

Control Descentralizado por Modos Deslizantes

Fernando Castaños Luna y Leonid Fridman

U.N.A.M.

F.I.

División de Estudios de Posgrado

México D.F.

lfridman@verona.fi-p.unam.mx

Resumen

Para resolver el problema de control descentralizado se propone la combinación de dos técnicas robustas: modos deslizantes y control \mathcal{H}_∞ . Se plantean condiciones de suficiencia para la resolución de dicho problema. Para el caso de los modos deslizantes integrales se demuestran dos proposiciones; con ellas se fija la superficie deslizante, un parámetro que en la literatura se ha considerado libre. Las proposiciones muestran que la ganancia introducida en la perturbación desacoplada es mínima y que dicha ganancia es unitaria. La aplicación de estos resultados se extiende fuera del contexto del control descentralizado.

1. Introducción

1.1. Motivación

Los sistemas de gran escala pueden requerir el uso del control descentralizado cuando alguna o varias de las siguientes dificultades ocurren

1. El sistema se encuentra ampliamente distribuido en el espacio, por lo que la transferencia de información es costosa (v.gr. sistemas de potencia);
2. la implementación de una ley de control centralizada es difícil, o incluso imposible debido a la estructura descentralizada del sistema (v.gr. control de tráfico aéreo y terrestre);
3. la complejidad en el análisis y diseño, debida al orden del sistema, puede reducirse al separar el sistema en varios subsistemas (v.gr. estructuras flexibles con muchos grados de libertad);
4. el criterio de diseño es robustés respecto a perturbaciones estructurales, en las que los subsistemas se desconectan y vuelven a conectar mientras el sistema se encuentra en operación.

En términos generales, el problema de control descentralizado es el de encontrar un conjunto de controladores en los que la información está sujeta a una restricción: la información disponible en cada estación de control es sólo un subconjunto de las variables de medición. Los controladores se diseñan para estabilizar un conjunto de subsistemas interconectados, los cuales componen el sistema total.

Al igual que en el caso centralizado, se han propuesto diversas estrategias para resolver el problema. Por ejemplo, asignación de polos [1, 2]; o control óptimo [3, 4]. Estos enfoques, aunque resuelven las dificultades 1 y 2, no atacan las dificultades 3 ni 4, pues en alguna etapa del diseño, se requiere la resolución de un conjunto de ecuaciones simultáneas de (al menos) el mismo orden que el sistema; estas técnicas asumen además, que la estructura del sistema es fija. El enfoque de este texto es el del control robusto, es decir, tratar cada subsistema de forma independiente y considerar a las interconexiones como perturbaciones. Para tratar dichas perturbaciones, se propone la combinación de dos técnicas robustas, modos deslizantes y \mathcal{H}_∞ [5].

1.2. Planteamiento del Problema

Considérese un sistema descentralizado, lineal e invariante en el tiempo, con ν estaciones de control

$$\dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) + B_i (I + \Delta B_i) u_i(x_i, t) + \sum_{j=1}^{\nu} A_{ij} x_j(t), \quad i = 1, 2, \dots, \nu \quad (1)$$

donde $x_i(t) \in \mathfrak{R}^{n_i}$ es el vector de estado y $u_i(x_i, t) \in \mathfrak{R}^{m_i}$ es la acción de control de la i ava estación en el tiempo $t \in \mathfrak{R}$. Nótese que u_i satisface la restricción de información, depende solamente de x_i . A_i y B_i son matrices de dimensión apropiada. $\sum_{j=1}^{\nu} A_{ij} x_j$ representa la influencia de las demás estaciones, donde las

A_{ij} son, una vez más, matrices de dimensión apropiada. $\Delta B_i \in \mathfrak{R}^{m_i \times m_i}$ representan incertidumbres en las matrices B_i . $(I + \Delta B_i) = (I + \Delta B_i)^T > 0$.

El objetivo es diseñar cada una de las leyes de control u_i de tal forma que el sistema (1) sea semi-global y asintóticamente estable.

Supuesto 1 $\text{rank}(B_i) = m_i$.

Se considerará al sistema (1) como un conjunto de sistemas perturbados

$$\dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) + B_i(I + \Delta B_i)u_i(x_i, t) + \phi_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, \nu \quad (2)$$

donde x , el estado completo, se define como

$$x \triangleq [x_1^T \quad x_2^T \quad \dots \quad x_\nu^T]^T,$$

y los sistemas nominales son

$$\dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) + B_i u_i(x_i, t), \quad i = 1, 2, \dots, \nu \quad (3)$$

Supuesto 2 Cada uno de los sistemas nominales en (3) es global y exponencialmente estabilizable por medio de controles nominales $u_i = u_{0i}(x_i, t)$.

Las perturbaciones ϕ_i , que resultan de las interconexiones, se definen entonces como

$$\phi_i(x) = \sum_{j=1}^{\nu} A_{ij} x_j(t) = A^i x, \quad A^i = [A_{i1} \quad \dots \quad A_{i\nu}]. \quad (4)$$

Supuesto 3 El estado inicial $x(t_0)$ se encuentra acotado por una constante conocida q , $\|x(t_0)\| \leq q$.

Con los supuestos anteriores en mente, podemos reformular el problema de la siguiente forma: diseñar ν leyes de control para los sistemas nominales (3), de tal forma que las perturbaciones (4) y las incertidumbres no afecten la estabilidad del sistema (1)

1.3. Contribuciones del Trabajo

Se establecen condiciones de suficiencia para la solución del problema planteado arriba. Dichas condiciones se proporcionan para el uso de modos deslizantes convencionales e integrales. Como en el caso del control \mathcal{H}_∞ clásico, las condiciones están en función de la existencia de soluciones a ecuaciones de Ricatti.

En los textos sobre modos deslizantes integrales se ha considerado generalmente que la superficie de deslizamiento es un parámetro libre. En este trabajo se optimiza este parámetro en términos de la ganancia introducida en la perturbación desacoplada y se muestra que para el mínimo, dicha ganancia es igual a 1. Este resultado es de interés general, pues puede aplicarse en cualquier situación en la que se utilicen modos deslizantes integrales.

2. Antecedentes

2.1. Modos Deslizantes

Considérese un sistema lineal e invariante en el tiempo

$$\dot{x} = Ax + B(I + \Delta B)u + \phi. \quad (5)$$

La perturbación ϕ puede separarse en dos componentes

$$\phi = BB^+ \phi + B^\perp (B^\perp)^\dagger \phi.$$

donde B^+ es la pseudo-inversa de B , es decir, $B^+ = (B^T B)^{-1} B^T$ y $B^\perp \in \mathfrak{R}^{n \times (n-m)}$ es una matriz cuyas columnas generan el espacio complementario de $\text{span}(B)$, es decir: $\mathfrak{R}^n = \text{span}(B) \oplus \text{span}(B^\perp)$. La primera componente, al igual que la incertidumbre ΔB , entra por el mismo canal que el control y se dice que satisface la *condición de acoplamiento*; la segunda componente se encuentra desacoplada.

Un control por modos deslizantes conduce el estado del sistema hacia una superficie de conmutación (o deslizante) y lo restringe de ahí en adelante. El movimiento del sistema en dicha superficie, llamado *modo deslizante*, es robusto respecto a incertidumbres y perturbaciones acopladas al control.

El diseño de controladores basados en modos deslizantes consta normalmente de dos pasos. El primero es determinar una superficie de conmutación

$$s(x) = 0, \quad s^T(x) = [s_1(x) \quad \dots \quad s_m(x)] \quad (6)$$

tal que las trayectorias a lo largo de ella sean estables. El segundo paso es diseñar una acción de control discontinua

$$u_i(x) = \begin{cases} u_i^+(x, t) & \text{si } s_i(x) > 0 \\ u_i^-(x, t) & \text{si } s_i(x) < 0 \end{cases}, \quad i = 1, \dots, m$$

que garantice que el estado del sistema alcance la superficie y permanezca en ella.

2.1.1. Modos Deslizantes (MD)

En el caso MD, conviene descomponer el estado mediante la transformación (invertible)

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = Tx, \quad T = \begin{bmatrix} B^{\perp+} \\ B^+ \end{bmatrix},$$

En el nuevo sistema de coordenadas

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} (I + \Delta B)u + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} B^+ \phi + \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} B^{\perp+} \phi,$$

con

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = TAT^{-1}.$$

Si se diseña la superficie como

$$s(x) = -K\bar{x}_1 + \bar{x}_2 = 0 \Rightarrow \bar{x}_2 = K\bar{x}_1,$$

entonces puede utilizarse \bar{x}_2 como control virtual para estabilizar el sistema de orden reducido $\dot{\bar{x}}_1 = A_{11}\bar{x}_1 + A_{12}\bar{x}_2 + B^{\perp+}\phi$. La matriz K puede obtenerse utilizando cualquier técnica de control lineal (asignación de polos, control óptimo, etc.). Naturalmente se requiere la controlabilidad (o al menos la estabilizabilidad) del subsistema. Cabe mencionar que la controlabilidad de $\{A, B\}$ implica la de $\{A_{11}, A_{12}\}$ [6, p. 80].

Para atraer y mantener al estado en la superficie deslizante se propone el uso del *control unitario*.

$$u = -(\alpha|\bar{x}| + \alpha_0) \frac{s}{\|s\|}.$$

Para verificar la atractividad de la superficie se puede utilizar la función de Lyapunov $V = \|s\|^2/2$, cuya derivada con respecto al tiempo satisface

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & \left(\| [KA_{11} - A_{21} \quad KA_{12} - A_{22}] \bar{x} \| + \right. \\ & \left. + \|KB^{\perp+}\phi + B^+\phi\| - \right. \\ & \left. - \lambda_{\min}(I + \Delta B)(\alpha|\bar{x}| + \alpha_0) \right) \|s\|. \end{aligned}$$

Sólo resta elegir α y α_0 suficientemente grandes (pero finitas), de tal suerte que \dot{V} sea negativa definida. Utilizando el método del control equivalente [6] se obtiene la dinámica del sistema en la superficie deslizante

$$\dot{\bar{x}}_1 = (A_{11} + A_{12}K)\bar{x}_1 + B^{\perp+}\phi \quad (7a)$$

$$\dot{\bar{x}}_2 = K\bar{x}_1, \quad (7b)$$

de donde se observa la reducción en el orden de las ecuaciones de movimiento y la insensibilidad a perturbaciones e incertidumbres acopladas.

2.1.2. Modos Deslizantes Integrales (MDI)

En el caso MDI se propone un control

$$u = u_0 + u_1.$$

u_0 se diseña como una acción de control continua para estabilizar al sistema nominal $\dot{x} = Ax + Bu_0$ y u_1 como una acción discontinua para atraer y mantener el estado del sistema en la superficie de conmutación

$$s(x, t) = G \left[x(t) - x(t_0) - \int_{t_0}^t (Ax + Bu_0) d\tau \right];$$

G se escoge de tal suerte que GB sea no-singular.

El control discontinuo puede diseñarse utilizando la misma técnica del control por unidad

$$u_1(x, t) = -\rho(x) \frac{(GB)^T s(x, t)}{\|(GB)^T s(x, t)\|}.$$

Una posible selección de $\rho(x)$ es

$$\rho(x) > \rho_0 \geq \frac{\|\Delta B u_0\| + \|(GB)^{-1}G\|\|\phi\|}{\lambda_{\min}(I + \Delta B)}.$$

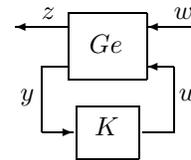
Esta ley de control garantiza la atractividad de la superficie, lo cual puede verificarse utilizando la misma función de Lyapunov que en el caso MD; de hecho, si las condiciones iniciales se conocen con precisión, $s = 0$ está garantizado desde el instante inicial t_0 , lo cual a su vez asegura la propiedad de robustés para todo $t \geq t_0$.

Sustituyendo el control equivalente en las ecuaciones de movimiento (5) se obtiene

$$\dot{x} = Ax + Bu_0 + [I - B(GB)^{-1}G]B^{\perp}B^{\perp+}\phi \quad (8)$$

2.2. Control \mathcal{H}_∞ en el Espacio de Estados

El diagrama de bloques más general de un sistema de control es [7]



donde a Ge se le llama la planta generalizada y K es el controlador. La salida z es una variable de penalización que podría por ejemplo, contener una señal de error; y se compone de las mediciones disponibles; u es la entrada de control y w contiene todas las entradas externas, incluyendo perturbaciones, ruido en los sensores y señales de referencia. La función de transferencia de w a z se denota T_{zw} .

La norma \mathcal{H}_∞ , definida en el dominio de la frecuencia de una matriz de transferencia estable $G(s)$ es

$$\|G(s)\|_\infty \triangleq \sup_w \sigma_{\max}[G(jw)].$$

El problema de control \mathcal{H}_∞ puede plantearse de la siguiente forma: encontrar un controlador K tal que $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$.

La norma \mathcal{H}_∞ en el dominio de la frecuencia y la norma \mathcal{L}_2 inducida (truncada) de un sistema lineal en el dominio del tiempo son equivalentes [8]. Si se satisface $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$, entonces

$$\int_0^T z^T(s)z(s)ds \leq \gamma^2 \int_0^T w^T(s)w(s)ds \quad \forall T > 0.$$

Esta equivalencia permite entender el problema de \mathcal{H}_∞ en términos de *atenuación de perturbaciones*, determinar la estabilidad en términos de funciones de Lyapunov y generalizar los conceptos de \mathcal{H}_∞ a sistemas no-lineales.

La planta generalizada puede escribirse en el dominio del tiempo como

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B_1w + B_2u \\ z &= C_1x + u \\ y &= C_2x + w.\end{aligned}$$

La solución al problema general [9] requiere la resolución de dos ecuaciones de Ricatti. Aquí se considera únicamente el caso en el que se dispone del estado completo. En este caso, se requiere resolver únicamente una ecuación de Ricatti. El siguiente lema es una versión simplificada de los resultados obtenidos en [8, 9]. Una versión similar se encuentra también en [5]

Lema 1 *Si existe una matriz real, simétrica, positiva definida X_∞ que satisfaga la ecuación de Ricatti*

$$X_\infty A + A^T X_\infty - X_\infty (B_2 B_2^T - \gamma^{-2} B_1 B_1^T) X_\infty + C_1^T C_1 = 0 \quad (9)$$

entonces la función de Lyapunov $V = x^T X_\infty x$ cumple con

$$\dot{V} \leq -\|C_1 x\|^2 - \|u\|^2 + \gamma^2 \|w\|^2$$

cuando el control toma la forma $u = -B_2^T X_\infty x = F_\infty x$.

Prueba:

$$\begin{aligned}\dot{V} &= x^T (A^T X_\infty + X_\infty A - 2X_\infty B_2 B_2^T X_\infty) x + \\ &\quad + w^T B_1^T X_\infty x + x^T X_\infty B_1 w.\end{aligned} \quad (10)$$

Sustituyendo (9) en (10) se obtiene

$$\begin{aligned}\dot{V} &= -\|C_1 x\|^2 - \|u\|^2 - \\ &\quad - \gamma^{-2} x^T (X_\infty B_1 B_1^T X_\infty) x + \\ &\quad + w^T B_1^T X_\infty x + x^T X_\infty B_1 w\end{aligned}$$

Notando que

$$\begin{aligned}\left\| \frac{B_1^T X_\infty x}{\gamma} - \gamma w \right\|^2 &= \gamma^{-2} x^T X_\infty B_1 B_1^T X_\infty x - \\ &\quad - x^T X_\infty B_1 w - w^T B_1^T X_\infty x + \gamma^2 w^T w\end{aligned}$$

se verifica

$$\begin{aligned}\dot{V} &= -\|C_1 x\|^2 - \|u\|^2 - \\ &\quad - \left\| \frac{B_1^T X_\infty x}{\gamma} - \gamma w \right\|^2 + \gamma^2 \|w\|^2 \\ &\leq -\|C_1 x\|^2 - \|u\|^2 + \gamma^2 \|w\|^2 \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Nótese que una condición necesaria para que se cumpla (9) con $X_\infty > 0$, es que el par $\{A, B_2\}$ sea controlable.

3. Control Descentralizado por Modos Deslizantes

Como se vio en la Sección 2, un sistema controlado por modos deslizantes es insensible a perturbaciones acopladas pero sensible a perturbaciones desacopladas. La idea central es combinar los modos deslizantes y el control \mathcal{H}_∞ para eliminar las perturbaciones acopladas y atenuar el efecto de las desacopladas.

3.1. Modos Deslizantes

Teorema 1 *Considérese el sistema de control descentralizado (1) y una matriz T definida como*

$$T = \text{diag}(T_i), \quad T_i = \begin{bmatrix} B_i^{\perp+} \\ B_i^+ \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, \nu.$$

Si existe un vector $\gamma = [\gamma_1 \dots \gamma_\nu]$ tal que $\|\gamma\|^2 \leq \lambda_{\min}(T^T T)$ y para el cual existen soluciones reales positivas definidas a las ecuaciones de Ricatti

$$\begin{aligned}X_{i\infty} A_{i,11} + A_{i,11}^T X_{i\infty} - X_{i\infty} A_{i,12} A_{i,12}^T X_{i\infty} + \\ + \gamma_i^{-2} X_{i\infty} B_i^{\perp+} A^i (B_i^{\perp+} A^i)^T X_{i\infty} + I = 0,\end{aligned} \quad (11)$$

entonces las leyes de control

$$u_i = -(\alpha_i |x_i| + \alpha_{i0}) \frac{s_i}{\|s_i\|} \quad (12)$$

con

$$\alpha_i \geq \left\| \begin{bmatrix} F_{i\infty} A_{i,11} + A_{i,21} \\ F_{i\infty} A_{i,12} + A_{i,22} \end{bmatrix} \right\| \|T_i\| / \lambda_{\min}(I + \Delta B_i)$$

$$\alpha_{i0} \geq \|F B^{\perp+} + B^+\| \|A^i\| q / \lambda_{\min}(I + \Delta B_i)$$

$$s_i = -F_{i\infty} \bar{x}_{i1} + \bar{x}_{i2} = 0, \quad F_{i\infty} = -A_{i,12}^T X_{i\infty},$$

estabilizan al sistema descentralizado.

Prueba: De (7) se puede observar que al aplicar la ley de control (12) a cada uno de los subsistemas (2) se obtiene

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}_{i1} &= (A_{i,11} + A_{i,12} F_{i\infty}) \bar{x}_{i1} + B_i^{\perp+} A^i x \\ \dot{\bar{x}}_{i2} &= F_{i\infty} \bar{x}_{i1}.\end{aligned}$$

Se propone la función candidata de Lyapunov

$$V(x) = \sum_{i=1}^{\nu} V_i(x_i), \quad V_i = \bar{x}_{i1}^T X_{i\infty} \bar{x}_{i1}.$$

Por el Lema 1, su derivada satisface

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq \sum_{i=1}^{\nu} (-\|\bar{x}_{i1}\|^2 - \|\bar{x}_{i2}\|^2 + \gamma_i^2 \|x\|^2) \\ &\leq -\sum_{i=1}^{\nu} (\|T_i x_i\|^2 + \sum_{i=1}^{\nu} \gamma_i^2 \|x\|^2) \\ &\leq -\|Tx\|^2 + \|\gamma\|^2 \|x\|^2 \\ &\leq -(\lambda_{\min}(T^T T) - \|\gamma\|^2) \|x\|^2 \\ &\leq 0 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

3.2. Modos Deslizantes Integrales

A partir de (8), es posible observar que en el caso MDI, lo que se ha hecho a fin de cuentas es sustituir la perturbación original ϕ por

$$[I - B(GB)^{-1}G]B^{\perp}B^{\perp+}\phi = \Gamma B^{\perp}B^{\perp+}\phi$$

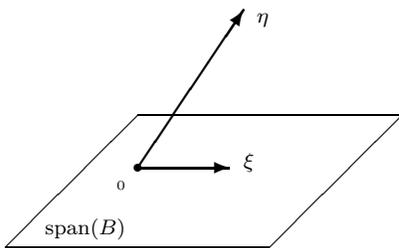
En la literatura sobre modos deslizantes usualmente se asume que las perturbaciones e incertidumbres son de tipo acoplado. Por esta razón se ha considerado a G como un parámetro libre y no se le ha concedido mucha importancia. En este texto se determina G en función de la perturbación desacoplada. El resultado se presenta en la forma de dos proposiciones, cuyo interés es de carácter independiente.

Proposición 1 Para cualquier $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ que satisfaga $\text{rank}(B) = m$, y cualquier vector $\eta \in \mathbb{R}^n$, la norma

$$\| [I - B(GB)^{-1}G] \eta \|$$

alcanza su mínimo cuando $G = B^T$.

Prueba: Considérese primero el problema de encontrar el vector $\xi \in \text{span}(B)$ más cercano a un vector arbitrario η , es decir, que minimice $\|\eta - \xi\|$



De acuerdo al teorema de proyección [10, p. 51], ξ es un vector único y minimiza $\|\eta - \xi\|$ cuando $\eta - \xi$ es ortogonal a $\text{span}(B)$.

Para resolver el problema anterior, hacemos $\xi = B\delta$. Esto garantiza $\xi \in \text{span}(B)$. Después buscamos el

vector δ que hace $\eta - B\delta$ ortogonal a $\text{span}(B)$, esto es

$$\begin{aligned} 0 &= B^T(\eta - B\delta) = B^T\eta - B^TB\delta \\ \delta &= (B^TB)^{-1}B^T\eta = B^+\eta \end{aligned}$$

La condición $\text{rank}(B) = m$ garantiza que la matriz de Gram B^TB sea invertible. Notando que

$$\| [I - B(B^TB)^{-1}B^T] \eta \|$$

es mínimo, sólo resta hacer $G = B^T$ para completar la prueba \blacksquare

Proposición 2

$$\|\Gamma\| = \|I - BB^+\| = 1$$

Prueba: Supóngase que v_M es un vector característico asociado al máximo valor característico λ_M de Γ , es decir,

$$\begin{aligned} \Gamma v_M &= \lambda_M v_M \\ \Rightarrow \\ v_M^T \Gamma^T \Gamma v_M &= \lambda_M^2 \|v_M\|^2. \end{aligned} \quad (13)$$

Pero, nótese que

$$\begin{aligned} \Gamma^T \Gamma &= I - BB^+ - BB^+ - BB^+BB^+ \\ &= I - BB^+ = \Gamma, \end{aligned}$$

lo cual implica que

$$v_M^T \Gamma^T \Gamma v_M = v_M^T \Gamma v_M = \lambda_M \|v_M\|^2 \quad (14)$$

De (13) y (14), vemos que $\lambda_M = \lambda_M^2 = 1$. Recuérdese que $\|\Gamma\| = \lambda_M^{1/2}(\Gamma^T \Gamma)$, por lo que $\|\Gamma\| = 1$ \blacksquare Esto es, la ganancia Γ no representa ningún problema. Es más,

$$[I - B(B^TB)^{-1}B^T] B^{\perp}B^{\perp+}\phi = B^{\perp}B^{\perp+}\phi.$$

Lo que significa que la perturbación desacoplada no se altera. Las Proposiciones 1 y 2 implican que no podemos atenuar la perturbación desacoplada por medio de la componente discontinua u_1 ; y para evitar amplificación, sólo debemos penalizar la diferencia entre la trayectoria deseada y la real, a lo largo de B . Nótese además que la condición “ GB no-singular” se cumple automáticamente para $G = B^T$.

Sustituyendo $G = B^T$ en la ecuación dinámica (8) obtenemos

$$\dot{x} = Ax + Bu_0 + B^{\perp}B^{\perp+}\phi. \quad (15)$$

Teorema 2 *Considérese el sistema de control descentralizado (1). Si existe un vector $\gamma = [\gamma_1 \dots \gamma_\nu]$ tal que $\|\gamma\|^2 \leq 1$, y para el cual existen soluciones reales positivas definidas a las ecuaciones de Ricatti*

$$X_{i\infty}A_i + A_i^T X_{i\infty} - X_{i\infty}B_iB_i^T X_{i\infty} + \gamma_i^{-2}X_{i\infty}B_i^\perp B_i^{\perp+} A^i (B_i^\perp B_i^{\perp+} A^i)^T X_{i\infty} + I = 0, \quad (16)$$

entonces las leyes de control

$$u_i = F_{i\infty}x_i - \rho_i \frac{B_i^T B_i s_i}{\|B_i^T B_i s_i\|} \quad (17)$$

con

$$\begin{aligned} \rho_i &> \frac{\|\Delta B_i F_{i\infty} x_i\| + \|B^+\| \|A^i\| q}{\lambda_{\min}(I + \Delta B)} \\ s_i &= B^T (x_i(t) - x_i(t_0)) - B^T \left[\int_{t_0}^t (A_i + B_i F_{i\infty}) x_i d\tau \right]; \end{aligned}$$

estabilizan al sistema descentralizado.

Prueba: De (15) se puede observar que al aplicar la ley de control (17) a cada uno de los subsistemas (2) se obtiene

$$\dot{x}_i = A_i x_i + B_i F_{i\infty} x_i + B^\perp B^{\perp+} A^i x_i$$

Se propone la función candidata de Lyapunov

$$V(x) = \sum_{i=1}^{\nu} V_i(x_i), \quad V_i = x_i^T X_{i\infty} x_i.$$

Por el Lema 1, su derivada satisface

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq \sum_{i=1}^{\nu} (-\|x_i\|^2 - \|u_{i0}\|^2 + \gamma_i^2 \|w_i\|^2) \\ &\leq -\|x\|^2 - \|u_0\|^2 + \sum_{i=1}^{\nu} \left(\gamma_i^2 \sum_{j=1}^{\nu} \|x_j\|^2 \right) \\ &\leq -\|x\|^2 - \|u_0\|^2 + \|x\|^2 \sum_{i=1}^{\nu} \gamma_i^2 \\ &\leq -(1 - \gamma^2) \|x\|^2 - \|u_0\|^2 \\ &\leq 0 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

4. Conclusiones

La función de Lyapunov planteada en los dos teoremas garantiza la estabilidad asintótica del sistema

interconectado. Dado que para cada condición inicial que satisfaga el Supuesto 3, puede encontrarse un controlador que estabiliza el sistema, dicha estabilidad es semi-global.

En las proposiciones desarrolladas se propone un criterio claro y conciso para la selección de la superficie deslizante en controladores por modos deslizantes integrales. Ese criterio es de carácter general, por lo que puede aplicarse en otros contextos.

Referencias

- [1] S. Wang and E. J. Davison, "On the stabilization of decentralized control systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 18, pp. 473–478, Oct. 1973.
- [2] J. P. Corfmat and A. S. Morse, "Decentralized control of linear multivariable systems," *Automatica*, vol. 12, pp. 479–495, 1976.
- [3] S. V. Savastuk and D. D. Šiljak, "Optimal decentralized control," in *Proc. American Control Conference*, Baltimore, Maryland, June 1994, pp. 3369–3373.
- [4] M. Ikeda, D. D. Šiljak, and K. Yasuda, "Optimality of decentralized control for large-scale systems," *Automatica*, vol. 12, pp. 309–316, 1983.
- [5] J. Xu, Y. Pan, and T. Lee, "Analysis and design of integral sliding mode control based on Lyapunov's direct method," in *Proc. American Control Conference*, Denver, Colorado, June 2003, pp. 192–196.
- [6] V. Utkin, J. Guldner, and J. Shi, *Sliding Modes in Electromechanical Systems*. London, U.K.: Taylor & Francis, 1999.
- [7] J. C. Doyle, B. A. Francis, and A. R. Tannenbaum, *Feedback Control Theory*. New York: Macmillan Publishing Company, 1992.
- [8] A. Isidori and A. Astolfi, "Disturbance attenuation and \mathcal{H}_∞ -control via measurement feedback in nonlinear systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 37, pp. 1283–1293, Sept. 1992.
- [9] J. C. Doyle, P. P. Khargonekar, and B. A. Francis, "State-space solutions to \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ control problems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 34, pp. 831–847, Aug. 1989.
- [10] D. G. Luenberger, *Optimization by Vector Space Methods*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1969.