

CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL IPN

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA SECCIÓN DE CONTROL AUTOMÁTICO

Control implícito para una cadena Cinemática cerrada de dos grados de libertad

TESIS QUE PRESENTA

Carlos Fernando Aguilar Ibañez'

PARA OBTENER EL GRADO DE

DOCTOR EN CIENCIAS EN LA ESPECIALIDAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Moises Bonilla Estrada

MÉXICO, D.F., Junio DE 1999

^{*} Becario del CONACyT

AGRADECIMIENTOS ACADEMICOS:

A todos mis maestros.

A la S.C.A. del CINVESTAV del I.P.N. Y CONACYT.

Al Dr. Moisés B. por su apoyo, confianza e infinita paciencia.

Al jurado por sus valiosos comentarios y observaciones hechas, durante el proceso de revisión:

Dr. V.Kharitonov, Dr. A. Pozniack. Dr. J.Carlos Martinez y Dr. J.L. Diaz de León.

A mis amigos por su apoyo moral y académico:

Margarita, Petra, Daniel, Marco, Gaston, Gabriel, Manuel y Orlando.

Agradesco la ayuda y colaboración academica de los Drs. :

J.C. Martinez, V. Kharitonov. v R. Garrido.

A la memoria de mis abuelos y F. Arzani.

Los Antepasados

No se encuentran sus nombres en anales
Vivieron en paz y en humildad
Pero su procesión vislumbro sin embargo
Perdiendose en lo más obscuro del tiempo.
Aquí en la vieja tierra ferrífera,
Labrarón campos a lo largo del río
Y sacaron metal de la mina cercana.
No fuerón ciervos de nadie ni sabían de protocolos,
pero eran reyes en su propia casa
y los días de fiesta se emborrachaban.
En el verano de sus vidas besaban a las muchachas,
pero sólo una era su prometida.
Fueron fieles y temerosos de Dios
Y murieron en silencio, macerados por los años.

¡ Mis antepasados! En la hora del dolor y la tentación fue vuestro recuerdo fortaleza mía.

Así como guardaron y cuidaron su dinero heredado, Sonreiré yo, contento a lo que me brinde el destino.

Antepasados míos, os veo en mis sueños Y mi alma se entristece y cede. Me siento arrancado de mi campo, como una hierba. Por mi voluntad y a la fuerza, os he engañado.

Y ahora busco acordes en el verano y en el otoño,
Dandole la voz juguetona de la canción:
Nada, un oficio más.
Pero si algún día resonase en mi verso
El eco de la tormenta y el murmullo del agua,
Un pensamiento viríl y audaz,
Si se oyeran en él un gorjeo, se vislumbrase en el un seto ajado,
Suspirase algo del bosque profundo,
Seríais vosotros, a través de tantas generaciones,
Hacha en mano, tirando del arado y del carro.

Axel Karlfeldt.

1 Ìdice general

1	Motivación		
	1.1	Antecedentes	3
	1.2	Plataforma Stewart	4
	1.3	Aplicaciones	6
	1.4	Motivación	6
2	Mo	delo Dinámico	8
	2.1	Introducción	8
	2.2	Manipulador Paralelo	9
	2.3	Expresiones de Energía Potencial y Cinética	10
	2.4	Ecuaciones de Lagrange	11
	2.5	Propiedades Mecánicas	13
	2.6	Apéndice	
3	Acc	otamiento de la Energía Cinética	18
	3.1	Introducción	18
	3.2	Preliminares	19
	3.3	Ley de Control Lineal	20
	3.4	Sistema en Lazo cerrado	
	3.5	Acotamiento de $\delta_i(t)$:	23
	3.6	Conclusiones:	25
	3.7	Apéndice	26
4	Est	30	
	4.1	Introducción:	30
	4.2	Estabilidad Asintótica	31

	4.3	Estabilidad Exponencial		
	4.4	Ejemplo		
	4.5	Conclusiones	36	
	4.6	Apéndice	37	
5	6 Acoplamiento a Modelo:		45	
	5.1	Introducción:	45	
	5.2	Preliminares:	46	
	5.3	Acoplamiento a Modelo:	47	
		5.3.1 Trayectoria Interna:	47	
		5.3.2 Error en el Espacio de Estado:	48	
		5.3.3 Resultado Principal:	49	
	5.4	Simulaciones	54	
	5.5	Conclusiones	55	
	5.6	Apéndice	56	
6	6 Reconstructor de Estado		61	
	6.1 Introducción		61	
	6.2	Preliminares	62	
	6.3	6.3 Estabilidad Asintótica		
	6.4	Conclusiones y Comentarios	64	
	6.5	Apéndice	64	
7	7 Conclusiones y Perspectivas 7.1 Objetivos Alcanzados:		68	
			68	
	7.2	Bondades y Limitaciones.	69	
	7.3	Perspectivas	70	
8	Anexo		75	
	8.1 C.Aguilar and M. Bonilla. "On The Boundedness of Kinetic Energy of a Two Deg			
		Freedom Manipulator", ACC pp. 927-928, Philadelphia, Pennsylvania, USA, June 1998.		
	8.2	.2 C.Aguilar and M. Bonilla. "On a Stabilizable Implicit Control Law for Two Degree of		
	Freedom Manipulator ",to be published in ACC, June 1999		76	
	8.3	C.Aguilar and M. Bonilla. "On a Exponential Model Matchig for a Two Degree of Freedom		
		Manipulator", Submitted to the 38^{TH} IEEE-CDC, March 1999	77	

Capítulo 1:

Motivación

1.1 Antecedentes

Los manipuladores paralelos son mecanismos cinemáticos en los cuales el primer y último eslabón están conectados a través de una junta la cual puede ser la base del manipulador *i.e.* la base esta conectada por más de una unión en forma paralela, y tienen como principales características su alta rigidez estructural y su alta precisión de posicionamiento, estos dispositivos son más rígidos y precisos que los manipuladores en serie, además poseen una mayor capacidad y mejor distribución de carga mecánica. Sin embargo debido a la existencia de lazos en su arquitectura paralela estos poseen un espacio de trabajo reducido en comparación con los manipuladores en serie.

En general, las estructuras paralelas poseen una cinemática directa más compeja que la cinemática inversa. Para los manipuladores en serie lo contrario es cierto *i.e.* es mas fácil calcular la cinemática directa que la cinemática inversa. Debido a este hecho la complejidad del análisis cinemático limitó por varios años el desarrollo de algoritmos de control prácticos necesarios para la aplicación de estos mecanismos en sistemas de control automático. Cabe mencionar que en el caso particular cuando se considera la estructura básica fundamental "triángulo de dos grados de libertad o la pirámide triangular de tres grados de libertad" la cinemática directa e inversa pueden ser descritas mediante el uso de coordenadas polares.

La plataforma de Stewart es un mecanismo cerrado actuado que posee una estructura mecánica en paralelo de seis grados de libertad, la cual tiene muchas aplicaciones en el campo de la robótica, ingeniería industrial, marítima, aeronáutica, aeroespacial y en medicina.

Las características de rigidez y posicionamiento de la Plataforma Stewart han motivado las recientes investigaciones de este tipo de dispositivo en el área de la ingeniería. A partir de la década de los ochenta

los manipuladores en paralelos han sido motivo de estudio y el número de artículos publicados en este sentido se han incrementado considerablemente. Este tipo de investigaciones han abierto un campo en las aplicaciones de los robots paralelos, a tal grado que actualmente se pueden encontrar aplicaciones de estos mecanismos en áreas multidiciplinarias de la tecnología.

1.2 Plataforma Stewart

En 1965 D. Stewart [3] publicó un artículo definiendo la estructura mecánica que actualmente se conoce como Plataforma Stewart en donde su principal aplicación era como dispositivo de posicionamiento de alta rigidez y fue propuesto como: (a) Simulador de vuelos espaciales y aereos. (b) Como simulador del movimiento de un barco sujeto al movimiento aleatorio de las olas del mar. (c) Como simulador de la acción de la cámara de soporte sobre el piloto de un helicóptero, el cual se encuentra sujeto a perturbaciones aleatorias. (d) Como base de diseño para la construcción de un nuevo tipo de máquina herramienta.

Sin embargo, la primera "Plataforma Stewart" fue diseñada y construida para pruebas de llantas (TIRES) en "Performance and Stressing Depertament", el sistema fue instalado en 1954, una década antes de que Stewart publicara su artículo; también, existen referencias de que estos mecanismos fueron estudiados por famosos matemáticos como Cauchy.

El diseño básico de la Plataforma Stewart es un hexaedro en el que una cara se designa como la base de la plataforma "B" y la cara opuesta se designa como plataforma móvil "A", las dos caras se conectan por seis actuadores "pistones neumáticos o eléctricos" colocados en los vértices del hexaedro. La base esta fija y la plataforma móvil puede variar su posición con respecto a la base (dentro de cierto espacio limitado) en función al desplazamiento y orientación de los actuadores. La estructura se puede mover variando la longitud de uno o más de los actuadores, entonces de esa forma es posible ajustar la posición y orientación relativa de la base fija y la plataforma móvil ver la siguiente Figura.

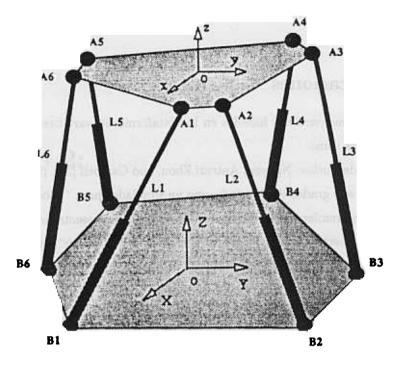


Figura 0.I

El modelo descrito en la Figura 0.I ha sido motivo de estudio, porque en el se fundamentan las recientes aplicaciones de los robots paralelos; se han obtenido los modelos dinámicos de la Plataforma Stewart para seis, tres y dos grados de libertad. En los trabajos de C Reboulet, T. Berthomieus [18] y Lebret, Liu, Lewis [22], los autores dan una metodología para obtener el modelo dinámico de la Plataforma Stewart, además, señalaron la importancia y la complejidad de las ecuaciones que describen el comportamiento dinámico del manipulador, en estos trabajos se discutieron dos de los principales problemas que se encuentran en la aplicación de los manipuladores paralelos, el primero es la simulación, ¿cómo puede reaccionar el manipulador al aplicarle ciertas fuerzas a los actuadores?, el segundo es el problema de controlar la trayectoria del extremo final en función de la posición, velocidad y aceleración de los demás elementos del manipulador. ¿Qué fuerza se necesita para hacer el seguimiento de esta trayectoria? En el mismo artículo, los autores concluyen que el modelo dinámico es muy complejo para usar una ley de control en tiempo real, por esta razón los diseñadores de leyes de control utilizan modelos dinámicos simplificados en los que sólo se consideran las principales interacciones dinámicas.

En este trabajo, se presentará un estudio cinemático y dinámico de un manipulador paralelo dinámico de dos grados de libertad o cadena triangular cerrada, ya que en general se puede aproximar el modelo de seis grados de libertad mediante la superposición de tres triángulos dependientes cada uno entre ellos, con la suposición de que se mueve a velocidades angulares lentas la base superior de la plataforma.

Aplicaciones

Los manipuladores paralelos basados en la Plataforma Stewart tiene amplias aplicaciones con variados propósitos, tales como:

Simulador de Vuelos: Nguyen, Antrazi, Zhou, and Cambell [20], presentarón la implemetación de una plataforma de seis grados de libertad como un simulador para "Goddard Space Flight Center".

Máquinas herramientas: (Gidding's y Lewis,en [22]), presentaron la aplicación de una plataforma de seis grados de libertad para controlar el movimiento del "cutter" en una máquina fresadora. También ha sido usada para controlar el movimiento de un taladro y para realizar cortes de alta precisión sobre láminas de acero.

Robot Grua: (Albus, Bostelman, y Dagalaki ,en [5]), presentaron una aplicación de la plataforma de Stewart en el diseño e implementación de un Robot Grua llamado Robocrane. Al contrario de otros usos de la plataformas, el Robocrane usa cables como eslabones paralelos y poleas motorizadas como actuadores.

Aislamiento a Vibraciones: (Z. Geng y L. S. Haynes en [6]), presentaron el uso de una plataforma de seis grados como un sistema aislador de vibraciones, los autores diseñaron e implementaron un artefacto el cual podían atenuar hasta 30 dB de vibraciones en tiempo real.

Y en general ha sido usado como: Probador de vehículos Lunar/Marte (NASA): Para simular sistemas de navegación marítima, ambientes no gravitatorios (NASA, MIT).

En medicina, para posicionamiento preciso de dispositivos de operación. Como Simulador de vuelos, carros, helicópteros, etc. En nanotecnología, para micromáquinas (Xerox). Y en sistemas de posicionamiento para radares, y satélites.

Motivación

Este trabajo de tesis forma parte del proyecto investigación auspiciado por el Consejo Nacional de Ciencias y Tecnología, con número de proyecto 35338P-A9607. El cual contempla la construcción [1] y diseño de algorítmos de control para un manipulador paralelo de seis grados de libertad, bajo la supervisión del Dr. Moisés Bonilla.

La principal contribución de este tema de tesis ha sido la de proporcionar un modelo básico y un algoritmo de control para las estructuras básicas de los triángulos que constituyen la plataforma diseñada en el trabajo de tesis de J.Leyva H.[1], que se muestra en las Figuras 0.II.

Este trabajo esta organizado de la siguiente forma:

El capítulo dos esta dedicado ha estudiar la cinemática y la dinámica que rigen el comportamiento mecánico de la estructura básica fundamental de un manipulador paralelo. En este capítulo se realizara

un estudio energético y se discutirán algunas de las principales propiedades mecánicas relacionadas con el manipulador paralelo de dos grados de libertad.

En el capítulo tres se presentará el algoritmo de control o ley de control (ver sec. 3.3) la cual se usará en los capítulos posteriores y se estudiará el acotamiento uniforme de la energía de cinética generado bajo esta ley de control.

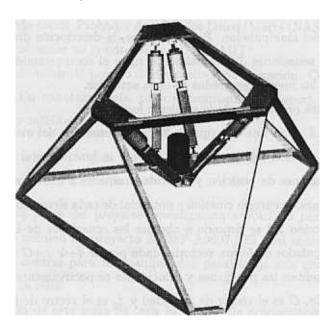
El capítulo cuatro esta dedicado a estudiar la estabilidad asintótica y exponencial del sistema en lazo cerrado. En este capítulo se dará un ejemplo ilustrativo en el que se muestra como escoger los parámetros de control para garantizar estabilidad del sistema en lazo cerrado.

El capítulo cinco esta dedicado a estudiar el problema de acoplamiento a modelo del sistema en lazo cerrado. En este capítulos se mostrará una simulación relacionada con el problema de acoplamiento a modelo. Cabe mencionar que existen muy pocos trabajos relacionados con este tópico.

El capítulo seis esta dedicado a estudiar la estabilidad del sistema en lazo cerrado bajo la hipótesis de que no se dispone de la velocidad, por lo que se propone un filtro de primer orden para estimar la velocidad.

El capítulo siete se presentaran las conclusiones y perspectivas de tesis.

El capítulo ocho se anexan los respectivos artículos relacionados con este trabajo de tesis.



 $Figura~0. II \\ Plataforma de Stewart de seis grados de libertad$

Capítulo 2:

Modelo Dinámico

2.1 Introducción

En este capítulo se describe la Cinemática y Dinámica de un manipulador paralelo de dos grados de libertad, que será usado para ser modelado y controlado mediante la acción de una ley de control lineal.

Se presenta una descripción Cinemática basada en la geometría de la posición, velocidad y aceleración de cada elemento del manipulador. Por otra parte, la descripción dinámica contempla la formulación matemática de las ecuaciones diferenciales que rigen el comportamiento del manipulador y describen fundamentalmente las fuerzas generadas en cada actuador.

Este capítulo está organizado de la siguiente forma:

En la sección 2.2 se da una descripción física y geométrica del manipulador paralelo de dos grados de libertad. En la sección 2.3 se procede a obtener la función total de energía, para esto primero se introducirá las relaciones de posición y velocidad respecto a cierto marco de referencia, para después obtener las ecuaciones de energía cinética y potencial de cada elemento del mecanismo (ver las ecs. (2.4) y (2.5)). En la sección 2.4 se procede a obtener las ecuaciones de Lagrange para obtener el modelo dinámico del manipulador en forma vectorial dado por $M \ddot{q} + \Phi \dot{q} + G = f_q$ (ver las ecs. (2.12) a (2.16)), donde q y \dot{q} representan las posiciones y velocidades respectivamente, M es la matriz de inercia, Φ es la matriz de Coriolis, G es el vector de gravedad y f_q es el vector de fuerza. Finalmente en las sección 2.5 se demuestran algunas de las principales propiedades mecánicas relacionadas con las matrices M, Φ y el vector de gravedad que serán de gran utilidad en los capítulos posteriores (ver las propiedades P.1 a P.6).

2.2 Manipulador Paralelo

Considere el manipulador paralelo de dos grados de libertad mostrado en la Figura 1, el cual esta básicamente constituido por dos pistones eléctricos de masas M_v y longitud total de extremo a extremo l_i , unidos en un extremo por una carga móvil de masa M_p (carga externa). Los otros dos extremos de los pistones se encuentran fijos a dos ejes paralelos cuya distancia de separación fija es L(longitud de la base de la plataforma).

El pistón izquierdo puede moverse alrededor de un eje fijo O_1 y el pistón derecho puede moverse alrededor del eje fijo O_2 . Para analizar el modelo se va a definir el siguiente sistema de coordenadas, el origen de coordenadas es escogido en el eje de unión O_1 , el eje x yace sobre la base de la plataforma y el eje y apunta perpendicularmente a la base de la plataforma. Se definen las coordenadas cartesianas asignado dos variables independientes x(t) e y(t). $\theta_1(t)$ y $\theta_2(t)$ son los ángulos formados entre los pistones y la barra fija de longitud L. $f_i(t)$ es la fuerza aplicada en cada pistón

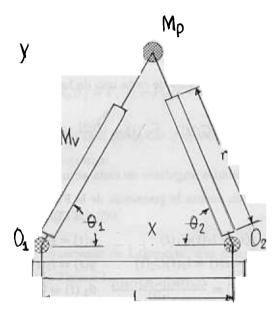


Figura 1

Antecedentes: Basado en el procedimiento propuesto en 1991 por Reboulet y Berthomieu [25], en el trabajo de tesis de S. Salazar [2] se obtuvo el modelo dinámico de una cadena cinemática cerrada de dos grados de libertad (ver [15]). En este capítulo se utilizan las ecuaciones de Euler-Lagrange para obtener el modelo dinámico del manipulador descrito en la Figura con el objeto de encontrar propiedades relacionadas con la función de energía del sistema, para esto primero se procede a encontrar las ecuaciones de energía cinética y potencial asociados con el manipulador paralelo de dos grados de libertad.

2.3 Expresiones de Energía Potencial y Cinética

Esta sección está enfocada a expresar las ecuaciones de energía cinética y potenciales del manipulador paralelo de dos grados de libertad (MP2), para esto primero encontraremos las ecuaciones cinemáticas del MP2, para después poder obtener las expresiones de energía.

ECUACIONES CINEMATICAS:

Primeramente, se calcula la posición y la velocidad de cada actuador de masa M_v , así como de la carga mecánica de masa M_p . Sea \vec{r}_i (t) el vector que va del origen de coordenadas al centro de gravedad de cada i-actuador y sea \vec{r}_L (t) el vector que va del origen de coordenadas a la carga móvil de masa M_p . Expresando cada vector \vec{r}_i (t) (i=1,2) y \vec{r}_L (t) en coordenadas rectangulares, se obtiene :(ver Figura 1)

$$\vec{r}_1(t) = (\frac{r}{2}C_1(t); \frac{r}{2}S_1(t))$$
 $\vec{r}_2(t) = (L - \frac{r}{2}C_2(t); \frac{r}{2}S_2(t))$ $\vec{r}_L(t) = (x(t); y(t))$

donde $C_i = \cos \theta_i$, $S_i = \sin \theta_i$, (i = 1, 2) y r es la longitud fija del cuerpo principal de cada actuador. Consideraremos que la masa total M_v de cada actuador se encuentra concentrada en r/2.

Después, se expresan las velocidades de cada uno de los elementos, se obtiene:

$$\overrightarrow{r}_{1}\left(t\right) = \frac{r\dot{\theta}_{1}\left(t\right)}{2}\left(-S_{1}\left(t\right);C_{1}\left(t\right)\right) \quad \overrightarrow{r}_{2}\left(t\right) = \frac{r\dot{\theta}_{2}\left(t\right)}{2}\left(S_{2}\left(t\right);C_{2}\left(t\right)\right) \quad \overrightarrow{r}_{L}\left(t\right) = \left(\dot{x}\left(t\right);\dot{y}\left(t\right)\right)$$

Ahora, se expresan las velocidades angulares de cada actuador θ_i (t) (i = 1, 2), en coordenadas rectangulares. Para esto, se toma en cuenta la geometría de la Figura , tenemos

$$x(t) = l_1(t)C_1(t) y(t) = l_1(t)S_1(t)$$

$$L - x(t) = l_2(t)C_2(t) y(t) = l_2(t)S_2(t)$$

$$\dot{\theta}_1(t) = \frac{C_1(t)\dot{y}(t) - S_1(t)\dot{x}(t)}{l_1(t)} \dot{\theta}_2(t) = \frac{C_2(t)\dot{y}(t) + S_2(t)\dot{x}(t)}{l_2(t)}$$
(2.1)

donde:

$$l_1(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} \ge r > 0$$
 $l_2(t) = \sqrt{(L - x(t))^2 + y^2(t)} \ge r > 0$ (2.2)

Note que las ecuaciones (2.1) y (2.2), definen una relación biunívoca entre las coordenadas cartesianas $x \in y$, y las coordenadas polares $l_1 y \theta_1$.

De (2.1) y (2.2) , las velocidades angulares θ_i (t) (i=1,2) pueden ser escritas como:

$$\frac{x(t)y(t) - y(t)x(t)}{x^2(t) + y^2(t)} \quad ; \quad \dot{\theta}_2(t) = \frac{(L - x(t))y(t) + y(t)x(t)}{(L - x(t))^2 + y^2(t)} \tag{2.3}$$

Una vez obtenidas las expresiones de posición y velocidad, se procede ha encontrar las ecuaciones de

energías.

ECUACIONES DE ENERGIA:

Sean $K_i(t)$ (i = 1, 2) y $K_L(t)$ la energía cinética del *i*-ésimo actuador y de la carga mecánica, respectivamente. Esto es:

$$\frac{J\theta_1^2(t)}{2} \quad K_2(t) = \frac{J\theta_2^2(t)}{2} \quad K_L(t) = \frac{M_p(x^2(t) + y^2(t))}{2}$$

donde $J=M_v r^2$ es el momento de inercia de cada actuador . Sea $E_c(t)$ la energía cinética total:

$$E_c(t) = K_1(t) + K_2(t) + K_L(t)$$
(2.4)

Sea $P_i(t)$ la energía potencial del *i*-ésimo actuador y sea $P_L(t)$ la energía potencial de la carga mecánica. Entonces:

$$\frac{M_v gr S_1(t)}{2}$$
 $P_2(t) = \frac{M_v gr S_2(t)}{2}$ $P_L(t) = M_p gy(t)$

donde g es la aceleración gravitacional. Sea $E_p(t)$ la energía potencial total:

$$E_p(t) = P_1(t) + P_2(t) + P_L(t) \tag{2.5}$$

Una vez obtenidas las relaciones de energías potencial y cinética de la cadena cinemática cerrada, se procede a obtener las ecuaciones de Lagrange.

2.4 Ecuaciones de Lagrange

En esta sección se encuentran las Ecuaciones de Lagrange , que describen el comportamiento dinámico de la cadena cerrada mostrada en la Figura 1.

Primero, se sustituye (2.4) y (2.5) en la función de Lagrange dada por

$$\mathcal{L} = E_c(t) - E_n(t)$$

se tiene lo siguiente:

$$\mathcal{L} = -\frac{M_v gry(t)}{2\sqrt{x^2(t) + y^2(t)}} - \frac{M_v gry(t)}{2\sqrt{(L - x(t))^2 + y^2(t)}} - M_p gy(t) + \frac{M_p gy(t)}{2\sqrt{(L - x(t))^2 + y^2(t)}} - \frac{M_p gy(t)}{2\sqrt{(L - x(t))^2 + y^2(t)}} + \frac{J}{2} \left(\frac{(L - x(t))\dot{y}(t) + y(t)\dot{x}(t)}{(L - x(t))^2 + y^2(t)} \right)^2$$
(2.6)

aplicando las ecuaciones de Lagrange (ver [26] y [23]), respectivamente:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}(t)}{\partial \dot{x}(t)} \right) \quad \frac{\partial \mathcal{L}(t)}{\partial x(t)} = f_x(t)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}(t)}{\partial \dot{y}(t)} \right) \quad \frac{\partial \mathcal{L}(t)}{\partial y(t)}$$
(2.7)

donde:

$$f_x(t) = f_1(t)C_1(t) - f_2(t)C_2(t)$$
 $f_y(t) = f_1(t)S_1(t) + f_2(t)S_2(t)$ (2.8)

 $f_i(t)$ denota la fuerza de soporte del $i - \acute{e}simo$ actuador, desarrollando (2.7) llegamos a la siguiente ecuación dinámica respecto a x e y respectivamente:

$$M_{p} \ddot{x}(t) + J \ddot{\alpha}_{1}(t) + J \ddot{\alpha}_{1}(t) - \frac{M_{v}grx(t)y(t)}{2(x^{2}(t) + y^{2}(t))^{3/2}} - \frac{M_{v}gr(L - x(t))y(t)}{2((L - x(t))^{2} + y^{2}(t))^{3/2}}$$

$$f_{1}(t)C_{1}(t) - f_{2}(t)C_{2}(t)$$
(2.9)

$$M_{p} \ddot{y}(t) + J \ddot{\beta}_{1}(t) + J \ddot{\beta}_{2}(t) + \frac{M_{v}grx^{2}(t)}{2(x^{2}(t)+y^{2}(t))^{3/2}} + \frac{M_{v}gr(L-x(t))^{2}}{2((L-x(t))^{2}+y^{2}(t))^{3/2}}$$

$$= -M_{p}gy(t) + f_{1}(t)S_{1}(t) + f_{2}(t)S_{2}(t);$$
(2.10)

donde:

$$\begin{array}{l} \ddot{\alpha}_{1}\left(t\right) = \frac{x(t)y^{2}(t) - y(t)y(t)x(t)}{(x^{2}(t) + y^{2}(t))^{2}} + 2\frac{x(t)y(t)y(t) - y^{2}(t)x(t)}{(x^{2}(t) + y^{2}(t))^{2}} \delta_{1}(t) \\ \ddot{\beta}_{1}\left(t\right) = \frac{y(t)x^{2}(t) - x(t)y(t)x(t)}{(x^{2}(t) + y^{2}(t))^{2}} - 2\frac{x^{2}(t)y(t) - y(t)x(t)x(t)}{(x^{2}(t) + y^{2}(t))^{2}} \delta_{1}(t) \\ \ddot{\alpha}_{2}\left(t\right) = \frac{x(t)y^{2}(t) + y(t)(L - x)y(t)}{((L - x(t))^{2} + y^{2}(t))^{2}} - 2\frac{(L - x(t))y(t)y(t) + y^{2}(t)x(t)}{((L - x(t))^{2} + y^{2}(t))^{2}} \delta_{2}(t) \\ \ddot{\beta}_{2}\left(t\right) = \frac{y(t)(L - x(t))^{2} + x(t)(L - x(t))y(t)}{((L - x(t))^{2} + y^{2}(t))^{2}} - 2\frac{(L - x(t))^{2}y(t) + y(t)(L - x(t))x(t)}{((L - x(t))^{2} + y^{2}(t))^{2}} \delta_{2}(t) \end{array}$$

 $\delta_1(t)$ y $\delta_2(t)$ son dos variables auxiliares definidas como siguen:

$$\delta_1(t) = \frac{x(t)\dot{x}(t) + y(t)\dot{y}(t)}{x^2(t) + y^2(t)} \quad \delta_2(t) = \frac{-(L - x(t))\dot{x}(t) + y(t)\dot{y}(t)}{(L - x(t))^2 + y^2(t)} \tag{2.11}$$

 δ_1 y δ_2 representan las velocidades transversales de la carga externa M_p respecto a los ejes fijos O_1 y O_2 , respectivamente.

Las ecuaciones (2.9) a (2.11) describen el comportamiento dinámico del *MP2*. Cabe mencionar que dicho conjunto de ecuaciones coinciden con las obtenidas por M. Bonilla y S. Salazar [15]. Para analizar y mostrar algunas de las propiedades estructurales del sistema, se representaran las ecuaciones dinámicas en su forma matricial, de esta forma (2.9) y (2.10), pueden ser escritas como¹:

$$M(q) \ddot{q} + \Phi(q, \dot{q}) \dot{q} + G(q) = f_q$$
 (2.12)

Sea
$$q = q(t | l_i = l_i(t), C_i = C_i(t) \text{ y } S_i = S_i(t), i = 1, 2$$

donde a es el vector de coordenadas dado por $\left[\begin{array}{cc} x & y \end{array}\right]^T$ y f_q es el vector de fuerzas dado por $\left[\begin{array}{cc} f_x & f_y \end{array}\right]$,

$$f_x = f_1 C_1 - f_2 C_2$$
 $f_y = f_1 S_1 + f_2 S_2$ (2.13)

M(q) es la matriz simétrica

$$M(q) = \begin{array}{c} M_p + J\left(\frac{S_1^2}{l_1^2} + \frac{S_2^2}{l_2^2}\right) & J\left(\frac{C_2S_2}{l_2^2} - \frac{C_1S_1}{l_1^2}\right) \\ J\left(\frac{C_2S_2}{l_1^2} - \frac{C_1S_1}{l_1^2}\right) & M_p + J\left(\frac{C_1^2}{l_1^2} + \frac{C_2^2}{l_2^2}\right) \end{array}$$
(2.14)

 $\Phi(q,\dot{q})$ es la matriz de Coriolis

$$\Phi(q, \dot{q}) = J \quad \frac{\frac{\delta_2 S_2^2}{l_2^2} + \frac{\delta_1 S_1^2}{l_1^2}}{\frac{\delta_2 C_2 S_2}{l_2^2} - \frac{\delta_1 C_1 S_1}{l_1^2}}{\frac{\delta_2 C_2 S_2}{l_2^2} - \frac{\delta_1 C_1 S_1}{l_1^2}}$$

$$\frac{\delta_2 C_2 S_2}{l_2^2} - \frac{\delta_1 C_1 S_1}{l_1^2} \quad \frac{\delta_2 C_2^2}{l_2^2} + \frac{\delta_1 C_1^2}{l_1^2}$$
(2.15)

G(q) es el vector de gravedad:

$$G(q) = \frac{\frac{M_v gr}{2} \left(\frac{-xy}{(x^2+y^2)^{3/2}} + \frac{(L-x)y}{((L-x)^2+y^2)^{3/2}} \right)}{M_p g + \frac{M_v gr}{2} \left(\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} + \frac{(L-x)^2}{((L-x)^2+y^2)^{3/2}} \right)}$$
(2.16)

La ecuación (2.12) representa a un sistema compacto de ecuaciones de movimiento que describen en forma detallada el comportamiento del MP2. Sin embargo, es necesario hacer algunas consideraciones importantes acerca de este tipo de modelo.

Consideraciones:

- 1. En el modelo dinámico (2.12) no se contempla la disipación mecánica asociada por la presencia de fricción en el mecanismo. Sin embargo, se pueden incorporarlas añadiendo fuerzas en el lado izquierdo de la ec. (2.12).
- 2. Para completar el modelo dinámico se puede incorporar los modelos dinámicos de los actuadores en la ec.(2.12), aumentando el orden de dicho sistema de ecuaciones diferenciales.
 - 3. Se considera el momento de inercia J constante.

A continuación se dan una serie de propiedades relacionadas con las matrices M, Φ y el vector de gravedad G.

2.5 Propiedades Mecánicas

En esta sección se dan algunas de las propiedades cinemáticas y dinámicas del MP2. Estas propiedades juegan un papel muy importante en el diseño y análisis de leyes de control estabilizables. Para mayor

detalle consultar el Apéndice al final del capítulo.

$$|P.1\rangle$$
 $|\delta_i| \leq \frac{\|\dot{q}\|}{r} y |\theta_i| \leq \frac{\|\dot{q}\|}{r} (para \ i = 1, 2)$

P.2) $\exists \ \underline{\mu} > 0 \ \text{y} \ \overline{\mu} > 0 \ tales \ que$:

$$\underline{\mu} \le \lambda_m \{M(q)\} \le \|M(q)\| \le \overline{\mu}, \text{ donde } \underline{\mu} = M_p \quad \overline{\mu} = 2M_p + \frac{4J}{r^2}$$

 $P.3 \quad \exists K_{\Phi} \ y \ K_{\partial M} > 0 \ tales \ que$

$$\left\|\Phi(q,\dot{q})\right\| \leq K_{\Phi}\left\|\dot{q}\right\| \qquad \dot{M}\left(q\right)\right\| \leq K_{\partial M}\left\|\dot{q}\right\|$$

donde $K_{\Phi} = \frac{2\sqrt{2}J}{r^2}$ y $K_{\partial M} = \frac{8J}{r^3}$.

P.4) Sea N una matriz definida de la siguiente forma

$$N = \dot{M}(q) - 2\Phi(q, \dot{q})$$

entonces $y^T N(q)y = 0 \quad \forall \quad y \in \mathbb{R}^2$

P.5) $\exists K_G > 0 \ y \ k_G > 0 \ tal \ que$

$$||G(z) - G(w)|| \le K_G ||z - w||;$$
 $K_G = \frac{8M_v g}{r^2}$
 $||G(z)|| \le k_G \text{ donde } k_G = M_p g + 2M_v g$

P.6) Sea E una matriz simétrica tal que $E(q) = \mu M^{-1}(q) - I$ donde $\mu = a\overline{\mu}$ para a > 1 entonces $\lambda_m \{E(q)\} \leq a - 1$.

Observaciones:

- P.1 Nos permite encontrar una cota superior para las velocidades angulares y transversales θ_i y δ_i respectivamente en función de la velocidad de la carga externa M_p respecto al origen.
- P.2 Es una propiedad importante en el contexto de diseño, si M es definida positiva refleja el hecho de que la energía cinética total sea positiva y será utilizada para probar estabilidad y acoplamiento a modelo. Existen casos especiales de algunos manipuladores en los cuales M es definida semipositiva.
- P.3 Nos permite considerar a la matriz de Coriolis Φ como una transformación quazilineal respecto al vector velocidad.
- P.4 Es de gran importancia ya que nos permite considerar al sistema dinámico como un sistema pasivo y representa el hecho que el trabajo realizado por las fuerzas de Coriolis y centrífugas es cero (ver [32] y [22]).

- P.5 Nos permite considerar al vector gravedad como una perturbación suave (derivable) y uniformemente acotada.
- P.6 Nos permite escoger las ganacias proporcionales y derivativas de la ley de control (ver capítulo 3 del libro de Lewis [23]).

La propiedad cuatro será utilizada para probar la estabilidad asintótica del sistema en lazo cerrado y estabilidad exponencial en el sentido local. Pero no es una propiedad necesaria para poder garantizar acoplamiento a modelo.

2.6 Apéndice

En este apéndice se mostrarán las propiedades mecánicas presentadas en la sección 2.5.

Prueba de la propiedad P.1:

Primero se encuentra una cota para δ_1 , aplicando la desigualdad de Schwarz a la primera ecuación de (2.11)

$$|\delta_1| = \left| \frac{\dot{x}x + \dot{y}y}{x^2 + y^2} \right| \le \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2} = \sqrt{\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{x^2 + y^2}}$$

Finalmente tomando en cuenta $r \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ y $\|\dot{q}\| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ en la última desigualdad llegamos a la siguiente expresión:

$$|\delta_1(t)| \le \sqrt{\frac{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}{x^2(t) + y^2(t)}} \le \frac{\|\dot{q}\|}{r}$$

de la misma forma se puede mostrar para δ_2 . Ahora se probará para $\dot{\theta}_1$ de (2.3) tenemos:

$$\left|\dot{\theta}_{1}\right| = \left|\frac{\dot{x}y - \dot{y}x}{x^{2} + y^{2}}\right| \leq \frac{\sqrt{x^{2} + y^{2}}\sqrt{\dot{x}^{2} + \dot{y}^{2}}}{x^{2} + y^{2}} = \sqrt{\frac{\dot{x}^{2} + \dot{y}^{2}}{x^{2} + y^{2}}} \leq \frac{\|\dot{q}\|}{r},$$

Prueba de la propiedad P.2:

Primero: se muestra que M es definida positiva, de esta forma calculando el determinante de M(q), de (2.14) se obtiene (note que $l_1 \ge r > 0$, i = 1, 2):

$$\det(M(q)) = M_p^2 + \frac{JM_p(l_1^2 + l_2^2)}{l_1^2 l_2^2} + \frac{J^2(1 - Cos(2(\theta_1 + \theta_2)))}{2l_1^2 l_2^2} > 0$$
 (2.21)

puesto que los elemento de la diagonal son positivos, se concluye que M(.) > 0.

Después, se encuentra una cota superior para la norma de M de (2.14), se tiene:

$$||M(q)|| = \lambda_M M(q) \le \text{Traza} \{M(q)\} \le 2M_p + \frac{4J}{r^2}$$

Finalmente, escribiendo M de la siguiente forma, $M(q) = M_p I_2 + H(q)$ donde

$$H(q) = \begin{array}{cc} J\left(\frac{S_1^2}{l_1^2} + \frac{S_2^2}{l_2^2}\right) & J\left(\frac{C_2S_2}{l_2^2} - \frac{C_1S_1}{l_1^2}\right) \\ J\left(\frac{C_2S_2}{l_2^2} - \frac{C_1S_1}{l_1^2}\right) & J\left(\frac{C_1^2}{l_1^2} + \frac{C_2^2}{l_2^2}\right) \end{array}$$

puesto que el $\det(H(q)) \geq 0,$ entonces usando la desigualdad de Ostrosky 2 tenemos

$$M_p \le M_p + \lambda_m \{H(q)\} \le \lambda_m \ M(q)\}$$

Prueba de la propiedad P.3:

Solamente se mostrara la desigualdad de la izquierda de (2.18). Para esto primero se define $\Phi=\{\Phi_{ij}$ para i=1,2 y se calcula una cota superior para $|\Phi_{ij}|$. De (2.15) y P.1 se tiene:

$$|\Phi_{ij}| \leq \frac{J |\delta_2|}{r^2} + \frac{J |\delta_1|}{r^2} - \frac{2J}{r^3} \|\dot{q}(t)\|$$

tomando en cuenta que $\|\Phi\| \le \|\{|\Phi_{ij}|\}\|$, tenemos $\|\{|\Phi_{ij}|\}\| \le K_{\Phi} \|\dot{q}(t)\|$.

Prueba de la propiedad P.4:

Dado que:

- 1) M(q) es positiva definida.
- 2) La energía cinética puede ser expresada como una forma cuadrática \dot{q} , de (2.4) y (2.3), tenemos

$$E_c = \frac{J_{\theta_1}^{2}}{2} + \frac{J_{\theta_2}^{2}}{2} + \frac{M_p(x^2 + y^2)}{2} = \frac{\dot{q}^T M(q) \dot{q}}{2}$$

3) La energía potencial es independiente de q ver (2.5) Aplicando el teorema 6.3.1. del libro de Spong y Vidyasagar [26] se tiene lo siguiente

$$y^T N y = 0 \quad \forall \quad y \in \mathbb{R}^2$$

esto es N es una matriz anti-simétrica.

Prueba de la propiedad P.5:

Primero se obtiene una cota superior para la derivada del operador G. Definiendo $G(q) = (G_x, G_y)^T$

²Sean A y B dos matrices simétricas entonces $\lambda_m \{A\} + \lambda_m \{B\} \le \lambda_m \{A+B\}$

v calculando el Jacobiano del vector G de (2.16), tenemos

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial G_x}{\partial x} = M_v g \left(\frac{(1-3C_2^2)S_2}{2l_2^2} + \frac{(1-3C_1^2)S_1}{2l_1^2} \right) & \frac{\partial G_x}{\partial y} = M_v g \left(\frac{C_2(3S_2^2-1)}{2l_2^2} + \frac{C_1(3S_1^2-1)}{2l_1^2} \right) \\ \frac{\partial G_y}{\partial x} = M_v g \left(\frac{C_2(1-3C_2^2)}{2l_2^2} + \frac{C_1(1-3C_1^3)}{2l_1^2} \right) & \frac{\partial G_y}{\partial y} = M_v g \left(\frac{(3C_2^2-1)S_2}{2l_2^2} + \frac{(3C_2^2-1)S_1}{2l_1^2} \right) \end{array}$$

puesto que $l_1 < 1/r$ y $1/l_2 < 1/r$, se tiene:

$$\max_{x,y} \left\{ \left| \frac{\partial G_x(x,y)}{\partial x} \right|, \left| \frac{\partial G_x(x,y)}{\partial y} \right|, \left| \frac{\partial G_y(x,y)}{\partial x} \right|, \left| \frac{\partial G_y(x,y)}{\partial y} \right| \right\} \le \frac{2M_v g}{r^2}$$

Después usando la continuidad de la derivada del vector G, para $z = [z_x \ z_y]$ y $w = [w_x \ w_y]$ se tiene

$$\|G(z) - G(w)\| = \frac{\frac{\partial G_x(x',y')}{\partial x}(z_x - w_x) + \frac{\partial G_x(x',y')}{\partial y}(z_y - w_y)}{\frac{\partial G_y(x'',y'')}{\partial x}(z_x - w_x) + \frac{\partial G_y(x'',y'')}{\partial y}(z_y - w_y)} \le K_G \|z - w\|$$

donde $x'' \in [z_x; w_x]$ y $y', y'' \in [z_y; w_y]$.

Prueba de la propiedad P.6:

Usando la desigualdad de Raleight y tomando en cuenta P.2, tenemos

$$0 < a - 1 \le \frac{a\vec{\mu}}{\bar{\mu}} - 1 = \mu \lambda_m \{M^{-1}(q)\} - 1 \le \lambda_m \{E(q)\}$$

Capítulo 3:

Acotamiento de la Energía Cinética

3.1 Introducción

En el presente capítulo se mostrará el primer resultado de esta tesis, el cual tiene como principal objetivo mostrar que las variables auxiliares δ_1 y δ_2 ; son acotadas cuando el sistema es retroalimentado por una ley de control lineal como la que se propone en las ecs. (3.3) -(3.6).

Cabe mencionar que a pesar de que existe mucha literatura en el estudio cinemático y dinámico de los manipuladores paralelos de dos o más grados de libertad (ver Nguyen Z.L. en 1991 [41], Fitcher en 1986 [21], G. Lebret, K. Liu y F.L. Lewis en 1993 [22] y C. Reboulet y Pigeyre en 1990 [18] etc.), existen muy pocos trabajos realizados en el estudio de control de manipuladores paralelos. A continuación mencionaremos algunos de los mas relevantes trabajos realizados en el diseño de controles para una Plataforma de Stewart, como ejemplo de estos se mencionaran los trabajos desarrollados por:

Reboulet y Pigeyre [17] en el que propusieron un esquema de control basado en la Posición de la Fuerza para un micromanipulador de seis grados de libertad. Nguyen, Antrazi, Zhou y Cambell [20], implementaron una ley de control, basada en un P.D. de ganancias variables las cuales se ajustan por medio de una ley de control adaptable, la derivación de está ley de control está basado en el concepto de control adaptable por modelo a referencia y el método directo de Lyapunov, dicha ley de control está basada en la suposición de que la plataforma se mueve lentamente comparado con la velocidad de cambio en la ley de adaptación. Nguyen, Antrazi, Zhou y Cambell [41], derivaron una ley de control estimando la fuerza a través de la deflección de un resorte y unos transformadores lineales diferenciales de voltajes colocados a lo largo de cada pistón, dicho algoritmo fue aplicado para realizar un planeamiento de trayectorias. Nguyen, Pooran y Premack [39] y [40] implementaron una ley de control la cual provee una versatilidad activa para un manipulador paralelo de dos grados de libertad, la derivación de esta ley

de control esta basada por medio de un esquema de control por aprendizaje.

En [15] y [2] se implemento una ley de control lineal como la que se utilizara en los siguientes capítulos la cual tiene como objetivo controlar un manipulador de dos grados de libertad como el que se describió en el capítulo anterior (ver Figura 1).

El objetivo de la ley de control lineal es:

- 1) Garantizar estabilidad asintótica y exponencial de la salida en lazo cerrado.
- 2) Desacoplar las dinámicas internas del sistema mecánico.
- 3) Linealizar la respuesta a la salida.
- 4) Garantizar acoplamiento a modelo.

Como en dicho trabajo para poder garantizar los cuatro objetivos anteriores, se supuso como hipótesis que las variables auxiliares δ_1 y δ_2 definidas en (la ec. (2.11)) eran uniformemente acotadas, recuerde que:

$$\delta_1(t) = \frac{x(t)\dot{x}(t) + y(t)\dot{y}(t)}{x^2(t) + y^2(t)}$$
 $\delta_2(t) = \frac{-(L - x(t))\dot{x}(t) + y(t)\dot{y}(t)}{(L - x(t))^2 + y^2(t)}$

Las variables δ_1 y δ_2 están directamente relacionadas con la estructura interna de las matrices Φ y M (ver la propiedad P.4 y la ec.(2.15) respectivamente).

Este capítulo esta organizado de la siguiente manera. En la sección 3.2 se presentará un preliminar. En la sección 3.3 se presentará la ley de control en variable de estado (ver ecs.(3.3) a (3.6)) para ser usada en su forma equivalente (ver ecs. (3.7) y (3.8)). En la sección 3.4 se dará la ecuación del sistema en lazo cerrado y se expresará en forma de una ecuación diferencial lineal variante en el tiempo con perturbaciones no lineales respecto al estado (ver ecs. (3.15) a (3.18)). En la sección 3.5 se estimará una cota superior para $\delta_i(t)$, esta sección esta dividida en cuatro subsecciones, en la primera subsección se encuentra una relación directa entre la energía cinética y las variables δ_i (ver ec.(3.21)), luego en las subsecciones dos y tres se calculan las cotas superiores para las energías cinéticas y potenciales, y finalmente el la subsección cuatro se menciona el Teorema principal en el que se garantiza que si el parámetro $\varepsilon > 0$ entonces $|\delta_i(t)| \le \hat{\delta}$ (ver la desigualdad (3.26)). En la sección 3.6 se presentaran las conclusiones finales de este capítulo.

Los siguientes resultados fueron publicados en "American Control Conference 1998" [35].

3.2 Preliminares

En esta sección recordaremos el modelo dinámico descrito en el capitulo anterior, considere el MP2 descrito en la Figura 1 cuya ecuación dinámica en forma compacta (ver (2.12)) esta dada por:

$$M(q) \ddot{q} + \Phi(q, \dot{q}) \dot{q} + G(q) = f_q$$

donde q y f_q son los vectores de posición y fuerza dados por $q = [x \ y]$ y $f_q = [f_x \ f_y]$, M(q) es la matriz simétrica (ver ec. (2.14)), $\Phi(q,q)$ es la matriz de Coriolis (ver ec. (2.15)), y G(q) es el vector de gravedad (ver ec. (2.16)). En este contexto vamos a suponer que disponemos de las señales q y q, para implementar la ley de control.

En la siguiente sección se propone una ley de control lineal cuya principal característica es que para ciertas constantes fijas y ciertas condiciones iniciales cercanas al punto de equilibrio, el sistema en lazo cerrado se comporta como un sistema lineal invariante en el tiempo. Esto es importante ya que nos permite poder aplicar algoritmos clásicos de control de fuerza y posición.¹

3.3 Ley de Control Lineal

Considere la siguiente Ley de Control Lineal²

$$\dot{\chi}(t) = \begin{bmatrix} -k_1 & 1 \\ -k_0 & 0 \end{bmatrix} \chi(t) + \begin{bmatrix} -k_0 & -\beta \\ -k_0\beta & (k_0 - k_1\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) - r_x \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix}, \tag{3.3}$$

$$\dot{\nu}(t) = \begin{bmatrix} -k_1 & 1 \\ -k_0 & 0 \end{bmatrix} \nu(t) + \begin{bmatrix} -k_0 & -\beta \\ -k_0\beta & (k_0 - k_1\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t) - r_y \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix}, \tag{3.4}$$

$$f_q(t) = \frac{\mu}{\varepsilon} \left[\begin{array}{c} \chi_1(t) \\ \nu_1(t) \end{array} \right] - \mu k_0(q(t) - R_q) - \mu k_{1\varepsilon} \dot{q}(t) + G(R_q), \tag{3.5}$$

donde R_q es el vector constantes $R_q = \begin{bmatrix} r_x & r_y \end{bmatrix}^T$, $G(R_q)$ es el vector de gravedad evaluado en el vector de referencia R_q (ver ec. (2.16))

$$k_{0\varepsilon} = \frac{\beta + \varepsilon k_0}{\varepsilon} \quad ; \quad k_{1\varepsilon} = \frac{1 + \varepsilon k_1}{\varepsilon}$$
 (3.6)

(recuerde $P.6 \mu = a\overline{\mu}$ para $a \ge 1$), ε y β son dos constante positivas k_0 y k_1 son los coeficientes de el polinomio Hurwitz $\lambda^2 + k_1\lambda + k_0$. Note que esta ley de control puede ser expresada como sigue:

$$f_q(t) = -\mu k_{0\varepsilon}(q(t) - R_q) - \mu k_{1\varepsilon} \dot{q}(t) + \frac{\mu}{\varepsilon} \Omega(t) + G(R_q)$$
(3.7)

²En esta ley introducimos el termino G(q), el cual no fúe considerado en [35].

¹Esto permite poder utilizar el manipulador paralelo de seis grados de libertad como una máquina herramienta .

donde $\Omega(t)=\left[\begin{array}{cc}\Omega_x(t)&\Omega_y(t)\end{array}\right]^T$ es solución de la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$\ddot{\Omega}(t) + k_1 \dot{\Omega}(t) + k_0 \Omega(t) = 0. \tag{3.8}$$

Notemos que la ec. (3.8) puede ser escrita en la siguiente forma:

$$\frac{d}{dt} \left[\begin{array}{c} \Omega(t) \\ \dot{\Omega}(t) \end{array} \right] = A_{\Omega} \left[\begin{array}{c} \Omega(t) \\ \dot{\Omega}(t) \end{array} \right], \tag{3.9}$$

donde

$$A_{\Omega} = \begin{bmatrix} 0_2 & I_2 \\ -k_0 I_2 & -k_1 I_2 \end{bmatrix}, \tag{3.10}$$

Puesto que A_{Ω} es una matriz Hurwitz, existe una matriz definida positiva P tal que cumple con la siguiente ecuación de Lyapunov

$$A_{\Omega}^T P + P A_{\Omega} = -I_{4 \times 4} \tag{3.11}$$

donde

$$P = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2k_1} + \frac{2k_0^2 + 2k_1^2}{4k_0k_1}\right) I_2 & \frac{1}{2k_0} I_2 \\ \frac{1}{2k_0} I_2 & \left(\frac{1}{2k_1} + \frac{1}{2k_0k_1}\right) I_2 \end{bmatrix} > 0.$$
 (3.12)

Ahora, como el polinomio $\lambda^2+k_1\lambda+k_0$ es Hurwitz, existe una constante positiva c_0 y α_0 , tal que

$$|\Omega_x(t)| \le c_0 e^{-\alpha_0 t} \quad ; \quad |\Omega_y(t)| \le c_0 e^{-\alpha_0 t}.$$
 (3.13)

En la siguiente sección se da una descripción del sistema en lazo cerrado con la ley de control expresada en variable de estado.

3.4 Sistema en Lazo cerrado

Primero, considere el caso en que el modelo dinámico descrito en la ec. (3.2) es retroalimentado por medio de una ley de control Implícita dada por las ecs.(3.3) a la (3.6), el cual puede ser representado por la siguiente ecuación diferencial:

$$M(q) \ddot{q} + \Phi(q, \dot{q}) \dot{q} + G(q) = -\mu k_{0\varepsilon}(q(t) - R_q) - \mu k_{1\varepsilon} \dot{q}(t) + \frac{\mu \Omega(t)}{\varepsilon} + G(R_q). \tag{3.14}$$

Después procedamos a escribir la ec. anterior, en variables de estado

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \end{bmatrix} = A_{(M,\Phi,e)} \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \end{bmatrix} + B_{\Omega}(t) + D(t), \tag{3.15}$$

 $donde^3$

$$e = q - R_a \quad \dot{e} = \dot{q} \tag{3.16}$$

$$A_{(M,\Phi,\varepsilon)} = \begin{bmatrix} O_2 & I_2 \\ -\mu k_{0\varepsilon} M^{-1}(q) & -\mu M^{-1}(q)(k_{1\varepsilon} I_2 + \Phi(q,q)) \end{bmatrix}$$
(3.17)

$$B_{\Omega}(t) = \mu M^{-1}(q) \frac{\Omega(t)}{\varepsilon} \quad D(t) = -M^{-1}(q)(G(q) - G(R_q)).$$
 (3.18)

Antecedentes:

En esta sección se continúa el trabajo presentado por M. Bonilla y S. Salazar (ver [15] y [2]), en el cual se considera un sistema dinámico descrito por las ecs. (2.9),(2.10) y (2.11) y una ley de control Implícita dada por las ecs.(3.3) a la (3.6). Cabe mencionar que en [15] y [2], para poder garantizar estabilidad en lazo cerrado, se asumió lo siguiente.

H.1 Se supuso que las variables auxiliares $\delta_1(t)$ y $\delta_2(t)$, estaban acotadas por una constante positiva $\widehat{\delta}$ tal que:

$$|\delta_1(t)| \le \widehat{\delta}$$
 $|\delta_2(t)| \le \widehat{\delta}$ $\forall 0 \le t \le \infty$.

Esto significa, que la prueba presentada en [15] no estaba completa, por lo que primeramente se encontrará una cota superior para $\delta_i(t)$ (i=1,2).

A continuación se dará una serie de observaciones relacionadas con la ec. (3.14) bajo la suposición *H.1*.

Observaciones:

O.1 Los vectores variantes en el tiempo $B_{\Omega}(t)$ y D(t), cumplen las siguientes desigualdades:

$$||B_{\Omega}(t)|| \le \frac{\mu c_0 e^{-\alpha t}}{\varepsilon \mu} \quad ; \quad ||D(t)|| \le \frac{K_G}{\mu} ||e|| \tag{3.19}$$

Prueba:

Solamente se probará la segunda desigualdad. Aplicando las propiedades $P.2\,$ y $P.5\,$ a la expresión de $D\,$ (ver ec. (3.18)), se tiene:

$$||D(t)|| = ||M^{-1}(q)(G(q) - G(R_q))|| \le ||M^{-1}(q)|| \, ||G(q) - G(R_q)||.$$

³Tomaremos q = q(t), $\dot{q} = \dot{q}(t)$, $q_0 = [x_0; y_0]^T$ y $\dot{q}_0 = [\dot{x}_0; \dot{y}_0]^T$

O.2) Suponiendo que H.1 se cumple, entonces Φ es uniformemente acotada.

Prueba:

Sustituyendo $|\delta_i(t)| \le \hat{\delta}$ y $0 < r < l_i(t)$ (i = ., 2) en (2.15), tenemos:

$$\left\|\Phi(q,q)\right\| \stackrel{?}{\leq} J \left\| \left[\begin{array}{cc} \frac{2\widehat{\delta}}{r^2} & \frac{2\widehat{\delta}}{r^2} \\ \frac{2\widehat{\delta}}{r^2} & \frac{2\widehat{\delta}}{r^2} \end{array} \right] \right\| \leq \frac{2\sqrt{2}J}{r^2}\widehat{\delta}.$$

O.3) Suponiendo que H.1 se cumple, entonces claramente la ecuación de estado dada por (3.15) puede ser aproximado a un sistema lineal variante en el tiempo con perturbaciones suaves y acotadas (ver las desigualdades de (3.19)).

3.5 Acotamiento de $\delta_i(t)$:

En esta sección se demuestra que las variables auxiliares $\delta_1(t)$ y $\delta_2(t)$ son acotadas cuando el sistema mecánico es retroalimentado por medio una ley de control lineal dada por las ecs. (3.3)-(3.6).

Para esto, se procede de la siguiente forma:

1) En el Lema 1 se muestra que las variables δ_1 y δ_2 , están acotados por una razón de cambio entre la energía cinética total y el desplazamiento. 2) Luego en el Lema 2 se encuentra una cota superior para la energía potencial. 3) Después se encontrara en el Lema 3 una cota superior para la energía cinética. Y finalmente en el Teorema 1 se mostrara que las variables auxiliares $\delta_1(t)$ y $\delta_2(t)$ son uniformemente acotadas. Para mayor detalle consulte el Apéndice al final del capítulo.

Cabe mencionar que los Lemas del 1 al 3 y el Teorema 1, fueron sometidos y aceptados en "American Control Conference 1998" [35].

1) Relación Entre la Energía Cinética y δ_i

En el Lema siguiente se mostrará que $\delta_1(t)$ y $\delta_2(t)$ están relacionadas por medio de la energía cinética.

Lema 1 Podemos garantizar las siguientes desigualdades

$$|\delta_1(t)| \leq \sqrt{rac{Ec(t)}{rac{Mp}{2}l_1(t)}} \quad y \quad |\delta_2(t)| \leq \sqrt{rac{Ec(t)}{rac{Mp}{2}l_2(t)}}.$$

recuerde que
$$l_1(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} \ y \ l_2(t) = \sqrt{(L - x(t))^2 + y^2(t)}$$
.

Note que si la masa M_p y l_i son muy grandes respecto a la energía cinética almacenada por el sistema entonces $\delta_i(t)$ es pequeño.

2) Cotas para la Energía Potencial

El siguiente Lema, nos permite encontrar una cota superior relacionada con el cambio de energía potencial y el trabajo desarrollado por el vector de gravedad. Para esto definimos $W_g(t)$ como el trabajo hecho por el vector de gravedad dado por

$$W_q(t) = \int_0^T G^T(R_q) \dot{q}(t) dt$$

Lema 2

$$\frac{|E_p(t) - E_p(0)|}{l^2(t)} \le \frac{2M_v g}{r} + M_p g \left(\frac{1}{r} + \frac{|y_0|}{r^2}\right)$$
 $i = 1.2$

y

$$\left| \frac{W_0(t)}{l_1^2(t)} \right| \le \hat{G}_0 \quad donde \quad \hat{G}_0 = \frac{k_G}{r} + \frac{k_G ||q_0||}{r^2} \quad i = 1.2$$
 (3.23)

donde la constante k_G esta dada en P.5

Note que el cambio de la energía potencial respecto al desplazamiento y el trabajo hecho por el vector de gravedad respecto al desplazamiento sólo depende de las condiciones iniciales del sistema.

3) Cotas para la Energía Cinética

En está sección se calcula una cota para la energía cinética total desarrollada por el sistema mecánico descrito en la ec. (3.14). Para esto recuerde que la acción del control f_q puede ser expresado mediante una ec. diferencial (ver ecs. (3.7) y (3.8)).

En el siguiente Lema se encuentra una cota superior para la energía cinética.

Lema 3 La energía cinética cumple la siguiente desigualdad

$$E_c(T) \le |E_p(T) - E_p(0)| + |W_q(T)| + \Lambda(\varepsilon)$$

donde $E_p(T)$ y $E_c(T)$ están definidas en las ecs. (2.4) y (2.5) respectivamente, y

$$\Lambda(\varepsilon) = E_c(0) + \frac{\mu k_{0\varepsilon} \|q_0\|^2}{2} + \frac{\mu}{2\varepsilon} \frac{c_0^2}{\alpha_0(1+\varepsilon k_1)}$$

Note que la energía cinética total esta acotada por una constante $\Lambda(\varepsilon)$ la cual depende directamente de las condiciones iniciales de posición y velocidad del sistema, y es inversamente proporcional al parámetro ε . En el siguiente Teorema se garantizará que la razón de energía cinética respecto al desplazamiento es uniformemente acotada para toda $\varepsilon > 0$.

En la siguiente sección se encontrara una cota superior para las variables auxiliares δ_1 y δ_2 .

4: Resultado Principal

En esta sección se muestra que la hipotesis H.1 se satisface. Esto es

$$|\delta_i(t)| \leq \widehat{\delta}.$$

Cuando el modelo dinámico (3.2) es retroalimentado por una ley lineal de control descrita por las ecs. (3.3) - (3.6), (el cual fue reportado en [35]).

Teorema 1 Se pude garantizar las siguientes desigualdades:

$$\max_{0 \le \tau \le T} |\delta_{i}(\tau)| \le \sqrt{2^{\frac{\Lambda(\varepsilon) + g(2M_{v}\tau + M_{p}(\tau + |y_{0}|)) + r^{2}\hat{G}_{0}}{M_{p}r^{2}}} \quad i = 1.2$$
(3.26)

Note que si $\varepsilon > 0$, entonces $\Lambda(\varepsilon)$ es acotado ya que depende de las condiciones iniciales finitas y por lo tanto $|\delta_i(\tau)| < \infty$.

3.6 Conclusiones:

En este capítulo se muestra que las variables auxiliares δ_1 y δ_2 relacionadas con el modelo dinámico descrito en la Figura uno, son uniformemente acotadas, cuando el sistema es retroalimentado bajo la acción de una ley de control lineal. Cabe mencionar que este hecho fue tomado solo como una suposición en [15] y [2].

Por otro lado se ha mostrado que las señales δ_1 y δ_2 están directamente relacionadas con:

- 1) Las energías cinética y potencial inicial del sistema, parte de esta energía total depende de las condiciones iniciales de los actuadores y la carga mecánica externa (posiciones y velocidades iniciales).
 - 2) Las condiciones iniciales de la acción del control (ver las ecs. (3.13) y (3.25)).
- 3) La estructura interna del sistema tales como la longitud del cilindro r y la masa de la carga externa M_p ; esto quiere decir que si M_p y r son de magnitud muy grande entonces la magnitud de las variables auxiliares δ_1 y δ_2 son muy pequeñas.
- 4) La magnitud del parámetro ε , si ε es pequeño, este aumentaría el efecto producido por las condiciones iniciales del sistema en lazo cerrado y la magnitud de la cota superior $\hat{\delta}$ se incrementaría mucho.

El hecho que δ_1 y δ_2 sean acotadas nos permite considerar al sistema en lazo cerrado como un sistema lineal variante en el tiempo con perturbaciones suaves (ver las ecs. (3.15) a ,(3.18), y las observaciones O.1, O.2, O.3).

Note, que entre más pequeña sea la magnitud de $\hat{\delta}$, más podemos considerar al sistema en lazo cerrado como un sistema lineal invariante en el tiempo.

3.7 Apéndice

En este apéndice se mostrarán las desigualdades relacionadas con la sección 3.5.

Prueba del Lema 1:

De la expresión de la energía cinética Ec (ver (2.4)), se tiene

$$K_L(t) = \frac{M_p}{2} \left(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) \right) \le E_c(t)$$

Aplicando la propiedad P.1 en la anterior desigualdad, se obtiene

$$|\delta_1(t)| \leq \sqrt{\frac{Ec(t)}{\frac{M_p}{2}(x^2(t)+y^2(t))}}$$

la cual coincide con la primera desigualdad de (3.21). La segunda desigualdad es probada en la misma forma.

Prueba del Lema 2:

Primero se probará la primera desigualdad para el caso (i = 1). Usando la expresión de energía potencial dada en la ec. (2.5), se tiene:

$$|E_{p}(t) - E_{p}(0)| \leq 2M_{v}gr + M_{p}g|y(t) - y_{0}|,$$

por otro lado

$$\begin{array}{ll} \frac{|y(t)-y_0|}{x^2(t)+y^2(t)} & \leq \frac{|y(t)|}{\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}} + \frac{|y_0|}{x^2(t)+y^2(t)}; \\ & \leq \frac{1}{\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}} + \frac{|y_0|}{x^2(t)+y^2(t)} \leq \frac{1}{r} + \frac{|y_0|}{r^2}. \end{array}$$

Entonces de (3.27) y (3.28) se obtiene (3.22).

Después se probara la segunda desigualdad

$$\frac{W_G(T)}{l_1^2(T)} = \frac{\int_0^T G^T(R_q) \dot{q}(\tau) d\tau}{l_1^2(t)} = \frac{G^T(R_q)(q(t) - q(0))}{\|q(t)\|^2}$$

aplicando la desigualdad de Cauchy a la anterior desigualdad y usando $\|G^T(R_q)\| \le k_G$ (ver P.5 $l_i(t) \le r$, se tiene

$$\left| \frac{W_G(T)}{l_1^2(T)} \right| \le k_G \frac{\|q(T)\| + \|q(0)\|}{\|q(T)\|^2} \le \frac{k_G}{r} + \frac{k_G \|q_0\|}{r^2}.$$

y esto prueba la desigualdad (3.23).

A continuación presentaremos el siguiente Lema el cual será utilizado para poder estimar la cota superior de δ_i .

Lema 4

$$\max_{\substack{f(\tau) \\ \int_0^T f^2(\tau)d\tau \le 1}} \int_0^T f(\tau)g(\tau)d\tau \le \sqrt{\int_0^T g^2(\tau)d\tau}$$
(3.29)

Prueba.

Usando la desigualdad de Schwarz

$$\left| \int_{0}^{T} f(\tau)g(\tau)d\tau \right| \le \sqrt{\int_{0}^{T} f^{2}(\tau)d\tau} \sqrt{\int_{0}^{T} g^{2}(\tau)d\tau} \le \sqrt{\int_{0}^{T} g^{2}(\tau)d\tau}. \tag{3.30}$$

Prueba del Lema 3:

Primero calcularemos el trabajo desarrollado por la acción del control $f_x(t)$ y $f_y(t)$

$$W(T) = \int_0^T f_q^T(t) \ \dot{q} \ (t) dt,$$

donde $f_q(t)$ está definida en la ec. (3.7)

$$W(T) = -\frac{\mu k_{0\varepsilon}}{2} \left(\|q(T)\|^2 - \|q_0\|^2 \right) - \mu k_{1\varepsilon} \int_0^T \left\| \dot{q}(t) \right\|^2 dt + \frac{\mu}{\varepsilon} \int_0^T \dot{q}^T (t) \Omega(t) dt + W_g(T).$$

Después procederemos a aplicar el teorema de conservación de la energía

$$E_p(T) + E_c(T) = W(T) + E_p(0) + E_c(0),$$

sustituyendo W(t) en la ultima igualdad, tenemos lo siguiente

$$E_{p}(T) + E_{c}(T) + \mu k_{1\varepsilon} \int_{0}^{T} \left\| \dot{q}(t) \right\|^{2} dt + \frac{\mu k_{0\varepsilon}}{2} \left\| q(T) \right\|^{2}$$

$$= \frac{\mu k_{0\varepsilon}}{2} \left\| q_{0} \right\|^{2} + E_{c}(0) + E_{p}(0) + \frac{\mu}{\varepsilon} \int_{0}^{T} \left(\Omega_{x}(t) \dot{x}(t) + \Omega_{y}(t) \dot{y}(t) \right) dt + W_{g}(T),$$

aplicando la desigualdad (3.13) en la última ecuación, tenemos

$$E_{c}(T) \leq E_{c}(T) + \mu k_{1\varepsilon} \int_{0}^{T} \left\| \dot{q}(t) \right\|^{2} dt + \frac{\mu k_{0\varepsilon}}{2} \left\| q(T) \right\|^{2} \leq E_{c}(0) + \left| E_{p}(T) - E_{p}(0) \right| + \left| W_{g}(T) \right| + \frac{\mu k_{0\varepsilon} \left\| q_{0} \right\|^{2}}{2} + \frac{c_{0}\mu}{\varepsilon} \int_{0}^{T} \left(|\dot{x}(t)| + |\dot{y}(t)| \right) e^{-\alpha_{0}t} dt$$

$$(3.31)$$

Consideraremos los dos siguientes casos

caso 1

$$\int_{0}^{T} \left(\dot{x}^{2}(t) + \dot{y}^{2}(t) \right) dt \geq \frac{c_{0}}{1 + \epsilon k_{1}} \int_{0}^{T} \left(|\dot{x}(t)| + |\dot{y}(t)| \right) e^{-\alpha_{0} t} dt$$

caso 2:

$$\int_0^T \left(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) \right) dt < \frac{c_0}{1 + \epsilon k_1} \int_0^T \left(|\dot{x}(t)| + |\dot{y}(t)| \right) e^{-\alpha_0 t} dt$$

Caso 1) Claramente se cumple lo siguiente (ver el lado derecho de la desigualdad (3.31

$$E_c(T) \le |E_p(T) - E_p(0)| + |W_q(T)| + E_c(0) + \frac{k_{0\varepsilon} ||q_0||^2}{2}$$

(Caso 2) Mostraremos que las velocidades son uniformemente acotadas. Para esto notemos que si (3.32) se cumple entonces podemos asegurar lo siguiente (recuerde que $(|\dot{x}| + |\dot{y}|)^2 \le 2(|\dot{x}|^2 + |\dot{y}|^2)$):

$$\int_0^T (|\dot{x}(t)| + |\dot{y}(t)|)^2 dt < \frac{2c_0}{1 + \varepsilon k_1} \int_0^T (|\dot{x}(t)| + |\dot{y}(t)|) e^{-\alpha_0 t} dt$$
(3.33)

Ahora, existe una constante K(T) > 0 tal que

$$\int_{0}^{T} (|\dot{x}(t)| + |\dot{y}(t)|)^{2} dt \leq K^{2}(T);
< \frac{2c_{0}}{1+\epsilon k_{1}} \int_{0}^{T} (|\dot{x}(t)| + |\dot{y}(t)|) e^{-\alpha_{0}t} dt,$$
(3.34)

entonces podemos asegurar la siguiente desigualdad:

$$\int_{0}^{T} \left(\frac{|\dot{x}(t)| + |\dot{y}(t)|}{K(T)} \right)^{2} dt \leq 1$$

$$< \frac{2c_{0}}{(1 + \varepsilon k_{1})K(T)} \int_{0}^{T} \left(\frac{|\dot{x}(t)| + |\dot{y}(t)|}{K(T)} \right) e^{-\alpha_{0}t} dt.$$

Aplicando (3.29) al último término de la desigualdad (3.35), tenemos

$$\frac{2c_0}{(1+\varepsilon k_1)K(T)} \int_0^T \left(\frac{|\dot{x}(t)|+|\dot{y}(t)|}{K(t)}\right) e^{-\alpha_0 t} dt < \frac{2c_0}{(1+\varepsilon k_1)K(T)} \sqrt{\int_0^T e^{-2\alpha_0 t} dt};$$

$$\leq \frac{2c_0}{(1+\varepsilon k_1)K(T)} \sqrt{\int_0^\infty e^{-2\alpha_0 t} dt};$$

$$\leq \frac{2c_0}{(1+\varepsilon k_1)K(T)} \frac{1}{\sqrt{2\alpha_0}}.$$
(3.36)

Entonces de (3.35) y (3.36), tenemos

$$K(T) < \frac{2c_0}{\sqrt{2\alpha_0}(1+\varepsilon k_1)} \le \frac{2c_0}{\sqrt{2\alpha_0}} \qquad \forall \quad T \ge 0. \tag{3.37}$$

Una vez obtenida una cota superior para K(T), procederemos a encontrar una cota superior para la energía cinética, para el segundo caso. Para esto aplicaremos la desigualdad de Cauchy-Schwartz al lado

derecho de la expresión de(3.33):

$$\frac{\frac{2c_0}{1+\varepsilon k_1}}{\int_0^T (|\dot{x}(t)| + |\dot{y}(t)|) e^{-\alpha_0 t} dt} \leq \frac{\frac{2c_0 \sqrt{\int_0^T (|\dot{x}(t)| + |\dot{y}(t)|)^2 dt} \sqrt{\int_0^T e^{-2\alpha_0 t} dt}}{1+\varepsilon k_1}}{\varepsilon \frac{2c_0 K(T)}{1+\varepsilon k_1} \sqrt{\int_0^\infty e^{-2\alpha_0 t} dt}}; \qquad (3.38)$$

$$\leq \frac{2}{\alpha_0} \left(\frac{c_0}{1+\varepsilon k_1}\right)^2$$

Sustituyendo la desigualdad (3.38) en la desigualdad de energía (3.31), obtenemos lo siguiente

$$E_c(T) \le |E_p(T) - E_p(0)| + E_c(0) + |W_g(T)| + \frac{\mu k_{0\varepsilon} ||q_0||^2}{2} + \frac{2\mu}{\varepsilon} \frac{c_0^2}{\alpha_0(1+\varepsilon k_1)}$$

Prueba del Teorema 1:

Del Lema 1 para i=1 tenemos : $\max_{0 \le \tau \le T} |\delta_1(\tau)| \le \max_{0 \le \tau \le T} \sqrt{\frac{E_c(\tau)}{l_1^2(t)}}$, sustituyendo las desigualdades (3.24), (3.22) y (3.22) en la desigualdad de arriba y usando el hecho $r \le l_1(t)$, tenemos

$$\begin{split} \max_{0 \leq \tau \leq T} \sqrt{\frac{E_{c}(\tau)}{l_{1}^{2}(t)}} \leq & & \max \sqrt{\frac{\Lambda(q_{0},\dot{q}_{0}) + |E_{p}(\tau) - E_{p}(0)| + |W_{g}(\tau)|}{x(\tau)^{2} + y(\tau)^{2}}} \\ & \leq \sqrt{\max_{0 \leq \tau \leq T} \frac{\Lambda(q_{0},\dot{q}_{0})}{x^{2}(\tau) + y^{2}(\tau)} + \max_{0 \leq t \leq T} \frac{|E_{p}(\tau) - E_{p}(0)| + |W_{g}(\tau)|}{x^{2}(\tau) + y^{2}(\tau)}} \\ & \leq \sqrt{\frac{1}{r^{2}}\Lambda(q_{0},\dot{q}_{0}) + \frac{2M_{v}g}{r} + M_{p}g(\frac{1}{r} + \frac{|y_{0}|}{r^{2}}) + \widehat{G}_{0}}} \\ & = \frac{1}{r}\sqrt{\Lambda(q_{0},\dot{q}_{0}) + g\left(2M_{v}r + M_{p}(r + |y_{0}|) + r^{2}\widehat{G}_{0}\right)} \end{split}$$

 $\delta_2(t)$ es probado en la misma forma.

the Addition and Additional and Addition to

Company of the second

Capítulo 4:

Estabilidad Asintótica y Exponencial

4.1 Introducción:

Un problema básico en el control de cualquier manipulador o cadena cinemática es hacer que el manipulador siga una trayectoria preestablecida. Pero antes de que el manipulador pueda hacer cualquier trabajo, es necesario poder garantizar regulación en la posición y en la velocidad de cada elemento del manipulador.

En este capítulo se estudia la estabilidad del modelo matemático del MP2 (ver ec. (3.2)) cuando se retroalimenta bajo la acción de una ley de control lineal dada por las ecs. (3.3)-(3.6), dicha ley de control puede ser considerada como una variación del par calculado (ver [23] y [26]). Cabe mencionar que este problema ha sido estudiado anteriormente por M. Bonilla y S. Salazar en [15]. La diferencia entre el presente trabajo y [15], radica principalmente en:

- 1) La presente ley de control fue representada en variables de estado (ver ecs. (3.3)-(3.6)), pero para poder hacer un análisis de estabilidad en lazo cerrado, ésta se expresó en forma equivalente por medio de la ecuación (3.7) con el objeto de tomar en cuenta la propiedad de pasividad de los sistemas Euler-Lagrange (ver el trabajo de Lebret y Lewis [22]).
- 2) En el presente trabajo se tomaron en cuenta las propiedades mecánicas del modelo compacto dado por la ecuación (3.2) tal como la propiedad mecánica P.4 (matriz antisimétrica) para probar estabilidad asintótica y exponencial.

El presente capítulo está organizado de la siguiente forma

En la sección dos, se encuentran condiciones suficientes para poder garantizar estabilidad asintótica de la ecuación en lazo cerrado, para esto se propone la función de energía como una función de Lyapunov y se usa la propiedad P.4 (matriz antisimétrica) para poder estimar una cota superior a la pérdida

de energía respecto al tiempo, ver la desigualdad (4.17). Finalmente se concluye que el sistema en lazo cerrado es asintoticamente estable si las ganancia $\mu k_{0\varepsilon} > \max\{K_G, 1\}$ y $k_{1\varepsilon} > 0$, para mayor detalles consultar la prueba al final del capítulo. En la sección tres, se procede a imponer más condiciones sobre los parámetros $k_{0\varepsilon}$, $k_{1\varepsilon}$ y ε para poder garantizar estabilidad exponencial, para esto primero se asegura que el sistema sea asintóticamente estable i.e $\mu k_{0\varepsilon} > \max\{K_G, 1\}$, luego para cierta condición inicial se procede a encontrar una ε tal que las constantes definidas en la ec.(4.5) sean positivas. En la sección cuatro se presenta un ejemplo en el que se estiman los parámetros de control. En las sección cinco se presentan las conclusiones de este capítulo. Y por último en el Apéndice se dan las pruebas principales de los Teorema y Lemas enunciados en este capítulo.

4.2 Estabilidad Asintótica

Considere la ecuación de sistema en lazo cerrado dada por la ec. (3.14) escribiéndola nuevamente, tenemos ¹

$$M(q) \ddot{q} + \Phi(q, \dot{q}) \dot{q} + G(q) = \frac{\mu}{\epsilon} \Omega + G(R_q) - \mu k_{0\epsilon} (q - R_q) - \mu k_{1\epsilon} \dot{q}, \tag{4.1}$$

donde Ω es solución de la ecuación diferencial dada en (3.8). Sea e y \dot{e} los errores de posición y velocidad dados respectivamente por:

$$e = q - R_q$$
, $\dot{e} = \dot{q}$

y sea ϖ el estado dado por

$$\boldsymbol{\varpi} = \left[\begin{array}{ccc} \boldsymbol{e}^T & \dot{\boldsymbol{e}}^T & \boldsymbol{\Omega}^T & \dot{\boldsymbol{\Omega}}^T \end{array} \right]^T$$

Observaciones:

En la ley de control (ley propuesta en las ecs. (3.3) a (3.6)) se asumió que se dispone de información sobre el vector de gravedad G, pero cuando no se disponga suficiente información sobre el vector de gravedad G este puede ser compensado añadiendo un término integral a la ley de control lineal. De hecho el término integral se tomará en cuenta en los próximos trabajos.

El siguiente teorema nos da condiciones sobre los parámetros k_0, k_1 , β y ε para poder garantizar estabilidad asintótica del sistema en lazo cerrado.

Teorema 2 El sistema en lazo cerrado dado por la ec. '4.1) es asintóticamente estable (AS) si

$$\frac{1}{\varepsilon} > \frac{1}{\varepsilon^*} = \max\left\{\frac{K_G - \mu k_0}{\beta \mu}, \frac{1 - \mu k_0}{\beta \mu}\right\} \tag{4.2}$$

Tomemos q = q(t) $\dot{q} = \dot{q}(t)$ y $\Omega = \Omega(t)$

Para mayor detalle de este Teorema consultar la prueba del apéndice al final de este capítulo o ver

Consideraciones del Teorema anterior: La estabilidad asintótica del sistema en lazo cerrado está relacionada con la estructura interna del manipulador, es decir depende directamente de la constante Lypschitz de gravedad K_G y la norma de $||M^{-1}||$.

El siguiente resultado es una consecuencia del Teorema anterior.

Corolario 1 Bajo las mismas condiciones del Teorema 2, para cualquier condición inicial ϖ_0 tenemos

$$\|q - R_q\| < \rho_2(\varpi_0)$$
 $\rho_2(\varpi_0) = \max \left\{ \sqrt{\rho_0(\varpi_0) + \frac{\rho_1(\varpi_0)}{K_G}}, \right\}$

donde

$$\rho_1(\varpi_0) = 2(\beta_0 + V_1(\varpi_0) + V_3(\varpi_0) + V_G(\varpi_0)); \quad \rho_0(\varpi_0) = \|q_0 - R_q\|^2$$

 V_1, V_3 y V_G son funciones de energía definidas en (4.9). Para mayor detalle de este Corolario consultar la prueba del apéndice al final de este capítulo o ver [36].

Note que bajo la ley de control lineal propuesta por las ecs.(3.3) a (3.6) siempre podemos estimar el error de posición. Esto es importante por dos razones; Primero podemos garantizar estabilidad exponencial respecto al punto de equilibrio. Para mayor detalle revisar la prueba del Teorema 3 y el Lema 8.

Segundo podemos evitar el problema de saturación respecto a la posición, ya que por ejemplo: l_1 está restringido geométricamente por: $0 < r \le l_1 = \sqrt{x^2 + y^2} \le 2r$, por lo que se pueden escoger los parámetros k_0, k_1, ε y β , tal que $\rho_2(\varpi_0) \le 2r$.

4.3 Estabilidad Exponencial

En esta sección mostraremos que el sistema en lazo cerrado (4.1) bajo ciertas condiciones podemos garantizar estabilidad exponencial, para esto necesitamos imponer más condiciones a las ganancias $k_{0\varepsilon}$ y $k_{1\varepsilon}$. El desarrollo de esta prueba está basado bajo la hipótesis de que el sistema sea asintóticamente estable $i.e \ \mu k_{0\varepsilon} > \max\{K_G, 1\}$ (ver Teorema anterior).

Para mayor detalle consultar (4.2) y la prueba del Teorema 2.

Teorema 3 El punto de equilibrio ϖ_e de (4.1) es $\mathcal{E}AS$ si las siguientes constantes son positivas.

$$\Theta_{0}(\varepsilon, \gamma_{0}) = -\frac{K_{G}}{2} + \eta \left(\mu k_{0\varepsilon} - \frac{1}{2\gamma_{0}} - \frac{\mu}{2\varepsilon\gamma_{0}} - \frac{\mu k_{1\varepsilon}}{2\gamma_{0}} - \frac{\gamma_{0}K_{G}^{2}}{2} \right)
\Theta_{1}(\varepsilon, \gamma_{0}) = \mu k_{1\varepsilon} - \frac{\mu}{2\varepsilon} - \frac{1}{2} - \eta \left(\bar{\mu} + \frac{\mu k_{1\varepsilon}}{2\gamma_{0}} + K_{x}\rho_{2}\left(\varpi_{0}\right) \right);
\Theta_{2}(\gamma_{0}) = 1 - \eta\gamma_{0}.$$
(4.5)

donde $\gamma_0 > 0$, $\mu k_{0\varepsilon} > \max\{K_G, 1\}$, $K_x = K_{\partial M} + K_{\Phi}$, ρ_2 está definida en (4.3) y $0 < \eta < \inf(\underline{\mu}/\overline{\mu}, \mu k_{0\varepsilon}/\overline{\mu})$. Para mayor detalle de este Teorema consultar la prueba del apéndice al final de este capítulo o ver [36].

Consideraciones del Teorema 3:

- 1) Si la condición inicial ϖ_0 satisface $\|\varpi_0\| < \infty$ entonces, necesariamente $\rho_2(\varpi_0) < \infty$ ver el Corolario 1. Ahora como las constantes mecánicas K_G , K_M y K_x son finitas, entonces para cualquier η , $\gamma_0 > 0$ podemos encontrar las ganancias $k_{0\varepsilon}$ y $k_{1\varepsilon}$ tales que $\Theta_0(\varepsilon,\gamma_0)$, $\Theta_1(\varepsilon,\gamma_0)$ y $\Theta_2(\gamma_0)$ sean estrictamente positivas. Es decir para cualquier condición inicial ϖ_0 y cualquier conjunto de parámetros del control k_0 , k_1 y β siempre podemos encontrar $\varepsilon^* > 0$ tal que el sistema (4.1) converge exponencialmente al punto de equilibrio ϖ_e .
- 2) Entre más cerca esté la condición inicial ϖ_0 del punto de equilibrio ϖ_e de la ecuación (4.1), más podemos garantizar la convergencia exponencial al punto de equilibrio ϖ_e . Ya que si $\|\varpi_0 \varpi_e\|$ es pequeño entonces necesariamente $\rho_2(\varpi_0)$ es pequeño ver las ecs. (4.3) y (4.4).

4.4 Ejemplo

En esta sección daremos un ejemplo ilustrativo en cual se muestra como escoger las variables positivas Θ_0 , Θ_1 y Θ_2 definidas en el Teorema 8. Considere los siguientes valores del sistema en lazo cerrado (4.1) (recuerde las ecs. del modelo (2.12) a (2.16)):

$$M_p = 1Kg$$
. $M_v = 1Kg$. $r = 1m$. $L = 1m$. $J = 1$ $k_0 = 1$ $k_1 = 1$ $a = 7/6$

supongamos que $\rho_2(\varpi_0) = 20$ para alguna condición inicial ϖ_0 .

1) Calculemos las siguientes constantes ver propiedades P.2-P.6 y los Lemas 10,11 y 12:

$$\underline{\mu} = M_p = 1,$$
 $\overline{\mu} = 2M_p + \frac{4J}{r^2} = 6,$ $K_G = \frac{6M_v g}{r} = 58.8,$ $K_g = M_p g + 2M_v g = 22,$ $K_{\partial M} = \frac{8J}{r^3} = 8,$ $K_{\Phi} = \frac{2\sqrt{2}J}{r^2} = 2\sqrt{2},$ $K_x = K_{\partial M} + K_{\Phi} = 11.4,$ $\mu = a\overline{\mu} = 7.$

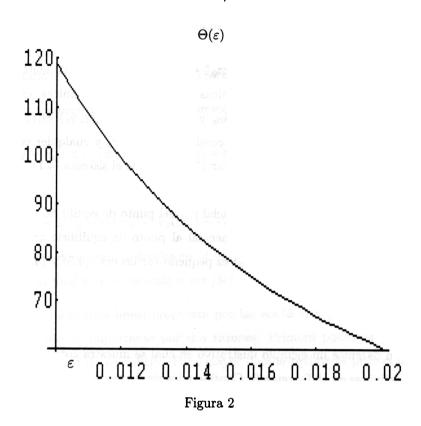
2) Ahora procederemos a encontrar condiciones sobre el parámetro ε .

Estabilidad asintótica: Aplicando el Teorema 2 tenemos:

$$\frac{1}{\epsilon^*} = \frac{51.2}{7} = \max\left\{\frac{K_G - \mu k_0}{\mu}, \frac{1 - \mu k_0}{\mu}\right\}$$

Estabilidad exponencial: Aplicando el Teorema 3.

Primer Paso: Se fija η ,para esto debemos garantizar que $\eta < \inf\left(\underline{\mu}/\overline{\mu}, \mu k_{0\varepsilon}/\overline{\mu}\right)$, por lo que graficaremos la siguiente variable auxiliar² $\Theta(\varepsilon) = \frac{\mu k_{0\varepsilon}}{\overline{\mu}} - \frac{\underline{\mu}}{\overline{\mu}} > 0$



De la Figura 2 se puede tomar $\eta = \underline{\mu} = 1/6 \;\; \forall \;\; \varepsilon \in [0.01; 0.02].$

Segundo Paso: De la definición de Θ_2 , se tiene que $\Theta_2(\gamma_0)=\gamma_0/6-1<0$ la cual se puede garantizar si $6\geq\gamma_0$.

Tercer Paso: se escoge η y ε tal que Θ_0 y Θ_1 sean positivas, para esto se procede a obtener la

²Todas las gráficas fueron obtenidas en el programa de Matemática.

respectiva gráfica de Θ_0 y Θ_1

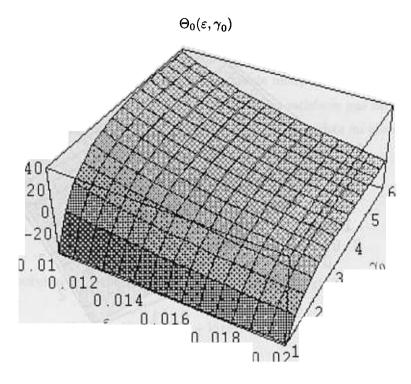


Figura 3

En la Figura 3 se muestra la gráfica de la superficie $\Theta_0(\varepsilon, \gamma_0)$ (ver (4.5)) para valores de ε en el intervalo [0.01; 0.16] y para valores de γ_0 en el intervalo [1; 6], de esta gráfica se observa que los puntos de la superficie $\Theta_0(\varepsilon, \gamma_0)$ son positivos para valores de γ_0 mayores a 2.5 y para valores de ε en el intervalo

[0.01; 0.016]

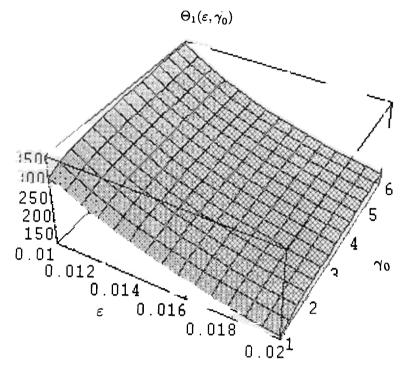


Figura 4

En la Figura 4 se muestra la gráfica de la superficie $\Theta_1(\varepsilon, \gamma_0)$ ((ver (4.5)) para valores de ε en el intervalo [0.01; 0.02.] y para valores de γ_0 en el intervalo [1; 6], de esta grafica se observa que $\Theta_1(\varepsilon, \gamma_0) > 0$ para todos los valores anteriores de ε y γ_0 .

Observaciones: De las Figuras 2,3 y 4 se observa que el sistema es exponencialmente estable para los siguientes valores: $\rho_2(\varpi_0) \le 20, \varepsilon \in [0.01; 0.016], \ \gamma_0 \in [2.5; 6]$ y $\eta = 1/6$.

4.5 Conclusiones

En este capítulo se probó que la ley de control lineal en lazo cerrado con el modelo matemático del manipulador (ver la ecuación (4.1)), es estable asintóticamente si cumple la siguiente condición: $\mu k_{0\varepsilon} > \max\{K_G,1\}$, el parámetro ε determina la estabilidad del sistema en lazo cerrado (ver la desigualdad (4.2) del Teorema 2). Notemos que el Teorema 2 establece que el sistema en lazo cerrado es \mathcal{AS} cuando el parámetro ε relacionado con la ley de control (3.3) a (3.6) se escoge menor que una cota especifica ε^* tal que $0<\varepsilon<\varepsilon^*$. Esto es importante ya que nos permite escoger los parámetros del control β,ε,k_0 y k_1 tal que no se saturen los actuadores.

En el Teorema 3, se establece que dada cualquier condición inicial y su respectiva vecindad de estabilidad $\rho_2(\varpi_0)$ (función de almacenamiento de energía) existe una $\varepsilon > 0$ tal que podemos garantizar

la \mathcal{EAS} . La \mathcal{EAS} nos lleva a imponer mas condiciones sobre los parámetro del control tales como ε , β , k_0 y k_1 , a cambio de lograr una mayor rapidez de convergencia en el error de posición y de velocidad, además nos permite garantizar mayor tolerancia a las incertidumbres parámetricas (relacionadas con la precisión en las magnitudes físicas de los elementos mecánicos) y a las incertidumbres dinámicas (relacionadas con las dinámicas no modeladas del MP2). Otra forma de interpretar el Teorema 3 es la siguiente, supongamos que para los parametros fijos k_0, k_1, β y ε podemos satisfacer que las constntes Θ_0 , Θ_1 Θ_2 (ver ec. 4.5) sean positivas para algún $\rho_2^*(\varpi_0)$ entonces significa que existe un instante de tiempo t^* tal que $||q(t) - R_q|| \le c_0 e^{-\alpha(t-t^*)}$ para todo tiempo $t \ge t^*$ y c_0 , $\alpha > 0$.

4.6 Apéndice

Pruebas de la Sección 2

Prueba del Teorema 2: Considere la siguiente función de energía

$$V_A(\varpi) = V_G(\varpi) + \beta_0 + V_1(\varpi) + V_2(\varpi) + V_3(\varpi) , \qquad (4.6)$$

donde V_G es la energía potencial gravitacional. dada por,

$$V_G(q) = E_p(q) - E_p(R_q) - G^T(R_q)(q - q(0)), \tag{4.7}$$

la cual cumple con la siguiente propiedad (ver el Lema 6)

$$-\beta_0 - \frac{\|q - R_q\|^2}{2} \le V_G(q) \quad ; \ \beta_0 = 2M_v gr + K_g \|R_q - q(0)\| + \frac{(M_p g + K_g)^2}{2}$$
 (4.8)

y

$$V_{1}(\varpi) = \frac{\dot{q}^{T} M(q) \dot{q}}{2} \qquad V_{2}(\varpi) = \frac{\mu k_{0\varepsilon} (q - R_{q})^{T} (q - R_{q})}{2}$$

$$V_{3}(\varpi) = \frac{\mu}{2\varepsilon} \begin{bmatrix} \Omega^{T} & \dot{\Omega}^{T} \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} \Omega^{T} \\ \dot{\Omega}^{T} \end{bmatrix}, \tag{4.9}$$

recuerde que P esta dada en la ec. (3.12).

Note que si $\mu k_{0\varepsilon} > 1$ entonces $V_A(\varpi) \ge 0$. En efecto de (4.8) y las positividades de M y P, tenemos

$$V_{A}(\varpi) \geq -\frac{(q - R_{q})^{T}(q - R_{q})}{2} + \frac{\dot{q}^{T} M(q) \dot{q}}{2} + \frac{\mu k_{0\varepsilon}(q - R_{q})^{T}(q - R_{q})}{2} + \frac{\mu}{2\varepsilon} \left[\Omega^{T} \dot{\Omega}^{T} \right] P \begin{bmatrix} \Omega^{T} \\ \dot{\Omega}^{T} \end{bmatrix} \geq$$

$$\frac{\mu \|\dot{q}\|^{2}}{2} + \frac{(\mu k_{0\varepsilon} - 1)\|q - R_{q}\|^{2}}{2} + \frac{\mu}{\varepsilon} \lambda_{m} \{P\} (\|\Omega\|^{2} + \|\dot{\Omega}\|^{2}) > 0.$$
(4.10)

Después calculamos la derivada de V_A , con i = 0, 2, 3, G:

Primer término:

$$\dot{V}_{1}(\varpi) = \dot{q}^{T} M(q) \ddot{q} + \frac{\dot{q}^{T} \dot{M}(q) \dot{q}}{2}$$
 (4.11)

de (4.1), tenemos:

$$M(q) \ddot{q} = \frac{\mu\Omega}{\varepsilon} - \mu k_{0\varepsilon} (q - R_q) - \mu k_{1\varepsilon} \dot{q} - \Phi(q, \dot{q}) \dot{q} - G(q) + G(R_q)$$

$$\tag{4.12}$$

sustituyendo (4.12) dentro de (4.11) y tomando en cuenta la propiedad P.4, tenemos:

$$\dot{V}_1(\varpi) = -\mu k_{0\varepsilon} \dot{q}^T (q - R_q) - \mu k_{1\varepsilon} \dot{q}^T \dot{q} - \dot{q}^T (G(q) - G(R_q)) + \frac{\mu}{\varepsilon} \dot{q}^T \Omega. \tag{4.13}$$

Segundo y tercer término: Usando (3.9) a (3.12) en V_3 tenemos

$$\dot{V}_{2}\left(\varpi\right) = \mu k_{0\varepsilon} \dot{q}^{1} \left(q - R_{q}\right) \qquad \frac{d}{dt} V_{3}(\varpi) = \frac{-\mu}{\varepsilon} (\|\Omega\|^{2} + \|\Omega\|^{2})$$

$$4.14)$$

Cuarto término:

Usando el siguiente hecho $\int_0^T G^T(q(t)) \dot{q}(t) dt = E_p(T) - E_p(0)$ (ver [26]), tenemos que

$$\dot{V}_G(\varpi) = \dot{q}^T (G(q) - G(R_q)) \tag{4.15}$$

Ahora se sustituye (4.13), (4.14) y (4.15) en $V_A(\varpi)$

$$\dot{V}_{A}(\varpi) = -\mu k_{1\varepsilon} \left\| \dot{q} \right\|^{2} + \frac{\mu}{\varepsilon} \dot{q}^{T} \Omega - \frac{\mu}{\varepsilon} (\|\Omega\|^{2} + \|\dot{\Omega}\|^{2})$$

$$(4.16)$$

tomando en cuenta que

$$\left|\dot{\boldsymbol{q}}^{T} \boldsymbol{\Omega}\right| \leq \left\|\dot{\boldsymbol{q}}^{T} \ \|\boldsymbol{\Omega}\| \leq \frac{\left\|\dot{\boldsymbol{q}}\right\|^{2} + \|\boldsymbol{\Omega}\|^{2}}{2}$$

finalmente podemos escribir (4.16) como

$$\dot{V}_{A}\left(\varpi\right) \leq -\left(\mu k_{1\varepsilon} - \frac{\mu}{2\varepsilon}\right) \left\|\dot{q}\right\|^{2} - \frac{\mu \|\Omega\|^{2}}{2\varepsilon} - \frac{\mu}{\varepsilon} \left\|\dot{\Omega}\right\|^{2} \tag{4.17}$$

De la definición de $k_{1\varepsilon}$ ver (3.6) tenemos que $k_{1\varepsilon} > \frac{1}{2\varepsilon}$ y V_A (ϖ) ≤ 0 ; V_A es definida positiva y V_A es solamente semidefinida negativa, por lo que sólo hemos probado estabilidad en el sentido de Lyapunov, esto es, que el error de posición y velocidad están acotados.

La \mathcal{AS} del punto de equilibrio $\varpi_e = (q^T = R_q^T, q = 0, \Omega^T = 0, \Omega^T = 0)$ se sigue del Teorema de LaSalles. Así de (4.6) note que $V_A(\varpi)$ es radialmente no acotado, definamos el siguiente conjunto

máximo invariante:

$$S = \left\{\varpi \in R^8 \left| V_A\left(\varpi\right) = 0 \right.\right\} = \left\{\varpi \in R^8 \left|\varpi = \left[\begin{array}{ccc} c^T & 0 & 0 & 0 \end{array}\right.\right] & and & \frac{dc}{dt} = 0 \right\},$$

tomemos cualquier trayectoria $\varpi(t)$ que pertenece a S. Entonces de (4.1) tenemos

$$\mu k_{0\varepsilon} \| (c - R_a) \| = \| G(c) - G(R_a) \| \le K_G \| (c - R_a) \|.$$

Ahora, si $\mu k_{0\varepsilon} > K_G$ entonces tenemos que $c = R_q$. Por lo tanto la única solución que puede permanecer en S para toda t es el punto de equilibrio. Así el sistema en lazo cerrado es \mathcal{AS} .

Prueba de la desigualdad 4.8:

Para probar esta desigualdad antes necesitamos establecer los dos siguientes Lemas:

Los siguientes Lemas nos da condiciones suficientes para poder garantizar la positividad de la función de Lyapunov ver ecs. (4.6) y (4.8), la cual se estableció para poder probar estabilidad asintótica y exponencial del sistema en lazo cerrado.

Lema 5 : Podemos garantizar la siguiente desigualdad :

$$|E_p(q_1) - E_p(q_2)| \le 2M_v gr + M_p g \|q_1 - q_2\|$$
 (4.18)

Lema 6 Considere la función V_G definida en (4.7). Entonces ésta cumple lo siguiente:

$$V_G(q) \ge -\beta_0 - \frac{\|q - R_q\|^2}{2}$$
; donde; $\beta_0 = 2M_v g r + K_g \|R_q - q(0)\| + \frac{(M_p g + K_g)^2}{2}$.

Prueba del Lema5:

Sea $q_i = (x_i, y_i)$ (, i = 1, 2). Tomando en cuenta que

$$\left| \frac{y_i}{(x_i^2 + y_i^2)^{\frac{1}{2}}} \right| \le 1 \quad \left| \frac{y_i}{((L - x_i)^2 + y_i^2)^{\frac{1}{2}}} \right| \le 1; \ i = 1, 2$$
(4.19)

de (2.5), tenemos

$$|E_p(q_1) - E_p(q_2)| \le M_p g |y_1 - y_2| + 2M_v gr$$

 $\le M_p g ||q_1 - q_2|| + 2M_v gr$

y esta desigualdad coincide con (4.18).

Prueba del Lema 6:

Usando (4.18) y P.5 podemos garantizar que V_G cumple lo siguiente

$$-2M_v gr - M_p g \|q(t) - R_q\| - K_g \|q(t) - q(0)\| \le V_G(q(t)).$$

Tomando en cuenta que $||q(t) - q(0)|| \ge ||q(t) - R_q|| + ||R_q - q(0)||$, entonces (4.20) puede ser escrita como

$$-2M_vgr - K_g \|R_q - q(0)\| - (M_pg + K_g) \|q(t) - R_q\| \le V_G(t).$$

Usando

$$-\frac{(M_p g + K_g)^2 + \|q(t) - R_q\|^2}{2} \le -(M_p g + K_g) \|q(t) - R_g\|$$

en (4.21) obtenemos la desigualdad (4.8).

Prueba del Corolario 1:

Puesto que el sistema (4.1) es AS tenemos de (4.10) y (4.17) que:

$$\frac{\mu k_{0\epsilon}}{2} \|q - R_q\|^2 \le V_A(\varpi) < V_A(\varpi_0),$$

entonces

$$\|q - R_q\|^2 < \frac{2V_A(\varpi_0)}{\mu k_{0\varepsilon}} \le \|q_0 - R_q\|^2 + 2\frac{\beta_0 + V_1(\varpi_0) + V_3(\varpi_0) + V_G(\varpi_0)}{k_{0\varepsilon}}$$

puesto que $\mu k_{0\varepsilon} > K_G$, obtenemos (4.3) y (4.4)

Pruebas de la Sección 3:

Prueba del Teorema 3: Este Teorema se prueba en cuatro pasos. En el primer paso se propone una función de Lyapunov, la cual esta compuesta de una función de energía V_s más un término cruzado V_q el cual relaciona q con q. En el segundo y el tercer paso, se encuentra una cota superior para la derivada de la energía V_s y la derivada del término V_q . En el cuarto paso se encuentran condiciones para poder garantizar \mathcal{EAS} .

Primer Paso: Consideremos la siguiente función para $\eta > 0$:

$$V_E(\varpi) = V_s(\varpi) + \eta V_q(\varpi),$$

donde

$$V_s(\varpi) = V_1(\varpi) + V_2(\varpi) + V_3(\varpi), \qquad V_q(\varpi) = (q - R_q)^T M(q) \ \dot{q},$$

 $V_1, V_2, y V_3$ han sido definidas en (4.9).

En el Lema 7 se prueba (ver desigualdades relacionadas con \mathcal{EAS} que si $\eta < \inf\left(\underline{\mu}/\overline{\mu}, \mu k_{0\varepsilon}/\overline{\mu}\right)$

entonces

$$0 \le \eta \|\varpi\|^2 \le V_E(\varpi) \le \bar{\eta} \|\varpi\|^2, \tag{4.24}$$

donde

$$\underline{\eta} = \min \left\{ \frac{\mu k_{0\varepsilon} - \eta \overline{\mu}}{2}, \frac{\underline{\mu} - \eta}{2}, \frac{\mu \lambda_m \{P\}}{\varepsilon} \right\} ; \quad \overline{\eta} = \max \left\{ \frac{\mu k_{0\varepsilon} + \eta \underline{\mu}}{2}, \frac{\overline{\mu} + \eta}{2}, \frac{\mu \lambda_M \{P\}}{\varepsilon} \right\}.$$
(4.25)

Esto quiere decir que V_E es una función de Lyapunov

Segundo paso: Procederemos a calcular una cota superior para la derivada $V_E(\varpi)$. Para esto primero calculamos $V_q(\varpi)$:

$$\dot{V}_{q}(\varpi) = \dot{q}^{T} M(q) \dot{q} + (q - R_{q})^{T} \dot{M}(q) \dot{q} + (q - R_{q})^{T} M(q) \ddot{q}, \tag{4.26}$$

de (4.1) podemos reescribir la ultima ecuación, como sigue:

$$\dot{V}_{a}\left(\varpi\right) = \dot{V}_{a,1}\left(\varpi\right) + \dot{V}_{a,2}\left(\varpi\right) + \dot{V}_{a,3}\left(\varpi\right),\tag{4.27}$$

donde

$$\dot{V}_{q,1} (\varpi) = \dot{q}^{T} M(q) \dot{q} - \mu k_{0\varepsilon} \| q - R_{q} \|^{2};$$

$$\dot{V}_{q,2} (\varpi) = (q - R_{q})^{T} \dot{M} (q) \dot{q} - (q - R_{q})^{T} \Phi(q, \dot{q}) \dot{q};$$

$$\dot{V}_{q,3} (\varpi) = (q - R_{q})^{T} (-G(q) + G(R_{q})) + \frac{\mu (q - R_{q})^{T} \Omega}{\varepsilon} - \mu k_{1\varepsilon} (q - R_{q})^{T} \dot{q}.$$
(4.28)

Después encontraremos una cota superior para cada uno de los elementos $\dot{V}_{q,i}, i=1,2,3$. Note que $\dot{V}_{q,1},$ cumple lo siguiente

$$\dot{V}_{q,1}(\varpi) \le \bar{\mu} \|\dot{q}\|^2 - \mu k_{0\varepsilon} \|q - R_q\|^2.$$
 (4.29)

En el Lema 8 se prueba (ver desigualdades relacionadas con \mathcal{EAS})

$$V_{q,2}(\varpi) \le K_x \|q - R_q\| \|\dot{q}\|^2$$
 (4.30)

donde $K_x = K_{\partial M} + K_{\Phi}$. Finalmente, en Lema 9 se prueba (ver desigualdades relacionadas con \mathcal{EAS})

$$\dot{V}_{q,3}(\varpi) \le \|q - R_q\|^2 \left(\frac{1}{2\gamma_0} + \frac{\mu}{2\varepsilon\gamma_0} + \frac{\mu k_{1\varepsilon}}{2\gamma_0} + \frac{\gamma_0 K_G^2}{2}\right) + \frac{\mu \gamma_0 k_{1\varepsilon}}{2} \left\|\dot{q}\right\|^2 + \frac{\mu \gamma_0}{2\varepsilon} \left\|\Omega\right\|^2, \tag{4.31}$$

donde $\gamma_0>0$. Sumando las desigualdades (4.29),(4.30) y (4.31), llegamos a la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned} V_{q}\left(\varpi\right) &\leq \left(-\mu k_{0\varepsilon} + \frac{1}{2\gamma_{0}} + \frac{\mu}{2\varepsilon\gamma_{0}} + \frac{\mu k_{1\varepsilon}}{2\gamma_{0}} + \frac{\gamma_{0}K_{G}^{2}}{2}\right) \left\|q - R_{q}\right\|^{2}, \\ &+ \left(\bar{\mu} + \frac{\mu\gamma_{0}k_{1\varepsilon}}{2}\right) \left\|\dot{q}\right\|^{2} + \frac{\mu\gamma_{0}}{2\varepsilon} \left\|\Omega\right\|^{2} + K_{x} \left\|q - R_{q}\right\| \left\|\dot{q}\right\|^{2}. \end{aligned}$$

Tomando en cuenta (4.3) (ver el Corolario 1), reescribimos la última desigualdad como sigue:

$$\dot{V}_{q}\left(\varpi\right) \leq \left(-\mu k_{0\varepsilon} + \frac{1}{2\gamma_{0}} + \frac{\mu}{2\varepsilon\gamma_{0}} + \frac{\mu k_{1\varepsilon}}{2\gamma_{0}} + \frac{\gamma_{0}K_{G}^{2}}{2}\right) \|q - R_{q}\|^{2} + \left(\bar{\mu} + \frac{\mu k_{1\varepsilon}}{2\gamma_{0}} + K_{x}\rho_{2}(\varpi_{0})\right) \|\dot{q}\|^{2} + \frac{\mu\gamma_{0}}{2\varepsilon} \|\Omega\|^{2};$$

$$(4.32)$$

Así hemos encontrado una cota superior para \dot{V}_q .

Tercer paso: Calculemos una cota superior para la derivada de V_s . Recordando (4.13) y (4.14), tenemos

$$V_s(\varpi) = -\mu k_{1\varepsilon} \left\| \dot{q} \right\|^2 - \dot{q}^T \left(G(q) - G(R_q) \right) + \frac{\mu}{\varepsilon} q^T \Omega - \frac{\mu(\|\Omega\|^2 + \|\dot{\Omega}\|^2)}{\varepsilon}$$

Tomando en cuenta en la última ecuación la siguiente desigualdad $2ab \le a^2 + b^2$ y la propiedad P.5, tenemos

$$\dot{V}_{s}\left(\varpi\right) \leq -\mu k_{1\varepsilon} \left\|\dot{q}\right\|^{2} + \frac{\|\dot{q}\|^{2} + K_{G}\|q - R_{q}\|^{2}}{2} + \frac{\mu(\|\dot{q}\|^{2} + \|\Omega\|^{2})}{2\varepsilon} - \frac{\mu(\|\Omega\|^{2} + \|\dot{\Omega}\|^{2})}{\varepsilon},$$

y entonces

$$\dot{V}_s\left(\varpi\right) \le \left(-\mu k_{1\varepsilon} + \frac{\mu}{2\varepsilon} + \frac{1}{2}\right) \left\|\dot{q}\right\|^2 + \frac{K_G \|q - R_q\|^2}{2} - \frac{\mu \|\Omega\|^2}{2\varepsilon} - \frac{\mu \|\dot{\Omega}\|^2}{\varepsilon}.\tag{4.33}$$

Cuarto Paso: Finalmente sustituyendo (4.32) y (4.33) dentro de la función de Lyapunov (4.22), tenemos

$$\dot{V}_{E}\left(\varpi\right) \leq -\Theta_{0}(\varepsilon, \gamma_{0}) \left\|q - R_{q}\right\|^{2} - \Theta_{1}(\varepsilon, \gamma_{0}) \left\|\dot{q}\right\|^{2} - \Theta_{2}(\gamma_{0}) \left\|\Omega\right\|^{2} - \frac{\mu}{\varepsilon} \left\|\dot{\Omega}\right\|^{2} \tag{4.34}$$

donde $\Theta_0(\varepsilon,\gamma_0),\Theta_1(\varepsilon,\gamma_0)$ y $\Theta_2(\gamma_0)$ están definidas en (4.5). Escogiendo $\eta,\gamma_0,\beta,$ y ε tales que

$$\Theta = \min \left\{ \Theta_0(\varepsilon, \gamma_0), \Theta_1(\varepsilon, \gamma_0), \Theta_2(\gamma_0), \frac{\mu}{\varepsilon} \right\} > 0.$$
 (4.35)

Entonces de (4.24) y (4.34), tenemos

$$\dot{V}_{E}(\varpi) \leq -\Theta \|\varpi\|^{2} \leq -\frac{\Theta}{\eta} V_{E}(\varpi),$$

integrando ambos miembros de la desigualdad anterior y usando la desigualdad Crecimiento de Bellman tenemos

$$V_E(\varpi) \leq V_E(\varpi_0) \exp(-\frac{\Theta}{\eta}t),$$

la cual implica

$$\left\|\varpi\right\|^{2} \leq \frac{\bar{\eta}}{\eta} \left\|\varpi_{0}\right\|^{2} \exp\left(-\frac{\Theta}{\eta}t\right). \tag{4.36}$$

Así hemos probado la estabilidad exponencial del punto de equilibrio ϖ_e .

Desigualdades Relacionadas con \mathcal{EAS} :

Prueba de la desigualdad(4.24)

Lema 7 : Considere la función V_E definida por las ecs. (4.22) y (4.23). Si

$$\eta < \inf \left\{ \frac{\mu k_{0\varepsilon}}{\overline{\mu}}, \frac{\underline{\mu}}{\overline{\mu}} \right\}$$

entonces se cumple(4.24)

Prueba:

Primero encontraremos una cota superior e inferior para el término V_q . Puesto $\left|u^Tv\right| \leq \frac{\|u\|^2 + \|v\|^2}{2}$ y $M = N^TN$ para alguna matriz N, entonces

$$\eta(q - R_q)^T M(q) \dot{q} \leq \eta \frac{(q - R_q)^T M(q)(q - R_q)^T + \dot{q}^T M(q) \dot{q}}{2} \leq \eta \frac{\overline{\mu}(\|q - R_q\|^2 + \|\dot{q}\|^2)}{2}. \tag{4.38}$$

Por otro lado.

$$\begin{split} &\frac{\mu k_{0e} \|q - R_q\|^2 + \underline{\mu} \|\dot{q}\|^2}{2} + \frac{\mu \lambda_m \{P\}}{2\varepsilon} \left(\|\Omega\|^2 + \|\dot{\Omega}\|^2 \right) \\ &\leq V_1(\varpi) + V_2(\varpi) + V_3(\varpi) \\ &\leq \frac{\mu k_{0e} \|q - R_q\|^2 + \overline{\mu} \|\dot{q}\|^2}{2} + \frac{\mu \lambda_M \{P\}}{2\varepsilon} \left(\|\Omega\|^2 + \|\dot{\Omega}\|^2 \right) \end{split}$$

Así, de (4.38) y (4.39) tenemos

$$\begin{split} &\frac{(\mu k_{0\epsilon} - \eta \overline{\mu}) \|q - R_q\|^2 + (\underline{\mu} - \eta \overline{\mu}) \|\dot{q}\|^2}{2} + \frac{\mu \lambda_m \{P\}}{2\epsilon} \left(\|\Omega\|^2 + \|\dot{\Omega}\|^2 \right) \\ &\leq V_E(\varpi) \\ &\leq \frac{(\mu k_{0\epsilon} + \eta \overline{\mu}) \|q - R_q\|^2 + (\overline{\mu} + \eta \overline{\mu}) \|\dot{q}\|^2}{2} + \frac{\mu \lambda_M \{P\}}{2\epsilon} \left(\|\Omega\|^2 + \|\dot{\Omega}\|^2 \right) \end{split}$$

Prueba de la desigualdad (4.30).

Lema 8 Podemos garantizar la siguiente desigualdad:

$$\left| (q - R_q)^T \dot{M}(q) \dot{q} - (q - R_q)^T \Phi(q, \dot{q}) \dot{q} \right| \leq K_x \left\| q - R_q \right\| \left\| \dot{q} \right\|^2$$

donde

$$K_x = K_{\partial M} + K_{\Phi}$$

Prueba.

Primero note los siguiente hechos:

$$\begin{aligned} \left| (q - R_q)^T \dot{M}(q) \dot{q} \right| &\leq \|q - R_q\| \, \left\| \dot{M}(q) \dot{q} \right\|, \\ \left| (q - R_q)^T \Phi(q, \dot{q}) \dot{q} \right| &\leq \|q - R_q\| \, \left\| \Phi(q, \dot{q}) \dot{q} \right\|. \end{aligned}$$

Luego aplicando P.3 (ver propiedades mecánicas) a las dos miembros derechos de las anteriores desigualdades, tenemos

$$\left| (q - R_q)^T \dot{M}(q) \dot{q} \right| \le K_{\partial M} \left\| q - R_q \right\| \left\| \dot{q} \right\|^2$$
$$\left| (q - R_q)^T \Phi(q, \dot{q}) \dot{q} \right| \le K_{\Phi} \left\| q - R_q \right\| \left\| \dot{q} \right\|^2.$$

Sumando los dos miembros de las desigualdades anteriores y definiendo la constante $K_x = K_{\partial M} + K_{\Phi}$, tenemos (4.40).

Prueba de la desigualdad (4.31)

Lema 9 Podemos garantizar la siguiente desigualdad:

$$\left\| (q - R_q)^T \frac{\mu \Omega}{\varepsilon} - \mu k_{1\varepsilon} (q - R_q)^T \dot{q} + (q - R_q)^T \left(-G(q) + G(R_q) \right) \right\|$$

$$\leq \left\| q - R_q \right\|^2 \left(\frac{1}{2\gamma_0} + \frac{\mu}{2\varepsilon\gamma_0} + \frac{\mu k_{1\varepsilon}}{2\gamma_0} + \frac{\gamma_0 K_G^2}{2} \right) + \frac{\mu \gamma_0 k_{1\varepsilon}}{2} \left\| \dot{q} \right\|^2 + \frac{\mu \gamma_0}{2\varepsilon} \left\| \Omega \right\|^2.$$

$$(4.41)$$

Prueba:

Primero notemos que para cualquier $\gamma_0 > 0$ y $u, v \in R^n$ tenemos que $u^T v \leq \frac{\|u\|^2}{2\gamma} + \frac{\gamma \|v\|^2}{2}$, entonces

$$\begin{split} & \frac{\mu}{\varepsilon} \left| (q - R_q)^T \Omega \right| \leq \frac{\mu \|q - R_q\|^2}{2\varepsilon \gamma_0} + \frac{\mu \gamma_0 \|\Omega\|^2}{2\varepsilon}, \\ & \mu k_{1\varepsilon} \left| (q - R_q)^T \ \dot{q} \right| \leq \frac{\mu k_{1\varepsilon} \|q - R_q\|^2}{2\gamma_0} + \frac{\gamma_0 \mu k_{1\varepsilon} \|\dot{q}\|^2}{2}, \\ & \left| (q - R_q)^T (-G(q) + G(R_q)) \right| \leq \frac{\|q - R_q\|^2}{2\gamma_0} + \frac{\gamma_0 \|-G(q) + G(R_q)\|^2}{2} \leq \frac{\|q - R_q\|^2}{2\gamma_0} + \frac{\gamma_0 K_G^2 \|-q + R_q\|^2}{2}. \end{split}$$

Sumando las tres desigualdades tenemos (4.41).

Capítulo 5:

Acoplamiento a Modelo:

5.1 Introducción:

Existen dos esquemas de diseño y análisis de controles estabilizadores para una cadena cinemática. En el primer esquema "Quazilinealización": Se considera al modelo dinámico como un sistema lineal invariante o variante en el tiempo mas una dinámica no lineal (ver Hunt 1983[30], Gilbert y Ha 1984[31], Lewis y Dawson[24]). En el segundo esquema "Pasividad": Se considera al modelo dinámico del manipulador como un mapeo pasivo de la fuerza respecto a la velocidad, para esto hay que tomar en cuenta la matriz antisimetrica. (ver Koditschek 1984[27], Slotine 1988 [28], Ortega y Spong [29] 1988).

En el capítulo cuatro se analizo la estabilidad del sistema en lazo cerrado tomando en cuenta la propiedad de pasividad de las cadenas cinemáticas. En este capítulo se procede a analizar la ley de control propuesta en las ecs. (3.3) a (3.6) bajo el primer esquema de diseño o Quazilinealización.

Como consecuencia de este proceso de linealización un problema de interés en la teoría de control moderno es "Acoplamiento a Modelo", el cual consiste en asignar un comportamiento dinámico al sistema en lazo cerrado, mediante una retroalimentación de estado (ver Morse [34] 1975 y Emre E. Silverman 1980[33]). En este capítulo se mostrara que si el parámetro ε de la ley de control dada por las ecs. (3.3) a (3.6) es lo suficientemente pequeño entonces podemos garantizar el "Acoplamiento a Modelo" del sistema en lazo cerrado descrito por la ec. (3.14).

Esta propiedad es importante ya que permite asignar una dinámica en lazo cerrado con las siguientes características:

1) Comportamiento lineal en la salida, *i.e.* que la salida de la planta o del manipulador en lazo cerrado tenga un comportamiento dinámico parecido a la solución de una ecuación diferencial lineal estable.

- 2) Asignación de polos , *i.e* poder mover los polos del sistema en lazo cerrado para regular el tiempo de respuesta a la salida, así como disminuir las oscilaciones y mejorar el desempeño del modelo en lazo cerrado.
- 3) Desacoplamiento Dinámico: Particularmente en el MP2 se desea desacoplar las dinámicas en las direcciones x e y respectivamente.

Este capítulo esta organizado en la siguiente forma: En la sección dos se presentarán los preliminares necesarios para poder establecer el resultado principal. La sección tres está dividida en tres subseciones, la sección (5.3.1) está dedicada a estudiar algunas propiedades relacionadas con la trayectoria asignada ζ (ver las designaldades dadas en (5.7)), la sección (5.3.2) se reescribirá la ecuación del sistema en lazo cerrado en terminos del error de seguimiento $(e=q-\zeta)$ (ver ecs. (5.11) y (5.12)); la sección (5.3.3) se presentará el resultado principal de este capítulo ver Teorema 4, en la sección cuatro se mostrarán algunas simulaciones digitales. En la sección cinco se presentarán las conclusiones relacionadas con el Teorema 4. Y finalmente en la sección seis se presentará el Apéndice, el cual tiene como objetivo dar las pruebas principales de este capítulo.

5.2 Preliminares:

En esta sección se vuelve a considerar al manipulador paralelo de dos grados de libertad en lazo cerrado con la ley de control lineal descrita en los capítulos anteriores, poniendo mayor énfasis en la dinámica generada internamente por la ley de control lineal (ver [35] v [36]).

Primero: Considere el sistema en lazo cerrado dado por la ec. (ver (4.1) y (3.14)), la cual puede ser reescrita como sigue¹:

$$M(q(t)) \stackrel{..}{q}(t) + \Theta(t) = -\mu k_{1\varepsilon} \stackrel{..}{q}(t) - \mu k_{0\varepsilon}(q(t) - R_q) + \frac{\mu}{\varepsilon} \Omega(t)$$

donde

$$\Theta(t) = \Phi(q(t), \dot{q}(t)) \ \dot{q}(t) + G(q(t)) - G(R_q),$$

Recuerde que $\Omega(t)$ es la solución de la siguiente ec. diferencial

$$\ddot{\Omega}(t) + k_1 \dot{\Omega}(t) + k_0 \Omega(t) = 0.$$

 $^{^{1}}$ En este capítulo utilizaremos la dependencia de las variables en el tiempo i.e. $q(t), \dot{q}$ (t) y $\Omega(t)$

la cual se puede expresar en la siguiente realización de estado (ver las ecs (3.8),(3.9) y (3.10)):

$$\frac{d}{dt} \left[\begin{array}{c} \Omega(t) \\ \dot{\Omega}(t) \end{array} \right] = A_{\Omega} \left[\begin{array}{c} \Omega(t) \\ \dot{\Omega}(t) \end{array} \right] \qquad A_{\Omega} = \begin{array}{c} O_{2} & I_{2} \\ -k_{0}I_{2} & -k_{1}I_{2} \end{array}$$

Recuerde que la matriz A_{Ω} es Hurwitz puesto que k_0 y k_1 son constantes positivas, entonces existe $c_0 > 0$ y $\lambda_k > 0$ tal que

$$\|\exp\left(A_{\Omega}(t-\tau)\right)\| \leq c_0 \exp\left(-\lambda_k(t-\tau)\right),$$

y Ω cumple la siguiente desigualdad

$$\left\| \left[\Omega(t) \quad \dot{\Omega}(t) \right]^T \right\| \le c_0 \omega_0 \exp\left(-\lambda_k t\right) \tag{5.4}$$

donde $\omega_0 = \Omega(0) \Omega(0)$

5.3 Acoplamiento a Modelo:

En esta sección se mostrará que el sistema en lazo cerrado dado por (5.1) sigue la solución de la ec. diferencial (5.5) en forma exponencial cuando el parámetro del control ε es menor que una cota específica.

Para esto se procederá de la siguiente manera:

1) Primero: Describiremos la trayectoria interna generada por la acción del control. 2) Luego calcularemos la ecuación del error en el espacio de estado. 3) Y finalmente enunciaremos el resultado principal de este capítulo.

5.3.1 Trayectoria Interna:

En esta sección se darán las principales características de la dinámica generada internamente por la ley de control descrita por las ecs.(3.3) a (3.6).

Considere la trayectoria dinámica ζ , la cual es solución de la siguiente ecuación diferencial:

$$\dot{\zeta}(t) + \beta(\zeta(t) - R_q) = \Omega(t)$$

donde Ω es solución de (3.8) con sus respectivas condiciones iniciales

$$\begin{aligned} \zeta_0 &= \zeta(0) = [x(0) \ y(0)]^T; \\ \Omega_0 &= \Omega(0) = [\chi_1(0) + \beta(x(0) - r_x) \ \nu_1(0) + \beta(y(0) - r_y)], \end{aligned}$$

Primero note que las ecuacion diferencial (5.5) pueden ser expresadas como siguen:

$$(p+\beta)[\zeta(t)-R_q] = \Omega(t)$$
 $(p^2+k_1p+k_0)[\Omega(t)] = 0$

donde p[.] es el operador derivada . De las ecuaciones anteriores se obtiene

$$(p^2 + k_1 p + k_0)(p + \beta)[\zeta(t) - R_q] = 0$$
, i.e $(p^2 + k_1 p + k_0)[\zeta(t) - R_q] = s_0 e^{-\beta t}$

donde s_0 es una constante que depende de las condiciones iniciales. Esto significa que la dinámica de la trayectoria interna generada por la acción del control tiende exponencialmente (con velocidad de convergencia β) a la dinámica determinada por las constantes k_0 y k_1 i.e estas determinan los polos del sistema en lazo cerrado.

Propiedades de ζ :La trayectoria ideal (5.5) satisface las siguientes desigualdades (ver Apéndice)

$$\left\|\zeta(t) - R_q\right\| \leq \alpha_0 e^{-\lambda^* t} \quad \left\|\zeta\left(t\right)\right\| \leq \alpha_1 e^{-\lambda^* t} \quad \left\|\ddot{\zeta}\left(t\right)\right\| \leq \alpha_2 e^{-\lambda^* t}$$

donde (recuerde (5.4)):

$$\lambda^* = \min \{\beta, \lambda_k\} \qquad \alpha_0 = \sqrt{\|\zeta_0 - R_q\|^2 + \left(\frac{c_0 \omega_0}{\beta - \lambda_k}\right)^2}$$

$$\alpha_1 = \sqrt{2(c_0 \omega_0)^2 + 2(\beta \alpha_0)^2} \quad \alpha_2 = \sqrt{2(c_0 \omega_0)^2 + 2(\beta \alpha_1)^2}.$$

5.3.2 Error en el Espacio de Estado:

En esta sección se encontrará una representación en variables de estado para el error que existe entre q (estado del MP2) y ζ (estado de la trayectoria interna).

Primero: Definiendo el error de seguimiento a modelo como:

$$\mathbf{e}^T(t) = \left[q^T(t) - \zeta^T(t) \cdot (\dot{q}^T(t) - \dot{\zeta}^T(t))\right]$$

Después, combinando las ecuaciones (5.5) y (5.1)

$$M(q(t)) \ddot{q}(t) = -\mu k_{1\varepsilon} \dot{q}(t) - \mu k_{0\varepsilon}(q(t) - R_q) - \Theta(t) + \frac{\mu}{\varepsilon} \left(\dot{\zeta}(t) + (\zeta(t) - R_q) \right).$$

$$(5.9)$$

Recordemos que $k_{0\varepsilon}=\frac{1}{\varepsilon}(\beta+\varepsilon k_0)$, $k_{1\varepsilon}=\frac{1}{\varepsilon}(1+\varepsilon k_1)$ y $E(q)=\mu M^{-1}(q)-I_2$, así de esa forma tenemos:

$$\ddot{q}(t) - \ddot{\zeta}(t) = -K_{\varepsilon} \begin{bmatrix} q(t) - \zeta(t) \\ \dot{q}(t) - \dot{\zeta}(t) \end{bmatrix} - E(q(t))K_{\varepsilon} \begin{bmatrix} q(t) - \zeta(t) \\ \dot{q}(t) - \dot{\zeta}(t) \end{bmatrix}$$
$$(t) - M^{-1}(q(t)) \left(\Theta(t) + k_0(\zeta(t) - R_q) + k_1 \dot{\zeta}(t) \right)$$

donde $K_{\varepsilon} = [k_{0\varepsilon}I_2 \quad k_{1\varepsilon}I_2]$ Por otro lado, la ecuación diferencial de arriba puede ser expresada en la siguiente realización de estado

$$\frac{d}{dt}\mathbf{e}(t) = A_{\epsilon}\mathbf{e}(t) + \begin{pmatrix} 0 & + & 0 \\ -E(g(t))K_{\epsilon}\mathbf{e}(t) & + & \Delta(t) \end{pmatrix}$$
(5.11)

donde Δ (dinámica no lineal) está definida como sigue:

$$\Delta(t) = \Delta_2(t) + \Delta_1(t); \qquad \Delta_1(t) = -M^{-1}(q(t))\Theta(t);$$

$$\Delta_2(t) = -\ddot{\zeta}(t) - M^{-1}(q(t))(k_0(\zeta(t) - R_q) + k_1 \dot{\zeta}(t)),$$

у

$$A_{\varepsilon} = \begin{array}{c} O_2 & I_2 \\ -k_{0\varepsilon}I_2 & -k_{1\varepsilon}I_2 \end{array}$$

Note que A_{ε} es una matriz Hurwitz . Puesto que existen las matrices P_{ε} y Q_{ε} (ver 4.2 de [23]) tal que cumplen la siguiente ecuación de Lyapunov

$$P_{\varepsilon} = \begin{pmatrix} A_{\varepsilon}P_{\varepsilon} + P_{\varepsilon}A_{\varepsilon} = -Q_{\varepsilon}, \\ 2k_{0\varepsilon}k_{1\varepsilon}I_{2} & k_{0\varepsilon}I_{2} \\ k_{0\varepsilon}I_{2} & k_{1\varepsilon}I_{2} \end{pmatrix}; \quad Q_{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 2k_{0\varepsilon}^{2}I_{2} & 0_{2} \\ 0_{2} & 2(k_{1\varepsilon}^{2} - k_{0\varepsilon})I_{2} \end{pmatrix}$$

$$(5.13)$$

donde P_{ε} y Q_{ε} son definidas positivas para $k_{1\varepsilon}^2 > k_{0\varepsilon}$

5.3.3 Resultado Principal:

En esta sección se darán condiciones suficientes sobre los parámetros $k_{0\varepsilon}$ y $k_{1\varepsilon}$ para poder garantizar que el error e es exponencialmente decreciente.

Antes de presentar el resultado principal, introduciremos las siguientes constantes:

$$\kappa_{\varepsilon} = \max \left\{ k_{0\varepsilon}, k_{1\varepsilon} \right\} \qquad \lambda_{m} \left\{ Q_{\varepsilon} \right\} = \min \left\{ 2k_{0\varepsilon}^{2}, 2(k_{1\varepsilon}^{2} - k_{0\varepsilon}) \right\}$$

$$\lambda_{m}\left\{P_{\varepsilon}\right\} = \frac{2k_{0\varepsilon}k_{1\varepsilon} + k_{1\varepsilon} - \sqrt{(2k_{0\varepsilon}k_{1\varepsilon} - k_{1\varepsilon})^{2} + 4k_{0\varepsilon}}}{2} \qquad \lambda_{M}\left\{P_{\varepsilon}\right\} = \frac{2k_{0\varepsilon}k_{1\varepsilon} - k_{1\varepsilon} + \sqrt{(2k_{0\varepsilon}k_{1\varepsilon} - k_{1\varepsilon})^{2} + 4k_{0\varepsilon}}}{2} \qquad (5.15)$$

Teorema 4 El sistema en lazo cerrado dado en la ec. (5.11) es exponencialmente decresientemente acotado para γ fija tal que $0 < \gamma < 1$, si

$$k_{1\varepsilon}^2 > k_{0\varepsilon} \tag{5.16}$$

$$\gamma \lambda_m \left\{ Q_{\varepsilon} \right\} > \frac{2\kappa_{\varepsilon} K_G}{\mu} + 2\kappa_{\varepsilon} \sqrt{\frac{K_{\Phi} \alpha_4}{\mu}} \tag{5.17}$$

$$\sqrt{\frac{\lambda_m \{P_{\epsilon}\}}{\lambda_M \{P_{\epsilon}\}} \frac{\mu \alpha_4}{K_{\Phi}}} < \frac{\gamma \lambda_m \{Q_{\epsilon}\} - \frac{2\kappa_{\epsilon} K_{G}}{\mu} + \sqrt{(\gamma \lambda_m \{Q_{\epsilon}\} - \frac{2\kappa_{\epsilon} K_{G}}{\mu})^2 - \frac{4K_{\Phi} \kappa_{\epsilon}^2 \alpha_4}{\mu}}}{\frac{2K_{\Phi} \kappa_{\epsilon}}{\mu}}$$
(5.18)

entonces para algún T > 0 tenemos

$$\|\mathbf{e}(t)\|^2 \leq \frac{\lambda_m \{P_e\}}{\lambda_M \{P_e\}} \frac{\mu \alpha_4 e^{-\lambda^* T}}{K_{\Phi}} e^{-v(t-T)} \quad \forall \quad T \leq t < \infty$$

donde

$$v = \min\left\{\frac{(\gamma - 1)\lambda_m\{Q_{\epsilon}\}}{\lambda_M\{P_{\epsilon}\}}, \lambda^*\right\} \qquad \alpha_4 = \sqrt{\frac{K_{\Phi}^2 \|\mathbf{e}(0)\|^2}{\mu^2} + 2(\alpha_3^2 + (\frac{K_0}{\mu})^2)}.$$
 (5.19)

 α_3 y K_0 son constantes que dependen de las condiciones iniciales y la estructura mecánica del manipulador (ver (5.32) y (5.33))².

Consideraciones del Teorema anterior:

- 1) La primera desigualdad (5.16), asegura la positividad de las matrices P_{ε} y Q_{ε} necesarias para garantizar la convergencia exponencial del error.
- 2) La segunda desigualdad (5.17) da condiciones sobre el error entre q y ζ (posición del manipulador y estado de la dinámica asignada). En particular si la desigualdad (5.17) se cumple para $\alpha_4 = 0$ entonces automáticamente se cumplen (5.18).
- 3) La tercera desigualdad (5.18) da una relación de comparación entre la constante $\alpha_4(\mathbf{e}(0))$ y las matrices de diseño P_{ε} y Q_{ε} *i.e.* para cualquier error inicial siempre se puede encontrar el parámetro de control ε tal que λ_m $\{P_{\varepsilon}\}$ / λ_M $\{P_{\varepsilon}\}$ y λ_m $\{Q_{\varepsilon}\}$ sean lo suficientemente pequeño para poder garantizar (5.18).
- 4) La rapidez de convergencia del error depende directamente del valor de $\lambda^* = \min \{\beta, \lambda_k\}$ y la relación entre $\lambda_m \{Q_{\varepsilon}\}/\lambda_M \{P_{\varepsilon}\}$.
- 5) La constante γ es una medida de la ponderación entre la dinámica lineal y no lineal generada por el sistema en lazo cerrado.

²De (5.5) y la definición del error se tiene que $\|\mathbf{e}(0)\| = \sqrt{(\dot{x}(0) - \chi_1(0))^2 + (\dot{y}(0) - \nu_1(0))^2}$

La prueba del Teorema 4 se realiza en el apéndice al final de este capítulo; y esta basado en el siguiente importante Teorema inspirado en los trabajos de Lewis (ver [23] y [24]) ³

Teorema 5 Si $V(\mathbf{x})$ es una función de Lyapunov para un sistema continuo en el tiempo con las siguientes propiedades:

$$\frac{\lambda}{-} \|\mathbf{e}(t)\|^{2} < V(\mathbf{e}(t)) < \bar{\lambda} \|\mathbf{e}(t)\|^{2}$$

$$\dot{V}(\mathbf{e}(t)) < -k \|\mathbf{e}(t)\|^{2} + Z(\mathbf{e}(t))$$
(5.21)

donde k > 0 Z es una función continuo de e la cual satisface lo siquiente

$$Z(\mathbf{e}(t)) \begin{cases} <0 & \text{if } \underline{z}(t) < \|\mathbf{e}(t)\| < \widehat{z} \quad \forall \quad t \in [0; \infty), \\ =0 & \text{if } \|\mathbf{e}(t)\| = \underline{z}(t) \quad \forall \quad t \in [0; \infty), \\ >0 & \text{if } \|\mathbf{e}(t)\| < \underline{z}(t) \quad \forall \quad t \in [0; \infty), \end{cases}$$
(5.22)

y z cumple con

$$z(t) \leq z_0 \exp(-\alpha t),$$

para $\alpha > 0$. Si

$$\widehat{z} > z_0 \sqrt{\frac{\overline{\lambda}}{\lambda}} \quad y \quad \|\mathbf{e}(0)\| < z_0$$

entonces para un T > 0 lo suficientemente grande, tenemos

$$\|\mathbf{e}(t)\|^2 \le \overline{z}^2 (T) \exp\left(-\widehat{\alpha}(t-T)\right) \quad \forall \quad T \le t < \infty$$

donde

$$\overline{z}(t) \stackrel{\triangle}{=} z_0 \exp(-\alpha t) \sqrt{\frac{\overline{\lambda}}{\lambda}} \quad \forall \quad t \in [0, \infty); \quad \widehat{\alpha} = \min\left\{\frac{k}{\overline{\lambda}}, 2\alpha\right\}$$

Comentarios:

1) Note lo siguiente, si la función $Z(\mathbf{e}(t)) \leq 0$ para todo $t \in [0; \infty)$, entonces de las desigualdades (5.20) y (5.21), se puede garantizar la estabilidad exponencial en el sentido global *i.e.* estable independientemente de cualquier condición inicial.

$$\begin{array}{l} \lambda_{-} \left\| x \right\|^{2} < V(x) < \lambda_{+} \left\| x \right\|^{2}; \\ \dot{V}\left(x \right) < 0 \quad si \quad x_{1} < x < x_{2}; \\ x(0) = 0. \end{array}$$

entonces x(t) es uniformemente acotada i.e $||x(t)|| \le k \ \forall \ t \in [0, \infty)$.

Este Teorema es de gran utilidad en robótica ya que en base a este Teorema se probo el acotamiento uniforme del error del control P.D. en lazo cerrado con un manipulador en serie (ver Lewis [23], [24]).

³ Teorema 1.5-5 (ver [23]): Sea V(x) una función continua de Lyapunov la cual cumple con las siguientes propiedades:

2) Note que el teorema nos da condiciones suficientes para poder garantizar el decaimiento exponencial del error siempre y cuando el error inicial pertenezca a una vecindad cercana al punto de equilibrio.

Prueba del Teorema 5:(Para mayor claridad consulte Figuras 5 y 6)

Separemos primero el espacio de ${f e}$ en dos regiones usando la negatividad de la función Z(.) , como sigue

$$S_{e} = \{ \mathbf{e}(t) \mid z_{0} \exp(-\alpha t) \le ||\mathbf{e}(t)|| \le \widehat{z} \}$$

$$S_{i} = \{ \mathbf{e}(t) \mid ||\mathbf{e}(t)|| < z_{0} \exp(-\alpha t) \}.$$
(5.25)

Procederemos a considerar los dos siguientes casos.

Prime Caso: Consideremos primero que e(t) nunca deja S_i , entonces (ver Figura 5)

$$\|\mathbf{e}(t)\| < z_0 \exp(-\alpha t) < \overline{z}(t) \quad \forall \quad t \in [0, \infty).$$

Segundo Caso: Consideremos después que $\mathbf{e}(t)$ entra en S_e para algún instante de tiempo T. Entonces por continuidad de \mathbf{e} tenemos

$$\|\mathbf{e}(T)\| = z_0 \exp(-\alpha T)$$
 y $\dot{V}(\mathbf{e}(t)) < -k \|\mathbf{e}(t)\|^2 \ \forall \ t \ge t + \Delta t$

Integrando la ultima desigualdad para $\Delta t > 0$, y usando las propiedades (5.20),(5.21) de V tenemos

$$\|\mathbf{e}(T+\Delta t)\|^2 < \frac{1}{z^2} (T) \exp\left(\frac{-k}{5}\Delta t\right),$$

usando la condición (5.24) en la desigualdad de arriba, tenemos que

$$\|\mathbf{e}(T+\Delta t)\|^2 < \overline{z}^2 (T) \exp\left(\frac{-k}{\overline{\lambda}}\Delta t\right) < \widehat{z}^2$$

Entonces $\mathbf{e}(T + \Delta t)$ nunca deja S_e para cualquier intervalo de tiempo $\Delta t > 0$ (ver Figura 6).

Analizaremos finalmente la desigualdad (5.27). Para esto consideraremos los dos siguientes casos

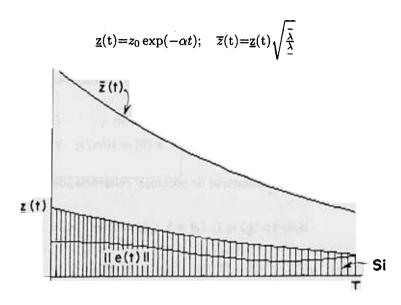
$$\frac{2}{2}\left(T+\Delta t\right) < \frac{z^2}{z}\left(T\right) \exp\left(\frac{-k_u}{\bar{\lambda}}\Delta t\right) \quad \text{si} \quad \frac{k}{\Delta} < 2\alpha$$

$$\frac{z^2}{z}\left(T\right) \exp\left(\frac{-k_u}{\bar{\lambda}}\Delta t\right) \le \frac{z^2}{z}\left(T+\Delta t\right) \quad \text{de otra forma.}$$

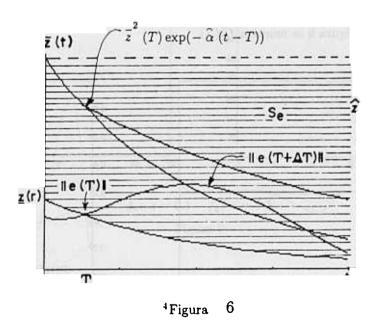
Entonces por inducción tenemos

$$\|\mathbf{e}(t)\|^2 \le \overline{z}^2 (T) \exp\left(-\widehat{\alpha}(t-T)\right) \quad \forall T \le < \infty.$$

A continuación se presentara una serie de gráficas en las cuales se mostrara el decaimiento exponencial del error.



³Figura 5



 $^{^4}$ En está Figura se muestra el caso en que el error permanece en la región S_i i.e. $\|e(t)\| \leq z_0 e^{-\alpha t}$

⁵ En está Figura se muestra el caso en que el error entra a la región S_e en el instante de tiempo T i.e. $||e(t)|| \ge z_0 e^{-\alpha(t-T)}$ para toda $t \ge T$.

Simulaciones

En esta sección se mostrarán las simulaciones digitales de las ecuaciones diferenciales del modelo matemático del manipulador (ver ecs. 2.12 a 2.16) en lazo cerrado con la ley de control dada por las ecs. (3.3) a (3.6).

Primero considere los siguiente parámetros mecánico y condiciones iniciales:

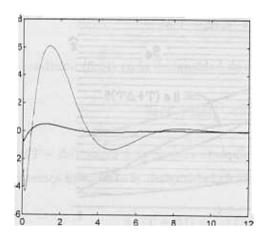
$$M_p = 5 \ Kg;$$
 $M_v = 1 \ Kg;$ $r = 1 \ m;$ $L = 1.7m$ $x(0) = -0.2m;$ $y(0) = 1.1;$ $\dot{x}(0) = 10m/s;$ $\dot{y}(0) = 10m/s;$

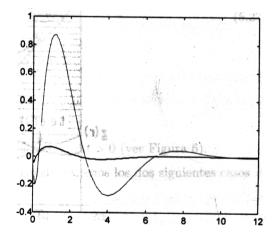
después considere los siguientes parámetros de control y referencia, dadas por:

$$k_0 = 1$$
: $k_1 = 1$; $\beta = 2$, $r_x = 0.5m$ $r_y = 1.8m$.

Tomando
$$q^T(t) = [x(t) \quad y(t)]$$
, $\zeta^T(t) = [\zeta_x(t) \quad \zeta_y(t)]$ y $f_q^T(t) = [f_x(t) \quad f_y(t)]$.

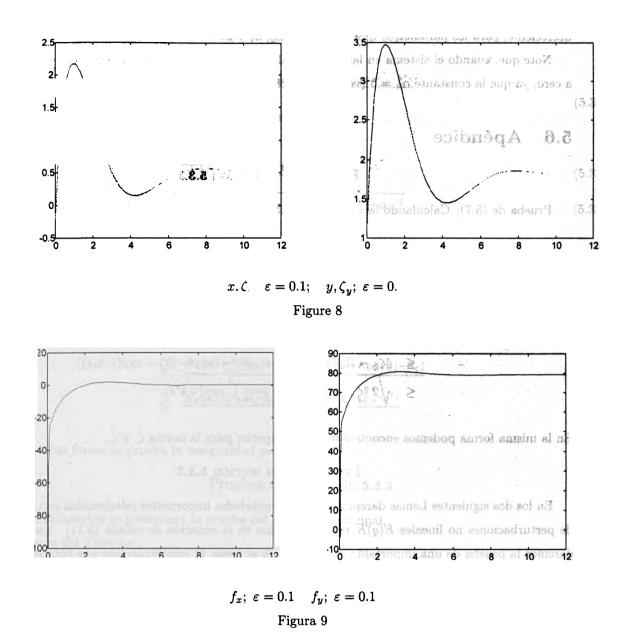
En la Figura 7 , se muestra el error de seguimiento a modelo $x(t)-\zeta_x(t)$ y $x(t)-\zeta_y(t)$ para los tres valores de ε . El más alto , medio y el más bajo valor del sobrepaso corresponde a los valores de $\varepsilon=5$, $\varepsilon=1$ y $\varepsilon=0.1$, respectivamente. En la Figura 8, mostramos el comportamiento de q(m) y $\zeta^T(m)$ para $\varepsilon=0.1$. Y en la Figura 9 se muestra $f_q^T(N)$.





$$x - \zeta_x$$
; $\varepsilon = 5, 1, 0.1$ $y - \zeta_y$; $\varepsilon = 5, 1, 0.1$

Figure 7



5.5 Conclusiones

En este capítulo hemos mostrado que la ley de control lineal dada por las ecs. (3.3) a (3.6) (ver [35] y [36])en lazo cerrado con el manipulador paralelo de dos grados de libertad descrito en la Figura 1, no solamente nos garantiza estabilidad asintótica y exponencial en lazo cerrado como se discutió en el capítulo anterior, sino también nos permite garantizar seguimiento a modelo. Dada cualquier condición inicial, podemos encontrar un $\varepsilon > 0$ lo suficientemente pequeño tal que la diferencia entre los estado q y ζ (posición de estado del manipulador y estado de la dinámica asignada) sea exponencialmente

decreciente, para los parámetros fijos del control $k_0,\ k_1$ y β .

Note que, cuando el sistema en lazo cerrado alcanza el punto de equilibrio entonces el error es igual a cero, ya que la constante $\alpha_4 = 0$ (ver (5.19), (5.8),(4.8) y (3.1)).

Apéndice

Pruebas de la sección 5.3.1

Prueba de (5.7): Calculando la solución de (5.5), tenemos

$$\zeta(t) - R_q = (\zeta_0 - R_q) \exp(-\beta t) + \int_0^t \exp(-\beta (t - \tau)) \Omega(\tau) d\tau$$

de (5.4), llegamos a:

$$\|\zeta(t) - R_q\| \leq \|\zeta_0 - R_q\| \exp(-\beta t) + c_0 \omega_0 \exp(-\beta t) \int_0^t \exp((\beta - \lambda_k)\tau) d\tau$$

$$\leq \|\zeta_0 - R_q\| \exp(-\beta t) + \frac{c_0 \omega_0}{(\beta - \lambda_k)} (\exp(-\beta t) - \exp(-\lambda_k t))$$

$$\leq \sqrt{2 \|\zeta_0 - R_q\|^2 + 2 \left(\frac{c_0 \omega_0}{\beta - \lambda_k}\right)^2} \exp(-\lambda^* t),$$
(5.28)

En la misma forma podemos encontrar una cota superior para la norma ζ , y $\ddot{\zeta}$

Pruebas de la sección 5.3.2

En los dos siguientes Lemas daremos algunas propiedades importantes relacionadas con los términos de perturbaciones no lineales $E(q)K_{\varepsilon}\mathbf{e}$ y Δ definidos en la ecuación de estado (5.11). En el Lema 10 daremos la prueba de una importante identidad y en el Lema 11 encontraremos una cota superior para el término no lineal Δ . Estos Lemas serán usados para probar el acotamiento del error.

Lema 10

y

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \Delta(t) \end{bmatrix}^T P_{\epsilon} \mathbf{e} + \mathbf{e}^T P_{\epsilon} \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta(t) \end{bmatrix} = 2\mathbf{e}^T K_{\epsilon}^T \Delta(t)$$
 (5.30)

Prueba.

Probemos la primera identidad. Del lado izquierdo de (5.29) y (5.13), tenemos:

$$\left[\begin{array}{cc} 0 & \mathbf{e}^T K_{\varepsilon}^T E(q) \end{array} \right] P_{\varepsilon} \mathbf{e} = - \mathbf{e}^T \dot{K}_{\varepsilon}^T E(q) K_{\varepsilon} \mathbf{e}$$

la segunda identidad es probada en la misma forma .

Lema 11

$$\begin{split} \|\Delta_1(t)\| &\leq \frac{K_{\Phi} \|\mathbf{e}(t)\|^2 + K_{G} \|\mathbf{e}(t)\| + K_0 e^{-\lambda^* t}}{\frac{\mu}{-}} \\ \|\Delta_2(t)\| &\leq \alpha_3 e^{-\lambda^* t} \end{split}$$

donde

$$K_0 = K_{\Phi} \alpha_1^2 + K_G \alpha_0$$

$$\alpha_3 = \sqrt{3\alpha_2^2 + 3(\frac{k_0}{\mu}\alpha_0)^2 + 3(\frac{k_1}{\mu}\alpha_1)^2}$$
(5.33)

Prueba:

Probemos la expresión para Δ_1 . Usando las propiedades mecánicas P.2, P.3, P.4 y (5.7), tenemos

$$\begin{split} \|\Delta_{1}(t)\| &= \left\| M^{-1}(q(t)) \left(\Phi(q(t), \dot{q}(t)) \dot{q}(t) + G(q(t)) - G(R_{q}) \right) \right\| \\ &\leq \frac{K_{\Phi} \|\dot{q}(t) + \dot{\zeta}(t) - \dot{\zeta}(t)\|^{2} + K_{G} \|q(t) - R_{q} + \zeta(t) - \zeta(t)\|}{\frac{\mu}{2}} \\ &\leq \frac{K_{\Phi} \|\mathbf{e}(t)\|^{2} + K_{G} \|\mathbf{e}(t)\| + K_{\Phi} \|\dot{\zeta}(t)\|^{2} + K_{G} \|\zeta(t) - R_{q}\|}{\frac{\mu}{2}} \\ &\leq \frac{K_{\Phi} \|\mathbf{e}(t)\|^{2} + K_{G} \|\mathbf{e}(t)\| + (K_{\Phi}\alpha_{1}^{2} + K_{G}\alpha_{0})e^{-\lambda^{*}t}}{\frac{\mu}{2}} \end{split}$$

en la misma forma se prueba la desigualdad para Δ_2 .

Pruebas de la sección 5.3.3

A continuación se presentara la prueba del resultado principal.

Prueba del Teorema:

Este Teorema se probara en cuatro pasos.

Prueba:

Primer Paso: Considere la siguiente función de Lyapunov

$$V(\mathbf{e}(t)) = \frac{1}{2}\mathbf{e}^T(t)P_{\varepsilon}\mathbf{e}(t),$$

de (5.13) y 3.26), tenemos que V cumple:

$$\frac{\lambda_{m}\{P_{\epsilon}\}}{2}\left\|\mathbf{e}(t)\right\|^{2} < V(\mathbf{e}(t)) < \frac{\lambda_{M}\{P_{\epsilon}\}}{2}\left\|\mathbf{e}(t)\right\|^{2}$$

Segundo Paso: Calculemos primero la derivada de V. Usando (5.29) y (5.30), tenemos:

$$\dot{V}\left(\mathbf{e}(t)\right) = -\frac{\mathbf{e}^{T}(t)Q_{\epsilon}\mathbf{e}(t) + 2\mathbf{e}^{T}K_{\epsilon}^{T}E(q)K_{\epsilon}\mathbf{e}}{2} + \mathbf{e}^{T}K_{\epsilon}^{T}\Delta(t). \tag{5.36}$$

Encontremos ahora una cota superior de \dot{V} . Usando la propiedad P.6

$$-\mathbf{e}^T K_{\varepsilon}^T E(q) K_{\varepsilon} \mathbf{e} \leq 0,$$

notemos de (5.13) y la desigualdad anterior que:

$$-\frac{\mathbf{e}^{T}(t)Q_{\varepsilon}\mathbf{e}(t)+2\mathbf{e}^{T}K_{\varepsilon}^{T}E(q)K_{\varepsilon}\mathbf{e}}{2} \leq -\frac{\lambda_{m}\{Q_{\varepsilon}\}}{2}\|\mathbf{e}(t)\|^{2}$$

$$(5.37)$$

Por otro lado usando el Lema 11 y la definición de α_4 , tenemos

$$\begin{aligned} \left\| \mathbf{e}^T K_{\varepsilon}^T \Delta(t) \right\| &\leq \kappa_{\varepsilon} \left\| \mathbf{e}(t) \right\| \left(\frac{K_{\Phi} \| \mathbf{e}(t) \|^2 + K_G \| \mathbf{e}(t) \|}{\frac{\mu}{2}} + (\alpha_3 + \frac{K_0}{\mu}) e^{-\lambda^* t} \right) \\ &\leq \kappa_{\varepsilon} \left\| \mathbf{e}(t) \right\| \left(\frac{K_{\Phi} \| \mathbf{e}(t) \|^2 + K_G \| \mathbf{e}(t) \|}{\mu} + \alpha_4 e^{-\lambda^* t} \right) \end{aligned}$$

Tomando (5.37) y (5.38) en (5.36), tenemos

$$\dot{V}\left(\mathbf{e}(t)\right) \leq -\frac{\lambda_{m}\{Q_{\varepsilon}\}}{2} \left\|\mathbf{e}(t)\right\|^{2} + \kappa_{\varepsilon} \left\|\mathbf{e}(t)\right\| \left(\frac{K_{\Phi}\left\|\mathbf{e}(t)\right\|^{2} + K_{G}\left\|\mathbf{e}(t)\right\|}{\frac{\mu}{c}} + \alpha_{4}e^{-\lambda^{*}t}\right)$$

Para poder usar el Teorema 5 separemos a V en dos términos:

$$\dot{V}(\mathbf{e}(t)) \leq \dot{V}_{\gamma}(\mathbf{e}(t)) + \dot{V}_{\varepsilon}(\mathbf{e}(t))$$

donde

$$\dot{V}_{\gamma}\left(\mathbf{e}(t)\right) = -\frac{(\gamma - 1)\lambda_{m}\{Q_{\varepsilon}\}}{2} \left\|\mathbf{e}(t)\right\|^{2}$$

$$\dot{V}_{\varepsilon}\left(\mathbf{e}(t)\right) = \frac{K_{\Phi}\kappa_{\varepsilon}\|\mathbf{e}(t)\|^{3}}{\mu} + \left(\frac{\kappa_{\varepsilon}K_{G}}{\mu} - \frac{\gamma\lambda_{m}\{Q_{\varepsilon}\}}{2}\right) \left\|\mathbf{e}(t)\right\|^{2} + \kappa_{\varepsilon}\alpha_{4}e^{-\lambda^{*}t} \left\|\mathbf{e}(t)\right\|$$
(5.41)

Tercer Paso: Usando el Lema 1 de [24], el cual lo enunciaremos a continuación.

Lema: Para cualquier z, si

$$\beta_3$$
 $\zeta_1 + \sqrt{4\zeta_0\zeta_2}$ entonces $\zeta_2 z + (\zeta_1 - \beta_3)z + \zeta_0 < 0$

para

$$z_1 < z < z_2$$

donde $\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2$ y β_3 son constantes positivas

$$z_1 = \frac{(\beta_3 - \zeta_1) - \sqrt{(\beta_3 - \zeta_1)^2 - 4\zeta_0\zeta_2}}{2\zeta_2} \qquad z_2 = \frac{(\beta_3 - \zeta_1) + \sqrt{(\beta_3 - \zeta_1)^2 - 4\zeta_0\zeta_2}}{2\zeta_2}$$

En vista de (5.17) tenemos:

$$\gamma \lambda_m \left\{Q_{arepsilon}
ight\} > rac{2\kappa_{arepsilon}K_G}{\mu} + 2\kappa_{arepsilon} \sqrt{rac{K_{\Phi}lpha_4e^{-\lambda^*t}}{\mu}}$$

entonces usando el Lema de arriba tenemos:

$$\frac{K_{\Phi}\kappa_{\varepsilon}\|\mathbf{e}(t)\|^{2}}{\mu} + \left(\frac{\kappa_{\varepsilon}K_{G}}{\mu} - \frac{\gamma\lambda_{m}\{Q_{\varepsilon}\}}{2}\right)\|\mathbf{e}(t)\| + \alpha_{4}\kappa_{\varepsilon}e^{-\lambda^{*}t} < 0, \tag{5.43}$$

para $e_1(t) < ||\mathbf{e}(t)|| < \bar{e}$ Esto es

$$\dot{V}_{\varepsilon}$$
 (e(t)) <0 for $e_1(t) < ||\mathbf{e}(t)|| < \bar{e}$,

donde

$$\bar{e} = \frac{\gamma \lambda_m \{Q_e\} - \frac{2\kappa_e K_G}{\mu} + \sqrt{(\gamma \lambda_m \{Q_e\} - \frac{2\kappa_e K_G}{\mu})^2 - \frac{4K_{\Phi}\kappa_e^2 \alpha_4}{\mu}}}{\frac{2K_{\Phi}\kappa_e}{\mu}}$$

$$e_1(t) = \frac{\gamma \lambda_m \{Q_{\epsilon}\} - \frac{2\kappa_{\epsilon} K_G}{\mu} - \sqrt{(\gamma \lambda_m \{Q_{\epsilon}\} - \frac{2\kappa_{\epsilon} K_G}{\mu})^2 - \frac{4K_{\Phi} \kappa_{\epsilon}^2 \alpha_4 \epsilon^{-\lambda^* t}}{\mu}}}{\frac{2K_{\Phi} \kappa_{\epsilon}}{\mu}}$$

Cuarto Paso: Primero notemos que

$$<0 \quad \text{if} \quad \sqrt{\frac{\mu\alpha_{4}}{K_{\Phi}}}e^{-\frac{\lambda^{\bullet}}{2}t} < \|\mathbf{e}(t)\| < \bar{e} \quad \forall \quad t \in [0; \infty),$$

$$V_{\varepsilon} (\mathbf{e}(t))$$

$$= 0 \quad \text{if} \quad \|\mathbf{e}(t)\| = e_{1}(t) \quad \forall \quad t \in [0; \infty).$$

$$(5.47)$$

Lo cual es cierto, para esto usemos en (5.46) $A \le \sqrt{A^2 - 4C} + 2\sqrt{C}$ tenemos:

$$e_1(t) \le \sqrt{\frac{\mu \alpha_4}{K_{\Phi}}} e^{-\frac{\lambda^*}{2}t} . \tag{5.48}$$

así, de (5.44) y (5.48), tenemos (5.47).

Note que las suposiciones del Teorema5 son satisfechas para la función de Lyapunov V. En efecto: A) (5.20) sigue de (5.44). B) (5.21) sigue de (5.39),(5.40) y (5.41). C) (5.22) sigue de (5.47). D) (5.23)

sigue de (5.48).

Ahora de (5.18) y la definición de α_4 (ver 5.19), tenemos que:

$$\|\mathbf{e}(0)\| < \sqrt{\frac{\mu \alpha_4}{K_{\Phi}}} \quad y \quad \sqrt{\frac{\lambda_m \{P_e\}}{\lambda_M \{P_e\}} \frac{\mu \alpha_4}{K_{\Phi}}} < \bar{e}$$

Entonces del Teorema5 tenemos lo siguiente:

$$\left\|\mathbf{e}(t)\right\|^2 \leq \frac{\lambda_m\{P_\epsilon\}}{\lambda_M\{P_\epsilon\}} \frac{\frac{\mu\alpha_4e^{-\lambda^*T}}{K_\Phi}e^{-v(t-T)} \quad \forall \qquad \in [T,\infty)$$

Capítulo 6:

Reconstructor de Estado

6.1 Introducción

La mayor parte de los algoritmos de control de manipuladores, han sido desarrollados en base a que se disponen la posición y la velocidad de las articulaciones del manipulador, existen numerosos esquemas de diseño de controles desde los más simples hasta los mas sofisticados, los cuales pueden garantizar estabilidad asintótica y en algunos casos estabilidad exponencial en el sentido local ver [8, 9, 10]. La parte principal de estos esquemas de control, se basan en que se dispone de la acción proporcional y derivativa del control o (*PD*), *i.e.*, posición y velocidad son disponibles para diseñar una retroalimentación de estado lineales y no lineales. La posición del estado puede ser medida por medio de codificadores, los cuales pueden dar una medida del desplazamiento en la posición en forma precisa [11], contrariamente la medida de la velocidad la cual es obtenida por medio de tacómetros, esta a menudo puede estar contaminada por ruido o perturbaciones no deseadas[11]. Este problema reduce el desempeño del control del manipulador [11, 12]. Por esta razón es importante usar esquemas de control basados en la suposición de que solo se dispone de una información precisa en la posición.

Existen numerosos trabajos basados en la hipótesis de que solo se dispone información de la posición, Canudas y Slotine J.E. en [11, 12, 13] propusieron una versión modificada de control por medio del par calculado, en la cual la velocidad fue reemplazada por medio de la estimación de la velocidad a través de un observador no lineal. Nicosia y Tomei en [14] estimaron la velocidad por medio de un observador no lineal, el cual está basado en las propiedades pasivas del robot. [10] Berghuis y Nijmeijer propusieron un esquema de control en el cual estimaban la velocidad basado en la propiedad de pasividad.[42] Pozniyak, Martínez y D.D. León, propusieron un esquema de control robusto basado en la implantación de un observador de alta ganancia.

En este capítulo se propone un esquema de control basado en la estimación de la velocidad a través de un reconstructor de estado de primer orden. La velocidad estimada se introduce en la ley de control propuesta en los capítulos anteriormente (ver ecs.(3.3) a (3.6)). Y se mostrará usando la propiedad P. 4 y el segundo método de Lyapunov que el sistema en lazo cerrado es asintóticamente estable.

Este capítulo está organizado de la siguiente manera. En la sección 2 se da un preliminar en el que se propone un filtro de primer orden en lazo cerrado con la ley de control lineal propuesta en los capítulos anteriores (ver capítulos 3.3). En la sección tres se mostrará que el sistema en lazo cerrado dado por (6.6) es asintóticamente estable (ver Teorema 6). En la sección cutro se darán las conclusiones respectivas a este capítulo. En la sección cinco se presentará el Apéndice de este capítulo.

6.2 Preliminares

En esta sección se asumirá que no se disponen del estado \dot{q} por lo que utilizaremos un reconstructor de estado el cual tiene como objetivo estimar el valor de \dot{q} . Para esto procederemos de la siguiente forma:

Primero proponemos un filtro de primer orden dado:

$$\varepsilon_0 \, \widehat{q} + \widehat{q} = q \quad \text{para} \quad \varepsilon_0 > 0,$$
(6.1)

donde $\hat{q} = [\hat{x} \ \hat{y}]^T$ es el vector estimado de q.

Después sustituimos q por \widehat{q} en la ley de control lineal dada por las ecs. (3.3) a (3.6), obteniendo lo siguiente:

$$\dot{\chi} = \begin{bmatrix} -k_1 & 1 \\ -k_0 & 0 \end{bmatrix} \chi + \begin{bmatrix} -k_0 & -\beta \\ -k_0\beta & (k_0 - k_1\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{x} \\ \dot{\widehat{x}} \end{bmatrix}, \tag{6.2}$$

$$\dot{\nu} = \begin{bmatrix} -k_1 & 1 \\ -k_0 & 0 \end{bmatrix} \nu + \begin{bmatrix} -k_0 & -\beta \\ -k_0\beta & (k_0 - k_1\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{y} \\ \dot{\widehat{y}} \end{bmatrix},$$
(6.3)

$$f_{q} = \frac{\mu}{\varepsilon} \begin{bmatrix} \chi_{1} \\ \nu_{1} \end{bmatrix} - \mu k_{0} \hat{q} - \mu k_{1\varepsilon} \dot{\hat{q}} + \mu k_{0\varepsilon} R_{q} + G(R_{q}), \tag{6.4}$$

Finalmente notemos que está ley de control puede ser expresada de la siguiente manera:

$$f_q = -\mu k_{0\varepsilon}(\widehat{q} - R_q) - \mu k_{1\varepsilon} \,\widehat{q} + \frac{\mu \widehat{\Omega}}{\varepsilon} + G(R_q), \tag{6.5}$$

donde $\widehat{\Omega}$ es la solución de la siguiente ec. diferencial:

$$\ddot{\widehat{\Omega}} + k_1 \dot{\widehat{\Omega}} + k_0 \widehat{\Omega} = 0.$$

Recuerde: Tomando en cuenta las ecs. (3.8) a (3.10) la ec. anterior se puede expresar en la siguiente forma:

$$\frac{d}{dt} \left[\begin{array}{c} \widehat{\Omega} \\ \widehat{\Omega} \end{array} \right] = A_{\Omega} \left[\begin{array}{c} \widehat{\Omega} \\ \widehat{\Omega} \end{array} \right]; \quad A_{\Omega} = \left[\begin{array}{cc} 0 & I_2 \\ -k_0 I_2 & -k_1 I_2 \end{array} \right].$$

donde A_{Ω} satisface la siguiente ecuación de Lyapunov ver las ecs. (3.11) y (3.12))

$$P = \begin{bmatrix} A_{\Omega}^{T}P + PA_{\Omega} = -I_{4\times4} \\ \left(\frac{1}{2k_{1}} + \frac{k_{0} + k_{1}^{2}}{2k_{0}k_{1}}\right)I_{2} & \frac{I_{2}}{2k_{0}} \\ \frac{I_{2}}{2k_{0}} & \left(\frac{1}{2k_{1}} + \frac{1}{2k_{0}k_{1}}\right)I_{2} \end{bmatrix} > 0.$$

6.3 Estabilidad Asintótica

En esta sección se estudiará la estabilidad del sistema (3.2) cuando es retroalimentado por la ley de control lineal (6.2)-(6.4). Se utilizará el segundo método de Lyapunov para mostrar que si los coeficientes positivos ε y ε_0 se eligen menores que una cota específica, podemos garantizar que el sistema en lazo cerrado es asintóticamente estable.

Sustituyendo primero la ley de control equivalente (6.5) en el modelo mecánico dado en (3.2) obtenemos la siguiente descripción en lazo cerrado

$$\frac{\hat{q} = \frac{q - \hat{q}}{\varepsilon_0};}{M(q) \ddot{q} + \Phi(q, \dot{q}) \dot{q} + G(q) = \frac{\mu \hat{\Omega}}{\varepsilon} + G(R_q) - \mu k_{0\varepsilon} (\hat{q} - R_q) - \mu k_{1\varepsilon} \dot{\hat{q}},}$$
(6.6)

después definiendo el estado ϖ como sigue: $\overline{\omega} = \left[\begin{array}{ccc} (q-R_q)^T & \dot{q}^T & \Omega^T & \dot{\Omega}^T & (\widehat{q}-R_q)^T \end{array} \right]^T$.

Ahora se procederá a establecer el resultado principal de este capítulo el cual nos da condiciones suficientes para poder garantizar que (6.6) es asintóticamente estable.

Teorema 6 El sistema en lazo cerrado (6.6) es asintóticamente estable (AS) si

A.1 :
$$\overline{k}_{\varepsilon} > \frac{1}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon_0}{2\varepsilon}$$
 , $\varepsilon_0 \leq \min\{2, \lambda_m\{P\}\}$,
A.2 : $\frac{1}{\varepsilon} > \max\left\{\frac{K_G - \mu k_0}{\beta \mu}, \frac{1 - \mu k_0}{\beta \mu}\right\}$,

donde

$$\overline{k}_{\varepsilon} = k_{1\varepsilon} - \varepsilon_0 k_{0\varepsilon} > 0 \tag{6.7}$$

Consideraciones del Teorema anterior:

1) Note que se puede escoger el valor de ε_0 tan grande como sea el mínimo de 2 o $\lambda_m\{P\},\,P$ se escoge

de acuerdo a las características internas de la ley de control (ver ec:(3.8)) i.e. entre más grande sean los eigenvalores de P más relajada sera la acción del estimador de estado.

2) Note que A.2 es la misma condición del Teorema 6 del capítulo cuatro.

A continuación se mencionará un corolario, el cual afirma que no solamente el sistema en lazo cerrado (6.6) es asintóticamente estable en el sentido entrada salida, sino es internamente estable, *i.e* la ley de control es estable respecto al punto de equilibrio ϖ_e .

Corolario 2 Bajo las mismas condiciones del Teorema 6, la ley de control lineal (6.1)-(6.4) es \mathcal{AS} con respecto al punto de equilibrio ϖ_e

En la siguiente sección se presentarán algunas simulaciones digitales en las cuales se mostrará gráficamente la convergencia asintótica de los estados.

Conclusiones y Comentarios

En este capítulo se ha propuesto un reconstructor de estado usando un filtro de primer orden para estimar la posición y velocidad de la cadena cinemática cerrada de dos grados de libertad, estos estados estimados son usados como entradas de la ley de control lineal con el objeto de estabilizar al MP2. El reconstructor de estados depende de el parámetro ε_0 (relacionado con el filtro de primer orden) y los parámetros de la ley de control lineal. Las constantes ε_0 y ε determinan la estabilidad de el sistema de lazo cerrado (ver Teorema 6), de la misma forma que en el capítulo cuatro se puede mostrar que el sistema en lazo cerrado es exponencialmente estable pero en un sentido local.

Apéndice

Prueba del Teorema Principal:

Prueba: Este Teorema se probara en cinco pasos.

Primer Paso: Sea $\overline{\omega} = \begin{bmatrix} (q - R_q)^T & \dot{q}^T & \Omega^T & \dot{\Omega}^T & (\widehat{q} - R_q)^T \end{bmatrix}^T$ y considere la siguiente función

$$\widehat{V}(\overline{\omega}) = \widehat{V}_1(\overline{\omega}) + \widehat{V}_2(\overline{\omega}), \tag{6.8}$$

$$\widehat{V}_{1}(\overline{\omega}) = V_{G}(q) + \beta_{0} + V_{1}(\dot{q}) + V_{2}(q),
\widehat{V}_{2}(\overline{\omega}) = \frac{\mu \varepsilon_{0} \overline{k}_{\varepsilon} \dot{q}^{T} \hat{q}}{2} - \frac{\mu \varepsilon_{0} \dot{q}^{T} \hat{\Omega}}{\varepsilon} + V_{3}(\widehat{\Omega}); \quad \dot{\widehat{q}} = (q - \widehat{q})/\varepsilon_{0}$$
(6.9)

Recuerde que : V_G es la energía potencial gravitacional (ver 4.7)

$$V_G(q) = E_p(q) - E_p(R_q) - G^T(R_q)(q - q(0)),$$

que satisface (ver (4.8))

$$-\beta_0 - \frac{\|q - R_q\|^2}{2} \le V_G(q) \quad ; \ \beta_0 = 2M_v gr + K_g \|R_q - q(0)\| + \frac{(M_p g + K_g)^2}{2}$$

y

$$\begin{split} V_1(\dot{q}) &= \frac{\dot{q}^T M(q) \dot{q}}{2}; \qquad V_2(q) = \frac{\mu k_{0\epsilon} (q - R_q)^T (q - R_q)}{2} \\ V_3(\widehat{\Omega}) &= \frac{\mu}{2\epsilon} \left[\begin{array}{cc} \widehat{\Omega}^T & \widehat{\Omega}^T \\ \widehat{\Omega}^T \end{array} \right] P \left[\begin{array}{cc} \widehat{\Omega}^T \\ \widehat{\Omega}^T \end{array} \right]. \end{split}$$

Segundo Paso: Se mostrará que que $\widehat{V}(\overline{\omega}) \geq 0$;

Ya que por A.1 se tiene $\mu k_{0\varepsilon} > 1$ y por la desigualdad (4.10) se garantiza $\hat{V}_1 \ge 0$, por otro lado aplicando la desigualdad $2ab \le a^2 + b^2$ a la expresión de \hat{V}_2 , se tiene:

$$\begin{split} \widehat{V}_{2}(\overline{\omega}) &= \frac{\mu \varepsilon_{0} \overline{k}_{\varepsilon} \widehat{q}^{T} \widehat{q}}{2} - \frac{\mu \varepsilon_{0} \widehat{q}^{T} \widehat{\Omega}}{\varepsilon} + V_{3}(\widehat{\Omega}); \\ &\geq \frac{\mu \varepsilon_{0} \overline{k}_{\varepsilon} \left\| \widehat{q} \right\|^{2}}{2} - \frac{\mu \varepsilon_{0} (\left\| \widehat{q} \right\|^{2} + \left\| \widehat{\Omega} \right\|^{2})}{2\varepsilon} + \frac{\mu \lambda_{m} \{P\} \left\| \widehat{\Omega} \right\|^{2}}{2\varepsilon}, \\ &\geq \frac{(\mu \varepsilon \varepsilon_{0} \overline{k}_{\varepsilon} - \mu \varepsilon_{0}) \left\| \widehat{q} \right\|^{2}}{2\varepsilon} + \frac{(\mu \lambda_{m} \{P\} - \mu \varepsilon_{0}) \left\| \widehat{\Omega} \right\|^{2}}{2\varepsilon}, \end{split}$$

entonces por A.1 y A.2 se garantiza que $\hat{V}_2 > 0$.

Tercer paso: Se procederá a calcular la derivada de (6.8).

Primero: Calculando la derivada de $\widehat{V}_1(\overline{\omega})$, usando $\int_0^T G^T(q(t)) \ q(t) dt = E_p(T) - E_p(0)$ ver [26] y el Lema 6 del capítulo cuatro, llegamos a lo siguiente:

$$\dot{\widehat{V}}_{1}(\overline{\omega}) = -\mu k_{1\varepsilon} \dot{q}^{T} \hat{q} - \mu k_{0\varepsilon} \dot{q}^{T} (\hat{q} - R_{q}) + \frac{\mu \varepsilon_{0} \dot{q}^{T} \hat{\Omega}}{\varepsilon} + \varepsilon_{0} \mu k_{0\varepsilon} \dot{q}^{T} \hat{q} + \mu k_{0\varepsilon} \dot{q}^{T} (\hat{q} - R).$$
(6.10)

Segundo: Calculando la derivada de cada término de $\dot{\hat{V}}_2$, usando (6.1) y notando que

$$\mu\varepsilon_{0}\overline{k}_{\varepsilon}\frac{d}{dt}(\hat{q}^{T}\hat{Q}) = \mu\overline{k}_{\varepsilon}\hat{q}^{T}\hat{q} - \mu\overline{k}_{\varepsilon}\|\hat{q}\|^{2};$$

$$-\frac{\mu\varepsilon_{0}}{\varepsilon}\frac{d}{dt}(\hat{q}^{T}\hat{\Omega}) = -\frac{\mu\varepsilon_{0}}{\varepsilon}(\frac{\hat{q}^{T}\hat{\Omega} - \hat{q}^{T}\hat{\Omega}}{\varepsilon_{0}} + \frac{\hat{q}^{T}\hat{\Omega}}{\varepsilon_{0}});$$

$$V_{3}(\hat{\Omega}) = -\frac{\mu(\|\hat{\Omega}\|^{2} + \|\hat{\Omega}\|^{2}}{\varepsilon},$$
(6.11)

Tercero: Sustituyendo (6.10) y cada término de (6.11) en la expresión de \hat{V} , tenemos:

$$\widehat{V}(\overline{\omega}) = -\mu \overline{k}_{\varepsilon} \left\| \widehat{q} \right\|^{2} + \frac{\mu \widehat{q}^{T} \widehat{\Omega}}{\varepsilon} - \frac{\varepsilon_{0} \mu \widehat{q}^{T} \widehat{\Omega}}{\varepsilon} - \frac{\mu(\|\widehat{\Omega}\|^{2} + \|\widehat{\Omega}\|^{2})}{\varepsilon}$$
(6.12)

Cuarto paso: Se encontrará una cota superior para \hat{V} . Aplicando que $2ab \leq (a^2 + b^2)$ en la última igualdad, tenemos:

$$\widehat{V}(\overline{\omega}) \le -\left(\mu \overline{k}_{\varepsilon} - \frac{\mu}{2\varepsilon} - \frac{\varepsilon_{0}\mu}{2\varepsilon}\right) \left\|\widehat{q}\right\|^{2} - \frac{\mu \|\widehat{\Omega}\|^{2}}{2\varepsilon} - \left(\frac{\mu}{\varepsilon} - \frac{\varepsilon_{0}\mu}{2\varepsilon}\right) \left\|\widehat{\Omega}\right\|^{2}$$

$$(6.13)$$

usando A.1 tenemos $\hat{V}(\overline{\omega}) \leq 0$. Puesto que \hat{V} es definida positiva y \hat{V} es semidefinida negativa, por lo que solo hemos probado estabilidad en el sentido de Lyapunov, *i.e.* el error de posición y la velocidad están acotados.

Quinto paso: Finalmente la \mathcal{AS} del punto de equilibrio $\overline{\omega}_e = (q^T = R_q^T, \dot{q} = 0, \widehat{\Omega}^T = 0, \widehat{\Omega}^T = 0, \widehat{q}^T = R_q^T)$ se sigue del Teorema de LaSalles. En efecto, definiendo el siguiente conjunto máximo invariante:

$$S = \left\{ \varpi \in R^{10} \left| \dot{\widehat{V}} \left(\overline{\omega} \right) = 0 \right. \right\} = \left\{ \varpi \in R^{10} \left| \varpi = \left[\begin{array}{ccc} c^T & 0 & 0 & c^T \end{array} \right] \right. \right\}$$

finalmente tomando cualquier trayectoria ϖ que pertenece a S entonces de (6.6) tenemos

$$\mu k_{0\varepsilon} \| (c - R_a) \| = \| G(c) - G(R_a) \| \le K_G \| (c - R_a) \|,$$

ahora de A.2 tenemos $\mu k_{0\varepsilon} > K_G$ y por lo tanto $c = R_q$. Por lo que, la única solución que puede estar en S para toda t es el punto de equilibrio. Entonces el sistema en lazo cerrado es \mathcal{AS} .

Prueba del Corolario 2:

Prueba: Primero desarrollaremos la ec. (6.2) de la siguiente forma:

$$\dot{\chi}_{1} = -k_{1}\chi_{1} + \chi_{2} - k_{0}\hat{x} - \beta \,\dot{\hat{x}},
\dot{\chi}_{2} = -k_{0}\chi_{1} - k_{0}\beta\hat{x} + (k_{0} - k_{1}\beta) \,\dot{\hat{x}},$$
(6.14)

estas ecuaciones son equivalentes a las siguientes dos ecuaciones de segundo orden:

$$\ddot{\chi}_1 + k_1 \dot{\chi}_1 + k_0 \chi_1 = -\beta \left(\ddot{\hat{x}} + k_1 \dot{\hat{x}} + k_0 \hat{x} \right),
\ddot{\chi}_2 + k_1 \dot{\chi}_2 + k_0 \chi_2 = (k_0 - k_1 \beta) \left(\ddot{\hat{x}} + k_1 \dot{\hat{x}} + k_0 \hat{x} \right)$$
(6.15)

Después procederemos a definir las variables auxiliares $h_1 = \chi_1 + \beta \hat{x}$, y $h_2 = (k_0 - k_1 \beta)\hat{x} - \chi$ así podemos reescribir las dos últimas ecuaciones como sigue

$$\ddot{h}_1 + k_1 \dot{h}_1 + k_0 h_1 = 0,
\ddot{h}_2 + k_1 \dot{h}_2 + k_0 h_2 = 0.$$
(6.16)

Luego de (6.16) tenemos que h_1, h_2 son Hurtwitz y por el Teorema6 tenemos que \widehat{x} es \mathcal{AS} . Por tanto χ_1 y χ_2 son \mathcal{AS} . En forma similar, podemos mostrar que ν es \mathcal{AS} .

Finalmente como χ y ν son \mathcal{AS} , concluimos que el control f_q dado en la ecuación (6.5) es \mathcal{AS} con respecto a el punto de equilibrio ϖ_e .

Capítulo 7:

Conclusiones y Perspectivas

7.1 Objetivos Alcanzados:

En este trabajo de tesis se obtuvieron los siguientes objetivos:

Primero Objetivo: En el capítulo dos se estudiaron las ecuaciones cinemáticas y dinámicas que rigen el comportamiento mecánico de un manipulador paralelo de dos grados de libertad¹. El principal objetivo del capítulo dos ha sido introducir el modelo dinámico del manipulador en forma vectorial dado por $M \ddot{q} + \Phi \dot{q} + G = f_q$ (ver las ecs. (2.12) a (2.16)) ,donde q y \dot{q} representan las posiciones y velocidades respectivamente, M es la matriz de inercia, Φ es la matriz de Coriolis, G es el vector de gravedad y f_q es el vector de fuerza. Cabe mencionar que existe una dualidad entre los robots en serie y paralelo (ver Lewis [22]) i.e. existe una analogía entre las propiedades mecánicas de las estructuras paralelas y las estructuras en serie. Por lo que la mayoría de las propiedades discutidas en el capitulo dos (ver sección 2.6) son análogas en los robots en serie.

Segundo Objetivo: En el capítulo tres se mostró que la energía cinética generada por la acción de control lineal (ver ecs. (3.3) a (3.6)) esta uniformemente acotada por una constante que esta directamente relacionada con las condiciones iniciales del sistema en lazo cerrado tales como posición , velocidad y estado inicial de la retroalimentación dinámica. Este hecho es importante ya que nos permite considerar al sistema en lazo cerrado como un sistema quazilineal i.e. como un sistema lineal variante en el tiempo o como un sistema invariante en el tiempo con una dinámica no lineal (ver ec. (3.15)). Cabe mencionar que en el trabajo realizado por M. Bonilla S.y Salazar (ver [15]), se probó que el sistema en lazo cerrado era exponencialemente estable en forma local usando el hecho que la energía cinética estaba uniformemente acotada por una constante $\Lambda(\varepsilon)$ (ver ecs. 3.24 y 3.25); pero este hecho tenia el inconveniente que $\Lambda(\varepsilon)$

Ya que ésta es la estructura básica fundamental de una plataforma de Stewart de seis grados de libertad

es inversamente proporcional al parámetro de control ε , por lo que se procedió en los siguientes capítulos a tomar en cuenta las propiedades de pasividad de los sistemas Euler Lagrange para probar estabilidad en lazo cerrado (ver [22],[5] y [36]).

Tercer Objetivo: El objetivo del capítulo cuatro fue estudiar la estabilidad del sistema en lazo cerrado, la prueba fue realizada utilizando la propiedad P.4, i.e. N=M $(q)-2\Phi(q,q)$. Cabe mencionar que aunque esta propiedad nos permite diseñar leyes de control localmente robusto para manipuladores en paralelo². En la literatura existente [22],[17],[18],[19] y [20] se han despreciado las fuerzas de Corilis y Centrífugas con el objetivo de simplificar el modelo y el número de ecuaciones, en este trabajo se ha preferido considerar a la plataforma de Stewart como tres triángulos independientes³ a fin de no despreciar importantes términos que permiten trabajar a la plataforma de Stewart a grandes velocidades. En base a P.4 se mostró la estabilidad asintótica y bajo ciertas condiciones sobre los parámetros de control se mostró estabilidad exponencial en el sentido local; dicha vecindad esta determinada por las condiciones iniciales del sistema en lazo cerrado(ver Teoremas 3 y 4).

Cuarto Objetivo: El objetivo principal del capítulo cinco fue encontrar condiciones suficientes para poder garantizar acoplamiento a modelo del sistema en lazo cerrado en el sentido local, este hecho es importante ya que nos permite considerar al sistema en lazo cerrado como un sistema lineal. Esto permite aplicar algoritmos de control clásicos para controlar fuerzas.

Quinto Objetivo: En el capítulo cinco se propone un esquema de control basado en la estimación de la velocidad a través de un reconstructor de estado de primer orden, la velocidad estimada se introduce en la ley de control propuesta en el capítulos tres (ver ecs.(3.3) a (3.6)), finalmente se mostró la estabilidad del sistema en lazo cerrado. Este hecho es importante ya que nos permite el poder controlar al sistema en lazo cerrado mediante la retroalimentación de la posición.

7.2 Bondades y Limitaciones

El algoritmo de control propuesto en el capitulo tres (ver sección 3.3) tiene las siguientes bondades:

- 1) Fácil de implementarse físicamente ya que la ley de control esta constituida por un control P.D. prealimentado y posmultiplicado por una ganancia.
- 2) No es necesario conocer con exactitud los valores de las constantes relacionadas con la estructura física del manipulador tales como K_G , K_{Φ} y $K_{\partial M}$, sino los valores que acotan estas ganancias, tampoco es necesario conocer con precisión los valores de las matrices de diseño.
 - 3) Es fácil de aplicar los Teoremas relacionados con la estabilidad y el acoplamiento a modelo. Ya

²i.e no es posible garantizar robustez en todo el espacio.

³ i.e no es posible garantizar robustez en todo el espacio.

que el problema se reduce a satisfacer un conjunto de desigualdades.

4) Siempre es posible escoger los polos del sistema y la rapidez de convergencia del error en lazo cerrado *i.e.* dado los parámetros fijos de control k_0 , k_1 y β siempre es posible encontrar el parámetro ε tal que se pueda garantizar estabilidad asintótica exponencial y acoplamiento a modelo ver los Teoremas 2, 3, 4 y 6).

Las limitaciones del esquema de control son las siguientes:

- 1) La principal limitación consiste en que en muchos casos podemos tener saturación en los actuadores debido a las altas ganancias generadas por el parámetro $1/\varepsilon$.
- 2) La ley de control lineal propuestas en el capítulo tres (ver ecs. (3.3) a (3.6)) asume el conocimiento sobre el vector de gravedad. En realidad este hecho puede ser resuelto añadiendo la parte integral del error.

7.3 Perspectivas

- 1) Incluir todos los términos que se generan cuando se propone un P.D. prealimentado *i.e.* esto es considerar todas las dinámicas generadas y de esta forma evitar compensar el vector de gravedad " $G(R_q)$ " (ver ecs. (3.5) y (3.7)).
- 2) Incluir el problema de cinemática inversa usando el hecho que se controlará la plataforma por medio de tres triangular independientes sujetos a perturbaciones externas debido principalmente a interacciones internas de sus fuerzas de Coriolis y centrífugas.
- 3) Diseñar una ley de control que incluya el control de fuerza, ya que la plataforma de Stewart estará sujeta a interacciones externas como fricción entre superficies las cuales pueden crear vibraciones no deseables.

Bibliografía:

- [1] Jose O. Leyva H."Máquinas de alta velocidad con corte medio de un mecanismo de seis grados de libertad", Instituto Tecnologico de Aguascalientes julio 1998.
- [2] Sergio Salazar "Control Lineal Implícito de un Manipulador Paralelo con dos Grados de Libertad" CINVESTAV del I.P.N S.C. a México D.F. dic. 1994.
- [3] D.Stewart, "A Platform with six Degree of Freedom" Proc. of the Instite for M.I. London, 1965, Vol. 180, pp.371-386.
- [4] K.M. Lee and D. K. Shah, "Kinematic Analisis for a Three-Degree-of-freedom-in-parallel Actuated Manipulator" IEEE J. of Robotics and Automation, 4, 354-360 (1998).
- [5] J. Albus, R. Bostelman, and N. Dagalak "The Nist Robocrane", Journal of Robotic System vol 10 No. 5 pp. 709-724 1993.
- [6] Z. Geng and L. S.Haynes "Six Degree-of-Freedom Active Vibration Isolation Using Platform Mechanism" Journal of Robotic System vol 10 No. 5 pp. 725-744 1993.
 Robotics and Automation, Sacramento, C.A. 1991, pp. 1873-1878.
- [7] M. Spong and M. Vidysagar "Robot Dynamics And Control" John Wilwy & Sons.
- [8] Berghuis H. and Nijmeijer H., "Observer design in the tracking control problem for Robots", Proc. IFAC Symp. NOLCOS 92, Bordeaux, France, June 1992, pp. 588-593.
- [9] Berghuis H. and Nijmeijer H., "Robust Control of Robots using only Position measurements", Proc. IFAC World Congress, Sydney, Australia, Vol. 1, July 1993, pp. 501-506.
- [10] Berghuis H and Nijmeijer H., "A Passivity approach to Controller-Observer design for Robots", IEEE Trans. Robot. Automat., Vol. 9, pp. 740-754, 1993.
- [11] Canudas de W. and N. Fixot, "Robot Control Via Robust Estimated State Feedback", IEEE Trans. Autom. Contr. Vol. 36, No. 12, 1991, pp. 1497-1501.

- [12] Canudas de W. and Slotine J.J.E. 'Sliding Observers for Robot Manipulators", Automatica, Vol. 27, No. 5, 1991, pp. 859-864.
- [13] Canudas de W., N. Fixot, and K.J. Astrom, "Trajectory Tracking in Robot Manipulators via Non-linear Estimated State Feedback", IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. 8, No. 1, 1992, pp. 138-144.
- [14] Nicosia S. and Tomei P., "Robot Control by using only Joint Position Measurements", IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. 35, No. 9, 1990, pp. 1058-1061.
- [15] M. Bonilla S. Salazar. Implicit Linear Control Law of a Parallel Manipulator with Two Degree of Freedom. Proceedings of the 3rd European Control Conference ECC95, pp. 2690-2695. Rome Italy, September 1995.
- [16] Merlet Jean-Pierre (1990) "Les Robots Parallels" Hermès, Paris 1990.
- [17] Nguyen, Pooran, Premack (1989) "Adaptive force/position Control of Robot Manipulators With Closed-Kinematic Chain Mechanism" in Robotics and Manufacturing: Recent Trends in Research Education, and Application. M. Jamshidi et al. Eds. ASME Press, New York, 1988.
- [18] C. Reboulet and Pigeyre "Hybrid control of a six-degree-of-freedom in parallel actuated micromanipulator mounted on a Sacara Robot," in robotics and Manufacturing, recent Trends in Research, Education, and application, M. Jamshidi and M. Saif, Eds., ASME press, New York, 1990, Vol., 3, pp. 293-298.
- [19] Nguyen, Pooran (1989) "Dynamic Analysis of a 6 DOF CKCM Robot End-effector for Dual-arm Telerobot Systems" J. of Robotics and Autonomous Systems, 5, 377-394.
- [20] Nguyen, Antrazi, Zhou, Campbell (1993) "Adaptive Control of a Stewart Platform-Based Manipulator" J. of Robotic Systems 10(5) 657-687
- [21] Fichter (1986) "A Stewart Platform-based manipulator: General theory and practical construction"

 Int. J. of Robotics Research 157-182
- [22] Lebret, Liu, Lewis (1993) "Dynamic Analysis and Control of a Stewart Platform Manipulator" J. of Robotic Systems 10(5).
- [23] Lewis, Abdallah and Dawson "Control Of Robot Manipulators" Macmillan Publisishing Company
- [24] Dawson and F. Lewis "Robust Control for Tracking of Robot Motion" Int. J. Control 1990, vol. 52, No. 3, pp. 581-595.

- [25] C. Reboulet and T. Berthomieu, "Dynamical Models of six Degree of Freedom Parallel manipulators Motion" Proc. of Conf. ICAR 91, Pise Italy 1153-1157, 1991.
- [26] M. Spong and M. Vidysagar "Robot Dynamics And Control" John Wilwy & Sons.
- [27] Koditschek "Natural Motion for Robot Arms" IEEE Conf. CDC, pp. 733-735, Dec. 1984
- [28] Slotine J. "Putting Physics in Control:the example of robotic" IEEE Sys. Mag. pp. 12-17, Dec. 1984.
- [29] Ortega R., and Spong M. "Adaptive Motion Control of Rigid Robots: Tutorial" IEEE Conf. CDC, pp. 1557-1584, Dec. 1988.
- [30] Hunt L. R. and G. Meyer "Global Transformations of Nonlinear Systems" IEEE TAC, vol. Ac 28, no. 1 pp. 24-31, Jan. 1983.
- [31] Gilbert E.G. and I.J. Ha. "An Aproach to nonlinear System Feedbak Control with Applications to Robotic" IEEE TSMS, vol. SMC-14, no. 6 pp. 879-884, Nov./Dec. 1984.
- [32] Arimoto, S., and F. Miyazaki, "Stability and Robustness of PID Feedbak Control for Robot Manipulators of Sensory Capability" Proc. First Int. Symp. pp. 783-799, MIT 1984.
- [33] Emr E. and Silverman L.H. "Partial Model Matching of Linear System" IEEE TAC, vol. Ac 25 no. 1 pp. 280-286, 1980.
- [34] Morse A. S. "System Invariant Under Feeback Cascade" Proc. Symp. Springer Verlag 1975.
- [35] C.Aguilar and M. Bonilla. "On The Boundedness of Kinetic Energy of a Two Degree of Freedom Manipulator", ACC pp. 927-928, Philadelphia, Pennsylvania, USA, June 1998.
- [36] C.Aguilar and M. Bonilla. "On a Stabilizable Implicit Control Law for Two Degree of Freedom Manipulator", to be published in ACC, June 1999.
- [37] C.Aguilar and M. Bonilla. "On a Exponential Model Matchig for a Two Degree of Freedom Manipulator", Submitted to the 38TH IEEE-CDC, March 1999.
- [38] M. Bonilla and Malabre. "Implemnting non Proper Control Law for Proper Systems" International Symposium of Implicit and Nonlinear System, SINS'92, Ft. Worth, U.S.A.
- [39] Nguyen, Pooran, Premack (1989) "Trajectory Control of Robot Manipulators with Closed-Kinematic Chain Mechanism" Proc. 20th Southeastern Symposium on System Theory, North Carolina.

- [40] Nguyen and Pooran, "Learning-based control of closed-kinematic chain robot end- effort performing repetitive task," Int. J. of Microcomputer Applications, 9,9-15(1990).
- [41] Nguyen, Z.L. Zhou, S.S. Antrazi, and C.E. Campbell, "Experimental study of motion control and trajectory planning for a Stewart platform robot manipulator," Proc. of the IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, Sacramento, C.A. 1991, pp. 1873-1878.
- [42] R. Martinéz-Guerra, A. Pozniack and V.Diaz de León, "Robustness Property of High-Gain Observers for Closed-Loop Nonlinear Systems: Theoretical Study and Robotics Control Application" to be submitted Systems Science 31 march 1999.
- [43] T.M. Apostol, "Análisis Matemático" segunda edición, edit. Reverté, S.A

Capítulo 8:

Anexo

8.1 C.Aguilar and M. Bonilla. "On The Boundedness of Kinetic Energy of a Two Degree of Freedom Manipulator", ACC pp. 927-928, Philadelphia, Pennsylvania, USA, June 1998.

8.2 C.Aguilar and M. Bonilla. "On a Stabilizable Implicit Control Law for Two Degree of Freedom Manipulator", to be published in ACC, June 1999.

8.3 C.Aguilar and M. Bonilla. "On a Exponential Model Matchig for a Two Degree of Freedom Manipulator", Submitted to the ${\bf 38}^{TH}{\bf IEEE\text{-}CDC}$, March 1999.