Generalización Homogénea del Problema de Lur'e y del Criterio del Círculo

Emanuel Rocha * **Jaime A. Moreno** ** **Fernando Castaños** *

* *Departamento de Control Automático, Cinvestav-IPN, 07360 Ciudad de México, México (e-mail: {erocha, fcastanos}@ctrl.cinvestav.mx).*
** *Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, 04510 Ciudad de México, México (e-mail: jmorenop@iingen.unam.mx)*

Resumen. Los sistemas homogéneos son una generalización interesante de los sistemas lineales; comparten con los lineales muchas de las propiedades que los hacen útiles en el análisis de sistemas más complejos y, por otro lado, presentan dinámicas más ricas. Se plantea en este artículo una generalización del problema de Lur'e de estabilidad absoluta mediante el análisis de sistemas homogéneos. Se presentan, además, extensiones de las conjeturas de Aizerman y Kalman, y la correspondiente generalización del Teorema del círculo.

Keywords: Estabilidad absoluta, Sistemas homogéneos, Problema de Lur'e, Criterio del Círculo.

1. INTRODUCCIÓN

Hoy en día resulta clara la imposibilidad de construir una teoría general de sistemas no lineales, lo que nos obliga a centrar nuestra atención en ciertas clases de sistemas y desarrollar modelos y algoritmos de control adaptados a cada clase. En este artículo nos enfocamos en la clase de sistemas homogéneos, aunque el objetivo final es modelar y controlar sistemas que no necesariamente sean homogéneos. En cierto sentido buscamos ampliar algunos de los aciertos que ha logrado la teoría de sistemas lineales con respecto al modelado y control de sistemas físicos complejos que pudieran eventualmente ser no lineales.

La familia de sistemas homogéneos se presenta como una alternativa interesante porque, por un lado, contiene estrictamente a la clase de sistemas lineales y, por otro lado, permite el análisis de comportamientos realmente no lineales mediante el uso de herramientas analíticas que se han ido refinando con el paso del tiempo. En general, un modelo homogéneo puede aproximar a un sistema dado con un orden de precisión mayor al de un modelo lineal. Conviene usar modelos homogéneos cuando, por ejemplo, trabajamos con sistemas no lineales cuyas aproximaciones lineales no conservan propiedades fundamentales como la controlabilidad o la estabilizabilidad, pero que sí se preservan en aproximaciones homogéneas de mayor orden. Por otro lado, los sistemas homogéneos dan lugar a objetivos de control más ambiciosos, como la estabilización en tiempo finito, la cual no es posible dentro de un contexto puramente lineal. Los controladores homogéneos, desarrollados dentro del marco del control por modos deslizantes, tienen también propiedades de robustez particularmente atractivas.

Un resultado importante en teoría de sistemas lineales nace del estudio de la estabilidad de un sistema lineal en interconexión con una función no lineal sin memoria, esto es, del análisis de la estabilidad de sistemas tipo Lur'e. Cuando un sistema de esta naturaleza es estable para toda una clase de no linealidades, hablamos de *estabilidad absoluta*. Desde su planteamiento (Lur'e, 1944), el problema de Lur'e ha acaparado la atención de la comunidad de control, en parte porque permite analizar la estabilidad de sistemas con incertidumbres o cambios en sus características, en parte por sus conexiones importantes con la teoría de pasividad y en parte por su rol en el diseño de observadores no lineales. La estabilidad absoluta es, sin duda, una propiedad importante que ha permeado la literatura en el ámbito del control automático y cuya extensión a sistemas más generales resulta sumamente atractiva.

Este artículo está organizado del siguiente modo: la Sección 2 provee de información necesaria para el resto del trabajo. La Sección 3 plantea de forma breve la generalización de las bien conocidas conjeturas de Aizerman y Kalman, a manera de motivación. La Sección 4 contiene una versión generalizada del criterio del círculo, y un ejemplo de su aplicación se muestra en la Sección 5. Finalmente, se presenta la conclusión del artículo en la Sección 6.

2. PRELIMINARES

A continuación presentamos los conceptos de función homogénea, campo vectorial homogéneo y función de Lya-

⋆ CONACYT CVU 627584.

punov homogénea. A lo largo de este artículo, el término homogéneo hace referencia al concepto de *homogeneidad ponderada* (Sepulchre, 1996; Bacciotti, 2006; Grüne, 2000). Comenzamos definiendo el concepto de dilatación.

Definición 1. (Dilatación) A un mapa

$$\delta_\varepsilon^r x = (\varepsilon^{r_1} x_1, \ldots, \varepsilon^{r_n} x_n)^T, \qquad \forall\, \varepsilon > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

se le llama dilatación sobre $\mathbb{R}^n$, donde $r = (r_1, r_2, \ldots, r_n)^T$ y $0 < r_i < \infty$, $i = 1, 2, \ldots, n$. A los valores de r_i se les conoce como pesos de las coordenadas.

Definición 2. (Función Homogénea) Se dice que una función $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es homogénea de grado $\sigma \in \mathbb{R}$ con respecto a $\delta_\varepsilon^r x$, esto se denota $h \in H_\sigma$, si

$$h(\delta_\varepsilon^r x) = \varepsilon^\sigma h(x).$$

Definición 3. (Sistema homogéneo) Un sistema

$$\dot{x} = f(x, u) \tag{1}$$

donde $u \in \mathbb{R}^m$ es el vector de entrada y $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado, $m < n$, se dice homogéneo de grado τ con respecto a las dilataciones $\delta_\varepsilon^r x$ y $\delta_\varepsilon^s u$ o, de forma equivalente, $f \in \underline{n}_\tau$, si

$$f(\delta_\varepsilon^r x, \delta_\varepsilon^s u) = \varepsilon^\tau \delta_\varepsilon^r f(x, u). \tag{2}$$

Note que un campo vectorial $f(x, u(x)) = \sum_{j=1}^n f_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ es homogéneo de grado τ si y solo si cada componente f_j es una función homogénea de grado $(\tau + r_j)$ con respecto a la dilatación $\delta_\varepsilon^r x$. Por lo tanto, en particular, un campo vectorial lineal (como en el sistema lineal $\dot{x} = Ax + Bu$) se dice que es homogéneo de grado cero con respecto a la *dilatación estándar* (esto es $r = (1, 1, \ldots, 1)^T$).

A continuación, se define el concepto de función de Lyapunov homogénea y el teorema que garantiza su existencia cuando un sistema homogéneo es asintóticamente estable.

Definición 4. (Función de Lyapunov homogénea) A una función (homogénea) C^1 propia y definida positiva $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ se le llama función de control de Lyapunov (homogénea) para el sistema (1) si $\exists\, u \in \mathbb{R}^m$ tal que

$$\nabla V(x) f(x, u) < 0.$$

Teorema 1. [Rosier (1992)] Sea $f(x, u(x))$ un campo vectorial continuo sobre $\mathbb{R}^n$ tal que el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable. Suponga que $f \in \underline{n}_\tau$, para algún $r \in (0, \infty)^n$. Entonces, para cualquier entero positivo p y cualquier $m > p \cdot \text{máx}_i\{r_i\}$, existe una función de Lyapunov homogénea $V \in H_m$ para el sistema (1) que es de clase C^p. Como consecuencia directa, la derivada con respecto al tiempo $\dot{V} = \nabla V f \in H_{m+\tau}$.

3. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

De manera significativa, el progreso para resolver el problema de Lur'e de estabilidad absoluta se relaciona con algunas conjeturas que han sido planteadas pero que permanecen sin confirmar o que han sido rechazadas mediante contraejemplos, pero que han influido para alcanzar la solución del problema. A manera de recordatorio, escribimos la formulación de las conjeturas de Aizerman y de Kalman.

Considere el siguiente sistema en interconexión (Sistema de Lur'e).

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{3}$$
$$y = Cx + du \tag{4}$$
$$u = -\psi(t, y) \tag{5}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$ son, respectivamente, los vectores de estado, la entrada y la salida. Los valores de A, B, C y d son constantes. La conexión de realimentación (5) está dada por una función no lineal sin memoria que satisface una *condición de sector*, esto es $\psi \in [k_1, k_2]$, y se dice que ψ pertenece al sector $[k_1, k_2]$, si satisface

$$[\psi(t, y) - k_1 y]\,[\psi(t, y) - k_2 y] \leq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \tag{6}$$

donde k_1, k_2 son tales que $k_2 > k_1$.

El sector también puede estar definido por $[k_1, \infty]$ si

$$y\,[\psi(t, y) - k_1 y] \geq 0 \quad \forall\, t \in \mathbb{R}_+, \quad \forall\, y \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

Considere ahora una función lineal en el sector $[k_1, k_2]$, en lugar de la función no lineal $\psi(t, y)$ en el sistema (3)-(5):

$$\psi(t, y) = ky, \quad k \in [k_1, k_2].$$

Suponga que el sistema obtenido de este modo es estable asintóticamente sin importar la elección de $k \in [k_1, k_2]$. La conjetura de Aizerman (1949) establece, de forma resumida, que el sistema en lazo cerrado es absolutamente estable, esto es, que el origen es estable asintóticamente de manera global y uniforme para cualquier no linealidad ψ en el sector $[k_1, k_2]$. Como es bien sabido, la conjetura es falsa. Sin embargo, es importante desde el punto de vista teórico, pues nos lleva naturalmente a preguntarnos '¿Qué propiedades adicionales debe satisfacer el sistema lineal para que la conjetura sea cierta?'.

Por otro lado, hacemos un recordatorio de la conjetura de Kalman (1957), la cual, *grosso modo*, establece que el sistema (3)-(5) es absolutamente estable si se cumplen las siguientes condiciones:

K.I. La función $\psi(y)$ es diferenciable y es tal que
$$k_1 < \psi'(y) < k_2.$$

K.II. Todos los sistemas lineales con $\psi(y) = ky$, $k \in [k_1, k_2]$ son estables asintóticamente.

De nueva cuenta, los contraejemplos encontrados (para $n > 2$) prueban que esta hipótesis es falsa. Sin embargo, tanto ésta como la conjetura de Aizerman permitieron tener un punto de partida en la búsqueda de la solución al problema de estabilidad absoluta del sistema (3)-(5).

La solución del llamado problema de Lur'e, probar que el punto de equilibrio del sistema en interconexión es absolutamente estable, se ha buscado mediante métodos de distinta naturaleza, desde los que se basan en enfoques frecuenciales (Popov, 1961), pasando por los que hacen uso de funciones de Lyapunov para trasladar el problema a uno de naturaleza algebraica (Kalman, 1963; Yakubovich, 1962), también los hay basados en cálculo variacional (Liberzon, 1979, 1989), por citar algunos ejemplos. La investigación en torno a la estabilidad de sistemas homogéneos también ha hecho uso de herramientas matemáticas variadas; la que concierne a este artículo es el enfoque de funciones de Lyapunov, puesto que se busca sentar las bases para llevar la extensión homogénea del problema de Lur'e a un problema algebraico.

3.1 Extensión homogénea del problema de Lur'e

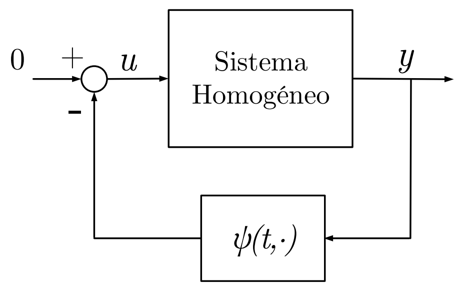

Figura 1. Extensión homogénea del sistema de Lur'e.

Considere una generalización del sistema de Lur'e (3)-(5):

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \tag{8}$$

$$y = h(x) + d(x)u \tag{9}$$

$$u = -\psi(t, y) \tag{10}$$

como se muestra en la figura 1, donde $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ representa los estados del bloque del sistema homogéneo, mientras que u e y, la entrada y salida del mismo sistema, respectivamente, son escalares. Adicionalmente, se considerará el caso $d(x) = 0$. El campo vectorial (8) se considera continuo en x y homogéneo de grado $\tau \in \mathbb{R}$ con respecto a las dilataciones $\delta_\varepsilon^r x$ y $\varepsilon^s u$.

Note que, dado que el sistema es afín en la entrada, se requiere que el campo $f(x)$ en (8) sea elemento de $\underline{n}_\tau$ y que $g \in \underline{n}_{\tau-s}$. Por otro lado, $h(x)$ en (9) se considera una función continua y homogénea de grado $\sigma \neq 0$ con respecto a $\delta_\varepsilon^r x$ ($h \in H_\sigma$).

Por último, la conexión de realimentación (10) está dada por una función continua, no lineal y sin memoria que satisface una condición de sector homogéneo.

Como se ha visto, la conjetura de Aizerman busca, a partir de analizar la estabilidad de una familia de sistemas lineales, concluir sobre la estabilidad de una familia de sistemas no lineales. Del mismo modo, propondremos la condición de sector homogéneo de manera que, si hiciéramos

$$\psi(t, y) = \gamma\phi(y), \qquad \gamma \in \mathbb{R}, \tag{11}$$

el sistema (8)-(10) preservaría el mismo grado de homogeneidad, τ, con respecto a la misma dilatación, $\delta_\varepsilon^r x$.

Una condición para preservar la homogeneidad de grado τ de (8), dado que $g \in \underline{n}_{\tau-s}$, es que la entrada como función del estado $u(x)$ sea elemento de H_s. De (10) y (11) se tiene

$$u(\delta_\varepsilon^r x) = -\gamma\phi(h(\delta_\varepsilon^r x)) = -\gamma\phi(\varepsilon^\sigma h(x)),$$

entonces, ϕ tiene que ser homogénea de grado s/σ, $\sigma \neq 0$, con respecto a $\varepsilon > 0$, para así obtener

$$\begin{aligned} u(\delta_\varepsilon^r x) &= -\gamma\phi(h(\delta_\varepsilon^r x)) = -\gamma\phi(\varepsilon^\sigma h(x)) \\ &= -(\varepsilon^\sigma)^{s/\sigma}\gamma\phi(h(x)) = -\varepsilon^s\gamma\phi(h(x)) = \varepsilon^s u(x). \end{aligned}$$

Definición 5. (Condición de sector homogéneo). Sea

$$\psi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Se dice que ψ pertenece al sector homogéneo

- $[k_1, k_2]_\phi$, si $\psi(t, y)$ satisface
$$[\psi(t, y) - k_1\phi(y)]\,[\psi(t, y) - k_2\phi(y)] \leq 0 \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}_+, \quad \forall\, y \in \mathbb{R}, \tag{12}$$
donde k_1, k_2 son constantes que satisfacen $k_1 < k_2$, y ϕ es homogénea de grado s/σ, $\sigma \neq 0$, con respecto a $\varepsilon > 0$.
- $[k_1, \infty]_\phi$, si $\psi(t, y)$ satisface
$$\phi(y)\,[\psi(t, y) - k_1\phi(y)] \geq 0 \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}_+, \quad \forall\, y \in \mathbb{R}. \tag{13}$$

Definición 6. (Estabilidad absoluta.) Suponga que ψ en (10) satisface una condición de sector homogéneo. El sistema (8)-(10) se dice absolutamente estable si el punto de equilibrio en el origen es estable asintóticamente de manera global y uniforme para cualquier no linealidad en el sector homogéneo dado.

Con estas definiciones, se puede establecer una extensión de la conjetura de Aizerman para el sistema (8)-(10). Esta indica que el origen del sistema es absolutamente estable para todas las funciones no lineales $\psi(t, y)$ en el sector homogéneo $[k_1, k_2]_\phi$ si es asintóticamente estable para $\psi(t, y) = \gamma\phi(y)$, $\gamma \in [k_1, k_2]$.

Del mismo modo, una extensión de la conjetura de Kalman al caso homogéneo queda como sigue:

El sistema (8)-(10) es absolutamente estable si se cumplen las siguientes condiciones:

KH.I. La función $\psi(y)$ es diferenciable y es tal que
$$k_1\phi'(y) < \psi'(y) < k_2\phi'(y).$$

KH.II. Todos los sistemas homogéneos con $\psi(y) = \gamma\phi(y)$, $\gamma \in [k_1, k_2]$ son estables asintóticamente.

Dado que ambas conjeturas son falsas en el caso lineal, y el caso lineal es un caso particular del caso homogéneo, sabemos que tales condiciones no son suficientes para garantizar la estabilidad absoluta pero, de manera similar al caso clásico, nos llevan a una pregunta importante: '¿Qué propiedades adicionales debe satisfacer el sistema homogéneo para que el sistema (8)-(10) sea absolutamente estable con ψ en el sector homogéneo $[k_1, k_2]_\phi$?'

4. TEOREMA DEL CÍRCULO HOMOGÉNEO

Uno de los resultados más importantes en la búsqueda por la solución al problema de Lur'e es el lema de Kalman-Yakubovich-Popov, el cual establece condiciones algebraicas para la positividad real de sistemas lineales que, a su vez, es condición suficiente para que la interconexión entre estos sistemas y una realimentación negativa de no linealidades en el sector $[0, \infty]$ sea absolutamente estable. Para los sistemas no lineales afines en la entrada, el resultado de Moylan (1974) nos sirve de inspiración para presentar el resultado principal.

Proposición 7. El sistema (8)-(10) es absolutamente estable si

(i) $\psi \in [k_1, \infty]_\phi$ y existen la función de Lyapunov homogénea $V(x)$ (la cual, de acuerdo con la definición 4, es propia, definida positiva y de clase C^1) y una función real $l(x)$ tal que $l^2(x)$ es definida positiva, que satisfacen las ecuaciones

$$\nabla V(x)\left(f(x) - k_1 g(x)\phi(h(x))\right) = -l^2(x) \tag{14}$$

$$\nabla V(x) g(x) = \phi(h(x)) \tag{15}$$

(ii) $\psi \in [k_1, k_2]_\phi$, con $k = k_2 - k_1$, y existen la función de Lyapunov homogénea $V(x)$, una función real $l(x)$, tal que $l^2(x)$ es semidefinida positiva, y $P(x)$, definida positiva, que satisfacen

$$\nabla V(x)\left(f(x) - k_1 g(x)\phi(h(x))\right) = -l^2(x) - P(x) \tag{16}$$

$$\nabla V(x) g(x) = k\phi(h(x)) - 2l(x) \tag{17}$$

Demostración.

(i) Se observa que, bajo la transformación de lazo mostrada en la figura 2, $\psi \in [k_1, \infty]_\phi$ implica $\psi - k_1\phi = \tilde{\psi} \in [0, \infty]_\phi$, y el sistema $\tilde{H}$ está dado por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \tilde{f}(x) + g(x)\bar{u} = f(x) - k_1 g(x)\phi(h(x)) + g(x)\bar{u}\\ \bar{y} &= h(x)\end{aligned}$$

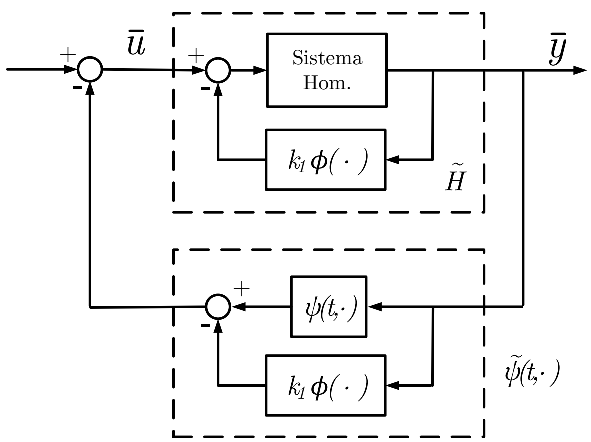

Figura 2. Transformación de lazo para el caso en que $\psi \in [k_1, \infty]_\phi$.

Al usar V como una candidata a función de Lyapunov homogénea, se obtiene

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \nabla V(x)\left(f(x) - k_1 g(x)\phi(h(x))\right) + \nabla V(x) g(x)\bar{u}\\ &= -l^2(x) - \phi(\bar{y})\tilde{\psi}(t, \bar{y}).\end{aligned}$$

Debido a que $\tilde{\psi} \in [0, \infty]_\phi$, $\phi(\bar{y})\tilde{\psi}(t, \bar{y}) \geq 0$, por lo tanto $\dot{V} \leq -l^2(x) < 0$. Esto, junto con el hecho de que la función V es propia, nos permite concluir que el origen del sistema en lazo cerrado es estable asintóticamente de manera global y uniforme, en otras palabras, absolutamente estable.

(ii) La transformación de lazo mostrada en la figura 3 resulta en $\tilde{\psi} \in [0, \infty]_\phi$, y el sistema $\tilde{H}$ queda como

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \tilde{f}(x) + g(x)\bar{u}\\ &= f(x) - k_1 g(x)\phi(h(x)) + g(x)\bar{u}\\ \phi(\bar{y}) &= k\phi(h(x)) + \bar{u}\end{aligned}$$

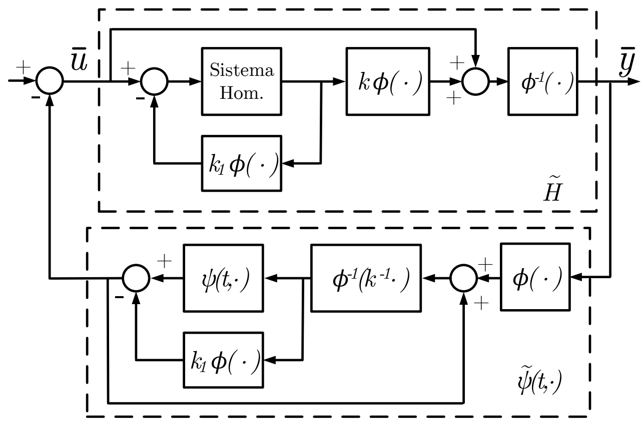

Figura 3. Transformación de lazo para el caso en que $\psi \in [k_1, k_2]_\phi$.

Al utilizar V como función homogénea de Lyapunov, se obtiene

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \nabla V(x)\left(f(x) - k_1 g(x)\phi(h(x))\right) + \nabla V(x) g(x)\bar{u}\\ &= -l^2(x) - P(x) + (\phi(\bar{y}) - \bar{u} - 2l(x))\bar{u}\\ &= -\left(l(x) + \bar{u}\right)^2 - P(x) - \phi(\bar{y})\tilde{\psi}(t, \bar{y}).\end{aligned}$$

De nueva cuenta, $\phi(\bar{y})\tilde{\psi}(t, \bar{y}) \geq 0$, entonces $\dot{V} \leq -\left(l(x) + \bar{u}\right)^2 - P(x) < 0$. Por lo tanto, al ser V una función propia, el sistema en lazo cerrado es absolutamente estable.

■

Se debe notar que la función homogénea de Lyapunov es desconocida, pero que las condiciones presentadas en la proposición anterior y las descritas en el teorema 1 facilitan la búsqueda de la misma.

Note que $V \in H_m$ y $g \in \underline{n}_{\tau - s}$ implican $s = m + \tau - s$, entonces $m = 2s - \tau$. Si $m > p \max_{1 \leq i \leq n}\{r_i\}$, $p \in \mathbb{Z}$, se puede construir V de manera que sea de clase C^p. En general, es suficiente que $p = 1$.

Una vez que se ha definido el valor de m, es posible proponer funciones homogéneas definidas positivas y probar si satisfacen las condiciones para estabilidad absoluta. El proceso puede hacerse iterativo de no cumplirse todas las condiciones agregando términos cruzados de los estados sin hacer que se pierda las propiedades de V (homogénea de grado m y de clase C^1).

La estrategia para garantizar la positividad definida de V y la negatividad definida de $\dot{V}$ se delinea en Sánchez (2014) para una clase de sistemas homogéneos conocida como formas generalizadas. Note además que ϕ, y en consecuencia k_1 y k_2, no están determinadas de forma única, por lo que es posible utilizar esta función homogénea como parámetro de diseño.

5. EJEMPLO

Ejemplo 1. Considere el sistema

$$\dot{x}_1 = -a\lfloor x_1 \rceil^{\rho} + x_2, \tag{18}$$

$$\dot{x}_2 = -b\lfloor x_1 \rceil^{2\rho-1} + u \tag{19}$$

$$y = h(x) = x_2 \tag{20}$$

$$u = -\psi(t,y), \quad \psi \in [k_1,\infty]_\phi \tag{21}$$

$$\phi(y) = \lfloor y \rceil^{\frac{2\rho-1}{\rho}} \tag{22}$$

donde $\lfloor\cdot\rceil^q = |\cdot|^q \mathrm{sign}(\cdot)$, $\rho \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$. El subsistema (18)-(19) es homogéneo de grado $\tau = (\rho-1)/\rho$ con pesos de homogeneidad

$$(r_1, r_2) = \left(\frac{1}{\rho}, 1\right),$$

$s = (2\rho-1)/\rho$. Se observa que, dado que $h(x) \in H_\sigma$ y $\sigma = 1$, $\phi \in H_{s/\sigma=s}$. Además, se puede verificar que el sistema en lazo cerrado que satisface $\psi = \gamma\phi$, $\gamma \in [k_1, \infty)$ también es homogéneo de grado τ con respecto a los mismos pesos de homogeneidad.

Este sistema, para el caso $\rho = \frac{1}{2}$ es el algoritmo *Super Twisting* (Levant, 1993), el cual tiene propiedades de robustez, exactitud y convergencia en tiempo finito, y ha servido de base para la construcción de controladores, observadores (Davila et al., 2005) y diferenciadores (Levant, 1998) en el marco de los algoritmos por Modos Deslizantes de Orden Superior.

Se desea saber para qué valores de k_1 el sistema (18)-(22) es absolutamente estable, es decir, determinar el sector homogéneo $[k_1,\infty]_\phi$ tal que las funciones no lineales $\psi \in [k_1,\infty]_\phi$ no destruyan la estabilidad. Utilizando la condición (15), se tiene

$$\nabla V g = \frac{\partial}{\partial x_2} V = \lfloor x_2 \rceil^{\frac{2\rho-1}{\rho}}.$$

Por lo tanto,

$$V = \int \lfloor x_2 \rceil^{\frac{2\rho-1}{\rho}} \, \mathrm{d}x_2 = v(x_1) + \frac{\rho}{3\rho-1}|x_2|^{\frac{3\rho-1}{\rho}}.$$

V es una función homogénea de grado $m = 2s - \tau = \frac{3\rho-1}{\rho}$, por lo tanto se elige $v(x_1) = \frac{\alpha}{3\rho-1}|x_1|^{3\rho-1}$, $\alpha > 0$, para que V sea definida positiva, esto es,

$$V = \frac{\alpha}{3\rho-1}|x_1|^{3\rho-1} + \frac{\rho}{3\rho-1}|x_2|^{\frac{3\rho-1}{\rho}}. \tag{23}$$

Además, para garantizar que V sea de clase C^1, se debe cumplir $m > \text{máx}\{\frac{1}{\rho}, 1\}$, por lo tanto

$$\frac{3\rho-1}{\rho} > \text{máx}\left\{\frac{1}{\rho}, 1\right\} \implies \rho > \frac{2}{3}$$

Al calcular $l^2(x)$ en (14) se obtiene

$$\begin{aligned}
&\nabla V(x)(f(x) - k_1 g(x)\phi(h(x))) \\
&= -a\alpha|x_1|^{4\rho-2} + \alpha\lfloor x_1 \rceil^{3\rho-2} x_2 - b\lfloor x_1 \rceil^{2\rho-1} \lfloor x_2 \rceil^{\frac{2\rho-1}{\rho}} \\
&\quad - k_1 |x_2|^{\frac{4p-2}{p}} \\
&= -\chi^T \begin{pmatrix} a\alpha & b/2 \\ b/2 & k_1 \end{pmatrix} \chi + \alpha\lfloor x_1 \rceil^{3\rho-2} x_2
\end{aligned}$$

Donde $\chi^T = \left(\lfloor x_1 \rceil^{2\rho-1} \;\; \lfloor x_2 \rceil^{\frac{2\rho-1}{p}}\right)$. Se utiliza la desigualdad de Young (si u y v son números reales no negativos y p y q son reales positivos tales que $1/p + 1/q = 1$, entonces $uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}$) con el propósito de encontrar una condición suficiente sobre k_1 para que $l^2(x)$ sea una función definida positiva. Entonces se obtiene

$$\begin{aligned}
&\nabla V(x)(f(x) - k_1 g(x)\phi(h(x))) = -l^2(x) \\
&\quad \leq -\chi^T \begin{pmatrix} \alpha\left(a - \frac{3\rho-2}{4\rho-2}\right) & b/2 \\ b/2 & k_1 - \alpha\frac{\rho}{4\rho-2} \end{pmatrix} \chi.
\end{aligned}$$

Para asegurar estabilidad absoluta, la matriz en la desigualdad anterior debe ser definida positiva. Esto es, se satisfacen las siguientes desigualdades

$$\alpha\left(a - \frac{3\rho-2}{4\rho-2}\right) > 0,$$

$$\alpha\left(a - \frac{3\rho-2}{4\rho-2}\right)\left(k_1 - \alpha\frac{\rho}{4\rho-2}\right) - \frac{b^2}{4} > 0.$$

Es decir, las condiciones $a > \frac{3\rho-2}{4\rho-2}$, $\rho > \frac{2}{3}$ y

$$k_1 > \sqrt{\frac{b^2\rho}{4a\rho - 2a - 3\rho + 2}} \tag{24}$$

garantizan la existencia de una función $l(x)$ tal que

$$\nabla V(x)(f(x) - k_1 g(x)\phi(h(x))) = -l^2(x) < 0, \quad x \neq 0.$$

Por lo tanto, con la función homogénea de Lyapunov

$$V(x) = \frac{\alpha}{3\rho-1}|x_1|^{3\rho-1} + \frac{\rho}{3\rho-1}|x_2|^{\frac{3\rho-1}{\rho}},$$

se puede concluir que el sistema (18)-(21) es absolutamente estable para ψ en el sector homogéneo $[k_1,\infty]_\phi$, con k_1 que satisface (24).

De manera similar, se puede llegar a las mismas condiciones sobre k_1 y a buscando satisfacer (16) y (17). Al usar

$$V = \frac{\alpha}{3\rho-1}|x_1|^{3\rho-1} + \beta\frac{\rho}{3\rho-1}|x_2|^{\frac{3\rho-1}{\rho}}$$

como función homogénea de Lyapunov, se busca que

$$\nabla V\left(f - k_1 g(x)\phi(h(x))\right) + l^2(x) = -P(x) < 0,$$

donde

$$l(x) = \frac{1}{2}\left(k\phi(h(x)) - \nabla V g(x)\right),$$

y se llega a la siguiente desigualdad lineal matricial

$$\begin{pmatrix} \alpha\left(a - \frac{3\rho-2}{4\rho-2}\right) & b\beta/2 \\ b\beta/2 & k_1\beta - \alpha\frac{\rho}{4\rho-2} - \frac{1}{4}(k-\beta)^2 \end{pmatrix} > 0, \tag{25}$$

la cual, de cumplirse, garantiza la estabilidad absoluta del sistema (18)-(22) y, como es de esperarse, la estabilidad absoluta del mismo sistema con la no linealidad $\psi(t, y) \in [k_1, k_2]_\phi$ para cualquier $k_2 > k_1$.

Se puede verificar que cuando se satisfacen las condiciones $a > \frac{3\rho-2}{4\rho-2}$, $\rho > \frac{2}{3}$ y (24), la condición (25) también se satisface, por lo que los resultados son consistentes.

6. CONCLUSIÓN

El problema de estabilidad absoluta para sistemas homogéneos en interconexión con no linealidades en un sector definido fue presentado y una solución inspirada en el bien conocido criterio del círculo fue propuesta. Merece la pena hacer mención de que el enfoque de encontrar funciones de Lyapunov para probar la estabilidad de esta clase de sistemas se presenta como una solución viable debido al teorema converso presentado en el artículo. Esto es a pesar del hecho de que la homogeneidad es una propiedad geométrica de los sistemas y tradicionalmente las pruebas de estabilidad para sistemas homogéneos hacen uso de este hecho (y no mediante funciones de Lyapunov).

El ejemplo presentado permite concluir estabilidad absoluta para sistemas de diversa naturaleza. Por ejemplo, si el sistema homogéneo es asintóticamente estable y $2/3 < \rho < 1$, entonces se estabiliza en tiempo finito. Esto compensa el hecho de que no los criterios de estabilidad absoluta presentados no son concluyentes para el caso $\rho = 1/2$, correspondiente al algoritmo de *Super Twisting.*

Además, el resultado presentado incentiva la búsqueda de una función de Lyapunov general que permita, de una manera sistemática, concluir sobre la estabilidad de esta clase de sistemas mediante herramientas algebráicas.

REFERENCIAS

Aizerman, M.A. (1949). On a problem concerning the stability “in the large” of dynamical systems. *Uspekhi matematicheskikh nauk*, 4(4), 187–188.

Bacciotti, Andrea y Rosier, L. (2006). *Liapunov functions and stability in control theory.* Springer Science & Business Media.

Davila, J., Friedman, L., and Levant, A. (2005). Second-order sliding-mode observer for mechanical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(11), 1785–1789.

Grüne, L. (2000). Homogeneous state feedback stabilization of homogenous systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 38(4), 1288–1308.

Kalman, R.E. (1957). Physical and mathematical mechanisms of instability in nonlinear automatic control systems. *Trans. ASME*, 79(3), 553–566.

Kalman, R.E. (1963). Lyapunov functions for the problem of Lur’e in automatic control. *Proceedings of the national academy of sciences*, 49(2), 201–205.

Levant, A. (1993). Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control. *International Journal of Control*, 58(6), 1247–1263.

Levant, A. (1998). Robust exact differentiation via sliding mode technique. *Automatica*, 34(3), 379–384.

Liberzon, M. (1979). New results on absolute stability of nonstationary controlled systems (survey). *Avtomatika i Telemekhanika*, (8), 29–48.

Liberzon, M. (1989). Inner criterion of absolute stability of nonstationary systems. *Automation and Remote Control*, 50(5), 608–613.

Lur’e, AI y Postnikov, V. (1944). On the theory of stability of control systems. *Applied mathematics and mechanics*, 8(3), 246–248.

Moylan, P. (1974). Implications of passivity in a class of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 19(4), 373–381.

Popov, V. (1961). On absolute stability of non-linear automatic control systems.

Rosier, L. (1992). Homogeneous Lyapunov function for homogeneous continuous vector field. *Systems & Control Letters*, 19(6), 467–473.

Sánchez, Tonámetl y Moreno, J.A. (2014). A constructive Lyapunov function design method for a class of homogeneous systems. In *Decision and Control (CDC), 2014 IEEE 53rd Annual Conference on*, 5500–5505. IEEE.

Sepulchre, Rodolphe y Aeyels, D. (1996). Homogeneous Lyapunov functions and necessary conditions for stabilization. *Mathematics of Control, Signals and Systems*, 9(1), 34–58.

Yakubovich, V.A. (1962). The solution of certain matrix inequalities in automatic control theory. In *Soviet Math. Dokl*, volume 3, 620–623.