.905000
44.562500	39.245000	44.583333	24.912500	44.604167	17.520000	44.625000	16.350000	44.645833	11.900000
44.666667	11.280000	44.687500	10.737500	44.708333	7.125000	44.729167	2.805000	44.750000	0.000000
44.770833	0.000000	44.791667	0.000000	44.812500	0.000000	44.8333333	0.000000	44.854167	0.000000

60

B Radiación fotosintéticamente activa real

Tiemno	V	Tiemno	V	Tiemno	V	Tiemno	V	Tiemno	V
112000	<i>v</i> _i ,p	14 205222	$v_{i,p}$	44.016667	<i>v</i> _i ,p	44.027500	<i>v</i> _{<i>i</i>,<i>p</i>}	44.059222	<i>v</i> _{<i>i</i>,<i>p</i>}
44.875000	0.000000	44.895855	0.000000	44.910007	0.000000	44.937500	0.000000	44.958555	0.000000
44.979107	0.000000	45.000000	0.000000	45.020855	0.000000	45.041007	0.000000	45.062500	0.000000
45.083333	0.000000	45.104167	0.000000	45.125000	0.000000	45.145833	0.000000	45.100007	0.000000
45.187500	0.000000	45.208333	0.000000	45.229167	0.000000	45.250000	0.000000	45.270833	0.000000
45.291667	0.000000	45.312500	0.000000	45.333333	0.000000	45.354167	1.727500	45.375000	5.272500
45.395833	5.917500	45.416667	10.097500	45.437500	16.460000	45.458333	17.277500	45.479167	26.385000
45.500000	37.030000	45.520833	38.330000	45.541667	53.017500	45.562500	56.947500	45.583333	80.992500
45.604167	78.380000	45.625000	53.372500	45.645833	19.085000	45.666667	19.020000	45.687500	4.990000
45.708333	4.040000	45.729167	4.257500	45.750000	0.000000	45.770833	0.000000	45.791667	0.000000
45.812500	0.000000	45.833333	0.000000	45.854167	0.000000	45.875000	0.000000	45.895833	0.000000
45.916667	0.000000	45.937500	0.000000	45.958333	0.000000	45.979167	0.000000	46.000000	0.000000
46.020833	0.000000	46.041667	0.000000	46.062500	0.000000	46.083333	0.000000	46.104167	0.000000
46.125000	0.000000	46.145833	0.000000	46.166667	0.000000	46.187500	0.000000	46.208333	0.000000
46.229167	0.000000	46.250000	0.000000	46.270833	0.000000	46.291667	0.000000	46.312500	0.000000
46 333333	0.000000	46 354167	2 222500	46 375000	12 627500	46 305833	25.965000	46 416667	39.637500
46.427500	56 500000	46.354107	64 105000	46.470167	61 647500	46 500000	54 250000	46 520822	05 182500
40.437500	107 225000	40.458555	04.195000	40.479107	01.047500	40.300000	158 50000	40.520855	95.182500
40.341007	107.325000	46.562500	91.860000	40.583333	114.957500	46.604167	158.560000	46.625000	34.087500
46.645833	52.647500	46.666667	36.355000	46.687500	59.245000	46.708333	29.377500	46.729167	13.882500
46.750000	2.012500	46.770833	0.000000	46.791667	0.000000	46.812500	0.000000	46.833333	0.000000
46.854167	0.000000	46.875000	0.000000	46.895833	0.000000	46.916667	0.000000	46.937500	0.000000
46.958333	0.000000	46.979167	0.000000	47.000000	0.000000	47.020833	0.000000	47.041667	0.000000
47.062500	0.000000	47.083333	0.000000	47.104167	0.000000	47.125000	0.000000	47.145833	0.000000
47.166667	0.000000	47.187500	0.000000	47.208333	0.000000	47.229167	0.000000	47.250000	0.000000
47.270833	0.000000	47.291667	0.000000	47.312500	0.000000	47.333333	0.000000	47.354167	4.402500
47.375000	11.875000	47.395833	22.542500	47.416667	29.012500	47.437500	46.295000	47.458333	62.997500
47,479167	98,425000	47.500000	72,397500	47.520833	119.020000	47.541667	62,467500	47.562500	77,400000
47 583333	49.085000	47 604167	49.677500	47 625000	75 142500	47 645833	46 585000	47 666667	41 700000
47.687500	27 367500	47 708333	25.080000	47 720167	14 660000	47 750000	3 345000	47 770833	0.000000
47.001500	21.301300	47.706555	25.980000	47.729107	14.000000	47.750000	3.345000	47.110855	0.000000
47.791007	0.000000	47.812500	0.000000	47.033333	0.000000	47.854107	0.000000	47.873000	0.000000
47.895833	0.000000	47.916667	0.000000	47.937500	0.000000	47.958333	0.000000	47.979167	0.000000
48.000000	0.000000	48.020833	0.000000	48.041667	0.000000	48.062500	0.000000	48.083333	0.000000
48.104167	0.000000	48.125000	0.000000	48.145833	0.000000	48.166667	0.000000	48.187500	0.000000
48.208333	0.000000	48.229167	0.000000	48.250000	0.000000	48.270833	0.000000	48.291667	0.000000
48.312500	0.000000	48.333333	0.000000	48.354167	1.157500	48.375000	3.372500	48.395833	11.647500
48.416667	14.405000	48.437500	17.557500	48.458333	15.522500	48.479167	31.665000	48.500000	54.672500
48.520833	16.767500	48.541667	25.250000	48.562500	42.917500	48.583333	42.170000	48.604167	44.862500
48.625000	95.502500	48.645833	97.295000	48.666667	79.867500	48.687500	51.785000	48.708333	29.890000
48.729167	7.367500	48.750000	1.240000	48.770833	0.000000	48.791667	0.000000	48.812500	0.000000
48.833333	0.000000	48.854167	0.000000	48.875000	0.000000	48.895833	0.000000	48.916667	0.000000
48.937500	0.000000	48.958333	0.000000	48.979167	0.000000	49.000000	0.000000	49.020833	0.000000
49 041667	0.000000	49.062500	0.000000	49 083333	0.000000	49 104167	0.000000	49 125000	0.000000
49.041007	0.000000	49.166667	0.000000	49.187500	0.000000	40 208333	0.000000	49.220167	0.000000
49.140000	0.000000	40.270822	0.000000	49.101500	0.000000	49.200355	0.000000	49.229101	0.000000
40.25/167	2 650000	40.375000	7 652500	40 205022	11 460000	40.416667	18 057500	40 427500	30.015000
49.004107	2.000000	49.3730000	150.049500	49.390833	11.400000	49.410007	10.037300	49.43/300	30.910000
49.408333	00.105000	49.479167	101.12000	49.00000	51.405000	49.020833	10.070000	49.541067	143.275000
49.562500	200.385000	49.583333	181.120000	49.604167	51.757500	49.625000	77.545000	49.645833	29.022500
49.666667	15.345000	49.687500	12.590000	49.708333	37.220000	49.729167	20.557500	49.750000	1.472500
49.770833	0.000000	49.791667	0.000000	49.812500	0.000000	49.833333	0.000000	49.854167	0.000000
49.875000	0.000000	49.895833	0.000000	49.916667	0.000000	49.937500	0.000000	49.958333	0.000000
49.979167	0.000000	50.000000	0.000000	50.020833	0.000000	50.041667	0.000000	50.062500	0.000000
50.083333	0.000000	50.104167	0.000000	50.125000	0.000000	50.145833	0.000000	50.166667	0.000000
50.187500	0.000000	50.208333	0.000000	50.229167	0.000000	50.250000	0.000000	50.270833	0.000000
50.291667	0.000000	50.312500	0.000000	50.3333333	0.000000	50.354167	8.702500	50.375000	23.590000
50.395833	40.957500	50.416667	34.067500	50.437500	61.162500	50.458333	124.665000	50.479167	175.065000
50,500000	160.580000	50,520833	186.882500	50.541667	222,047500	50,562500	145,365000	50.583333	172,587500
50 604167	136 697500	50 625000	122 702500	50 645833	118 417500	50 666667	77 710000	50 687500	48 952500
50.708222	37 810000	50.720167	17 625000	50.750000	4 507500	50.770832	0.00000	50 701667	0.000000
50 919500	0.000000	50.129107	11.020000	50.10000	4.007000	50.075000	0.000000	50.191007	0.000000
50.012000	0.000000	50 032500	0.000000	50.059333	0.000000	50.070107	0.000000	51.000000	0.000000
00.910007	0.000000	00.937500	0.000000	00.908333	0.000000	00.979167	0.000000	01.000000	0.000000
[51.020833]	0.000000	51.041667	0.000000	51.062500	0.000000	51.083333	0.000000	51.104167	0.000000

B Radiación fotosintéticamente activa real

	U IZ	<i>T</i> :	U IZ	<i>T</i> :	I.	<i>T</i> :	U IZ	<i>T</i> :	I.
1 iempo	$V_{i,p}$	1 iempo	$V_{i,p}$	1 iempo	$V_{i,p}$	1 iempo	$V_{i,p}$	1 iempo	$V_{i,p}$
51.125000	0.000000	51.145833	0.000000	51.166667	0.000000	51.187500	0.000000	51.208333	0.000000
51.229167	0.000000	51.250000	2.517500	51.270833	3.272500	51.291667	1.510000	51.312500	0.000000
51.333333	0.000000	51.354167	7.800000	51.375000	24.217500	51.395833	52.657500	51.416667	81.420000
51.437500	85.995000	51.458333	134.417500	51.479167	157.392500	51.500000	157.082500	51.520833	162.507500
51.541667	152.512500	51.562500	99.787500	51.583333	103.530000	51.604167	101.332500	51.625000	163.970000
51.645833	79.737500	51.666667	33.085000	51.687500	35.555000	51.708333	35.520000	51.729167	16.930000
51.750000	4.220000	51.770833	0.000000	51.791667	0.000000	51.812500	0.000000	51.833333	0.000000
51.854167	0.000000	51.875000	0.000000	51.895833	0.000000	51.916667	0.000000	51.937500	0.000000
51,958333	0.000000	51,979167	0.000000	52,000000	0.000000	52.020833	0.000000	52.041667	0.000000
52 062500	0.000000	52 083333	0.000000	52 104167	0.000000	52 125000	0.000000	52 145833	0.000000
52 166667	0.000000	52 187500	0.000000	52 208333	0.000000	52 220167	0.000000	52 250000	3 747500
52.100007	2.085000	52.101500	0.000000	52.200333	0.000000	52.229107	0.000000	52.250000	8 167500
52.270855	3.085000	52.291007	41.050000	52.312300	47.227500	52.333333	58 165000	52.334107	24 162500
52.373000	20.227500	52.390633	41.950000	52.410007	47.237300	52.457500	38.103000	52.406000	34.102300
52.479107	25.417500	52.500000	35.597500	52.520855	20.995000	52.541007	21.870000	52.562500	32.410000
52.583333	31.255000	52.604167	37.515000	52.625000	32.915000	52.645833	38.007500	52.666667	45.000000
52.687500	28.677500	52.708333	17.097500	52.729167	19.977500	52.750000	6.452500	52.770833	0.000000
52.791667	0.000000	52.812500	0.000000	52.833333	0.000000	52.854167	0.000000	52.875000	0.000000
52.895833	0.000000	52.916667	0.000000	52.937500	0.000000	52.958333	0.000000	52.979167	0.000000
53.000000	0.000000	53.020833	0.000000	53.041667	0.000000	53.062500	0.000000	53.083333	0.000000
53.104167	0.000000	53.125000	0.000000	53.145833	0.000000	53.166667	0.000000	53.187500	0.000000
53.208333	0.000000	53.229167	0.000000	53.250000	5.145000	53.270833	7.472500	53.291667	7.482500
53.312500	5.750000	53.333333	1.605000	53.354167	5.172500	53.375000	18.622500	53.395833	43.337500
53.416667	46.882500	53.437500	61.382500	53.458333	66.240000	53.479167	72.025000	53.500000	103.482500
53.520833	122.732500	53.541667	144.070000	53.562500	94.760000	53.583333	86.767500	53.604167	73.837500
53 625000	72 907500	53 645833	58 822500	53 666667	66 217500	53 687500	42 975000	53 708333	39 937500
53 720167	15.020000	53 750000	3 245000	53 770833	0.000000	53 791667	0.000000	53 812500	0.000000
53 833333	0.000000	53 854167	0.000000	53 875000	0.000000	53 805833	0.000000	53 016667	0.000000
53.833333	0.000000	53.854107	0.000000	53.875000	0.000000	53.895855	0.000000	53.910007	0.000000
53.957500	0.000000	53.956555	0.000000	55.979107	0.000000	54.000000	0.000000	54.020855	0.000000
54.041667	0.000000	54.062500	0.000000	54.083333	0.000000	54.104167	0.000000	54.125000	0.000000
54.145833	0.000000	54.166667	0.000000	54.187500	0.000000	54.208333	0.000000	54.229167	0.000000
54.250000	6.070000	54.270833	8.992500	54.291667	8.452500	54.312500	6.312500	54.333333	2.280000
54.354167	2.410000	54.375000	11.792500	54.395833	35.097500	54.416667	50.382500	54.437500	89.952500
54.458333	93.352500	54.479167	113.560000	54.500000	110.832500	54.520833	137.445000	54.541667	163.420000
54.562500	91.340000	54.583333	62.345000	54.604167	93.565000	54.625000	38.787500	54.645833	25.277500
54.666667	30.602500	54.687500	35.375000	54.708333	15.990000	54.729167	10.722500	54.750000	4.082500
54.770833	0.000000	54.791667	0.000000	54.812500	0.000000	54.833333	0.000000	54.854167	0.000000
54.875000	0.000000	54.895833	0.000000	54.916667	0.000000	54.937500	0.000000	54.958333	0.000000
54.979167	0.000000	55.000000	0.000000	55.020833	0.000000	55.041667	0.000000	55.062500	0.000000
55.083333	0.000000	55.104167	0.000000	55.125000	0.000000	55.145833	0.000000	55.166667	0.000000
55.187500	0.000000	55.208333	0.000000	55.229167	0.000000	55.250000	0.000000	55.270833	0.000000
55.291667	0.000000	55.312500	0.000000	55.333333	2.202500	55.354167	15.800000	55.375000	30.907500
55.395833	48.180000	55.416667	62.857500	55,437500	60.175000	55.458333	87.215000	55.479167	98.895000
55,500000	119.205000	55.520833	99.402500	55,541667	112.245000	55,562500	121.725000	55.583333	131,137500
55 604167	75 477500	55 625000	31 302500	55 645833	25 21 2500	55 666667	23 205000	55 687500	25 110000
55 708222	8 325000	55 720167	3 902500	55 750000	1 1/0000	55 770822	0.000000	55 701667	0.00000
55 819500	0.00000	55 822222	0.000000	55 85/167	1.140000	55 875000	0.000000	55 205029	0.000000
55.012000	0.000000	55 027500	0.000000	55 050200	0.000000	55.070107	0.000000	56 000000	0.000000
00.910007	0.000000	00.937500	0.000000	00.908333	0.000000	00.979107	0.000000	50.000000	0.000000
00.020833	0.000000	50.041667	0.000000	20.062500	0.000000	00.083333	0.000000	56.104167	0.000000
56.125000	0.000000	56.145833	0.000000	56.166667	0.000000	56.187500	0.000000	56.208333	0.000000
56.229167	0.000000	56.250000	0.000000	56.270833	0.000000	56.291667	0.000000	56.312500	0.000000
56.333333	1.402500	56.354167	7.075000	56.375000	11.232500	56.395833	13.115000	56.416667	11.580000
56.437500	11.695000	56.458333	15.007500	56.479167	16.765000	56.500000	24.267500	56.520833	25.132500
56.541667	82.442500	56.562500	136.472500	56.583333	134.790000	56.604167	166.682500	56.625000	131.580000
56.645833	118.460000	56.666667	101.125000	56.687500	71.667500	56.708333	43.690000	56.729167	21.907500
56.750000	8.315000	56.770833	0.000000	56.791667	0.000000	56.812500	0.000000	56.833333	0.000000
56.854167	0.000000	56.875000	0.000000	56.895833	0.000000	56.916667	0.000000	56.937500	0.000000
56.958333	0.000000	56.979167	0.000000	57.000000	0.000000	57.020833	0.000000	57.041667	0.000000
57.062500	0.000000	57.083333	0.000000	57.104167	0.000000	57.125000	0.000000	57.145833	0.000000
57,166667	0.000000	57,187500	0.000000	57,208333	0.000000	57.229167	0.000000	57,250000	0.000000
57 270832	0.000000	57 201667	0.000000	57 312500	0.000000	57 333332	1 677500	57 354167	9.685000
01.210000	0.000000	01.201001	0.000000	01.012000	0.000000	000000000000000000000000000000000000000	1.011000	01.004101	0.000000

62

B Radiación fotosintéticamente activa real

Tiempo	Vin	Tiempo	Vin	Tiempo	Vin	Tiempo	Vin	Tiempo	Vin
57 375000	15,385000	57 395833	22517500	57 416667	28417500	57 437500	47 090000	57 458333	51,702500
57 479167	44.962500	57 500000	25.607500	57 520833	19.635000	57 541667	30.962500	57 562500	29 707500
57.473107	27.000000	57.604167	28.200000	57.625000	13.035000	57.645922	21 252500	57.666667	29.101900
57.687500	21.330000	57 708333	15 140000	57.025000 57.720167	9.687500	57 750000	4 567500	57 770833	0.00000
57 791667	0.000000	57 812500	0.000000	57 833333	0.000000	57 854167	9.000000	57 875000	0.000000
57 805833	0.000000	57 016667	0.000000	57 037500	0.000000	57 058333	0.000000	57 070167	0.000000
57.895855	0.000000	57.910007	0.000000	57.957500	0.000000	57.956555	0.000000	57.979107	0.000000
58.000000	0.000000	58.020855	0.000000	58.041007	0.000000	58.002500	0.000000	58.083333	0.000000
58.104167	0.000000	58.125000	0.000000	58.145833	0.000000	58.100007	0.000000	58.187500	0.000000
58.208333	0.000000	58.229107	0.000000	58.250000	0.000000	58.270833	0.000000	58.291007	1.110000
58.312500	0.000000	58.333333	3.495000	58.354167	19.527500	58.375000	41.665000	58.395833	63.457500
58.416667	60.365000	58.437500	57.790000	58.458333	70.705000	58.479167	112.515000	58.500000	124.070000
58.520833	117.067500	58.541667	107.167500	58.562500	143.407500	58.583333	116.115000	58.604167	114.667500
58.625000	96.677500	58.645833	94.427500	58.666667	78.750000	58.687500	73.787500	58.708333	39.965000
58.729167	26.620000	58.750000	8.697500	58.770833	0.000000	58.791667	0.000000	58.812500	0.000000
58.833333	0.000000	58.854167	0.000000	58.875000	0.000000	58.895833	0.000000	58.916667	0.000000
58.937500	0.000000	58.958333	0.000000	58.979167	0.000000	59.000000	0.000000	59.020833	0.000000
59.041667	0.000000	59.062500	0.000000	59.083333	0.000000	59.104167	0.000000	59.125000	0.000000
59.145833	0.000000	59.166667	0.000000	59.187500	0.000000	59.208333	0.000000	59.229167	0.000000
59.250000	0.000000	59.270833	0.000000	59.291667	0.000000	59.312500	0.000000	59.333333	2.562500
59.354167	13.275000	59.375000	24.090000	59.395833	39.400000	59.416667	50.835000	59.437500	60.765000
59.458333	72.542500	59.479167	84.595000	59.500000	102.840000	59.520833	113.375000	59.541667	122.272500
59.562500	113.545000	59.583333	91.270000	59.604167	95.752500	59.625000	81.317500	59.645833	101.590000
59.666667	83.422500	59.687500	62.985000	59.708333	42.035000	59.729167	30.040000	59.750000	13.577500
59.770833	1.192500	59.791667	0.000000	59.812500	0.000000	59.833333	0.000000	59.854167	0.000000
59.875000	0.000000	59.895833	0.000000	59.916667	0.000000	59.937500	0.000000	59.958333	0.000000
59.979167	0.000000	60.000000	0.000000	60.020833	0.000000	60.041667	0.000000	60.062500	0.000000
60.083333	0.000000	60.104167	0.000000	60.125000	0.000000	60.145833	0.000000	60.166667	0.000000
60.187500	0.000000	60.208333	0.000000	60.229167	0.000000	60.250000	0.000000	60.270833	0.000000
60.291667	0.000000	60.312500	0.000000	60.333333	2.035000	60.354167	12.665000	60.375000	24.362500
60.395833	35.912500	60.416667	43.877500	60.437500	40.325000	60.458333	57.987500	60.479167	71.507500
60.500000	97.285000	60.520833	109.525000	60.541667	124.897500	60.562500	197.737500	60.583333	203.442500
60.604167	178.660000	60.625000	139.350000	60.645833	97.825000	60.666667	80.282500	60.687500	71.070000
60.708333	44.755000	60.729167	26.067500	60.750000	11.777500	60.770833	1.727500	60.791667	0.000000
60.812500	0.000000	60.833333	0.000000	60.854167	0.000000	60.875000	0.000000	60.895833	0.000000
60.916667	0.000000	60.937500	0.000000	60.958333	0.000000	60.979167	0.000000	61.000000	0.000000
61.020833	0.000000	61.041667	0.000000	61.062500	0.000000	61.083333	0.000000	61.104167	0.000000
61.125000	0.000000	61.145833	0.000000	61.166667	0.000000	61.187500	0.000000	61.208333	0.000000
61.229167	0.000000	61.250000	0.000000	61.270833	0.000000	61.291667	0.000000	61.312500	0.000000
61.333333	6.137500	61.354167	23.685000	61.375000	45.177500	61.395833	69.730000	61.416667	78.945000
61.437500	92.165000	61.458333	123.957500	61.479167	167.205000	61.500000	178.060000	61.520833	210.867500
61.541667	225.760000	61.562500	216.975000	61.583333	202.412500	61.604167	170.752500	61.625000	151.640000
61.645833	112.340000	61.666667	77.430000	61.687500	68.250000	61.708333	45.697500	61.729167	26.760000
61.750000	12.365000	61.770833	1.817500	61.791667	0.000000	61.812500	0.000000	61.833333	0.000000
61.854167	0.000000	61.875000	0.000000	61.895833	0.000000	61.916667	0.000000	61.937500	0.000000
61.958333	0.000000	61.979167	0.000000	62.000000	0.000000	62.020833	0.000000	62.041667	0.000000
62.062500	0.000000	62.083333	0.000000	62.104167	0.000000	62.125000	0.000000	62.145833	0.000000
62.166667	0.000000	62.187500	0.000000	62.208333	0.000000	62.229167	0.000000	62.250000	0.000000
62 270833	0.000000	62 291667	0.000000	62 312500	0.000000	62 333333	7 322500	62 354167	25 712500
62.375000	50.037500	62 395833	72 485000	62 416667	73 910000	62 437500	99 600000	62 458333	149 032500
62 470167	174 215000	62 500000	189 605000	62 520833	222 305000	62 541667	225 875000	62 562500	226 152500
62 583333	232 600000	62.604167	189.090000	62.625000	160 275000	62.645833	131.757500	62.666667	77 682500
62 687500	66 072500	62 708333	47 9/0000	62 720167	28 417500	62 750000	13 177500	62 770833	2 130000
62 701667		62 812500	0.00000	62 822222		62 85/167		62 875000	0.000000
62 805832	0.000000	62 016667	0.000000	62 027500	0.000000	62 058333	0.000000	62 070167	0.000000
63 000000	0.000000	63 00007	0.000000	62.931000	0.000000	63 062500	0.000000	62 000000	0.000000
63 10/167	0.000000	63 195000	0.000000	62 145022	0.000000	63 166667	0.000000	63 107500	0.000000
62 000222	0.000000	62 000107	0.000000	62 250000	0.000000	62.0700007	0.000000	62 20100	0.000000
03.208333	0.000000	03.229107	0.000000	03.200000	0.000000	03.270833	0.000000	03.291007	0.000000
03.312500	1.042500	03.3333333	114 077500	03.334107	21.980000	03.375000	47.105000	03.395833	101.040000
03.416667	80.000000	03.437500	114.677500	03.458333	145.075000	03.479167	177.852500	03.500000	191.240000
63.520833	247.067500	63.541667	266.137500	63.562500	252.795000	63.583333	229.657500	63.604167	176.455000

64

B Radiación fotosintéticamente activa real

Tiempo	Vin	Tiempo	Vin	Tiempo	Vin	Tiempo	Vin	Tiempo	Vin
63.625000	179.902500	63.645833	135.860000	63.666667	88.387500	63.687500	63.027500	63,708333	49.170000
63.729167	30.275000	63,750000	14.482500	63,770833	2.675000	63,791667	0.000000	63.812500	0.000000
63.833333	0.000000	63.854167	0.000000	63.875000	0.000000	63,895833	0.000000	63.916667	0.000000
63.937500	0.000000	63.958333	0.000000	63.979167	0.000000	64.000000	0.000000	64.020833	0.000000
64.041667	0.000000	64.062500	0.000000	64.083333	0.000000	64.104167	0.000000	64.125000	0.000000
64.145833	0.000000	64.166667	0.000000	64.187500	0.000000	64.208333	0.000000	64.229167	0.000000
64.250000	0.000000	64.270833	0.000000	64.291667	0.000000	64.312500	0.000000	64.333333	6.015000
64.354167	13.457500	64.375000	38.832500	64.395833	68.905000	64.416667	33.657500	64.437500	30.220000
64.458333	72.312500	64.479167	62.350000	64.500000	121.000000	64.520833	101.077500	64.541667	142.290000
64.562500	105.617500	64.583333	260.637500	64.604167	183.955000	64.625000	111.552500	64.645833	149.032500
64.666667	103.057500	64.687500	66.990000	64.708333	56.962500	64.729167	38.955000	64.750000	14.702500
64.770833	2.285000	64.791667	0.000000	64.812500	0.000000	64.833333	0.000000	64.854167	0.000000
64.875000	0.000000	64.895833	0.000000	64.916667	0.000000	64.937500	0.000000	64.958333	0.000000
64.979167	0.000000	65.000000	0.000000	65.020833	0.000000	65.041667	0.000000	65.062500	0.000000
65.083333	0.000000	65.104167	0.000000	65.125000	0.000000	65.145833	0.000000	65.166667	0.000000
65.187500	0.000000	65.208333	0.000000	65.229167	0.000000	65.250000	0.000000	65.270833	0.000000
65.291667	0.000000	65.312500	0.000000	65.333333	4.437500	65.354167	9.690000	65.375000	16.272500
65.395833	20.267500	65.416667	32.377500	65.437500	26.222500	65.458333	33.807500	65.479167	28.185000
65.500000	34.220000	65.520833	41.790000	65.541667	22.307500	65.562500	19.472500	65.583333	20.482500
65.604167	20.550000	65.625000	19.897500	65.645833	17.047500	65.666667	24.087500	65.687500	16.935000
65.708333	13.175000	65.729167	6.657500	65.750000	3.337500	65.770833	0.000000	65.791667	0.000000
65.812500	0.000000	65.833333	0.000000	65.854167	0.000000	65.875000	0.000000	65.895833	0.000000
65.916667	0.000000	65.937500	0.000000	65.958333	0.000000	65.979167	0.000000	66.000000	0.000000
66.020833	0.000000	66.041667	0.000000	66.062500	0.000000	66.083333	0.000000	66.104167	0.000000
66.125000	0.000000	66.145833	0.000000	66.166667	0.000000	66.187500	0.000000	66.208333	0.000000
66.229167	0.000000	66.250000	0.000000	66.270833	0.000000	66.291667	0.000000	66.312500	0.000000
66.333333 CC 427500	2.565000	66.354167	6.690000	66.375000	13.895000	66.395833	17.290000	66.416667	24.280000
66.437300	39.507500	66 562500	53.845000	00.4/910/	60.770000	66 604167	105 027500	66 625000	70.375000
00.341007	98.730000	00.302300	64.560000 85.705000	00.083333 66.697500	94.022500	00.004107	105.927500	00.020000 66.720167	88.947500
66 750000	94.307300	66 770833	1 597500	66 701667	0.000000	66 812500	22.760000	66 833333	13.230000
66 854167	0.000000	66 875000	0.000000	66 895833	0.000000	66 916667	0.000000	66 937500	0.000000
66.958333	0.000000	66.979167	0.000000	67.000000	0.000000	67.020833	0.000000	67.041667	0.000000
67.062500	0.000000	67.083333	0.000000	67.104167	0.000000	67.125000	0.000000	67.145833	0.000000
67.166667	0.000000	67.187500	0.000000	67.208333	0.000000	67.229167	0.000000	67.250000	0.000000
67.270833	0.000000	67.291667	0.000000	67.312500	1.925000	67.333333	11.940000	67.354167	30.767500
67.375000	57.210000	67.395833	73.475000	67.416667	98.465000	67.437500	133.942500	67.458333	165.270000
67.479167	166.495000	67.500000	217.282500	67.520833	273.195000	67.541667	240.347500	67.562500	268.150000
67.583333	235.330000	67.604167	190.157500	67.625000	143.765000	67.645833	129.707500	67.666667	106.302500
67.687500	85.792500	67.708333	47.347500	67.729167	36.700000	67.750000	17.020000	67.770833	4.152500
67.791667	0.000000	67.812500	0.000000	67.833333	0.000000	67.854167	0.000000	67.875000	0.000000
67.895833	0.000000	67.916667	0.000000	67.937500	0.000000	67.958333	0.000000	67.979167	0.000000
68.000000	0.000000	68.020833	0.000000	68.041667	0.000000	68.062500	0.000000	68.083333	0.000000
68.104167	0.000000	68.125000	0.000000	68.145833	0.000000	68.166667	0.000000	68.187500	0.000000
68.208333	0.000000	68.229167	0.000000	68.250000	0.000000	68.270833	0.000000	68.291667	4.917500
68.312500	7.590000	68.333333	7.697500	68.354167	8.495000	68.375000	34.215000	68.395833	55.437500
68.416667	85.770000	68.437500	111.367500	68.458333	105.252500	68.479167	110.665000	68.500000	106.332500
68.520833	139.287500	68.541667	228.285000	68.562500	280.805000	68.583333	160.162500	68.604167	132.760000
68.625000	153.830000	68.645833	159.565000	68.666667	160.715000	68.687500	95.335000	68.708333	54.587500
68.729167	38.030000	68.750000	20.800000	68.770833	5.182500	68.791667	0.000000	68.812500	0.000000
00.033333		68 058222		68 070167	0.000000	60 000000		00.910007	
69 041667		69 062500	0.000000	60 083333		69 10/167		69 125000	
69.145833	0.000000	69.166667	0.000000	69.187500	0.000000	69.208333	0.000000	69.229167	0.000000
69.250000	0.000000	69.270833	1.170000	69.291667	5.117500	69.312500	5.630000	69.3333333	18.367500
69.354167	37.365000	69.375000	60.232500	69.395833	82.315000	69.416667	106.932500	69.437500	149.577500
69.458333	187.365000	69.479167	189.945000	69.500000	210.930000	69.520833	191.325000	69.541667	268.135000
69.562500	237.680000	69.583333	245.080000	69.604167	216.682500	69.625000	213.102500	69.645833	173.350000
69.666667	140.530000	69.687500	61.202500	69.708333	47.307500	69.729167	32.547500	69.750000	16.180000
69.770833	4.080000	69.791667	0.000000	69.812500	0.000000	69.833333	0.000000	69.854167	0.000000

B Radiación fotosintéticamente activa real

Tiemno	V	Tiemno	V	Tiemno	V	Tiemno	V	Tiemno	V
60.875000	• <i>i</i> , <i>p</i>	C0 805822	• <i>i</i> , <i>p</i>	60.016667	<i>v</i> _{<i>i</i>,<i>p</i>}	60.027500	• <i>i</i> , <i>p</i>	60 059222	<i>vi</i> , <i>p</i>
09.875000	0.000000	09.893833	0.000000	09.910007	0.000000	09.937300	0.000000	09.936333	0.000000
69.979167	0.000000	70.000000	0.000000	70.020833	0.000000	70.041667	0.000000	70.062500	0.000000
70.083333	0.000000	70.104167	0.000000	70.125000	0.000000	70.145833	0.000000	70.166667	0.000000
70.187500	0.000000	70.208333	0.000000	70.229167	0.000000	70.250000	0.000000	70.270833	0.000000
70.291667	5.310000	70.312500	9.707500	70.333333	15.780000	70.354167	18.750000	70.375000	19.692500
70.395833	33.922500	70.416667	66.832500	70.437500	100.052500	70.458333	148.935000	70.479167	172.797500
70.500000	115.547500	70.520833	138.432500	70.541667	148.037500	70.562500	137.672500	70.583333	196.697500
70.604167	177.137500	70.625000	124.935000	70.645833	82.067500	70.666667	75.650000	70.687500	51.617500
70.708333	13.670000	70.729167	17.567500	70.750000	18.110000	70.770833	6.060000	70.791667	0.000000
70.812500	0.000000	70.833333	0.000000	70.854167	0.000000	70.875000	0.000000	70.895833	0.000000
70 916667	0.000000	70 937500	0.000000	70 958333	0.000000	70 979167	0.000000	71 000000	0.000000
71.020833	0.000000	71.041667	0.000000	71.062500	0.000000	71 083333	0.000000	71.000000	0.000000
71.125000	0.000000	71.145022	0.000000	71.1002500	0.000000	71.085555	0.000000	71.104107	0.000000
71.123000	0.000000	71.140800	0.000000	71.100007	0.000000	71.187500	0.000000	71.208333	0.000000
71.229167	0.000000	71.250000	0.000000	71.270833	0.000000	71.291667	4.832500	71.312500	9.097500
71.333333	13.790000	71.354167	20.575000	71.375000	36.895000	71.395833	65.895000	71.416667	113.675000
71.437500	160.565000	71.458333	137.100000	71.479167	164.575000	71.500000	128.117500	71.520833	235.425000
71.541667	188.310000	71.562500	94.485000	71.583333	100.902500	71.604167	43.940000	71.625000	60.687500
71.645833	79.882500	71.666667	78.310000	71.687500	44.770000	71.708333	31.585000	71.729167	35.572500
71.750000	15.587500	71.770833	5.165000	71.791667	0.000000	71.812500	0.000000	71.833333	0.000000
71.854167	0.000000	71.875000	0.000000	71.895833	0.000000	71.916667	0.000000	71.937500	0.000000
71 958333	0.000000	71 979167	0.000000	72 000000	0.000000	72 020833	0.000000	72 041667	0.000000
72.062500	0.000000	72 083333	0.000000	72.000000	0.000000	72 125000	0.000000	72.145833	0.000000
72.002500	0.000000	72.085555	0.000000	72.104107	0.000000	72.125000	0.000000	72.145855	0.000000
72.100007	0.000000	72.187500	5.720000	72.208333	0.000000	72.229107	0.000000	72.250000	0.000000
72.270833	1.045000	72.291667	5.730000	72.312500	11.022500	72.333333	23.970000	72.354167	32.822500
72.375000	43.315000	72.395833	58.350000	72.416667	73.430000	72.437500	147.002500	72.458333	142.160000
72.479167	159.132500	72.500000	187.472500	72.520833	177.757500	72.541667	193.647500	72.562500	199.675000
72.583333	208.707500	72.604167	189.430000	72.625000	168.235000	72.645833	142.970000	72.666667	132.797500
72.687500	79.395000	72.708333	36.400000	72.729167	15.487500	72.750000	5.480000	72.770833	0.000000
72.791667	0.000000	72.812500	0.000000	72.833333	0.000000	72.854167	0.000000	72.875000	0.000000
72.895833	0.000000	72.916667	0.000000	72.937500	0.000000	72.958333	0.000000	72.979167	0.000000
73.000000	0.000000	73.020833	0.000000	73.041667	0.000000	73.062500	0.000000	73.083333	0.000000
73 104167	0.000000	73 125000	0.000000	73 145833	0.000000	73 166667	0.000000	73 187500	0.000000
73 208333	0.000000	73 229167	0.000000	73 250000	0.000000	73 270833	0.000000	73 291667	5 765000
72 212500	10.267500	79 999999	12 282500	72 254167	0.000000	72 275000	46 500000	72 205922	40.200000
73.312300	10.207500	73.333333	15.362300	73.334107	21.422500	73.373000	40.390000	73.595855	49.300000
73.410007	65.027500	73.437500	45.880000	73.458333	82.642500	73.479107	85.247500	73.500000	109.245000
73.520833	132.480000	73.541667	103.955000	73.562500	93.507500	73.583333	77.132500	73.604167	89.652500
73.625000	136.585000	73.645833	113.847500	73.666667	75.595000	73.687500	82.795000	73.708333	55.972500
73.729167	37.505000	73.750000	24.777500	73.770833	10.830000	73.791667	0.000000	73.812500	0.000000
73.833333	0.000000	73.854167	0.000000	73.875000	0.000000	73.895833	0.000000	73.916667	0.000000
73.937500	0.000000	73.958333	0.000000	73.979167	0.000000	74.000000	0.000000	74.020833	0.000000
74.041667	0.000000	74.062500	0.000000	74.083333	0.000000	74.104167	0.000000	74.125000	0.000000
74.145833	0.000000	74.166667	0.000000	74.187500	0.000000	74.208333	0.000000	74.229167	0.000000
74.250000	0.000000	74.270833	1.135000	74.291667	5.400000	74.312500	7.482500	74.333333	5.975000
74.354167	3.030000	74.375000	2.325000	74.395833	4.187500	74.416667	3.925000	74,437500	5.465000
74 458333	9.330000	74 479167	17.830000	74 500000	30 332500	74 520833	33 367500	74 541667	32 185000
74 569500	27 800000	74 592999	20 112500	74 604167	18 752500	74 6250000	14 377500	74 645099	12 705000
74.666667	12 205000	74 607500	10.205000	74 700222	0.102000	74.700107	5 495000	74 750000	2 500000
74.000007	13.305000	14.087500	10.395000	14.108333	9.440000	74.729167	0.425000	14.100000	2.500000
74.770833	1.160000	14.791667	0.000000	(4.812500	0.000000	74.833333	0.000000	(4.854167	0.000000
74.875000	0.000000	74.895833	0.000000	74.916667	0.000000	74.937500	0.000000	74.958333	0.000000
74.979167	0.000000	75.000000	0.000000	75.020833	0.000000	75.041667	0.000000	75.062500	0.000000
75.083333	0.000000	75.104167	0.000000	75.125000	0.000000	75.145833	0.000000	75.166667	0.000000
75.187500	0.000000	75.208333	0.000000	75.229167	0.000000	75.250000	0.000000	75.270833	1.525000
75.291667	5.360000	75.312500	8.692500	75.333333	10.280000	75.354167	14.780000	75.375000	17.075000
75.395833	14.077500	75.416667	47.202500	75.437500	30.295000	75.458333	12.127500	75.479167	63.085000
75,500000	9,392500	75,520833	19.177500	75,541667	31,752500	75,562500	32,297500	75,583333	88.675000
75 604167	31 712500	75 625000	20 987500	75 645833	19 827500	75 666667	18 302500	75 687500	33 785000
75 700999	30 602500	75 790167	20.301300	75 750000	10.060000	75 7700001	0.110000	75 701667	1.027500
75 010500	0.0002000	75 000000	22.070000	75.100000	19.900000	75 075000	9.110000	75.005000	1.027000
10.012000	0.000000	10.833333	0.000000	10.804107	0.000000	10.8/5000	0.000000	10.895833	0.000000
75.916667	0.000000	75.937500	0.000000	75.958333	0.000000	75.979167	0.000000	76.000000	0.000000
76.020833	0.000000	76.041667	0.000000	76.062500	0.000000	76.083333	0.000000	76.104167	0.000000

B Radiación fotosintéticamente activa real

Tiempo	Vin								
76.125000	0.000000	76.145833	0.000000	76.166667	0.000000	76.187500	0.000000	76.208333	0.000000
76.229167	0.000000	76.250000	0.000000	76.270833	0.000000	76.291667	4.445000	76.312500	8.527500
76.333333	22.677500	76.354167	49.447500	76.375000	46.940000	76.395833	53.372500	76.416667	58.960000
76.437500	95.577500	76.458333	177.275000	76.479167	141.717500	76.500000	27.662500	76.520833	39.142500
76.541667	226.240000	76.562500	98.555000	76.583333	226.837500	76.604167	116.597500	76.625000	130.755000
76.645833	109.700000	76.666667	83.890000	76.687500	49.687500	76.708333	63.727500	76.729167	41.075000
76.750000	13.525000	76.770833	4.830000	76.791667	0.000000	76.812500	0.000000	76.833333	0.000000
76.854167	0.000000	76.875000	0.000000	76.895833	0.000000	76.916667	0.000000	76.937500	0.000000
76.958333	0.000000	76.979167	0.000000	77.000000	0.000000	77.020833	0.000000	77.041667	0.000000
77.062500	0.000000	77.083333	0.000000	77.104167	0.000000	77.125000	0.000000	77.145833	0.000000
77.166667	0.000000	77.187500	0.000000	77.208333	0.000000	77.229167	0.000000	77.250000	0.000000
77.270833	0.000000	77.291667	4.445000	77.312500	8.527500	77.333333	22.677500	77.354167	49.447500
77.375000	46.940000	77.395833	53.372500	77.416667	58.960000	77.437500	95.577500	77.458333	177.275000
77.479167	141.717500	77.500000	27.662500	77.520833	39.142500	77.541667	226.240000	77.562500	98.555000
77.583333	226.837500	77.604167	116.597500	77.625000	130.755000	77.645833	109.700000	77.666667	83.890000
77.687500	49.687500	77.708333	63.727500	77.729167	41.075000	77.750000	13.525000	77.770833	4.830000
77.791667	0.000000	77.812500	0.000000	77.833333	0.000000	77.854167	0.000000	77.875000	0.000000
77.895833	0.000000	77.916667	0.000000	77.937500	0.000000	77.958333	0.000000	77.979167	0.000000
78.000000	0.000000	78.020833	0.000000	78.041667	0.000000	78.062500	0.000000	78.083333	0.000000
78.104167	0.000000	78.125000	0.000000	78.145833	0.000000	78.166667	0.000000	78.187500	0.000000
78.208333	0.000000	78.229167	0.000000	78.250000	0.000000	78.270833	0.000000	78.291667	4.445000
78.312500	8.527500	78.333333	22.677500	78.354167	49.447500	78.375000	46.940000	78.395833	53.372500
78.416667	58.960000	78.437500	95.577500	78.458333	177.275000	78.479167	141.717500	78.500000	27.662500
78.520833	39.142500	78.541667	226.240000	78.562500	98.555000	78.583333	226.837500	78.604167	116.597500
78.625000	130.755000	78.645833	109.700000	78.666667	83.890000	78.687500	49.687500	78.708333	63.727500
78.729167	41.075000	78.750000	13.525000	78.770833	4.830000	78.791667	0.000000	78.812500	0.000000
78.833333	0.000000	78.854167	0.000000	78.875000	0.000000	78.895833	0.000000	78.916667	0.000000
78.937500	0.000000	78.958333	0.000000	78.979167	0.000000	79.000000	0.000000	79.020833	0.000000
79.041667	0.000000	79.062500	0.000000	79.083333	0.000000	79.104167	0.000000	79.125000	0.000000
79.145833	0.000000	79.166667	0.000000	79.187500	0.000000	79.208333	0.000000	79.229167	0.000000
79.250000	0.000000	79.270833	0.000000	79.291667	4.445000	79.312500	8.527500	79.333333	22.677500
79.354167	49.447500	79.375000	46.940000	79.395833	53.372500	79.416667	58.960000	79.437500	95.577500
79.458333	177.275000	79.479167	141.717500	79.500000	27.662500	79.520833	39.142500	79.541667	226.240000
79.562500	98.555000	79.583333	226.837500	79.604167	116.597500	79.625000	130.755000	79.645833	109.700000
79.666667	83.890000	79.687500	49.687500	79.708333	63.727500	79.729167	41.075000	79.750000	13.525000
79.770833	4.830000	79.791667	0.000000	79.812500	0.000000	79.833333	0.000000	79.854167	0.000000
79.875000	0.000000	79.895833	0.000000	79.916667	0.000000	79.937500	0.000000	79.958000	0.000000
79.979000	0.000000	80.000000	0.000000						

Tabla B.1 Radiación fotos
intéticamente activa, $V_{i,p}$, tomada para el período del 21 de
enero al 17 de marzo de 1992 por la Universidad de Wageningen Holanda.

Apendice C Simplificación de la conductancia de CO_2 a través de las hojas

Con la finalidad de acelerar las simulaciones $MatLab^{\textcircled{B}}$ -Simulink, se aproxima la conductancia de CO_2 a través de las hojas a su valor promedio en su período de luz.

C.1 Valor promedio de la conductancia de CO_2 a través de las hojas para el cultivo de la lechuga en invernadero para el período de luz

Al incidir una RFA teórica promedio con coeficiente de nubosidad igual a uno (ver figura 2.2) se encuentra que la temperatura $\overline{Z}_{t,D}$, promedio total dentro del invernadero, $\overline{Z}_{t,D,prom}$:

$$\overline{Z}_{t,D,prom} = \frac{1}{80 - 23} \int_{23}^{80} \left[\frac{\left(c_{cap,q,v} \overline{U}_v + c_{al,ou}\right)}{\left(c_{cap,q,v} \overline{U}_v + c_{al,ou}\right)} \overline{V}_t - \frac{c_{rad}}{c_1 \left(c_{cap,q,v} \overline{U}_v + c_{al,ou}\right)} \alpha_D \right] dt, \quad (C.1)$$

se puede aproximar por:

$$\overline{Z}_{t,D,prom} \simeq 17.1[^{o}C]. \tag{C.2}$$

Por lo tanto, para acelerar las simulaciones MatLab[®] -Simulink, se aproxima la variable ρ_D a su valor promedio, $\rho_{D,prom}$, esto es:

$$\rho_D \simeq \rho_{D,prom} = -c_{co2,1} \overline{Z}_{t,D,prom}^2 + c_{co2,2} \overline{Z}_{t,D,prom} - c_{co2,3} \simeq 1.933611100102 \times 10^{-3} \, [m/s] \,. \quad (C.3)$$

C.2 Simulaciones y resultados

En la figura C.1 se muestra la gráfica de ρ , (2.17), cuando incide una RFA teórica promedio con coeficiente de nubosidad igual a uno (ver figura 2.2 y (2.22)).

En la figura C.2 se muestra ρ_D y $\rho_{D,prom}$ cuando incide una RFA teórica promedio con coeficiente de nubosidad igual a uno (ver figura 2.2).

En la figura C.3 se compara el comportamiento de la materia seca \overline{X}_d cuando incide una RFA teórica promedio (ver figura 2.5) para una $\rho_{D,prom}$, (C.3), denotada por $\overline{X}_{d,prom}$, con respecto a la obtenida tomando una ρ_D sin promediar, (3.16).



Figura C.1 Simulación de la conductancia del CO_2 , para una radiación fotosintéticamente activa teórica promedio con coeficiente de nubosidad igual a uno



Figura C.2 Simulación de la conductancia del CO_2 en su período de luz, ρ_D y en su valor promedio, $\rho_{D,prom}$



Figura C.3 Simulación de la materia seca, \overline{X}_d vs t, tomando ρ_D (ver (3.16)) comparada con la materia seca, $\overline{X}_{d,prom}$, tomando una $\rho_{D,prom}$ (ver (C.3))

Apendice D Desarrollo matemático: capítulo 4

D.1 Derivadas parciales, a_D , b_D y c_D

A partir de (3.11) se tiene que la derivada respecto del tiempo del parámetro a_D es:

$$\frac{da_D}{dt} = \tau \frac{d\rho_D}{dt},\tag{D.1}$$

A partir de (3.12) se encuentra que la derivada respecto del tiempo del parámetro b_D es:

$$\frac{db_D}{dt} = \frac{\partial b_D}{\partial \alpha_D} \left(\frac{d\alpha_D}{dt} \right) + \frac{\partial b_D}{\partial \overline{X}_D} \left(\frac{d\overline{X}_D}{dt} \right) + \frac{\partial b_D}{\partial \rho_D} \left(\frac{d\rho_D}{dt} \right) - \rho_D \frac{d\overline{U}_{c,D}}{dt}$$
$$\left(\rho_D \omega + \tau - \rho_D \frac{\partial \delta_D}{\partial \alpha_D} \right) \frac{d\alpha_D}{dt} + \rho_D \left(\alpha_D \frac{\partial \omega}{\partial \overline{X}_D} - \frac{\partial \delta_D}{\partial \overline{X}_D} \right) \left(\frac{d\overline{X}_D}{dt} \right) - \rho_D \frac{d\overline{U}_{c,D}}{dt} + (\alpha_D \omega - \delta_D) \left(\frac{d\rho_D}{dt} \right),$$
(D.2)

donde a partir de (3.14)-(3.15), se tiene:

$$\frac{d\delta_D}{dt} = \frac{\partial\delta_D}{\partial\overline{X}_D} \left(d\overline{X}_D / dt \right) + \frac{\partial\delta_D}{\partial\alpha_D} \left(d\alpha_D / dt \right) + \frac{d\overline{U}_{c,D}}{dt},\tag{D.3}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial\omega}{\partial\overline{X}_D} \left(d\overline{X}_D / dt \right), \tag{D.4}$$

$$\frac{\partial b_D}{\partial \overline{X}_D} = \rho_D \alpha_D \left(\frac{\partial \omega}{\partial \overline{X}_D} - \rho_D \frac{\partial \delta_D}{\partial \overline{X}_D} \right),\tag{D.5}$$

$$\frac{\partial b_D}{\partial \alpha_D} = \left(\rho_D \omega + \tau - \rho_D \frac{\partial \delta_D}{\partial \alpha_D}\right),\tag{D.6}$$

$$\frac{\partial b_D}{\partial \rho_D} = \left(\alpha_d \omega - \delta_D\right). \tag{D.7}$$

A partir de (3.13), se encuentra que la derivada respecto del tiempo del parámetro c_D es:

$$\frac{dc_D}{dt} = \frac{\partial c_D}{\partial \alpha_D} \left(\frac{d\alpha_D}{dt} \right) + \frac{\partial c_D}{\partial \overline{X}_d} \left(\frac{d\overline{X}_D}{dt} \right) - \alpha_D \frac{d\overline{U}_{c,D}}{dt}, \tag{D.8}$$

donde

=

D Desarrollo matemático: capítulo 4

$$\frac{\partial c_D}{\partial \overline{X}_D} = -\alpha_D \frac{\partial \delta_D}{\partial \overline{X}_D},\tag{D.9}$$

$$\frac{\partial c_D}{\partial \alpha_D} = -\delta_D. \tag{D.10}$$

D.2 Aproximación del parámetro de crecimiento específico, κ

Con respecto al parámetro de crecimiento relativo κ [-], (4.16), se observa que:

1. La variable $\tau = (\overline{U}_v + c_{leak})$ esta dada por:

$$\tau = 1.075 \times 10^{-3} \left[m/s \right]. \tag{D.11}$$

2. La variable $\alpha_D = c_1 \overline{V}_i$ se puede expresar como:

$$\alpha_D = 3.55 \times 10^{-9} \overline{V}_i \left[kg/m^2 s \right]. \tag{D.12}$$

3. La variable ω [-] esta acotada por:

$$0 < \omega[-] \le 1.$$
 (D.13)

4. La variable $\widetilde{Z}_{c,D}\left[kg/m^3\right]$ esta acotada por (ver tabla 2.2):

$$0 \le \widetilde{Z}_{c,D} \le 2.75 \times 10^{-3}.$$
 (D.14)

Al analizar el término, $\frac{1}{\tau} \frac{\omega_D \alpha_D^2 \rho_D}{(\alpha_D + \rho_D \tilde{Z}_{cD})^2}$, y tomando en cuenta que $\alpha_D > 0$ se obtiene que,

$$\left(\alpha_D + \rho_D \widetilde{Z}_{c,D}\right)^2 = \alpha_D^2 + 2\alpha_D \rho_D \widetilde{Z}_{c,D} + \rho_D^2 \widetilde{Z}_{c,D}^2, \qquad (D.15)$$

esta acotado por:

$$\alpha_D^2 \le \left(\alpha_D + \rho_D \widetilde{Z}_{c,D}\right)^2 \le 2\alpha_D^2. \tag{D.16}$$

Por lo tanto, el término $\frac{1}{\tau} \frac{\omega_D \alpha_D^2 \rho_D}{(\alpha_D + \rho_D \tilde{Z}_{c,D})^2}$ tomando en consideración (D.11)-(D.16) esta acotado por:

$$0 \le \frac{1}{\tau} \frac{\omega_D \alpha_D^2 \rho_D}{\left(\alpha_D + \rho_D \widetilde{Z}_{c,D}\right)^2} \le 1.1 \times 10^{-6}.$$
 (D.17)

Finalmente, se tiene: $1 \leq \kappa \leq 1.0000011$

Apendice E Función, $f_{b^{(\overline{v}_{c,D})}}^{*}$

Para obtener las aproximaciones (6.4) y (6.5), se expresa primero a (6.3) de la siguiente manera:

$$\phi_{c,al,pl} = \left(\frac{\tau}{\rho}\alpha + \tau \widetilde{Z}_{c,D}\right) f_{b(t, V_i, \overline{v}_{c,D})},\tag{E.1}$$

donde

$$f_{b^{(t, V_i, \overline{U}_{c,D})}} = \frac{\left(\overline{U}_{c,D} + \tau \left(\overline{V}_c - c_{\Gamma}\right)\right) - \tau \widetilde{Z}_{c,D}}{\left(\frac{\tau}{\rho} \alpha_D + \tau \widetilde{Z}_{c,D}\right)}.$$
(E.2)

Enseguida se aproxima $f_{b(t, V_i, \overline{v}_{c,D})}$ por una curva $f_b^{\prime\prime}(\overline{v}_{c,D})$, siguiendo el siguiente procedimiento:

- 1. Se realizan simulaciones, para cada $\overline{U}_{c,D} \in [0, 0.1, \dots, 0.9, 1] \overline{U}_{c,D,\max}$, para diferentes valores de $V_i \in [20, 50, \dots, 170, 200]$ (ver figura E.1).
- 2. Se ajustan a líneas horizontales, $\bar{f}_{b(v_i, \overline{v}_{c,D})}$, para las diferentes curvas, $f_{b(t, v_i, \overline{v}_{c,D})}$, obtenidas para cada par de valores $(V_i, \overline{U}_{c,D})$ (ver figura E.2).
- 3. Con cada conjunto de líneas ajustadas, $\overline{f}_{b(v_i, \overline{v}_{c,D})}$, se obtiene una curva $f'_{b(v_i, \overline{v}_{c,D})}$, para un valor dado de $\overline{U}_{c,D}$, como se muestra en la figura E.3(a).
- 4. Se ajustan a líneas horizontales, $\overline{f}'_{b}(\overline{v}_{c,D})$, las diferentes curvas, $f'_{b}(v_{i}, \overline{v}_{c,D})$, obtenidas para cada $\overline{U}_{c,D}$ (ver figura E.3(b)).
- 5. Con el conjunto de líneas ajustadas, $\bar{f}'_b(\bar{\sigma}_{c,D})$, se obtiene la curva $f''_b(\bar{\sigma}_{c,D})$, mostrada en la figura E.4(a).

A partir de la curva, $f'_b(\overline{v}_{c,D})$, encontrada en la figura E.4(a), a continuación se encuentra una función algebraica, $f^*_b(\overline{v}_{c,D})$, que interpola a dicha función.

Interpolación de $f_b''(\overline{v}_{c,D})$.

Analizando la figura E.4(a) se infiere que $f_b''(\overline{\sigma}_{c,D})$, puede ser interpolada por la siguiente función:

$$f_b^*(\overline{\upsilon}_{c,D}) = \theta_o + \frac{1}{\frac{1}{\theta_1}\overline{U}_{c,D} + \frac{\theta_2}{\theta_1}}.$$
(E.3)

La interpolación y el procedimiento de ajuste fueron hechas mediante el comando "polyfit" de MatLab[®]. Los parámetros de $f_b^*(\overline{v}_{c,D})$ son:

$$\theta_o = -0.2, \ \theta_1 = 1.6174 \times 10^{-6} \ \text{y} \ \theta_2 = 3.5147 \times 10^{-6}.$$



Figura E.1 Comportamiento $def_{b(t, V_i, \overline{U}_{c,D})}$ v.s. t [días], donde $V_i \in [20, 40, \dots, 200]$, para: (a) $\overline{U}_{c,D} = 0$, (b) $\overline{U}_{c,D} = 0.1\overline{U}_{c,D,\max}$, (c) $\overline{U}_{c,D} = 0.9\overline{U}_{c,D,\max}$, (d) $\overline{U}_{c,D} = \overline{U}_{c,D,\max}$

Hay que notar que estos parámetros pueden también ser aproximados en términos de los parámetros del crecimiento de la lechuga en invernadero, esto es:

$$\theta_o \simeq -2 + \frac{\rho_D}{\tau}, \ \theta_1 \simeq \frac{\rho_D}{\tau} \overline{U}_{c,D,\max} \ y \ \theta_2 \simeq (\rho_D/\tau)^2 \overline{U}_{c,D,\max}.$$

De esta forma se ha aproximado $f_b^{''}(\overline{\upsilon}_{c,D})$ por la función (ver figura E.4(b)):

$$f_b^*(\overline{\nu}_{c,D}) \simeq \left(-2 + \frac{\rho_D}{\tau}\right) + \frac{\frac{\rho_D}{\tau}}{\frac{\overline{\nu}_{c,D}}{\overline{\nu}_{c,D},\max} + \left(\frac{\rho_D}{\tau}\right)^2} \in \begin{bmatrix} 0.13 & 0.35 \end{bmatrix}.$$
 (E.4)



Figura E.2 Procedimiento de aproximación para el ajuste a líneas horizontales de las curvas obtenidas en el punto 1 (ver figura E.1). Comportamiento de $\overline{f}_{b(t, V_i, \overline{U}_{c,D})}$ v.s. t [días], donde $V_i \in [20, 40, \ldots, 200]$, para: (a) $\overline{U}_{c,D} = 0$, (b) $\overline{U}_{c,D} = 0.1\overline{U}_{c,D,\max}$, (c) $\overline{U}_{c,D} = 0.9\overline{U}_{c,D,\max}$, (d) $\overline{U}_{c,D} = \overline{U}_{c,D,\max}$.



Figura E.3 (a) $f'_{b}(v_{i}, \overline{v}_{c,D})$ v.s. curvas V_{i} , definidas es el punto 2. (b) $\overline{f}'_{b}(v_{i}, \overline{v}_{c,D})$ v.s. V_{i} ; procedimiento para el ajuste a líneas horizontales de las curvas obtenidas en el punto 3



Figura E.4 (a) Gráfica de $f_b^{\prime\prime}(\overline{v}_{c,D})$ v.s. $\overline{U}_{c,D}$. (b) Interpolación $f_b^{\prime\prime}(\overline{v}_{c,D})$ por $f_b^*(\overline{v}_{c,D})$ v.s. $\overline{U}_{c,D}$

Apendice F Método de paso descendente

Resumen del algoritmo del método de paso descendente propuesto por van Henten, para encontrar la ley de control óptimo en cada paso de muestreo (ver sección 5.7 de [24])

Para resolver el problema de control óptimo, mediante el método de paso descendente el algoritmo siguiente es implementado:

- 1 Se inicia el número de iteración i = 0, eligiendo una aproximación discreta de la trayectoria del control nominal $\overline{U}_{c}^{(0)}(t), t \in [t_{b}, t_{f}]$ satisfaciendo las restricciones de control y se elige el valor deseado del criterio de convergencia.
- 2 Se integra la ecuación de estado (2.13) a partir de t_b a t_f usando la trayectoria del control nominal $\overline{U}_{c}^{(1)}(t)$ y las condiciones de frontera iníciales $\overline{X}_{d}(t_{b}) = \overline{X}_{d,b}$ y se almacena la trayectoria del estado nominal resultante $\overline{X}_{d}^{(i)}(t)$
- 3 Se calcula el criterio de desempeño $J^{(i)}$
- 4 Se integra la ecuación de coestado, (7.7) a partir de t_f a t_b usando el control nominal y las trayectorias de estado $\overline{X}_{d}^{(i)}(t)$ y $\overline{U}_{c}^{(i)}(t)$ y la condición final de frontera $\lambda^{(i)}(t_f) = \frac{\partial}{\partial \overline{X}_{d}} \left(\alpha + \beta \overline{X}_{d}^{(i)}(t_f) \right)$ y se almacena el resultado de la trayectoria del coestado nominal $\lambda^{(i)}(t)$.
- 5 Se calcula el gradiente $\frac{\partial H^{(i)}}{\partial \overline{U}_c}(t)$ y se determina $\overline{\sigma}_{\max}$ así como $\delta \overline{U}_{c,j,\max}^{(i)}(t), j = 1, ..., m$, para todo $t = [t_b, t_f]$ us ando las ecuaciones $\overline{\sigma}_{\max} = \min(\sigma_{j,\max}(t)), \sigma_{j,\max}(t) = 1/\left|\frac{\partial H^{(i)}}{\partial \overline{U}_{c,i}(t)}\right|$ y

$$\delta \overline{U}_{c,\max}(t) = \left\{ \begin{aligned} \overline{U}_{c,\max} - \overline{U}_c^{(i)}(t) & \text{if } \frac{\partial H^{(i)}}{\partial \overline{U}_c(t)}(t) > 0\\ \overline{U}_c^{(i)}(t) - \overline{U}_{c,\min}(t) & \text{if } \frac{\partial H^{(i)}}{\partial \overline{U}_c(t)}(t) < 0 \end{aligned} \right\}$$

- 6 Usando el criterio U
 ⁽ⁱ⁺¹⁾
 _c = U
 ⁽ⁱ⁾
 _c + <sup>∂U
 ⁽ⁱ⁾</sup>
 _c(t) δU
 ⁽ⁱ⁾
 _c(t), de búsqueda para σ* tal que el criterio de desempeño J
 ⁽ⁱ⁺¹⁾ se maximiza sujeto a la restricción 0 < σ* ≤ σ_{max}
 7 Sí 0 < J
 ⁽ⁱ⁺¹⁾ < ε se almacena la trayectoria de control óptima U
 ⁽ⁱ⁺¹⁾
 _c y se va al paso ocho, en caso
- contrario seguir con i = i + 1 e ir al paso dos.
- 8 Fin

Parte IV Publicaciones

Publicaciones

ICBB: First International Congress on Biotechnology and Bioengineering

First International Congress on Biotechnology and Bioengineering November 5-7, 2008, México City. México

CDC2010: 49th IEEE Conference on Decision and Control

49th IEEE Conference on Decision and Control December 15-17,2010, Hilton Atlanta Hotel, Atlanta, GA, USA

ISHS: Acta Horticulturae

Proc. IS on High Technology for Greenhouse Systems-GreenSys2009 Ed.: M. Dorais, Acta Hort. 893, ISHS 2011 CDC2011: 50th IEEE Conference on Decision and Control (sometido)

50th IEEE Conference on Decision and Control

Referencias

- 1. Bonilla E. and Martínez A., 2001. Modelling the lettuce growing process by a set of linear systems. Proceedings of the fourth International Symposium on Mathematical Modelling and Simulation in Agricultural and Bio-Industries. Haifa, Israel.
- 2. Córdova, Z.J., 2004. Análisis del crecimiento de la lechuga. Tesis de Maestría, CINVESTAV-IPN, México.
- 3. Goudriaan, J., 1987. Course Theoretical Production Ecology. Wageningen Agricultural University, Wageningen.
- 4. Goudriaan, J., Van Laar, Van Keulen and W. Louwerse., 1985. Photosynthesis, CO₂ and plant production. Plenum Press, New York.
- Goudriann, J. and Van Laar, H.H., 1994. Modelling Potential Crop Growth Processes. Kluwer Academic Publishers, Current Issues in Production Ecology, Vol 2, Netherlands.
- 6. Irineo L., 2004. Introducción a la simulación de crecimiento y desarrollo de cultivos usando Fortran simulation Translator (FST). Primer congreso nacional de fenología agrícola y modelos de simulación aplicados a la agricultura. Universidad de Chapingo, México.
- 7. Hunt R., 1982. Plant Growth Curves: The functional Approach to Plant Growth Analysis. Ed.Thomson Litho Ltd.
- 8. Kirk, D.E., 1970. Optimal control theory. Prentice-Hall, New Jersey.
- 9. Kokotovic P.V, Kalil H.K, O'Reilly J.,1986. Singular Perturbation Methods in Control: Analysis and Design. Ed. Academic Press. London.
- Leal Enríquez E. y Bonilla Estrada M., 2008. Estudio del modelo matemático para el crecimiento y desarrollo el cultivo de la Lechuga en Invernadero. e-book Cinvestav ISBN 978.607.95065.0.6
- Leal-Enríquez, E. and Bonilla-Estrada, M., 2011. MODELLING THE GREENHOUSE LETTUCE CROP BY MEANS OF THE COMMUTATION OF TWO INDEPENDENT MODELS - CASE: CONSTANT TRANSMIT-TIVITY COEFFICIENT. Acta Hort. (ISHS) 893:747-755.
- E. Leal-Enríquez. and M. Bonilla-Estrada., 2010. Modelling the greenhouse lettuce crop by means of the commutation of two independent models. Proceedings of 49th IEEE Conference on Decision and Control, Atlanta, GA, pp 4667– 4672.
- 13. Martinez, G. Abraham., 2001. Descripción del proceso del crecimiento de la Lechuga por un conjunto de sistemas lineales. Tesis de Maestría. Cinvestav-I.P.N
- Munack A., tantau H.J., 1997. Mathematical and Control Applications in Agriculture and Horticulture. IFAC Workshop Hannover, Germany, 28 September-2 October 1997. Pergamon.
- Ramírez A. A., I.L. L. López, A. Rojano, A., 2001. Calibration of a Dynamic Lettuce Growth Model for a Soilless System in a Mild Climate. Proceedings of the fourth International Symposium on Mathematical Modelling and Simulation in Agricultural and Bio-Industries. Haifa, Israel.
- rothwell J., Chotai A., Young P. 1997. Optimal Control of Crop Production. Horticultural Glasshouse Mathematical and Control Applications in Agriculture and Horticulturae 1997 (see Munack A., Tantau H.J (1997), pp. 103-108.
- 17. Sebánek Jiri., 1992. Plant Physiology. Elsevier Science.
- Spitters, C. J. T, H.A.J.M. Toussaint and J. Goudriaan., 1986. Separating the diffuse and direct component of global radiation and its implications for modelling canopy photosynthesis. Part I. Components of incoming radiation. Agricultural and Forest Meteorology. 38: 217:229.
- Tap R.F., van Straten G., van Willigenburg L.G., 1997. Comparation of Classical and Optimal Control of Greenhouse Tomato Crop Production. Mathematical and Control Applications in Agriculturae and Horticulturae 1997 (see Munack A., Tantau H.J. (1997) pp. 103-108.
- 20. tap R.F., van Willigenburg L.G., van Straten G., van Henten E.J., 1996. Receding horizon optimal control of greenhouse climate based on the lazy man weather prediction. 13th IFAC Triennial World Congress, 4a-01(3), 387-392, San Francisco.
- 21. Tchamitchian M., 1993. Optimal control applied to tomato crop. ECC'93, 1348-1352, Groningen, The Netherlands.

- 22. Thornley H.M and Johnson I.R., 1990. Plant and Crop Modelling: A Mathematical Approach to Plant and Crop Phys. Clarendon Press.
- 23. Udink ten Cate, A.J., 1983. Modelling an (adaptive) Control of Greenhouse Climates. Ph.D. Thesis, Wageningen Agricultural University, Wageningen.
- 24. van Henten, E.J., 1994. Greenhouse Climate Management: An optimal Control Approach. Ph.D. Thesis, Wageningen Agricultural University, Wageningen.
- van Henten E.J., Bontsema J., 1992. Singular Perturbation Methods Applied to a Variational Problem in Greenhouse Climate Control. 3st IEEE-CDC, 3068-3069.
- 26. van Straten G., van Willigenburg G., van Henten E.J., van Ooteghem R., 2011. Optimal Control of Greenhouse Cultivation. CRC Press.