

Control en la esfera \mathbb{S}^2 usando modos deslizantes

Gian Carlo Gómez Cortés* Fernando Castaños Luna*
Jorge Angel Dávila Montoya**

* Control Automático, Cinvestav-IPN, Ciudad de México, México
(e-mail: ggomez@ctrl.cinvestav.mx, castanos@ieee.org).

** Sección de Estudios de Posgrado e Investigación, Instituto
Politécnico Nacional, ESIME-UPT, Ciudad de México, México
(e-mail: jadavila@ipn.mx).

Resumen: Se propone una ley de control por modos deslizantes para controlar la orientación reducida de un cuerpo rígido. Cada orientación reducida se representa por un elemento de la esfera bidimensional \mathbb{S}^2 . Dado que \mathbb{S}^2 es un espacio homogéneo con respecto a la acción del grupo $SO(3)$, la variedad deslizante se diseña de tal forma que también sea un espacio homogéneo, de tal suerte que ésta herede las características topológicas y algebraicas del espacio de estados. Por medio de esta ley de control se garantiza estabilidad casi global y robustez ante perturbaciones acotadas. El comportamiento del sistema bajo la acción de la ley de control propuesta se ilustra mediante simulaciones.

Keywords: Orientación reducida, modos deslizantes, estabilidad casi global, espacios homogéneos, grupos de Lie.

1. INTRODUCCIÓN

El control para la orientación de un cuerpo rígido ha sido tratado por diferentes autores (Markley y Cassidis, 2014; Sidi, 1997; Wen y Kreutz-Delgado, 1991). Este problema surge en diversas aplicaciones, algunas de las cuales son la orientación de naves espaciales, de vehículos submarinos, de antenas o la orientación del efector final de un robot (Pong y Miller, 2015; Schaub y Junkins, 2009; Murray et al., 1994).

Existen varias representaciones de la orientación que permiten abordar su problema de control (Wen y Kreutz-Delgado, 1991; Murray et al., 1994). Dependiendo de la aplicación, una representación puede ser mejor que otra. Por ejemplo, los ángulos de Euler brindan una interpretación física más clara de las rotaciones, sin embargo, la representación no es única ni global. Lo primero significa que existen diferentes secuencias de ángulos de Euler para lograr la misma orientación. Lo segundo se refiere a las singularidades que emergen cuando escribimos la cinemática rotacional (Schaub y Junkins, 2009). Otra representación popular se basa en cuaterniones, los cuales sí proporcionan una representación global, pero no única. Esta representación es útil para misiones que involucran maniobras con grandes ángulos debido a su carácter global aunque, por otra parte, la representación no es única debido a que existen dos cuaterniones para cada orientación (Schaub y Junkins, 2009; Markley y Cassidis, 2014). Además, el uso de representaciones no únicas produce

un fenómeno pernicioso llamado *unwinding* (Chaturvedi et al., 2011; Bhat y Bernstein, 2000).

Otra forma de expresar la orientación de un cuerpo rígido es por medio de matrices de rotación. Estas matrices forman el grupo $SO(3)$, definido como el conjunto de matrices $R \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ que satisfacen $RR^T = R^T R = I$ (I es la matriz identidad de tamaño 3) y $\det(R) = 1$. Las matrices de rotación representan la orientación de una manera global y única (Chaturvedi et al., 2011). La literatura relacionada con el problema de control de orientación utilizando la representación de $SO(3)$ se ha desarrollado en las últimas décadas. Actualmente se encuentran trabajos como el reportado por Bullo y Murray (1995), donde la estructura clásica del control proporcional-derivativo se construye tomando en cuenta la geometría de $SO(3)$ y de $SE(3)$. Otros estudios, como los presentados por Mahony et al. (2015) y por Bohn y Sanyal (2015); Sanyal et al. (2013), abordan el diseño de leyes de control que garantizan la robustez y la convergencia en tiempo finito, respectivamente. En Gómez-Cortés et al. (2019), presentamos el diseño de un controlador por modos deslizantes para $SO(3)$, mostrando que la superficie deslizante propuesta es un subgrupo de Lie. El principio de diseño contrasta con el enfoque tradicional, en el que la superficie deslizante se diseña como un subespacio lineal del espacio de coordenadas y que, por construcción, sólo garantiza las propiedades deseadas de forma local (ver Gómez-Cortés et al. (2019) para más detalles).

Aunque algunas aplicaciones requieren conocer la orientación completa del cuerpo, hay otras que no lo requieren. Por ejemplo, para apuntar una antena, un telescopio, o una nave espacial en cierta dirección, necesitamos orientar un eje específico. En estos casos, las rotaciones alrededor del eje que apunta no afectan la dirección de apuntado. Por lo tanto, solo se requiere información parcial de la orientación del cuerpo rígido y se puede considerar una representación simplificada llamada orientación reducida (Chaturvedi et al., 2011; Bullo et al., 1995).

La noción de orientación reducida parte de un vector $\Gamma \in \mathbb{S}^2$, donde \mathbb{S}^2 es la esfera bidimensional unitaria en \mathbb{R}^3 . Este vector representa la dirección del eje de apuntado, de tal suerte que el espacio de configuraciones es \mathbb{S}^2 . Uno de los estudios sobre el problema de control de la orientación reducida es el realizado por Chaturvedi et al. (2011), quienes definen el problema de control de la orientación reducida. Bullo et al. (1995) presentan una generalización del control PD clásico sin la necesidad de usar coordenadas locales. Pong y Miller (2015) desarrollan una ley de control para los problemas de apuntamiento, seguimiento y búsqueda. Chaturvedi y McClamroch (2009) estudian el problema de estabilizar un péndulo tridimensional invertido y proponen una ley de control no suave basada en la representación de la orientación reducida.

En la misma dirección, existen trabajos que abordan otros temas importantes, como la controlabilidad y la observabilidad (Brockett, 1972, 1973), y donde se consideran tanto sistemas definidos en variedades que poseen la estructura de grupo, como sistemas definidos en espacios cocientes u homogéneos. Los sistemas definidos sobre grupos de Lie son sistemas definidos en variedades que poseen la estructura de grupo, mientras que los sistemas en un espacio cociente u homogéneo se refieren a sistemas definidos sobre variedades que, si bien no admiten una estructura de grupo, su espacio de configuraciones tiene la forma $\mathcal{U} \simeq G/H$, donde G es un grupo de Lie, $H \subset G$ es un subgrupo y ‘ \simeq ’ indica la existencia de un difeomorfismo. En particular, los sistemas definidos en una esfera n -dimensional $\mathbb{S}^n = \{\Gamma \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \Gamma^\top \Gamma = 1\}$ no son grupos de Lie, excepto en los casos $n = 1$ y $n = 3$, pero sus espacios de configuración pueden escribirse de la forma $\mathbb{S}^n \simeq SO(n+1)/SO(n)$ (Brockett, 1972).

Un problema importante que se presenta al abordar el problema de control considerando representaciones como \mathbb{S}^2 o $SO(3)$, es la existencia necesaria de múltiples puntos de equilibrio. Esto implica la imposibilidad de realizar sistemas en lazo cerrado con estabilidad global (Koditschek, 1989; Chaturvedi et al., 2011; Bhat y Bernstein, 2000). Para hacer frente a esta situación, algunos trabajos como los de Bullo et al. (1995); Chaturvedi et al. (2011); Pong y Miller (2015); Mahony et al. (2015); Chaturvedi y McClamroch (2009), consideran la definición de estabilidad casi global dada por Koditschek (1989).

En este trabajo se considera el problema de control de la orientación reducida de un cuerpo rígido completamente actuado. Se propone una ley de control por modos deslizantes que garantiza estabilidad casi global y robustez ante perturbaciones acopladas. Motivados por nuestro trabajo previo (Gómez-Cortés et al., 2019), pero dado que ahora se considera un espacio de estados homogéneo, proponemos una variedad deslizante que sea un subespacio homogéneo, i.e., que preserve la estructura original del espacio de estados.

El resto de este trabajo se organiza de la siguiente manera: En la sección 2 se presentan las ecuaciones que modelan la orientación reducida y se describe el problema de control. Las características de la variedad deslizante, así como el controlador por modos deslizantes se describen en la sección 3. Algunos resultados de simulación para ilustrar el comportamiento del control propuesto se muestran en la sección 4. Finalmente, las conclusiones sobre el trabajo se presentan en la sección 5.

2. ORIENTACIÓN REDUCIDA Y FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

En esta sección se utilizan las ecuaciones de Euler para describir el movimiento de rotación de un cuerpo rígido capaz de proporcionar pares a lo largo de sus ejes principales. Después, se plantea el problema de control.

2.1 Modelo de orientación reducida

Los problemas donde se requiere apuntar un eje específico del cuerpo, como antenas, satélites y maniobras de apuntado de un telescopio, exigen sólo información parcial adquirida de la matriz de rotación. En tales casos, se puede usar una representación simplificada llamada orientación reducida. Se tomarán en cuenta dos marcos de referencia, uno fijo al cuerpo rígido y otro que comparte el origen con el marco fijo, pero que se mantiene alineado con los ejes principales del cuerpo. Este marco se llamará marco de referencia del cuerpo.

Se define la esfera bidimensional como

$$\mathbb{S}^2 = \{\Gamma \in \mathbb{R}^3 \mid |\Gamma| = 1\}. \quad (1)$$

De la ecuación (1), se tiene que $\Gamma^\top \Gamma = 1$. Al derivar esta expresión respecto al tiempo se obtiene $2\Gamma^\top \dot{\Gamma} = 0$, lo cual lleva a la expresión del espacio tangente a \mathbb{S}^2 en Γ ,

$$T_\Gamma \mathbb{S}^2 = \{\dot{\Gamma} \in \mathbb{R}^3 \mid \Gamma^\top \dot{\Gamma} = 0\}.$$

El conjunto de todos los espacio tangentes a \mathbb{S}^2 forma el fibrado tangente $T\mathbb{S}^2$.

Ahora, considere la definición de orientación reducida dada por Bullo et al. (1995) y Chaturvedi et al. (2011), i.e., $\Gamma = R^\top b$, donde $b \in \mathbb{S}^2$ es un vector alineado a un vector base de un marco de referencia fijo, $R \in SO(3)$ es una matriz de rotación que transforma componentes del marco de referencia del cuerpo al marco de referencia fijo y $\Gamma \in \mathbb{S}^2$ es el vector de orientación reducida, i.e. Γ representa a b en el marco de referencia del cuerpo. En

este caso, se dice que $SO(3)$ actúa sobre \mathbb{S}^2 . Además esta acción es transitiva, ya que para cualquier par de puntos b y Γ existe una R tal que $\Gamma = R^\top b$ (Lee, 2003).

Para determinar la cinemática $\dot{\Gamma}$ de la orientación reducida se considera primero la cinemática en términos de la matriz de rotación, i.e., $\dot{R} = R\Omega_\times$, donde $\Omega \in \mathbb{R}^3$ es la velocidad angular representada en el marco de referencia del cuerpo y la matriz anti simétrica Ω_\times es la imagen de Ω bajo el isomorfismo entre \mathbb{R}^3 y el álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$ (Gómez-Cortés et al., 2019). Tomando la derivada de Γ respecto al tiempo se obtiene

$$\dot{\Gamma} = \dot{R}^\top b = \Omega_\times^\top R^\top b = -\Omega_\times \Gamma = \Gamma \times \Omega. \quad (2)$$

De la ecuación (2) se observa que el par $(\Gamma, \dot{\Gamma})$ pertenece al fibrado tangente TS^2 pues Γ es ortogonal a $\dot{\Gamma}$. La ecuación (2) representa la cinemática de la orientación reducida.

A partir de ahora, supongamos un cuerpo rígido capaz de proporcionar pares a lo largo de sus ejes principales, de manera que la dinámica en el espacio de estados, $\mathcal{M} = \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^3$, se describe mediante las ecuaciones

$$\begin{aligned} J\dot{\Omega} &= (J\Omega) \times \Omega + u + D \\ \dot{\Gamma} &= \Gamma \times \Omega \end{aligned}, \quad (3)$$

donde J es la matriz de inercia rotacional, la cual es simétrica, definida positiva y se expresa en el marco de referencia del cuerpo. El vector $u \in \mathbb{R}^3$ es el control y $D \in \mathbb{R}^3$ representa perturbaciones tales que $\delta > |D|$ con $\delta > 0$.

2.2 Formulación del problema

Ahora se planteará el problema de regulación. Para esto suponemos que la orientación reducida deseada es $\Gamma_d \in \mathbb{S}^2$. Se consideran dos definiciones para el error de la orientación reducida. La primera surge de las propiedades del producto punto y está dada por $\theta = \arccos(\Gamma^\top \Gamma_d)$, de donde se observa que $\theta = 0$ si $\Gamma = \Gamma_d$ y $\theta = \pi$ si $\Gamma = -\Gamma_d$. La segunda definición de error, propuesta por Chaturvedi et al. (2011), está dada por el término $\Gamma \times \Gamma_d$. Utilizaremos la última definición para diseñar la superficie de deslizamiento en la sección 3. Ambas definiciones reflejan la naturaleza de los puntos de equilibrio que emergen para este tipo de sistemas, y que nos obligan a considerar la estabilidad casi global en lugar de la estabilidad global. Por ejemplo, considere el punto de equilibrio $(\Gamma, \Omega) = (\Gamma_d, 0)$. El error en la orientación reducida es $\Gamma \times \Gamma_d = 0$ para dicho punto. Sin embargo, si $\Gamma = -\Gamma_d$ el error de orientación también es cero. La existencia de más de un punto de equilibrio es una consecuencia de la topología del espacio de configuraciones y no de la definición particular que hemos elegido para el error (Bhat y Bernstein, 2000). Se busca entonces una ley de control u tal que $\theta \rightarrow 0$. Esto se verá en la sección 3.

3. CONTROL POR MODOS DESLIZANTES EN \mathbb{S}^2

En esta sección, se aborda el problema de control de orientación reducida a través del control por modos deslizantes, por lo que las soluciones del sistema en lazo cerrado (3) se entienden en el sentido de Filippov (Filippov, 1988; Utkin et al., 2009). Dado que el sistema (3) está definido como un espacio homogéneo, se busca que la variedad deslizante sea también un espacio homogéneo. Esta propiedad se muestra en la proposición 1.

3.1 La variedad deslizante como espacio homogéneo

Empezaremos recordando algunos conceptos sobre acciones de grupos de Lie. El lector interesado en los detalles puede consultar el libro de Lee (2003).

Sea G un grupo cuya identidad es el elemento e . La acción de G sobre un conjunto M es un mapa $G \times M \rightarrow M$. Representaremos a la acción por el símbolo ‘*’, es decir, $(g, p) \mapsto g * p$. Para que dicho mapa sea efectivamente una acción, debe satisfacer los siguientes axiomas:

1. Para todo $p \in M$, $e * p = p$.
2. Para cualesquiera elementos $g_1, g_2 \in G$ y $p \in M$, $g_1 * (g_2 * p) = (g_1 \cdot g_2) * p$.

Para un $p \in M$ fijo, definimos las órbitas

$$G * p = \{g * p \mid g \in G\} \subset M$$

y definimos el subgrupo de isotropías

$$G_p = \{g \mid g * p = p\} \subset G.$$

Dado un subgrupo $H \subset G$, definimos la clase lateral

$$g \cdot H = \{gh \mid h \in H\} \subset G.$$

Con G/H nos referimos al conjunto de clases laterales módulo H .

Decimos que una acción es transitiva si, para cualesquiera $p, q \in M$, existe una $g \in G$ tal que $g * p = q$. En otras palabras, la acción es transitiva si M consta de una sola órbita, en cuyo caso decimos que M es homogéneo con respecto de G . Sabemos que, si M es homogéneo con respecto a G , entonces M es difeomorfo al cociente G/G_p (escribimos $M \simeq G/G_p$), donde p es cualquier elemento de M (Lee, 2003, Cap. 9).

Consideremos ahora al espacio de estados $M = \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^3$ y al grupo $G = SO(3) \times \mathbb{R}^3$. La operación de grupo en M se define como

$$(R_1, \omega_1) \cdot (R_2, \omega_2) = (R_1 R_2, \omega_2 + \omega_1).$$

Sea $g = (R, \omega) \in G$ y $q = (\Gamma, \Omega) \in \mathcal{M}$. Definimos la acción $G \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ como

$$g * q = (R\Gamma, (\Gamma - R\Gamma) \times \Gamma_d + \Omega + \omega).$$

Es fácil verificar que el mapa satisface los dos axiomas y que la acción es transitiva. Por otra parte, consideremos al punto

$$p = (\Gamma_d, 0).$$

Como $G_p \simeq SO(2) \times \{0\}$ (hemos identificado a $SO(2)$ con el conjunto de rotaciones alrededor de Γ_d) y como la acción es transitiva,

$$M \simeq (SO(3) \times \mathbb{R}^3)/(SO(2) \times \{0\}) .$$

En otras palabras: Al ser homogéneo, el espacio de estados es difeomorfo a un espacio cociente.

Ahora se enuncia el resultado que describe la estructura de la variedad deslizante.

Proposición 1. *Considere la variedad deslizante $S \subset M$, definida por*

$$S = \{(\Gamma, \Omega) \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^3 \mid \Omega = -\Gamma \times \Gamma_d\} \quad (4)$$

y al subgrupo de Lie

$$H = SO(3) \times \{0\} .$$

(Note que $G_p \subset H \subset G$). Entonces, S es un espacio homogéneo con respecto a H . En otras palabras, la acción restringida $H \times S \rightarrow S$ es transitiva.

Demostración. Sean (Γ_1, Ω_1) y (Γ_2, Ω_2) dos elementos de S . Para mostrar que S es homogéneo con respecto a H , se debe encontrar un elemento $(R, 0) \in H$ tal que

$$(R, 0) * (\Gamma_1, \Omega_1) = (\Gamma_2, \Omega_2) . \quad (5)$$

Dado que ambos puntos están en S , la ecuación (5) toma la forma

$$(R, 0) * (\Gamma_1, -\Gamma_1 \times \Gamma_d) = (\Gamma_2, -\Gamma_2 \times \Gamma_d) ,$$

es decir,

$$(R\Gamma_1, (\Gamma_1 - R\Gamma_1) \times \Gamma_d - \Gamma_1 \times \Gamma_d) = (\Gamma_2, -\Gamma_2 \times \Gamma_d) . \quad (6)$$

Como $SO(3)$ actúa transitivamente sobre \mathbb{S}^2 , existe una $R \in SO(3)$ tal que $\Gamma_2 = R\Gamma_1$. La ecuación (6) se satisface claramente con dicha R . \square

El resultado anterior muestra que la variedad deslizante conserva las características topológicas del espacio de estados.

3.2 Alcanzabilidad de la variedad deslizante S

Con base en la técnica de control por modos deslizantes se propone una ley de control que garantiza la estabilidad casi global de los puntos de equilibrio requeridos. La siguiente proposición enuncia la convergencia a la superficie deslizante.

Proposición 2. *Considere la variable deslizante*

$$\sigma = \Gamma \times \Gamma_d + \Omega$$

y la ley de control

$$u = -K(\Omega) \frac{\sigma}{|\sigma|} , \quad K(\Omega) = k_1|\Omega|^2 + k_2|\Omega| + k_3 . \quad (7)$$

Entonces, para k_1 , k_2 y k_3 suficientemente grandes, el sistema en lazo cerrado (3) converge, para toda condición inicial, a la superficie deslizante definida en (4).

Demostración. Considere la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V_1(\sigma) = \frac{1}{2} \sigma^\top J \sigma . \quad (8)$$

Como J es definida positiva, tenemos $V_1(\sigma) \geq 0$ y $V_1(\sigma) = 0$ sólo si $\sigma = 0$. Por lo tanto, V_1 es definida positiva.

Tomando la derivada de V_1 respecto al tiempo se tiene

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(\sigma) &= \sigma^\top J \left(\dot{\Gamma} \times \Gamma_d + \dot{\Omega} \right) \\ &= \sigma^\top (J((\Gamma \times \Omega) \times \Gamma_d) + (J\Omega) \times \Omega + u + D) \\ &= \sigma^\top (\tau(\Omega, \Gamma, \Gamma_d, D) + u) , \end{aligned} \quad (9)$$

donde

$$\tau(\Omega, \Gamma, \Gamma_d, D) = (J\Omega) \times \Omega + J((\Gamma \times \Omega) \times \Gamma_d) + D .$$

Escogiendo las ganancias k_i para mayorar los términos cuadrático, lineal y constante que en Ω tiene τ , podemos garantizar que

$$K(\Omega) > |\tau(\Omega, \Gamma, \Gamma_d, D)| + \xi$$

para algún $\xi > 0$. Luego,

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(\sigma) &\leq -|\sigma| (K(\Omega) - |\tau(\Omega, \Gamma, \Gamma_d, D)|) \\ &\leq -\xi |\sigma| \\ &\leq -\xi \sqrt{\frac{2V_1(\sigma)}{\lambda_{\max}(J)}} . \end{aligned}$$

Por el lema de comparación se tiene que $V_1 \rightarrow 0$ y, por lo tanto, $\sigma \rightarrow 0$ en tiempo finito. Es más, S se alcanza en el tiempo

$$t_s \leq \frac{2}{\xi} \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(J)V_1(\sigma_0)}{2}} .$$

\square

3.3 Estabilidad del sistema de orden reducido

Una vez que se alcanza la variedad deslizante, el sistema (3) será confinado a la región donde $\Gamma \times \Gamma_d + \Omega = 0$ u $\Omega = \Gamma_d \times \Gamma$, lo que define al sistema de orden reducido

$$\dot{\Gamma} = -\Gamma \times (\Gamma \times \Gamma_d) . \quad (10)$$

Por las propiedades del doble producto vectorial, la ecuación (10) puede también escribirse como

$$\dot{\Gamma} = -\Gamma(\Gamma^\top \Gamma_d) + \Gamma_d . \quad (11)$$

Para estudiar al sistema (11), se considera la función candidata de Lyapunov

$$V_2(\Gamma) = 1 - \Gamma^\top \Gamma_d ,$$

la cual satisface $V_2(\Gamma) \geq 0$ y $V_2(\Gamma) = 0$ sólo si $\Gamma = \Gamma_d$. Tomando la derivada de V_2 respecto al tiempo y usando (11), se obtiene

$$\dot{V}_2(\Gamma) = \dot{\Gamma}^\top \Gamma_d = (\Gamma(\Gamma^\top \Gamma_d) - \Gamma_d)^\top \Gamma_d ,$$

de donde resulta inmediato que

$$\dot{V}_2(\Gamma) = - (1 - (\Gamma^\top \Gamma_d)^2) ,$$

por lo que $\dot{V}_2(\Gamma) \leq 0$ y $\dot{V}_2(\Gamma) = 0$ sólo si $\Gamma = \Gamma_d$ o $\Gamma = -\Gamma_d$. Aplicando el teorema de LaSalle (Bullo y Lewis, 2004; Khalil, 2002), se mostrará que Γ converge al conjunto

$$\tilde{\mathcal{E}} = \{ \Gamma \in \mathbb{S}^2 \mid \dot{V}_2(\Gamma) = 0 \} = \{ \Gamma_d, -\Gamma_d \} .$$

Como $\tilde{\mathcal{E}}$ está compuesto de puntos de equilibrio, se trata de un conjunto invariante. Luego, todas las trayectorias convergen a $\tilde{\mathcal{E}}$.

Es posible estabilizar casi globalmente el sistema en el punto de equilibrio deseado mediante la ley de control (7). Este resultado se presenta en la proposición 3. La prueba se realiza usando el teorema de inestabilidad de Chetaev (Khalil, 2002).

Proposición 3. *Para cualquier condición inicial*

$$(\Gamma_0, \Omega_0) \neq (-\Gamma_d, 0),$$

las trayectorias del sistema (3) convergen al punto de equilibrio deseado $(\Gamma_d, 0)$, i.e. el punto de equilibrio es casi global y asintóticamente estable.

Demostración. Como el punto de equilibrio $(-\Gamma_d, 0)$ se encuentra sobre la superficie S , su comportamiento se puede estudiar por medio del sistema de orden reducido (10). Se define el conjunto

$$\mathcal{G} := \{\Gamma \in \mathbb{S}^2 \mid \Gamma^\top \Gamma_d \in (-1, 1)\} \quad (12)$$

Se elige una función candidata de Chetaev

$$\mathcal{C}(\Gamma) = \pi - \arccos(\Gamma^\top \Gamma_d) \quad (13)$$

Note que $\mathcal{C}(\Gamma) > 0$ en \mathcal{G} y $\mathcal{C}(\Gamma) = 0$ en el punto frontera $\Gamma = -\Gamma_d$. Tomando la derivada de \mathcal{C} respecto al tiempo, se tiene

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{C}}(\Gamma) &= \frac{\dot{\Gamma}^\top \Gamma_d}{\sqrt{1 - (\Gamma^\top \Gamma_d)^2}} \\ &= \frac{(-\Gamma(\Gamma^\top \Gamma_d) + \Gamma_d)^\top \Gamma_d}{\sqrt{1 - (\Gamma^\top \Gamma_d)^2}} \\ &= \sqrt{1 - (\Gamma^\top \Gamma_d)^2} \end{aligned}$$

Note que $\dot{\mathcal{C}}(\Gamma) > 0$ en \mathcal{G} y, por lo tanto, del teorema de Chetaev se concluye que $\Gamma = -\Gamma_d$ es inestable. Este resultado, junto con la convergencia hacia $\tilde{\mathcal{E}}$, garantizan que todas las trayectorias del sistema en lazo cerrado (3) convergen al punto de equilibrio deseado $(\Gamma_d, 0)$, excepto para la condición inicial $(-\Gamma_d, 0)$. \square

3.4 Dinámica del error angular

Previamente se mostró que, mediante el control (7), se llega al sistema de orden reducido (10). Por otra parte, los vectores de orientación reducida Γ y Γ_d forman el ángulo θ . Ahora nos interesamos en la forma en la que este ángulo cambia cuando las trayectorias se encuentran sobre la variedad deslizante. Para describir esta situación, se considera el producto interno $\Gamma^\top \Gamma_d = \cos \theta$ y la condición de deslizamiento $\Omega = \Gamma_d \times \Gamma$.

Derivando $\Gamma^\top \Gamma_d = \cos \theta$ respecto al tiempo, se obtiene

$$\frac{d}{dt}(\Gamma^\top \Gamma_d) = -\sin \theta \dot{\theta} = \dot{\Gamma}^\top \Gamma_d. \quad (14)$$

Considerando una vez más las identidades para el triple producto vectorial y para el producto escalar, y sustituyendo las ecuaciones (3) y $\Omega = \Gamma_d \times \Gamma$ en la ecuación (14), se obtiene

$$-\sin \theta \dot{\theta} = 1 - (\Gamma^\top \Gamma_d)^\top = \sin^2 \theta$$

La dinámica que obedece el ángulo θ sobre la variedad deslizante es

$$\dot{\theta} = -\sin \theta.$$

Este resultado reafirma que el punto de equilibrio deseado es casi global y asintóticamente estable. Lo anterior concuerda con lo presentado anteriormente (Gómez-Cortés et al., 2019), donde además se ilustran los problemas que surgen cuando se elige una superficie deslizante lineal para un sistema cuyo espacio de configuración no es euclidiano.

4. SIMULACIONES

En esta sección se presentan los resultados de algunas simulaciones que permiten observar la acción del controlador (7) para el problema de regulación. Para las simulaciones se empleó el método de Euler con un paso $h=0.0001$ en Simulink. Suponemos una matriz de inercia

$$J = \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0,9 \\ 0 & 17 & 0 \\ 0,9 & 0 & 15 \end{bmatrix}.$$

Las perturbaciones están dadas por

$$D^\top = (\sin(5\pi t) \cos(7\pi t) \sin(9\pi t)).$$

La orientación reducida inicial se toma como $\Gamma_0^\top = (0, 0, -1)$ y es obtenida a partir de $b^\top = (0, 0, 1)$ y de la matriz diagonal $R \in SO(3)$ dada por $R = \text{diag}(1, -1, -1)$. Se desea alcanzar una orientación diametralmente opuesta $\Gamma_d^\top = (0, 0, 1)$. Las velocidades angulares reales iniciales se eligen como $\Omega_0^\top = (-0,8, -0,3, -0,5)$ y se desea una velocidad angular $\Omega_d^\top = (0, 0, 0)$. Con las condiciones iniciales consideradas, el sistema (3) inicia su movimiento cerca del punto de equilibrio inestable $(-\Gamma_d, \Omega_d) \approx (\Gamma_0, \Omega_0)$. Las ganancias del controlador se eligen como $k_1 = k_2 = k_3 = 22$, de modo que $K(\Omega) > \tau(\Omega, \Gamma, \Omega_d, D)$.

Los pares de control u se muestran para diferentes instantes de tiempo en la figura 1, donde se puede apreciar la presencia de *chattering*. La figura 2 muestra como las velocidades angulares convergen a cero después de un tiempo. El error de la orientación para diferentes instantes de tiempo se presenta en las figuras 3 y 4. La primera muestra la magnitud $|\Gamma \times \Gamma_d|$ que corresponde a una de las representaciones consideradas para definir el error en la orientación reducida. Esta magnitud es igual a cero cuando Γ y Γ_d son paralelas y $|\Gamma \times \Gamma_d| = 1$ cuando Γ y Γ_d son ortogonales. La segunda de estas figuras representa el ángulo entre los vectores Γ y Γ_d en diferentes instantes del tiempo. Al inicio, $\theta = \pi$ pues Γ y Γ_d apuntan en direcciones opuestas. Se puede observar que después de un tiempo θ converge a cero.

La figura 5 muestra como las trayectorias Γ del sistema (3) llegan hasta la orientación reducida deseada Γ_d sobre \mathbb{S}^2 y se mantienen en ella. Finalmente, la figura 6 ilustra

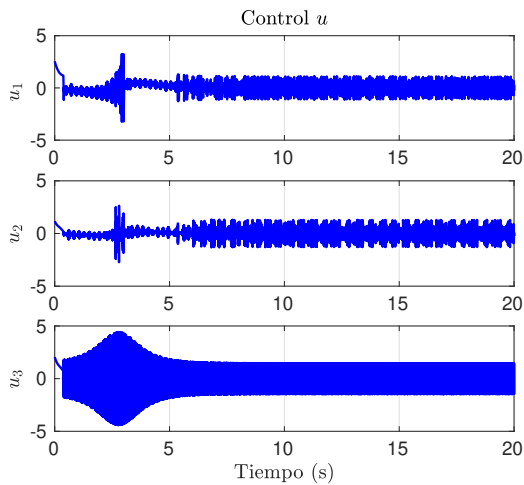


Figura 1. Ilustración de los pares de control u en diferentes instantes de tiempo, obtenidos para esta simulación por medio del control (7).

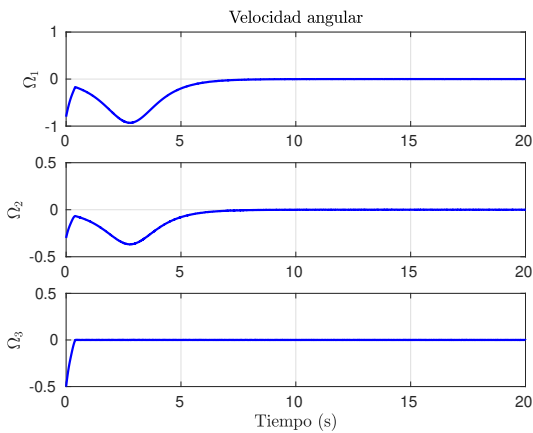


Figura 2. Ilustración de las velocidades angulares. Se puede notar que después de un tiempo estas convergen a cero.

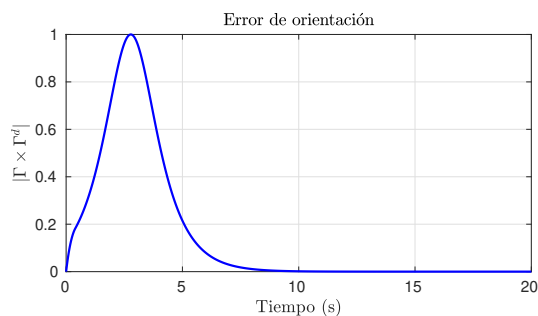


Figura 3. Error de la orientación en términos de la magnitud de $\Gamma \times \Gamma_d$. El error es igual a cero tanto en la posición puesta como en la deseada.

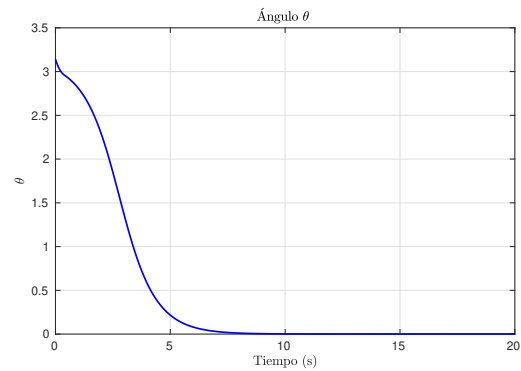


Figura 4. Error de la orientación en términos de θ .

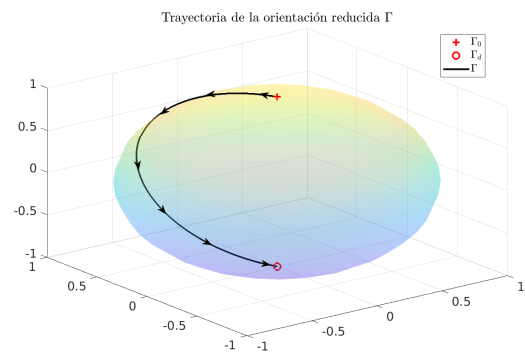


Figura 5. Ilustración del recorrido de Γ sobre la esfera \mathbb{S}^2 hasta alcanzar la orientación deseada Γ_d . La cruz indica el punto de inicio de la maniobra y el círculo la orientación reducida deseada.

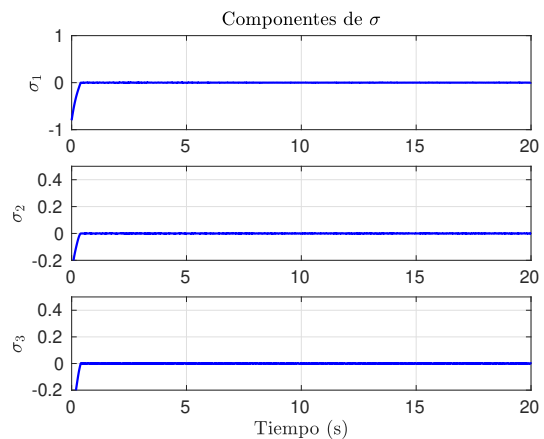


Figura 6. Componentes de del vector σ .

la evolución de las componentes de σ , $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ en diferentes instantes de tiempo.

5. CONCLUSIONES

En este trabajo, se estudió el problema del control de la orientación reducida para un cuerpo rígido completamente actuado. Como resultado principal, se mostró que la

variedad deslizante S propuesta es un espacio homogéneo respecto al subgrupo de Lie H , y por lo tanto hereda las características topológicas y algebraicas del espacio de estados. Por medio del controlador por modos deslizantes (7), el sistema (3) sigue las trayectorias deseadas. Se mostró que para casi cualquier condición inicial, la acción del controlador permite resolver el problema de regulación; para ello se utilizó la teoría de estabilidad de Lyapunov, obteniéndose resultados de estabilidad asintótica casi global. La ley de control propuesta es robusta ante perturbaciones acopladas. Por último, se presentaron los resultados de simulaciones que ilustran la acción del controlador propuesto.

Como trabajos a futuro se consideran la extensión para el caso de seguimiento; el uso de una discretización como la presentada en (Acary y Brogliato, 2010) para evitar las oscilaciones debidas al uso del método de Euler; y la aplicación de los mismos principios a sistemas definidos en otras variedades homogéneas.

REFERENCIAS

- Acary, V. y Brogliato, B. (2010). Implicit Euler numerical scheme and chattering-free implementation of sliding mode systems. *Systems & Control Letters*, 59(5), 284 – 293. doi:10.1016/j.sysconle.2010.03.002.
- Bhat, S.P. y Bernstein, D.S. (2000). A topological obstruction to continuous global stabilization of rotational motion and the unwinding phenomenon. *Systems and Control Lett.*, 39, 63 – 70. doi:10.1016/S0167-6911(99)00090-0.
- Bohn, J. y Sanyal, A.K. (2015). Almost global finite-time stabilization of rigid body attitude dynamics using rotation matrices. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 26(9), 2008 – 2022. doi:10.1002/rnc.3399.
- Brockett, R.W. (1972). System theory on group manifolds and coset spaces. *SIAM Journal on Control*, 10(2), 265–284. doi:10.1137/0310021.
- Brockett, R.W. (1973). Lie theory and control systems defined on spheres. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 25(2), 213 – 225. doi:10.1137/0125025.
- Bullo, F., Murray, R., y Sarti, A. (1995). Control on the sphere and reduced attitude stabilization. *IFAC Proceedings Volumes*, 28(14), 495 – 501. doi:10.1016/s1474-6670(17)46878-9.
- Bullo, F. y Lewis, A.D. (2004). *Geometric Control of Mechanical Systems*. Springer-Verlag, New York.
- Bullo, F. y Murray, R.M. (1995). Proportional derivative (PD) control on the Euclidean group. In *European Control Conference*, volume 2, 1091 – 1097. Rome, Italy.
- Chaturvedi, N. y McClamroch, H. (2009). Asymptotic stabilization of the inverted equilibrium manifold of the 3-d pendulum using non-smooth feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 54(11), 2658–2662. doi:10.1109/tac.2009.2031570.
- Chaturvedi, N.A., Sanyal, A.K., y McClamroch, N.H. (2011). Rigid-body attitude control. *IEEE Control Syst. Mag.*, 31, 30 – 51. doi:10.1109/MCS.2011.940459.
- Davila, J.A. y Gómez-Cortés, G.C. (2013). Attitude control of spacecraft using robust backstepping controller based on high order sliding modes. *AIAA Guidance, Navigation, and Control (GNC) Conference*. doi:10.2514/6.2013-5121.
- Filippov, A.F. (1988). *Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands.
- Gómez-Cortés, G., Castaños, F., y Dávila, J. (2019). Sliding motions on SO(3), sliding subgroups. Eprint <https://arxiv.org/abs/1905.05753>.
- Khalil, H.K. (2002). *Nonlinear systems*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ.
- Koditschek, D.E. (1989). The application of total energy as a lyapunov function for mechanical control systems. *Dynamics and Control of Multibody Systems Contemporary Mathematics*, 131 – 157. doi:10.1090/conm/097/1021035.
- Lee, J.M. (2003). *Introduction to smooth manifolds*. Springer, New York.
- Mahony, R., Hamel, T., y Marconi, L. (2015). Adding an integrator for output regulation of systems with matrix lie-group states. *2015 American Control Conference (ACC)*. doi:10.1109/acc.2015.7171956.
- Markley, F.L. y Cassidis, J.L. (2014). *Fundamentals of spacecraft attitude determination and control*. Springer-Verlag, New York.
- Murray, R.M., Li, Z., y Sastry, S. (1994). *A mathematical introduction to robotic manipulation*. CRC, Boca Raton, Florida.
- Pong, C.M. y Miller, D.W. (2015). Reduced-attitude boresight guidance and control on spacecraft for pointing, tracking, and searching. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 38(6), 1027 – 1035. doi:10.2514/1.g000264.
- Sanyal, A.K., Bohn, J., y Bloch, A.M. (2013). Almost global finite time stabilization of rigid body attitude dynamics. *52nd IEEE Conference on Decision and Control*. doi:10.1109/cdc.2013.6760381.
- Schaub, H. y Junkins, J.L. (2009). *Analytical Mechanics of Space Systems*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, Virginia.
- Sidi, M.J. (1997). *Spacecraft dynamics and control: a practical engineering approach*. Cambridge University Press.
- Utkin, V.I., Jürgen, G., y Shi, J. (2009). *Sliding mode control in electro-mechanical systems*. CRC Press, Boca Raton.
- Wen, J.Y. y Kreutz-Delgado, K. (1991). The attitude control problem. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36(10), 1148 – 1162. doi:10.1109/9.90228.