# Cálculo infinitesimal de varias variables reales
# Volumen 2

Gabriel D. Villa Salvador
Departamento de
Control Automático
Centro de Investigación y de
Estudios Avanzados del I.P.N.

# Contenido

**Contenido** ii

**Prefacio** iii

**1 Integrales en $\mathbb{R}^n$.** **1**
1.1 Generalidades . . . 1
1.2 Interpretación Geométrica de la Integral . . . 15
1.3 Numerabilidad . . . 16
1.4 Ejercicios . . . 21

**2 Medida y Contenido** 0 **25**
2.1 Conjuntos de Medida 0 y de Contenido 0 . . . 25
2.2 Ejercicios . . . 35

**3 Teorema de Lebesgue** **39**
3.1 Teorema de Lebesgue . . . 39
3.2 Conjuntos Jordan–medibles . . . 44
3.3 Ejercicios . . . 52

**4 Teorema de Fubini** **55**
4.1 Integrales Paramétricas . . . 55
4.2 Teorema de Fubini . . . 61
4.3 Integrales Impropias . . . 74
4.4 Ejercicios . . . 81

**5 Cambio de Variable** **87**
5.1 Particiones de Unidad . . . 87
5.2 Aplicaciones de las Particiones de Unidad . . . 96
5.3 Teorema del Cambio de Variable . . . 102
5.4 Coordenadas Polares, Esféricas y Cilíndricas . . . 119
5.5 Ejercicios . . . 125

**6 Integrales de Línea y de Superficie** **129**
6.1 Integrales de Línea . . . . . 129
6.1.1 Interpretación Geométrica de la Integral de Línea . . . . . 131
6.1.2 Propiedades de la Integral de Línea . . . . . 132
6.2 Teorema de Green . . . . . 138
6.3 Integrales de Superficie . . . . . 146
6.3.1 Interpretación Geométrica de $\dfrac{\partial g}{\partial u} \times \dfrac{\partial g}{\partial v}$ . . . . . 148
6.4 Teoremas de Stokes y Gauss . . . . . 157
6.5 Ejercicios . . . . . 170

**A Teorema de Cantor-Bernstein** **175**
Teorema de Cantor-Bernstein . . . . . 175

**Bibliografía** **179**

**Notaciones** **181**

**Indice** **183**

# Prefacio

El cálculo infinitesimal de varias variables reales es un tema de particular relevancia en las áreas de ingeniería y de ciencias físico–matemáticas.

El presente volumen trata sobre el cálculo integral de varias variables reales. Hay muchas formas de presentar el material aquí tratado. Nosotros elegimos un punto de vista teórico, aunque sin descuidar ejemplos que ilustren nuestros resultados. Debido a lo anterior, la aproximación al cálculo integral aquí presentada hace adecuado este texto para los estudiantes del segundo ó tercer año de licenciatura en las carreras de física y/ó matemáticas.

En el Capítulo 1 primero introducimos el concepto de Integral de Riemann en el espacio $\mathbb{R}^n$ y a continuación damos una interpretación geométrica de ella. Finalizamos dando los conceptos fundmentales sobre numerabilidad.

El Capítulo 2 damos los conceptos de medida 0 y de contenido 0.

El Capítulo 3 trata fundamentalmente sobre el Teorema de Lebesgue, el cual nos caracteriza la integrabilidad de una función por medio de su conjunto de discontinuidades. Posteriormente introducimos el concepto de conjuntos Jordan–medibles, los cuales serán los conjuntos sobre los cuales tenemos el concepto de volumen y sobre los cuales podemos definir la Integral de Riemann de $\mathbb{R}^n$.

El Capítulo 4 es sobre el Teorema de Fubini, el cual nos da la relación fundamental entre el concepto de integral de Riemann y el concepto de integral iterada. El Teorema de Fubini es el que nos permite, de alguna manera, simplificar la integral $n$–dimensional a la integral de una variable real. Finalizamos el capítulo dando una sección sobre integral impropia tratada de una manera práctica, en contraste con los conceptos tratados en el siguiente capítulo.

En el Capítulo 5 tratamos sobre el cambio de variable en el caso $n$-dimensional, el cual es, en contraste con el caso de una variable real, un tema bastante complejo. Introducimos el concepto de Partición de Unidad el cual nos permite dar el concepto más general de Integral de Riemann en $\mathbb{R}^n$. Finalizamos el capítulo aplicando los resultados generales a tres casos particulares: coordenadas polares, esféricas y cilíndricas.

El último capítulo es sobre integrales de línea y de superficie. Estudiamos las relaciones existentes entre estas integrales por medio de los Teoremas de Green, Stokes y Gauss.

Finalizamos con un apéndice en el cual se presenta la demostración del Teorema de Cantor–Bernstein, el cual nos dice que si el conjunto $A$ es más “chico” que $B$ y que si $B$ es más “chico” que $A$, entonces los dos conjuntos son “iguales”. El Teorema de Cantor–Bernstein lo utilizamos en el primer capítulo.

Al final de cada capítulo proponemos una lista de ejercicios, 139 en total, los cuales complementan y aclaran lo tratado en el texto. Se debe intentar resolver todos ellos.

Mucho de lo aquí tratado está basado en los libros mencionados en la bibliografía, principalmente en los libros de Apostol [1], Mardsen [7], Spivak [9] y Williamson, Crowell y Trotter [10].

Para los Capítulos 1 y 2 recomendamos los libros de Mardsen y Spivak. Para los Capítulos 3, 4 y 5, recomendamos principalmente los libros de Mardsen, Spivak y el de Williamson, Crowell y Trotter.

El capítulo 6 se basa esencialmente en [1], aunque también es recomendable [10]. El apéndice se basa en [5].

En el Capítulo 6, decidimos dar algunos conceptos y resultados basados en la intuición geométrica en lugar de desarrollar toda la herramienta necesaria para poder presentar los resultados de una manera absolutamente formal. Sin embargo si el lector está interesado en una mayor formalidad, le recomendamos los libros de Cartan [3] y de Spivak.

Los requisitos que se necesitan para este libro son principalmente un conocimiento general de cálculo diferencial e integral de una variable real, así como cálculo diferencial de varias variables, incluyendo algo de topología de $\mathbb{R}^n$.

Gabriel Villa Salvador.<br>México, D.F.<br>Mayo de 2003.

# Capítulo 1

# Integrales en $\mathbb{R}^n$.

## 1.1 Generalidades

En esta primera parte se dan las definiciones básicas, así como los primeros resultados que se nos presentan en la construcción de la integral en $\mathbb{R}^n$.

**Definición 1.1.1** Un rectángulo cerrado en $\mathbb{R}^n$ es un conjunto de la forma

$$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n]$$

con $a_i, b_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n$.

Se define el volumen del rectángulo $S = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ por:

$$\text{vol }(S) = v(S) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$$

si $a_i \leq b_i \;\forall\; 1 \leq i \leq n$ y vol $(S) = 0$ si $S = \emptyset$.

**Definición 1.1.2** Una partición del rectángulo

$$S = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n]$$

es una colección

$$P = (P_1, P_2, \ldots, P_n) = P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_n$$

donde $P_j, 1 \leq j \leq n$, es una partición del intervalo $[a_j, b_j]$.

Definimos las particiones canónicas (ó la sucesión de particiones canónicas) de $S$, por la sucesión $\{P_m\}_{m=1}^{\infty}$, donde

$$P_m = (P_1^m, P_2^m, \ldots, P_n^m),\ m \in \mathbb{N}$$

y

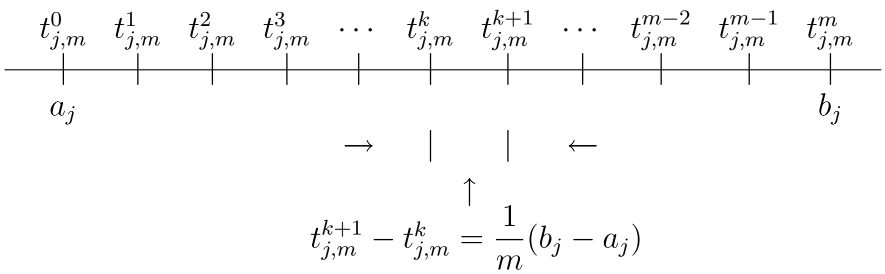
$$\{P_j^m\}_{m=1}^{\infty},\ 1 \leq j \leq n,$$

es la sucesión de particiones canónicas de $[a_j, b_j]$, es decir

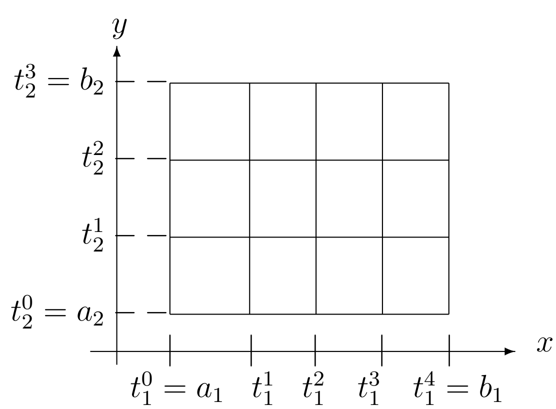
$$P_m^j = \left\{a_j = t_{j,m}^0, t_{j,m}^1, \ldots, t_{j,m}^m = b_j\right\}$$

y

$$t_{j,m}^k = a_j + \frac{k}{m}(b_j - a_j),\ 1 \leq k \leq m.$$




Las particiones canónicas de $[a_j, b_j]$ son las que dividen al intervalo $[a_j, b_j]$ en $m$ partes iguales.




*Representación geométrica de una partición del rectángulo* $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ *en* $\mathbb{R}^2$.

Dado un rectángulo $S = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ y una partición $P = (P_1, P_2, \cdots, P_n)$ de $S$ con:

$$P_j = \left\{t_j^0 < t_j^1 < t_j^2 < \ldots < t_j^{m_j}\right\},\ j = 1, 2, \ldots, n,$$

es decir, $P_j$ divide al intervalo $[a_j, b_j]$ en $m_j$ subintervalos, entonces tendremos que $P$ divide al rectángulo $S$ en los $m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n = \prod_{i=1}^{n} = m_i$ subrectángulos:

$$[t_1^{i_1-1}, t_1^{i_1}] \times [t_2^{i_2-1}, t_1^{i_2}] \times \cdots \times [t_n^{i_n-1}, t_n^{i_n}],\ 1 \leq i_j \leq m_j,\ 1 \leq j \leq n.$$

**Definición 1.1.3** Sea $S$ un rectángulo de $\mathbb{R}^n$ y sea $f : S \to \mathbb{R}$ una función acotada. Si $P$ es una partición de $S$ que determina a $S_1, S_2, \ldots, S_m$ como los subrectángulos de esta partición, entonces se definen los números:

$$\left.\begin{aligned} m_i &= \inf\{f(\vec{x}) \mid \vec{x} \in S_i\} \\ M_i &= \sup\{f(\vec{x}) \mid \vec{x} \in S_i\} \end{aligned}\right\} i = 1, 2, \ldots, m.$$

Por último se define:

$\underline{\text{Suma inferior de } f \text{ para } P} = I(f, P) = \sum_{i=1}^{m} m_i \text{ vol } (S_i).$

$\underline{\text{Suma superior de } f \text{ para } P} = S(f, P) = \sum_{i=1}^{m} M_i \text{ vol } (S_i).$

Hay varios resultados sobre sumas superiores e inferiores que nos conducen a la definición de integral.

**Proposición 1.1.4** *Sean $S$ un rectángulo cerrado de $\mathbb{R}^n$, $f : S \to \mathbb{R}$ una función acotada y $P$ una partición cualquiera de $S$. Entonces se tiene: $I(f, P) \leq S(f, P)$.*

*Demostración.* Sean $S_1, S_2, \ldots, S_k$ los subrectángulos de $S$ definidos por $P$. Se tiene que vol $(S_i) \geq 0, 1 \leq i \leq k$ y que $m_i \leq M_i, 1 \leq i \leq k$, de donde obtenemos que $m_i$ vol $(S_i) \leq M_i$ vol $(S_i), 1 \leq i \leq k$ y por lo tanto

$$I(f, P) = \sum_{i=1}^{k} m_i \text{ vol } (S_i) \leq \sum_{i=1}^{k} M_i \text{ vol } (S_i) = S(f, P). \qquad ❑$$

**Proposición 1.1.5** *Sea $S$ un rectángulo cerrado de $\mathbb{R}^n$ y sea $P$ una partición de $S$ que da origen a los subrectángulos $S_1, S_2, \ldots, S_k$ de $S$. Entonces se tiene:*

$$\text{vol } (S) = \sum_{i=1}^{k} \text{vol } (S_i).$$

*Demostración.* Se hará por inducción en $k$.

Si $k = 1$, se tiene que $S_1 = S$ y por lo tanto vol $(S) =$ vol $(S_1)$.

Hagámoslo en el caso particular de $k = 2$.

Si $k = 2$ y $S = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ entonces la partición $P = (P_1, \ldots, P_j, \ldots, P_n)$ necesariamente satisface que, para $i \neq j$, $P_i$ es la partición trivial de $[a_i, b_i]$ y $P_j$ consta de 3 puntos, es decir, se tiene:

$$P_i = \{a_i, b_i\}, i \neq j \text{ y } P_j = \{a_j, c, b_j\}, a_j < c < b_j.$$

Entonces:

$$\text{vol }(S_1) + \text{vol }(S_2) = (b_1 - a_1)\dots(b - j - 1 - a_{j-1})(c - a_j)(b_{j+1} - a_{j+1})\dots(b_n - a_n) +$$
$$+(b_1 - a_1)\dots(b_{j-1} - a_{j-1})(b_j - c)(b_{j+1} - a_{j+1})\dots(b_n - a_n) =$$
$$= (b_1 - a_1)\dots(b_{j-1} - a_{j-1})(b_{j+1} - a_{j+1})\dots(b_n - a_n)(c - a_j + b_j - c) =$$
$$= (b_1 - a_1)\dots(b_{j-1} - a_{j-1})(b_{j+1} - a_{j+1})\dots(b_n - a_n) = \text{vol }(S).$$

Por último sea $k > 1$ y supongamos el resultados válido para todo número natural menor que $k$.

Podemos suponer $k > 2$ y podemos tomar $a_j < c < b_j$ con $c \in P_j$ para algún $1 \le j \le n$, $P = (P_1, P_2, \dots, P_j, \dots, P_n)$. Entonces $S$ se divide en los 2 siguientes subrectángulos:

$$T_1 = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_j, c] \times \dots \times [a_n, b_n] \text{ y } T_2 = [a_1, b_1] \times \dots \times [c, b_j] \times \dots \times [a_n, b_n].$$

Reenumerando los subrectángulos $S_1, S_2, \dots S_k$, podemos suponer que $T_1$ está dividido en los subrectángulos $S_1, S_2, \dots S_r$ y $T_2$ en los subrectángulos $S_{r+1}, \dots S_k$. Por hipótesis de inducción y por el caso $k = 2$, tendremos que

$$\text{vol }(S) = \text{vol }(T_1) + \text{vol }(T_2) = \sum_{i=1}^{r} \text{vol }(S_i) + \sum_{i=r+1}^{k} \text{vol }(S_i) = \sum_{i=1}^{k} \text{vol }(S_i). \qquad ❑$$

**Proposición 1.1.6** *Sea $S$ un rectángulo cerrado de $\mathbb{R}^n$ y sea $f : S \to \mathbb{R}$ una función acotada. Sean $Q$ y $P$ dos particiones de $S$ tales que $P \subseteq Q$, es decir $Q$ es más fina que $P$. Entonces se tiene:*

$$I(f, Q) \ge I(f, P) \text{ y } S(f, Q) \le S(f, P).$$

*Demostración.* Sean $S_1, S_2, \dots S_k$ los subrectángulos de $S$ determinados por $P$ y sean $T_1, T_2, \dots T_m$ los subrectángulos de $S$ determinados por $Q$.

Se tiene que cada $T_i$ está contenido en algún $S_j$ y además cada $S_i$ es la unión de algunos $T_j$, digamos que:

$$S_i = T_{j_i+1} \cup T_{j_i+2} \cup \dots \cup T_{j_i+r_i} = \bigcup_{s_i=1}^{r_i} T_{j_i+s_i}.$$

Se tendrá que

$$\{1, 2, \dots, m\} = \bigcup_{i=1}^{k} \left( \bigcup_{s_i=1}^{r_i} j_i + s_i \right).$$

Pongamos:

$$m_i = \inf \{f(\vec{x}) \mid \vec{x} \in S_i\}, \quad M_i = \sup \{f(\vec{x}) \mid \vec{x} \in S_i\}, \quad 1 \le i \le k,$$
$$m'_j = \inf \{f(\vec{x}) \mid \vec{x} \in T_j\}, \quad M'_j = \sup \{f(\vec{x}) \mid \vec{x} \in T_j\}, \quad 1 \le j \le m.$$

Se tiene que $m_i \leq m'_{j_i+s_i}$ y $M_i \geq M'_{j_i+s_i}$ con $1 \leq i \leq k$ y $1 \leq s_i \leq r_i$. Por la proposición anterior se tiene:

$$\text{vol }(S_i) = \sum_{s_i=1}^{r_i} \text{vol }(T_{j_i+s_i}),\ 1 \leq i \leq k.$$

Por lo tanto

$$m_i \text{ vol }(S_i) = \sum_{s_i=1}^{r_i} m_i \text{ vol }(T_{j_i+s_i}) \leq \sum_{s_i=1}^{r_i} m'_{j_i+s_i} \text{ vol }(T_{j_i+s_i})$$

y

$$M_i \text{ vol }(S_i) = \sum_{s_i=1}^{r_i} M_i \text{ vol }(T_{j_i+s_i}) \geq \sum_{s_i=1}^{r_i} M'_{j_i+s_i} \text{ vol }(T_{j_i+s_i}).$$

Por tanto se tiene que

$$I(f,P) = \sum_{i=1}^{k} m_i \text{ vol }(S_i) \leq \sum_{i=1}^{k} \left( \sum_{s_i=1}^{r_i} m'_{j_i+s_i} \text{ vol }(T_{j_i+s_i}) \right) = \sum_{j=1}^{m} m'_j \text{ vol}(T_j) = I(f,Q)$$

y

$$S(f,P) = \sum_{i=1}^{k} M_i \text{ vol }(S_i) \geq \sum_{i=1}^{k} \left( \sum_{s_i=1}^{r_i} M'_{j_i+s_i} \text{ vol }(T_{j_i+s_i}) \right) = \sum_{j=1}^{m} M'_j \text{ vol}(T_j) = S(f,Q).$$

Así, obtenemos:

$$I(f,P) \leq I(f,Q) \text{ y } S(f,P) \geq S(f,Q).$$ ❏

Juntando las proposiciones anteriores, obtenemos un resultado importante para el concepto de integral.

**Teorema 1.1.7** *Sea $S$ un rectángulo de $\mathbb{R}^n$ y sea $f : S \to \mathbb{R}$ una función acotada. Sean $P_1$ y $P_2$ dos particiones de $S$ cualesquiera. Entonces*

$$I(f,P_1) \leq S(f,P_2).$$

*Demostración*. Si $P_1 = (P_1^1, P_1^2, \ldots, P_1^n)$ y $P_2 = (P_2^1, P_2^2, \ldots, P_2^n)$ consideremos la partición

$$Q := P_1 \cup P_2 := (P_1^1 \cup P_2^1, P_1^2 \cup P_2^2, \ldots, P_1^n \cup P_2^n)$$

llamada la partición unión de $P_1$ y $P_2$ (notemos que no es la unión de conjuntos, sino solamente una notación). Entonces $Q$ es más fina que $P_1$ y que $P_2$, es decir, $Q \supseteq P_1$ y $Q \supseteq P_2$. Aplicando dos veces la proposición anterior obtenemos que

$$I(f,P_1) \leq I(f,Q) \leq S(f,Q) \leq S(f,P_2).$$ ❏

Con estos resultados podemos ahora dar la definición de integral.

**Definición 1.1.8** Sean $S$ un rectángulo cerrado de $\mathbb{R}^n$, $f : S \to \mathbb{R}$ una función acotada. Definimos:

$$\underline{\text{Integral inferior de } f \text{ en } S} = \underline{\int_S} f = \sup_{P \in \mathbb{P}} I(f, P)$$
$$\underline{\text{Integral superior de } f \text{ en } S} = \overline{\int_S} f = \inf_{P \in \mathbb{P}} S(f, P)$$

donde $\mathbb{P} = \{P \mid P \text{ es una partición de } S\}$.

**Observación 1.1.9** Puesto que para cualesquiera particiones $P_1, P_2$ de $S$ se tiene que $I(f, P_1) \leq S(f, P_2)$, entonces

$$\sup_{P \in \mathbb{P}} I(f, P) \leq S(f, P_2) \text{ y } I(f, P_1) \leq \inf_{P \in \mathbb{P}} S(f, P),$$

de donde se sigue que

$$\underline{\int_S} f \text{ y } \overline{\int_S} f \text{ existen y } \boxed{\underline{\int_S} f \leq \overline{\int_S} f}.$$

**Definición 1.1.10** Si $\underline{\int_S} f \geq \overline{\int_S} f$ o lo que es lo mismo $\underline{\int_S} f = \overline{\int_S} f$, entonces $f$ se llama Riemann-integrable (o simplemente integrable) en $S$ y se define la integral de $f$ sobre S por:

$$\int_S f = \underline{\int_S} f = \overline{\int_S} f$$

**Notación 1.1.11** Cuando $f$ es integrable en $S$, algunas veces la integral se denota por:

$$\int_S f = \int_S f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n.$$

**Ejemplos 1.1.12**

1).- Sean $S = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ y $f \colon S \to \mathbb{R}$ dada por $f(\vec{x}) = c =$ constante $\forall\ \vec{x} \in S$. Entonces $\forall\ P \in \mathbb{P}$ se tiene que $I(f, P) = S(f, P) = c \text{ vol } (S)$ por lo que $f$ es integrable y

$$\int_S f = c \text{ vol } (S) = c(b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n).$$

2).- Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un rectángulo cerrado y sea $f\colon S \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \vec{x} \in \mathbb{Q}^n = \mathbb{Q} \times \ldots \times \mathbb{Q} \\ \\ 0 & \text{si} \quad \vec{x} \notin \mathbb{Q}^n. \end{cases}$$

Para toda partición $P$ de $S$ se tiene que $m_i = 0$ y $M_i = 1$. Por tanto

$$I(f,P) = \sum_{i=1}^{m} m_i \cdot \text{vol }(S_i) = 0$$

y

$$S(f,P) = \sum_{i=1}^{m} M_i \cdot \text{vol }(S_i) = \sum_{i=1}^{m} \text{vol }(S_i) = \text{vol }(S).$$

Por tanto se tiene que

$$\underline{\int_S} f = 0 \leq \overline{\int_S} f = \text{vol }(S),$$

es decir $f$ no es integrable en $S$, salvo en el caso trivial de que vol $(S) = 0$.

Un criterio importante de integrabilidad nos la da el siguiente resultado.

**Teorema 1.1.13** *Sea $S$ un rectángulo cerrado en $\mathbb{R}^m$ y sea $f\colon S \to \mathbb{R}$ una función acotada. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1).- *$f$ es integrable sobre $S$.*

(2).- *$\forall\ \epsilon > 0$, existe una partición $P$ de $S$ tal que $0 \leq S(f,P) - I(f,P) < \epsilon$.*

(3).- *Existe una sucesión de particiones $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ de $S$ tales que*

$$\lim_{n\to\infty} [S(f,P_n) - I(f,P_n)] = 0.$$

*En este último caso se tiene que*

$$\int_S f = \lim_{n\to\infty} S(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} I(f,P_n).$$

<u>Demostración</u>.

<u>(1) ⇒ (2)</u>. Sea $\epsilon > 0$. Existen particiones $P_1$ y $P_2$ de $S$ tales que: $S(f,P_1) - \int_S f < \epsilon/2$ y $\int_S f - I(f,P_2) < \epsilon/2$. Entonces si $P = P_1 \cup P_2$ es la partición unión (en el sentido definido anteriormente), se tendrá que:

$$0 \leq S(f,P) - \int_S f \leq S(f,P_1) - \int_S f < \epsilon/2$$

y

$$0 \leq \int_S f - I(f,P) \leq \int_S f - I(f,P_2) < \epsilon/2$$

por lo que

$$0 \leq S(f,P) - I(f,P) = S(f,P) - \int_s f + \int_S f - I(f,P) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

$\underline{(2) \Rightarrow (3).}$ Elijamos para $n \in \mathbb{N}$, $\epsilon_n = 1/n$. Existe una partición $P_n$ de $S$ tal que

$$0 \leq S(f,P_n) - I(f,P_n) < \epsilon_n = 1/n$$

por tanto

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} [S(f,P_n) - I(f,P_n)] \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

De aquí se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} [S(f,P_n) - I(f,P_n)] = 0.$$

$\underline{(3) \Rightarrow (1).}$ Sea $\epsilon > 0$. Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$S(f,P_n) - I(f,P_n) < \epsilon$$

y se tiene que:

$$\left.\begin{aligned} S(f,P_n) &\geq \inf_{P\in\mathbb{P}} S(f,P) = \overline{\int_S} f \\ I(f,P_n) &\leq \sup_{P\in\mathbb{P}} I(f,P) = \underline{\int_S} f \end{aligned}\right\} \forall\, n \in \mathbb{N}$$

por lo que

$$0 \leq \overline{\int_S} f - \underline{\int_S} f \leq S(f,P_n) - I(f,P_n) < \epsilon.$$

Por tanto tenemos que $\overline{\int_S} f = \underline{\int_S} f$, esto es, $f$ es integrable.

Por último si tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} [S(f,P_n) - I(f,P_n)] = 0$$

entonces

$$0 \leq S(f,P_n) - \overline{\int_s} f = S(f,P_n) - \underline{\int_S} f \leq S(f,P_n) - I(f,P_n).$$

Por el teorema del "sándwich" para sucesiones se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \left[ S(f,P_n) - \overline{\int_S} f \right] = 0$$

y además te tiene que $\{I(f,P_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge y

$$\lim_{n\to\infty} S(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} I(f,P_n).$$

Por lo tanto tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} S(f,P_n) = \overline{\int_S} f = \underline{\int_S} f = \int_S f = \lim_{n\to\infty} I(f,P_n). \qquad ❏$$

En seguida demostraremos una proposición que es en extremo técnica pero que sin embargo nos demuestra la equivalencia entre la definición de integral por medio de particiones arbitrarias (como se trata aquí) y la definición de integral por medio de particiones cuyo diámetro tiende a 0.

Es interesante resaltar el hecho de que la literatura trata indiscriminadamente que las 2 definiciones de integral son equivalentes y sin embargo no me fue posible encontrar la demostración de este hecho.

**Proposición 1.1.14** *Sea $S$ un rectángulo cerrado de $\mathbb{R}^n$ y sea $f\colon S \to \mathbb{R}$ una función acotada. Sea $\{P_m\}_{m=1}^{\infty}$ una sucesión de particiones cuyo "diámetro tiende a 0", es decir, si $P_m$ determina los subrectángulos $S_1^m, S_2^m, \ldots, S_{j_m}^m$, estos son tales que dado $\epsilon > 0$, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\ m \geq m_0$, cada lado de $S_j^m$, $1 \leq j \leq j_m$, es de longitud menor a $\epsilon$. Entonces se tiene:*

i).- $\displaystyle\lim_{m\to\infty} S(f,P_m) = \overline{\int_S} f.$

ii).- $\displaystyle\lim_{m\to\infty} I(f,P_m) = \underline{\int_S} f.$

*Demostración*.

i) Hagámoslo por reducción al absurdo suponiendo que

$$\lim_{m\to\infty} S(f,P_m) \neq \overline{\int_S} f.$$

Entonces existe $\epsilon_0 > 0$ tal que existe una subsucesión $\{P_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ tal que

$$S(f,P_{m_k}) - \overline{\int_S} f > 2\epsilon_0,\ \forall\ k \in \mathbb{N}.$$

En adelante sólo trabajaremos con la subsucesión $\{P_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ por lo que sin pérdida de generalidad podemos suponer que

$$\{P_{m_k}\}_{k=1}^{\infty} = \{P_m\}_{m=1}^{\infty}.$$

Por definición de $\overline{\int_S} f$, existe una partición $P$ de $S$ tal que $0 \leq S(f,P) - \overline{\int_S} f < \epsilon_0$.

Se tiene que

$$S(f,P_m) - S(f,P) > 2\epsilon_0 + \overline{\int_S} f - \overline{\int_S} f - \epsilon_0 = \epsilon_0,$$

es decir,

$$S(f,P_m) - S(f,P) > \epsilon_0 \ \forall \ m \in \mathbb{N}.$$

La contradicción consiste en hallar un $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$S(f,P_m) - S(f,P) < \epsilon_0.$$

Sea $P = (P_1, P_2, \ldots, P_n)$ con $P_j = \{t_j^0, t_j^1, \ldots, t_j^{\ell_j}\}$ y $t_j^0 < t_j^1 < \ldots < t_j^{\ell_j}$. Elijamos $\delta$ sujeto a:

$$0 < \delta \leq \min\left\{t_j^i - t_j^{i-1} \mid 1 \leq i \leq \ell_j, j = 1, 2, \ldots, n\right\}$$

y si

$$|f(\vec{x})| < M \ \forall \ \vec{x} \in S \text{ y } S = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$$

elegimos $k \geq \max\{b_i - a_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ y le pedimos a $S$ que cumpla que

$$M \cdot k^{n-1}(2\ell_1 - 1)(2\ell_2 - 1)\cdots(2\ell_n - 1)\delta < \epsilon_0$$

(la razón de pedir estas condiciones se aclara más adelante).

Elegimos $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que para toda $m \geq m_0$ cada lado de $S_i^m$ sea de longitud menor a $\delta$, $1 \leq i \leq j_m$. Sea $m$ uno de estos índices.

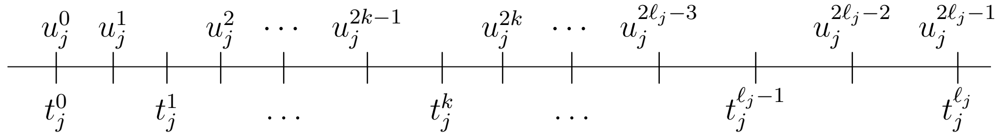
Sea $Q = (Q_1, Q_2, \ldots, Q_n)$ partición de $S$ tal que:

$$Q_j = \left\{u_j^0, u_j^1, \ldots, u_j^{2\ell_j - 2}, u_j^{2\ell_j - 1}\right\},$$

donde $u_j^i \in P_j^m$, $1 \leq i \leq 2\ell_j$, $P_m = (P_1^m, P_2^m, \ldots, P_n^m)$ con

$$u_j^{2k-1} \leq t_j^k \leq u_j^{2k}, k = 1, 2, \ldots \ell_j - 1, u_j^0 = t_j^0 = a_j,$$

$$u^{2\ell_j - 1} = t_j^{\ell_j} \text{ y } u_j^{2i} - u_j^{2i-1} < \delta, i = 1, 2, \ldots, \ell_j - 1.$$



Geométricamente las condiciones anteriores significan que tomamos puntos de las particiones $P_m = P_1^m \times \cdots \times P_n^m$ de tal suerte que en cada componente los $u_j^i$ rodean a $t_j^i$ y que si $u_j^{2k-1}$ y $u_j^{2k}$ rodean a $t_j^k$ entonces la distancia entre estos $u_j$'s es menor a $\delta$.

Se tiene que $Q \subseteq P_m$ por lo que $S(f,Q) \geq S(f,P_m)$ y $Q$ nos determina $(2\ell_1-1)(2\ell_2-1)\cdots(2\ell_n-1)$ subrectángulos de $S$.

Sean $S_{k_1,\ldots,k_n} = \left[u_1^{k_1-1}, u_1^{k_1}\right] \times \ldots \times \left[u_n^{k_n-1}, u_n^{k_n}\right]$, donde $1 \leq k_j \leq 2\ell_j - 1$, $1 \leq j \leq n$, los subrectángulos determinados por $Q$ y sean $S'_{k_1,\ldots,k_n} = \left[t_1^{k_1-1}, t_1^{k_1}\right] \times \ldots \times \left[t_n^{k_n-1}, t_n^{k_n}\right]$ los subrectángulos determinados por $P$ ($1 \leq k_j \leq \ell_j$, $1 \leq j \leq n$).

Sean $M_{k_1,\ldots,k_n} = \sup\{f(\vec{x}) \mid \vec{x} \in S_{k_1,\ldots,k_n}\}$ y $M'_{k_1,\ldots,k_n} = \sup\left\{f(\vec{x}) \mid \vec{x} \in S'_{k_1,\ldots,k_n}\right\}$.

Se tiene que

$$u_j^{2k_j+1} - u_j^{2k_j} \leq t_j^{k_j+1} - t_j^{k_j},$$

por lo cual se tiene que

$$S'_{k_1+1,\ldots,k_n+1} \geq S_{2k_1+1,\ldots,2k_n+1}.$$

En particular, tenemos

$$\text{vol } \left(S'_{k_1+1,\ldots,k_n+1}\right) \geq \text{vol } \left(S_{2k_1+1,\ldots,2k_n+1}\right)$$

y

$$M_{2k_1+1,\ldots,2k_n+1} \leq M'_{k_1+1,\ldots,k_n+1}.$$

De la siguiente suma separaremos los sumandos en que todos los subíndices son impares y por otro lado los sumandos en que al menos un subíndice es par (a estos últimos los denotamos por $I$), es decir:

$$S(f,Q) = \sum_{k_1=1}^{2\ell_1-1} \sum_{k_2=1}^{2\ell_2-1} \cdots \sum_{k_n=1}^{2\ell_n-1} M_{k_1,\ldots,k_n} \text{ vol } \left(S_{k_1,\ldots,k_n}\right)$$

$$= \sum_{k_1=1}^{\ell_1-1} \sum_{k_2=1}^{\ell_2-1} \cdots \sum_{k_n=1}^{\ell_n-1} M_{2k_1+1,\ldots,2k_n+1} \text{ vol } \left(S_{2k_1+1,\ldots,2k_n+1}\right) + \sum_{\alpha \in I} M_\alpha \text{ vol } (S_\alpha) \leq$$

$$\leq \sum_{k_1=1}^{\ell_1-1} \sum_{k_2=1}^{\ell_2-1} \cdots \sum_{k_n=1}^{\ell_n-1} M'_{k_1+1,\ldots,k_n+1} \text{ vol } \left(S'_{k_1+1,\ldots,k_n+1}\right) + \sum_{\alpha \in I} M_\alpha \text{ vol } (S_\alpha) =$$

$$= S(f,P) + \sum_{\alpha \in I} M_\alpha \text{ vol } (S_\alpha).$$

Por último notemos que $\forall\ \alpha \in I$, $|M_\alpha| \leq M$, que $I$ tiene menos de $(2\ell_1-1)\cdot(2\ell_2-1)\ldots(2\ell_n-1)$ elementos y que para cada $\alpha \in I$, $\alpha$ tiene un subíndice par, por lo que $S_\alpha$ tiene un lado de longitud $u_j^{2k} - u_j^{2k-1} < \delta$ y los restantes $(n-1)$ lados de longitud menor a $k$, por lo que

$$\text{vol } (S_\alpha) \leq k^{n-1}\delta.$$

Por lo tanto

$$\sum_{\alpha\in I} M_\alpha \text{ vol } (S_\alpha) \leq M\cdot(2\ell_1-1)\cdot(2\ell_2-1)\dots(2\ell_n-1)\cdot k^{n-1}\cdot\delta<\epsilon_0.$$

Se sigue que

$$S(f,Q)\leq S(f,P)+\sum_{\alpha\in I} M_\alpha \text{ vol } (S_\alpha) < S(f,P)+\epsilon_0.$$

Es decir, tenemos:

$$\epsilon_0 < S(f,P_m)-S(f,P)\leq S(f,Q)-S(f,P)<\epsilon_0$$

con lo se llega al absurdo $\epsilon_0<\epsilon_0$.

Por lo tanto se tiene

$$\lim_{m\to\infty} S(f,P_m)=\overline{\int_S} f.$$

ii) Es análogo al inciso i) y se deja como ejercicio. ❑

Como consecuencia del resultado anterior, podemos caracterizar la integrabilidad de una función por medio de particiones cuyo diámetro tiende a 0.

**Teorema 1.1.15** *Sea $S\subseteq\mathbb{R}^n$ un rectángulo cerrado y sea $f\to\mathbb{R}$ una función acotada. Sea $\{P_m\}_{m=1}^\infty$ una sucesión de particiones de $S$, tales que dado $\epsilon>0$, existe $m_0\in\mathbb{N}$ tal que $\forall\ m\geq m_0$, los subrectángulos determinados por $P_m$ tienen lados de longitud menor que $\epsilon$. Entonces se tiene que $f$ es integrable en $S \iff \lim\limits_{m\to\infty}[S(f,P_m)-I(f,P_m)]=0$.*

*En este caso se tiene que*

$$\int_S f=\lim_{m\to\infty} S(f,P_m)=\lim_{m\to\infty} I(f,P_m).$$

<u>*Demostración*</u>.

$\Rightarrow$) Puesto que $f$ es integrable se tiene que

$$\int_S f=\overline{\int_S} f=\underline{\int_S} f$$

por lo que debido a la proposición anterior tenemos:

$$\lim_{m\to\infty} S(f,P_m)=\overline{\int_S} f=\int_S f=\underline{\int_S} f=\lim_{m\to\infty} I(f,P_m)$$

y en particular

$$\lim_{m\to\infty}[S(f,P_m)-I(f,P_m)]=\int_S f-\int_S f=0.$$

$\Leftarrow$) Esta parte ya fue demostrada anteriormente. ❑

**Corolario 1.1.16** *Sean $S$, $f$ y $\{P_m\}_{m=1}^{\infty}$ como en el teorema. Si $f$ es integrable en $S$, entonces*

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{j_m} f\left(\vec{y}_i^{\,m}\right) \ \operatorname{vol}\ \left(S_i^m\right) = \int_S f,$$

*donde $P_m$ determina a los subrectángulos $S_1^m, S_2^m, \ldots, S_{j_m}^m$ de $S$ y elegimos $\vec{y}_i^{\,m} \in S_i^m$ arbitrario*

<u>*Demostración*</u>. Sean $m_i^{(m)} = \inf\{f(\vec{x}) \mid \vec{x} \in S_i^m\}$, $M_i^{(m)} = \sup\{f(\vec{x}) \mid \vec{x} \in S_i^m\}$, $1 \le i \le j_m$. Entonces se tiene

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
I(f,P_m) = \displaystyle\sum_{i=1}^{j_m} m_i^{(m)} \operatorname{vol}(S_i^m) \arrow[d, "m\to\infty"] & \le \displaystyle\sum_{i=1}^{j_m} f\left(\vec{y}_i^{\,m}\right) \operatorname{vol}\left(S_i^m\right) \le & \displaystyle\sum_{i=1}^{j_m} M_i^{(m)} \operatorname{vol}(S_i^m) = S(f,P_m) \arrow[d, "m\to\infty"'] \\
\underline{\int_S} f = \displaystyle\int_S f & & \overline{\int_S} f = \displaystyle\int_S f
\end{tikzcd}$$

Por el teorema del “sándwich” para sucesiones se sigue el resultado. ❑

**Corolario 1.1.17** *Sea $S$ un rectángulo cerrado de $\mathbb{R}^n$ y sea $f\colon S \to \mathbb{R}$ acotada. Sea $\{P_m\}_{m=1}^{\infty}$ la sucesión de particiones canónicas de $S$. Entonces*

$$f \text{ es integrable } \iff \lim_{m\to\infty} [S(f,P_m) - I(f,P_m)] = 0.$$

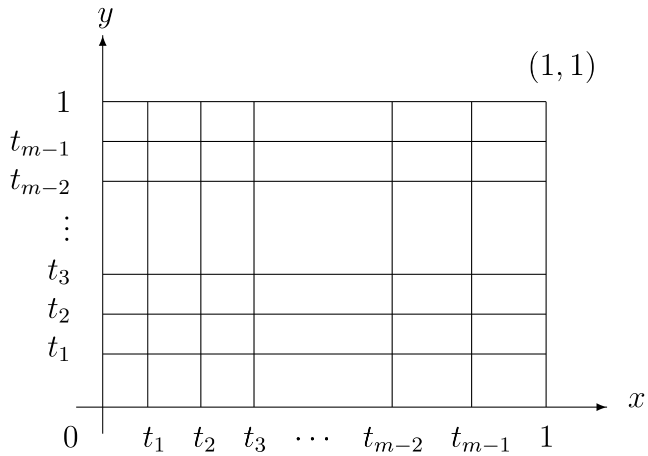
*En este caso:*

$$\int_S f = \lim_{m\to\infty} S(f,P_m) = \lim_{m\to\infty} I(f,P_m).$$

<u>*Demostración*</u>. Inmediata del teorema anterior. ❑

**Ejemplo 1.1.18** Sea $S = [0,1] \times [0,1] \subseteq \mathbb{R}^2$ y sea $f\colon S \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = xy$. Se quiere calcular $\int_S f$.

Sea $P_m = (P_1^m, P_2^m)$ partición de $S$ con $m \in \mathbb{N}$ y $P_1^m = P_2^m = \{t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{m-1} < t_m = 1\}$, $t_k = \dfrac{k}{m}$, $0 \le k \le m$.




Sean $S^m_{k_1,k_2} = \left[\frac{k_1-1}{m}, \frac{k_1}{m}\right] \times \left[\frac{k_2-1}{m}, \frac{k_2}{m}\right],\ 1 \leq k_1, k_2 \leq m.$
Entonces se tiene:

$$M^{(m)}_{k_1,k_2} = \sup\{f(x,y) \mid (x,y) \in S^{(m)}_{k_1,k_2}\} = \frac{k_1}{m} \cdot \frac{k_2}{m} = \frac{k_1 k_2}{m^2}$$

y

$$m^{(m)}_{k_1,k_2} = \inf\{f(x,y) \mid (x,y) \in S^{(m)}_{k_1,k_2}\} = \frac{k_1-1}{m} \cdot \frac{k_2-1}{m} = \frac{(k_1-1)(k_2-1)}{m^2},$$

$$\text{vol } \left(S^{(m)}_{k_1,k_2}\right) = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{m} = \frac{1}{m^2}.$$

Entonces

$$S(f,P_m) - I(f,P_m) = \sum_{k_1=1}^{m} \sum_{k_2=1}^{m} \left(M^{(m)}_{k_1,k_2} - m^{(m)}_{k_1,k_2}\right) \text{vol } \left(S^{(m)}_{k_1,k_2}\right) =$$

$$= \sum_{k_1=1}^{m} \sum_{k_2=1}^{m} \left(\frac{k_1+k_2-1}{m^2}\right) \cdot \frac{1}{m^2} = \frac{1}{m^4} \sum_{k_1=1}^{m} \left[m(k_1-1) + \frac{m(m+1)}{2}\right] =$$

$$= \frac{1}{m^3} \left[\sum_{k_1=1}^{m} (k_1-1) + \sum_{k_1=1}^{m} \frac{(m+1)}{2}\right] = \frac{1}{m^3} \left[\frac{m(m-1)}{2} + \frac{m(m+1)}{2}\right] =$$

$$= \frac{1}{m^2} \cdot \frac{2m}{2} = \frac{1}{m} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0.$$

Por lo tanto $f$ es integrable en $S$.
Ahora

$$\int_S f = \int_{[0,1]\times[0,1]} xy\ dxdy = \lim_{m\to\infty} S(f,P_m) =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \sum_{k_1=1}^{m}\sum_{k_2=1}^{m} \frac{k_1k_2}{m^2}\cdot\frac{1}{m^2} = \lim_{m\to\infty}\frac{1}{m^4}\sum_{k_1=1}^{m} k_1\frac{m(m+1)}{2} =$$

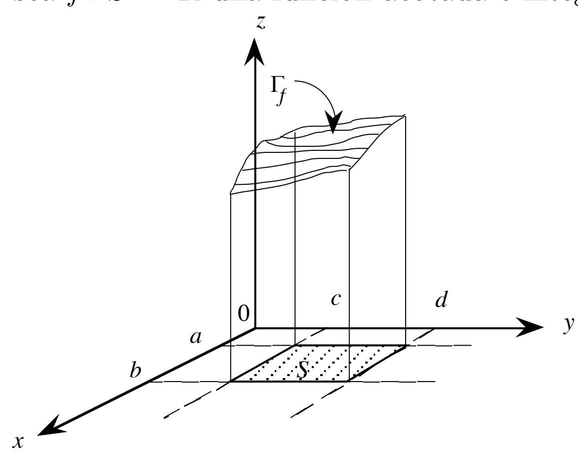
$$= \lim_{m\to\infty}\frac{m+1}{2m^3}\cdot\frac{m(m+1)}{2} = \lim_{m\to\infty}\frac{(m+1)^2}{4m^2} = \lim_{m\to\infty}\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{m}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Por lo tanto

$$\boxed{\int_S f = \int_{[0,1]\times[0,1]} xy\ dxdy = \frac{1}{4}.}$$

## 1.2 Interpretación Geométrica de la Integral

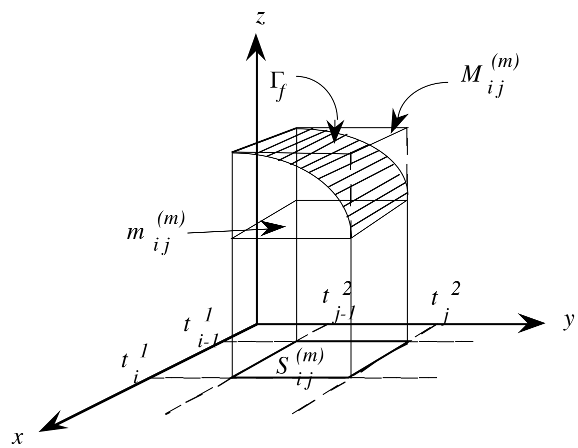
Sea $S=[a,b]\times[c,d]\subseteq\mathbb{R}^2$ y sea $f\colon S\to\mathbb{R}$ una función acotada e integrable.




Sea $P_m = (P_1^m, P_2^m)$ con $P_1^m = \{t_0^1, t_1^1, \ldots, t_m^1\}$ y $P_2^m = \{t_0^2, t_1^2, \ldots, t_m^2\}$ con $t_j^1 = a+\dfrac{j}{m}(b-a)$, $t_j^2 = c+\dfrac{j}{m}(d-c)$, $0\le j\le m$ y sean

$$S_{k_1,k_2}^{(m)} = \left[t_{k_1-1}^1, t_{k_1}^1\right]\times\left[t_{k_2-1}^2, t_{k_2}^2\right],\ 1\le k_1,k_2\le m,$$

$$m_{k_1,k_2}^{(m)} = \inf\{f(x,y)\mid (x,y)\in S_{k_1,k_2}^{(m)}\},\ M_{k_1,k_2}^{(m)} = \sup\{f(x,y)\mid (x,y)\in S_{k_1,k_2}^{(m)}\}.$$




Se tiene que $I(f, P_m)$ es la suma de los volúmenes de los prismas de base $S^{(m)}_{k_1,k_2}$ y altura $m^{(m)}_{k_1,k_2}$, los cuales se hallan por abajo de la gráfica $\Gamma_f$ de $f$ y que $S(f, P_m)$ es la suma de los volúmenes de los prismas de base $S^{(m)}_{k_1,k_2}$ y altura $M^{(m)}_{k_1,k_2}$ y que se hallan por arriba de la gráfica de $f$.

Puesto que $f$ es integrable en $S$, se tiene que $\lim\limits_{m\to\infty} S(f, P_m) = \lim\limits_{m\to\infty} I(f, P_m) = \displaystyle\int_S f$, es decir:

$$\boxed{\begin{array}{c} \displaystyle\int_S f = \text{volumen de la figura geométrica en } \mathbb{R}^3 \text{ acotada por } S \times \{0\}, \\ \Gamma_f = \text{gráfica de } f = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in S\} \\ \text{y los planos } x = a,\ x = b,\ y = c,\ y = d. \end{array}}$$

## 1.3 Numerabilidad

La noción de numerabilidad y de cardinalidad nos serán de vital importancia en varios temas subsiguientes de este trabajo, como por ejemplo, en medida 0, cubiertas, uniones numerables de compactos, particiones de unidad, etc.

Aquí sólo se exponen los resultados indispensables en este tratado.

**Proposición 1.3.1** *Sean $A$, $B$ dos conjuntos no vacíos. Entonces existe $f\colon A \to B$ suprayectiva $\Leftrightarrow$ existe $g\colon B \to A$ inyectiva.*

*Demostración*.

$\Rightarrow$) Sea $f\colon A \to B$ suprayectiva. Dada $b \in B$, existe $a_b \in A$ tal que $f(a_b) = b$. Definimos $g\colon B \to A$ dada por $g(b) = a_b$ (el $a_b$ electo, lo cual es posible gracias al axioma de elección). Ahora, puesto que $f$ es función, si $b_1, b_2 \in B, b_1 \neq b_2, f(a_{b_1}) = b_1 \neq b_2 = f(a_{b_2})$, por lo que $g(b_1) = a_{b_1} \neq a_{b_2} = g(b_2)$, es decir $g$ es inyectiva.

$\Leftarrow$) Sea $g\colon B \to A$ inyectiva. Entonces $g(B) \subseteq A$. Sea $b_0 \in B$ fijo (existe puesto que $B \neq \emptyset$). Sea $f\colon A \to B$ dada por

$$f(a) = \begin{cases} b & \text{si} \quad a \in g(B), a = g(b) \\ \\ b_0 & \text{si} \quad a \notin g(B) \end{cases}$$

Claramente $f$ es una función suprayectiva. ❑

**Definición 1.3.2** Un conjunto $A$ se llama <u>numerable</u> o <u>contable</u> si existe $f\colon \mathbb{N} \to A$ biyectiva.

**Ejemplos 1.3.3**

(1).- En forma obvia $\mathbb{N}$ es numerable.

(2).- Sea $k_0 \in \mathbb{N}$ y sea $A_{k_0} = \{k_0\, n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Sea $f\colon \mathbb{N} \to A_{k_0}$ dada por $f(n) = k_0\, n$. Entonces $f$ es biyectiva y por lo tanto $A_{k_0}$ es numerable. En particular con $k_0 = 2$, $A_2 = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{m \in \mathbb{N} \mid m \text{ es par}\}$ es numerable.

(3).- Sea $A = \mathbb{Z}$. Sea $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ dada por:

$$f(n) = \begin{cases} k-1 & \text{si} \quad n = 2k, k \in \mathbb{N} \\ \\ -k & \text{si} \quad n = 2k-1, k \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Entonces $f$ es biyectiva y por lo tanto $\mathbb{Z}$ es numerable.

**Teorema 1.3.4 (Cantor–Bernstein)** *Sean $A$, $B$ dos conjuntos tales que existen funciones $f\colon A \to B$ y $g\colon B \to A$ inyectivas. Entonces existe $h\colon A \to B$ biyectiva.*

<u>*Demostración*</u>. Se dará en el apéndice. ❑

**Observación 1.3.5** El Teorema de Cantor–Bernstein se puede enunciar con $f$ y $g$ suprayectivas y se tiene la misma conclusión. Esto se sigue inmediatamente de la primera proposición para numerabilidad.

Con este teorema podemos deducir resultados muy interesantes.

**Proposición 1.3.6** *Sea $A$ un conjunto infinito. Entonces $A$ contiene un subconjunto numerable.*

<u>*Demostración*</u>. Sean $x_1 \in A$. Entonces $A \setminus \{x_1\} \neq \emptyset$.

Elegimos $x_2 \in A \setminus \{x_1\}$, entonces $A \setminus \{x_1, x_2\} \neq \emptyset$ y $x_1 \neq x_2$.

Supongamos que se han seleccionado $x_1, x_2, \ldots, x_n \in A$ con $x_i \neq x_j$, $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$. Entonces $A \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \neq \emptyset$ (pues $A$ es infinito).

Sea $x_{n+1} \in A \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Entonces $x_{n+1} \neq x_i$, $1 \leq i \leq n$ y por lo tanto $x_j \neq x_k$, $1 \leq j, k \leq n+1$, $j \neq k$.

Se ha construido inductivamente el conjunto $C = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ con $x_n \neq x_m$, $n \neq m$, $n, m \in \mathbb{N}$.

Sea $\varphi \colon \mathbb{N} \to C$ dada por $\varphi(n) = x_n$. Entonces $\varphi$ es claramente biyectiva, por lo que $C$ es numerable y $C$ es un subconjunto de $A$. ❏

**Definición 1.3.7** Si $A$ es finito ó numerable, $A$ se dice <u>a lo más numerable</u>.

**Corolario 1.3.8** *Si existe $\varphi \colon \mathbb{N} \to A$ suprayectiva, entonces $A$ es a lo más numerable.*

<u>*Demostración*</u>. Si $A$ es finito se sigue el resultado. Si $A$ es infinito, por la proposición anterior $A$ contiene un conjunto numerable por lo que existe una función inyectiva $h \colon \mathbb{N} \to A$. Se sigue de la hipótesis que existe una función $g \colon A \to \mathbb{N}$ inyectiva y por el Teorema de Cantor–Bernstein se sigue que existe $f \colon \mathbb{N} \to A$ biyectiva. Por lo tanto $A$ es numerable. ❏

**Ejemplo 1.3.9** Sea $\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}^m$ una sucesión. Sea $\varphi \colon \mathbb{N} \to \{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ dada por $\varphi(n) = \vec{x}_n$, entonces $\varphi$ es sobre, por lo tanto $\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ es a lo más numerable.

Un resultado interesante es:

**Proposición 1.3.10** *El campo de los números racionales $\mathbb{Q}$ es numerable.*

<u>*Demostración*</u>. Sea $\varphi \colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ dada por $\varphi(n) = n$. Entonces $\varphi$ es inyectiva.

Si $x \in \mathbb{R}$, definimos el <u>signo</u> de $x$ por:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ -1 & \text{si} \quad x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Sea $\psi \colon \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ dada por $\psi(x) = 2^{|p|} \cdot 3^{|q|} \cdot 5^{1-\operatorname{sgn} x}$ donde $x = \dfrac{p}{q}$ y $(p, q) = 1$.

Si $x = \dfrac{p}{q}$, $y = \dfrac{a}{b}$, $x, y \in \mathbb{Q}$, $(p, q) = 1 = (a, b)$ y

$$\psi(x) = 2^{|p|} \cdot 3^{|q|} \cdot 5^{1-\operatorname{sgn} x} = 2^{|a|} \cdot 3^{|b|} \cdot 5^{1-\operatorname{sgn} y} = \psi(y),$$

entonces, por el Teorema Fundamental de la Aritmética, se tiene que $|p| = |a|$, $|q| = |b|$, $1 - \operatorname{sgn} x = 1 - \operatorname{sgn} y$. Por lo tanto $\left|\dfrac{p}{q}\right| = \left|\dfrac{a}{b}\right|$ y $\operatorname{sgn} x = \operatorname{sgn} y$. Se sigue que $\dfrac{p}{q} = x = y = \dfrac{a}{b}$, es decir, $\psi$ es inyectiva.

Se sigue del Teorema de Cantor–Bernstein que $\mathbb{Q}$ es numerable. ❏

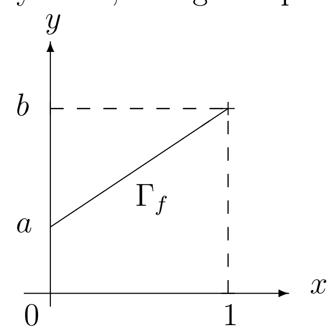
**Proposición 1.3.11** *Sea $A$ un conjunto a lo más numerable y sea $B \subseteq A$. Entonces $B$ es a lo más numerable.*

<u>*Demostración*</u>. Ejercicio. ❏

Hasta ahora sólo hemos visto conjuntos numerables. El siguiente resultado nos da ejemplos de conjuntos no numerables.

**Proposición 1.3.12** *Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Entonces $[a, b]$ no es un conjunto numerable.*

<u>*Demostración*</u>. Se probará que $[0, 1]$ no es numerable y puesto que $f : [0, 1] \to [a, b]$ dada por $f(t) = a + (b - a)t$ es biyectiva, se seguirá que $[a, b]$ no puede ser numerable.




Supongamos que $[0, 1]$ es numerable. Entonces podemos escribir $[0, 1] = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Sea $x_n$ dado por

$$x_n = 0.a_1^n a_2^n \dots a_n^n \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^n}{10^k}$$

con cada

$$a_k^n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},\ n \in \mathbb{N}.$$

Se construirá $x \in [0, 1] \setminus \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Sea $x = 0.b_1 b_2 \dots b_n \dots = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{10^k}$, $b_k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ y tal que $b_k \neq 0, 9$, $b_k \neq a_k^k$, $k \in \mathbb{N}$.

Supongamos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x = x_n$, es decir

$$x - x_n = 0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k - a_k^n}{10^k} = 0 = x_n - x.$$

Sea $k_0 \in \mathbb{N}$ el primer natural tal que $b_{k_0} \neq a_{k_0}^n$, el cual existe puesto que se tiene $b_n \neq a_n^n$. Digamos que $b_{k_0} > a_{k_0}^n$. Por lo tanto

$$x - x_n = \frac{b_{k_0} - a_{k_0}^n}{10^{k_0}} + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{b_k - a_k^n}{10^k} = 0$$

por lo que

$$\frac{1}{10^{k_0}} \leq \frac{b_{k_0} - a_{k_0}^n}{10^{k_0}} = \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{a_k^n - b_k}{10^k} \leq \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{9}{10^k} = \frac{9}{10^{k_0+1}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^k} =$$

$$= \frac{9}{10^{k_0+1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{9}{10^{k_0+1}} \cdot \frac{10}{9} = \frac{1}{10^{k_0}}$$

lo cual es posible gracias a que tenemos $a_k^n - b_k \leq 9 \ \forall \ k \in \mathbb{N}$. Por lo tanto tenemos que

$$\frac{1}{10^{k_0}} \leq \frac{b_{k_0} - a_{k_0}^n}{10^{k_0}} = \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{a_k^n - b_k}{10^k} \leq \frac{1}{10^{k_0}},$$

es decir se deben tener igualdades y por ende

$$a_k^n - b_k = 9 \ \forall \ k \geq k_0 + 1,$$

lo cual sólo es posible si

$$a_k^n = 9 \text{ y } b_k = 0 \ \forall \ k \geq k_0 + 1.$$

Esto contradice la elección de $b_k$ puesto que se tiene $b_k \neq 0 \ \forall \ k \in \mathbb{N}$.

Si se hubiese tenido $b_{k_0} < a_{k_0}^n$, lo que se hubiese concluido que necesariamente $b_k = 9 \ \forall \ k \geq k_0 + 1$, lo cual también contradice la elección de $b_k$.

En cualquier caso se tiene que $x \neq x_n \ \forall \ n \in \mathbb{N}$.

Finalmente,

$$0 \leq x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{10^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = 1.$$

Por lo tanto $x \in [0,1] \setminus \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, lo cual contradice que $[0,1] = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Así, $[0,1]$ no es numerable. ❏

**Corolario 1.3.13** *Para todo $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^n$ no es numerable.*

*Demostración.* Se tiene que $[0,1] \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^n$. Si $\mathbb{R}^n$ fuese numerable se seguiría que $[0,1]$ sería numerable, lo cual contradice el resultado anterior. ❏

**Teorema 1.3.14** *Si $A$ y $B$ son dos conjuntos numerable, entonces $A \times B$ es numerable.*

*Demostración.* Sea $C = \{2^n \cdot 3^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$. Puesto que $C \subseteq \mathbb{N}$ y $C$ es infinito, se sigue que $C$ es numerable.

Sea $h \colon \mathbb{N} \to A$, $g \colon \mathbb{N} \to B$ funciones biyectivas. Definimos $f \colon C \to A \times B$ dada por:

$$f\left(2^n \cdot 3^m\right) = (h(n), g(m)).$$

Claramente $f$ es biyectiva por lo que $A \times B$ es numerable. ❏

**Corolario 1.3.15** *Sean $A_1, A_2, \ldots, A_m$ conjuntos numerables. Entonces $A_1 \times A_2 \times \ldots A_m$ es un conjunto numerable.*

*Demostración*. Ejercicio. ❑

**Teorema 1.3.16** *La unión numerable de conjuntos numerables es numerable, es decir, si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una familia de conjuntos tal que $A_n$ es numerable $\forall\, n \in \mathbb{N}$ entonces $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ es un conjunto numerable.*

*Demostración*. Puesto que $A_1 \subseteq A$ y $A_1$ es infinito, se sigue que $A$ es infinito. Por el teorema anterior se tiene que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es un conjunto numerable. Para cada $n \in \mathbb{N}$ pongamos $A_n = \{x_{nm}\}_{m=1}^{\infty}$. Entonces

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} x_{nm}.$$

Sea $\varphi \colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to A$ dada por: $\varphi((n,m)) = x_{nm}$. Entonces $\varphi$ es suprayectiva y por lo tanto $A$ es numerable. ❑

**Observación 1.3.17** Los dos últimos teoremas, así como el corolario son válidos si sustituimos "numerable" por "a lo más numerable".

## 1.4 Ejercicios

1) Demostrar que la intersección de dos rectángulos cerrados en $\mathbb{R}^n$, es un rectángulo cerrado en $\mathbb{R}^n$.

2) Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$. Demostrar que $\partial\ (A \cup B) = \partial\ (A) \cup \partial\ (B)$ y que $\partial\ (A \cap B) \subseteq \partial\ (A) \cap \partial\ (B)$.

3) Sea $f \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \neq \dfrac{1}{2} \\[2ex] 1 & \text{si} \quad x = \dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Probar que $f$ es integrable y que

$$\int_0^1 f(x)\ dx = 0.$$

4) Sea $f\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \\ 1 & \text{si} \quad 1 < x \leq 2 \end{cases}.$$

Calcular $\displaystyle\int_0^2 f(x)\, dx$ usando la definición.

5) Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un rectángulo cerrado. Sea $f\colon S \to \mathbb{R}$ tal que $f(\vec{x}) \geq 0\ \forall\ \vec{x} \in S$. Sea $\vec{x}_0 \in S$ tal que $f(\vec{x}_0) > 0$ y $f$ es continua en $\vec{x}_0$. Probar que si $f$ es integrable, entonces $\displaystyle\int_S f > 0$.

6) Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un rectángulo cerrado y sea $f\colon S \to \mathbb{R}$ continua. Probar que $f$ es integrable.

7) Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un rectángulo cerrado y sea $f\colon S \to \mathbb{R}$ acotada. Probar que $f$ es integrable $\iff$ existe un número $c \in \mathbb{R}$ tal que para cada $\epsilon > 0$, existe una partición $P$ que determina los subrectángulos $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_k$ de $S$ y que para cualquier elección $\vec{x}_1 \in S_1, \ldots, \vec{x}_k \in S_k$ se tiene

$$\left| \sum_{i=1}^{k} f(\vec{x}_i)\ \text{vol}\,(S_i) - c \right| < \epsilon.$$

En este caso se tiene que

$$c = \int_S f.$$

8) Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un rectángulo cerrado y sea $f\colon S \to \mathbb{R}$ una función integrable. Sea $g\colon S \to \mathbb{R}$ tal que $g = f$ salvo en un conjunto finito de puntos. Probar que $g$ es integrable y que

$$\int_S g = \int_S f.$$

9) Sea $f\colon [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leq x < 1/2 \\ \\ 1 & \text{si} \quad 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}.$$

Probar que $f$ es integrable y que $\displaystyle\int_{[0,1]\times[0,1]} f = 1/2$.

10) Sean $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un rectángulo cerrado, $f, g\colon S \to \mathbb{R}$ funciones integrables y $c \in \mathbb{R}$. Probar que $f+g$ y $c\, f$ son funciones integrables y que
$$\int_S (f+g) = \int_S f + \int_S g \ ; \ \int_S c\, f = c \int_S f.$$

11) Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ y sea $P$ una partición del rectángulo cerrado $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Probar que $f$ es integrable $\iff$ para cada subrectángulo determinado por $P$, $f\big|_S$ es integrable y en este caso
$$\int_A f = \sum_S \int_S f\big|_S .$$

12) Sean $f, g\colon S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, donde $S$ es un rectángulo cerrado y $f$, $g$ son funciones integrables. Probar que:

i).- Si $f(\vec{x}) \geq 0 \ \forall \ \vec{x} \in S$, entonces $\displaystyle\int_S f \geq 0$.

ii).- Si $f(\vec{x}) \leq g(\vec{x}) \ \forall \ \vec{x} \in S$, entonces $\displaystyle\int_S f \leq \int_S g$.

13) Sea $f\colon S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función integrable, $S$ un rectángulo cerrado. Probar que $|f|$ es integrable y que
$$\left| \int_S f \right| \leq \int_S |f| \, .$$

14) Sea $A$ un conjunto a lo más numerable y sea $B \subseteq A$. Probar que $B$ es a lo más numerable.

15) Sean $A_1, A_2, \ldots, A_m$ conjuntos numerables. Probar que $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_m$ es numerable.

16) Probar que todo conjunto abierto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es unión a lo más numerable de bolas abiertas (y también de rectángulos abiertos).

17) Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y sea $\mathcal{O}$ una cubierta abierta de $A$. Probar que $A$ tiene una subcubierta a lo más numerable.

18) Probar que el conjunto de todas las sucesiones que constan de 0 y 1 no es numerable.

# Capítulo 2

# Medida y Contenido 0

## 2.1 Conjuntos de Medida 0 y de Contenido 0

Los conceptos de medida y contenido 0 son de vital importancia para todo el desarrollo de la integral de Riemann. Cabe hacer mención que la noción de medida es la que se aplica a la llamada integral de Lebesgue, la cual es una generalización de la integral de Riemann.

**Definición 2.1.1** Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ se dice que tiene medida 0 si dado $\epsilon > 0$, existe un recubrimiento a lo más numerable $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ de $A$ por rectángulos cerrados, es decir $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$, $U_n$ rectángulo cerrado de $\mathbb{R}^n$, tal que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{vol}(U_i) < \epsilon.$$

**Ejemplos 2.1.2**

(1).- Si $A = \emptyset$, elegimos $U_i = \emptyset \ \forall \ i \in \mathbb{N}, \operatorname{vol}(U_i) = 0$ y por lo tanto $A$ tiene medida 0.

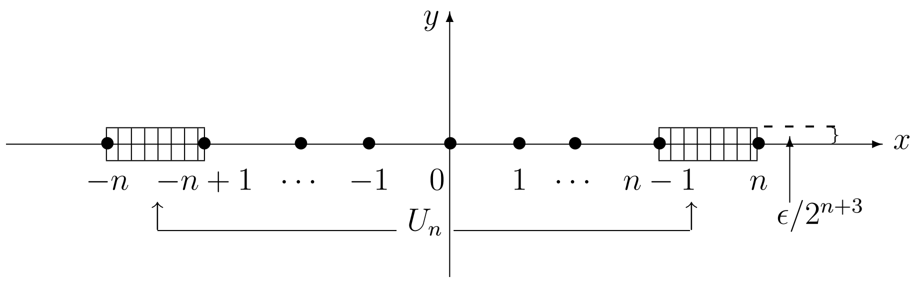
(2).- Sea $A = \{\vec{x}_m\}_{m=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}^n$ cualquier conjunto a lo más numerable. Dado cada $\vec{x}_m$, sea $U_m$ un rectángulo cerrado de $\mathbb{R}^n$ tal que $\vec{x}_m \in U_m$ y $\operatorname{vol}(U_m) < \dfrac{\epsilon}{2^m}$. Entonces

$$A \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} U_m \text{ y } \sum_{m=1}^{\infty} \operatorname{vol}(U_m) < \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^m} = \epsilon,$$

es decir $A$ tiene medida 0.

(3).- Sea $A = \mathbb{R}“ = ”\mathbb{R} \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Sea $\epsilon > 0$. Se definen

$$U_n = \{[n-1, n] \cup [-n, -n+1]\} \times \left[-\frac{\epsilon}{2^{n+3}}, \frac{\epsilon}{2^{n+3}}\right], \ n \in \mathbb{N}.$$




Se tiene que $U_n$ no es un rectángulo pero es la unión de dos rectángulos cerrados $V_n^1$ y $V_n^2$. Además

$$\mathrm{vol}(V_n^1) = \mathrm{vol}(V_n^2) = 1 \cdot 2 \cdot \frac{\epsilon}{2^{n+3}} = \frac{\epsilon}{2^{n+2}}$$

y $\{V_n^1 \bigcup V_n^2\}_{n=1}^{\infty}$ es una cubierta numerable de $A$ por medio de rectángulos cerrados y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{vol}(V_n^1) + \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{vol}(V_n^2) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^{n+2}} = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon,$$

por lo que $A = \mathbb{R}$ tiene medida 0 (en $\mathbb{R}^2$ !).

Un resultado que nos será de suma utilidad es:

**Teorema 2.1.3** *Sea $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ una familia de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ con cada $A_i$, $i \in \mathbb{N}$, de medida 0. Entonces $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ es un conjunto de medida 0.*

<u>*Demostración*</u>. Sea $\epsilon > 0$. Para cada $i \in \mathbb{N}$ sea $\left\{U_{ij}\right\}_{j=1}^{\infty}$ una cubierta numerable de $A_i$ por rectángulos cerrados tal que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{vol}(U_{ij}) < \frac{\epsilon}{2^i}.$$

Se tiene:

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} \left( \bigcup_{j=1}^{\infty} U_{ij} \right)$$

por lo tanto $\{U_{ij}\}_{i,j=1}^{\infty}$ es una cubierta $A$ por rectángulos cerrados.

Pongamos $\{V_i\}_{i=1}^{\infty} = \{U_{ij}\}_{i,j=1}^{\infty}$ y $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{vol}(V_i)$ converge si y sólo si es absolutamente convergente (por ser $\mathrm{vol}(V_i) \geq 0$). Por lo tanto podemos sumar en cualquier orden y se tiene que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{vol}(U_i) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{vol}(U_{ij}) < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^i} = \epsilon$$

y puesto que $A \subseteq \displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} V_i$, $V_i$ rectángulo cerrado de $\mathbb{R}^n$ para toda $i \in \mathbb{N}$, se sigue que $A$ es de medida 0. ❑

**Definición 2.1.4** Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ se dice que tiene <u>contenido 0</u> si dado $\epsilon > 0$ existe un recubrimiento <u>finito</u> $\{U_1, U_2, \ldots, U_m\}$ de $A$ por medio de rectángulos cerrados tales que $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \mathrm{vol}(U_i) < \epsilon$.

**Observación 2.1.5** Si $A$ tiene contenido 0, entonces $A$ tiene medida 0 pues, dado $\epsilon > 0$, consideramos $\{U_i\}_{i=1}^{m}$ un recubrimiento de $A$ por medio de rectángulos cerrados tal que

$$\sum_{i=1}^{m} \mathrm{vol}(U_i) < \epsilon/2.$$

Para $i \geq m+1$, sean $U_i$ rectángulos cerrados cualesquiera tales que

$$\sum_{i=m+1}^{\infty} \mathrm{vol}(U_i) < \epsilon/2,$$

por lo tanto

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \text{ y } \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{vol}(U_i) = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{vol}(U_i) + \sum_{i=m+1}^{\infty} \mathrm{vol}(U_i) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

por lo que $A$ es de medida 0.

El recíproco es falso pues claramente un conjunto de contenido 0 debe ser acotado y $\mathbb{Q}$, por ser numerable, es de medida 0 pero no es de contenido 0 por no ser acotado.

**Proposición 2.1.6** *Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Entonces $[a, b]$ no tiene contenido* 0*. Además si $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$ es cualquier recubrimiento finito de $[a, b]$ por intervalos cerrados (los cuales son los rectángulos cerrados en $\mathbb{R}$), entonces $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathrm{vol}(U_i) \geq b - a$.*

<u>*Demostración*</u>. Se hará la última parte por inducción en $n$.

Si $n=1$, $U_1=[c,d]$ con $c\leq a<b\leq d$ por lo que $\text{vol}(U_1)=d-c\geq b-a$.

Suponemos cierto el resultado para $n$ y lo demostraremos para $n+1$.

Sea $\{U_1,\ldots,U_n,U_{n+1}\}$ un recubrimiento de $[a,b]$ por intervalos cerrados. Se puede suponer que $a\in U_1=[\alpha,\beta]$ y por ende $\alpha\leq a\leq\beta$. Si $\beta\geq b$ se tiene $[a,b]\subseteq U_1$ y $\text{vol}(U_1)=\beta-\alpha\geq b-a$. Por lo tanto $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1}\text{vol}(U_i)\geq\text{vol}(U_1)\geq b-a$.

Si $\beta<b$, se tiene que $\{U_2,U_3,\ldots,U_{n+1}\}$ recubren a $[\beta,b]$ y por hipótesis de inducción tenemos que $\displaystyle\sum_{i=2}^{n+1}\text{vol}(U_i)\geq b-\beta$, por lo que

$$\sum_{i=1}^{n+1}\text{vol}(U_i)=\text{vol}(U_1)+\sum_{i=2}^{n+1}\text{vol}(U_i)\geq\beta-\alpha+b-\beta=b-\alpha\geq b-a. \qquad ❑$$

**Observación 2.1.7** Las definiciones de medida 0 y contenido 0 se dieron usando rectángulos cerrados. Sin embargo se pueden dar estas definiciones usando rectángulos abiertos y estas definiciones son equivalentes. Más precisamente

**Definición 2.1.8** Un conjunto $S=(a_1,b_1)\times(a_2,b_2)\times\ldots\times(a_n,b_n)\subseteq\mathbb{R}^n$ con $a_i,b_i\in\mathbb{R}$, $a_i\leq b_i, i\in\{1,2,\ldots,n\}$ se llama <u>rectángulo abierto</u> y se define su volumen por

$$\text{vol}(S)=\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i)=v(S).$$

Notemos que $\overline{S}=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\ldots\times[a_n,b_n]$ en el caso de que $a_i<b_i\ \forall\ 1\leq i\leq n$ y $\overline{S}=\emptyset$ si $S=\emptyset$. Por lo tanto

$$\text{vol}(S)=\text{vol}(\overline{S}).$$

A continuación damos las definiciones alternativas tanto de medida 0 como de contenido 0.

**Definición 2.1.9** Sea $A\subseteq\mathbb{R}^n$. Entonces

i).- $A$ se dice de <u>medida 0</u> si dado $\epsilon>0$, existe un recubrimiento $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ de $A$ por rectángulos abiertos tales que

$$\sum_{i=1}^{\infty}\text{vol}(U_i)<\epsilon.$$

ii).- $A$ se dice de <u>contenido 0</u> si si dado $\epsilon > 0$ existe un recubrimiento finito $\{U_1, U_2, \ldots, U_m\}$ de $A$ por medio de rectángulos abiertos tales que

$$\sum_{i=1}^{m} \operatorname{vol}(U_i) < \epsilon.$$

**Proposición 2.1.10**

i).- *Las dos definiciones de medida* 0 *coinciden.*

ii).- *Las dos definiciones de contenido* 0 *coinciden.*

<u>*Demostración*</u>.

<u>(i), (ii)</u>: Primero supongamos que se cumple la definición de medida 0 (resp. contenido 0) por medio de la definición de rectángulos abiertos. Entonces si $A$ es de medida 0 (resp. contenido 0), dado $\epsilon > 0$ sea $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ (resp. $\{U_i\}_{i=1}^{m}$) una cubierta de $A$ tal que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{vol}(U_i) < \epsilon \text{ (resp. } \sum_{i=1}^{m} \operatorname{vol}(U_i) < \epsilon).$$

Entonces

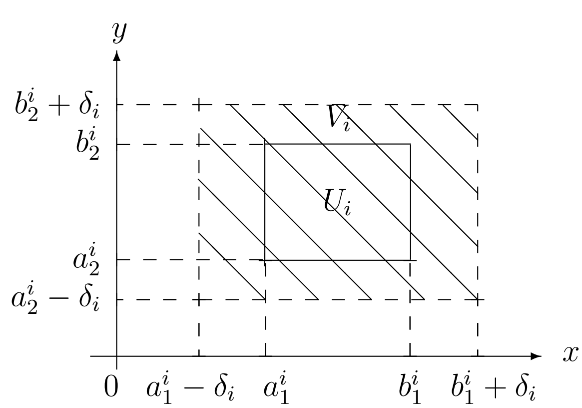
$$\left\{\overline{U}_i\right\}_{i=1}^{\infty} \text{ (resp. } \left\{\overline{U}\right\}_{i=1}^{m})$$

es una cubierta de $A$ por rectángulos cerrados y $\operatorname{vol}(\overline{U}_i) = \operatorname{vol}(U_i)$. De aquí se sigue inmediatamente que $A$ es de medida 0 (resp. contenido 0) por medio de la definición de rectángulos cerrados.

Recíprocamente, sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ de medida 0 (resp. contenido 0) por medio de la definición de rectángulos cerrados. Dado $\epsilon > 0$, existe una cubierta $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ (resp. $\{U_i\}_{i=1}^{m}$) de $A$ por medio de rectángulos cerrados tal que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{vol}(U_i) < \epsilon/2 \text{ (resp. } \sum_{i=1}^{m} \operatorname{vol}(U_i) < \epsilon/2).$$

Sea $U_i = [a_1^i, b_1^i] \times [a_2^i, b_2^i] \times \ldots \times [a_n^i, b_n^i]$.



Sea $V_i = (a_1^i - \delta_i, b_1^i + \delta_i) \times (a_2^i - \delta_i, b_2^i + \delta_i) \times \cdots \times (a_n^i - \delta_i, b_n^i + \delta_i)$.

Se tiene que $\delta_i$ se elige de tal suerte que satisfaga

$$\mathrm{vol}(V_i) \leq \mathrm{vol}(U_i) + \frac{\epsilon}{2^{i+1}} \;\forall\; i \in \mathbb{N} \text{ (resp. } 1 \leq i \leq m).$$

Veamos que esto es posible. Se tiene que

$$g(\delta_i) = \mathrm{vol}(V_i) = \prod_{j=1}^{n} \left(b_j^i - a_j^i + 2\delta_i\right) = (2\delta_i)^n + \mathrm{vol}(U_i) + \delta_i h(\delta_i)$$

donde $h(\delta_i)$ es un polinomio. Por lo tanto $g$ es una función continua y puesto que

$$\lim_{\delta_i \to 0} g(\delta_i) = \mathrm{vol}(U_i) \text{ y } \lim_{\delta_i \to \infty} g(\delta_i) = \infty,$$

se tiene, por el teorema del valor intermedio, que existe $\delta_i$ tal que

$$0 < \delta_i < \infty \;;\; g(\delta_i) = \mathrm{vol}(U_i) + \frac{\epsilon}{2^{i+1}}.$$

Se tiene que $U_i \subseteq V_i$ por lo que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i$ (resp. $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} V_i$), cada $V_i$ es un rectángulo abierto y

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{vol}(V_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \left\{\mathrm{vol}(U_i) + \frac{\epsilon}{2^{i+1}}\right\} = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{vol}(U_i) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^{i+1}} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

$$\text{(resp. } \sum_{i=1}^{m} \mathrm{vol}(V_i) \leq \sum_{i=1}^{m} \left\{\mathrm{vol}(U_i) + \frac{\epsilon}{2^{i+1}}\right\} = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{vol}(U_i) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\epsilon}{2^{i+1}} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon).$$

Por lo tanto $A$ es de medida 0 (resp. contenido 0) con la definición de rectángulos abiertos. ❑

Ya vimos que los conceptos de medida 0 y contenido 0 no son lo mismo, pero en el caso de conjunto compactos si lo es como lo prueba el siguiente:

**Teorema 2.1.11** *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto medida 0. Entonces $A$ tiene contenido 0.*

*Demostración.* Sean $\epsilon > 0$ y $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ una cubierta de $A$ de rectángulos abiertos, tal que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{vol}(U_i) < \epsilon \;,\; A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$$

y puesto que $A$ es compacto, existe $U_{i_1}, U_{i_2}, \ldots, U_{i_k}$ tales que

$$A \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} U_{i_j} \text{ y } \sum_{j=1}^{k} \mathrm{vol}(U_{i_j}) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{vol}(U_j) < \epsilon$$

de donde se sigue que $A$ es de contenido 0. ❑

**Observaciones 2.1.12**

(1).- Si $A$ no es compacto, el teorema anterior no se cumple en general, aún en el caso de que $A$ sea acotado. Por ejemplo, si tomamos $A = \mathbb{Q} \cap [0,1] = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $A$ tiene medida 0, sin embargo si $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$ es una cubierta de $A$ por intervalos cerrados, se tiene que

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i \Rightarrow [0,1] = \overline{A} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i$$

por lo que

$$\sum_{i=1}^{n} \operatorname{vol}(U_i) \geq 1 - 0 = 1.$$

Por lo tanto $A$ no tiene contenido 0.

(2).- Si $a, b \in \mathbb{R}, a < b, [a,b]$ no tiene medida 0 pues es compacto y no tiene contenido 0.

**Definición 2.1.13** Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un subconjunto. Se define la <u>función característica de $A$</u> por $\chi_A \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\chi_A(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \vec{x} \in A \\ \\ 0 & \text{si} \quad \vec{x} \notin A. \end{cases}$$

**Proposición 2.1.14** *Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces tenemos*

i).- $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A \cap B}$;

ii).- $\chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$;

iii).- $\chi_{A^c} = 1 - \chi_A$.

<u>*Demostración*</u>. Ejercicio. ❏

La siguiente definición nos amplía la definición de integral a conjuntos que no son necesariamente rectángulos cerrados.

**Definición 2.1.15** Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto <u>acotado</u>. Sea $S$ un rectángulo cerrado tal que $A \subseteq S$. Sea $f \colon S \to \mathbb{R}$ una función acotada. Entonces se define la <u>integral de $f$ sobre $A$</u> por:

$$\int_A f = \int_S f \cdot \chi_A.$$

Notemos que

$$(f \cdot \chi_A)(\vec{x}) = \begin{cases} f(\vec{x}) & \text{si} \quad \vec{x} \in A \\ \\ 0 & \text{si} \quad \vec{x} \notin A. \end{cases}$$

Además definimos el <u>volumen de $A$</u> por: $\text{vol}(A) = \displaystyle\int_S \chi_A$. En otras palabras, $A$ tiene volumen $\iff \chi_A$ es integrable.

**Observación 2.1.16** Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un rectángulo cerrado, $S = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$. Tenemos que $\text{vol}(S) = \displaystyle\int_S \chi_S = \int_S 1 = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n)$, es decir las dos definiciones de volumen para rectángulos cerrados coinciden.

**Proposición 2.1.17** *Un conjunto $A$ tiene volumen $0 \iff A$ tiene contenido $0$.*

<u>*Demostración*</u>.

$\Rightarrow$) Consideramos un conjunto $A$ de volumen 0, $\displaystyle\int_S \chi_A = \text{vol}(A) = 0$, con $S$ un rectángulo cerrado tal que $A \subseteq S$.

Sea $\epsilon > 0$. Entonces existe una partición $P$ de $S$ que determina los subrectángulos $S_1, \ldots, S_k$ de $S$ y tal que $S(\chi_A, P) - \displaystyle\int_S \chi_A = S(\chi_A, P) = \sum_{i=1}^{k} M_i \,\text{vol}(S_i) < \epsilon$.

Ahora, $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{k} S_i = S \supseteq A$ y

$$M_i = \sup\{f(\vec{x}) \mid \vec{x} \in S\} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad S_i \cap A \neq \emptyset \\ \\ 0 & \text{si} \quad S_i \cap A = \emptyset \end{cases}.$$

Sean $S_{i_1}, \ldots, S_{i_r}$ los subrectángulos tales que $S_{i_j} \cap A \neq \emptyset$, $1 \leq j \leq r$. Por lo tanto

$$A \subseteq \bigcup_{j=1}^{r} S_{i_j} \text{ y } \sum_{j=1}^{r} \text{vol}(S_{i_j}) = \sum_{i=1}^{k} M_i \ \text{vol}(S_i) < \epsilon,$$

es decir, $A$ tiene contenido 0.

$\Leftarrow$) Sea $A$ un conjunto de contenido 0. Sea $\epsilon > 0$ y sean $V_1, V_2, \ldots, V_M$ rectángulos abiertos tales que

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{M} V_i \text{ y } \sum_{i=1}^{M} \text{vol}(V_i) < \epsilon.$$

Sea $S$ un rectángulo cerrado tal que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{M} V_i \subseteq S$ y sea $P$ una partición de $S$ que determina los subrectángulos $S_1, \ldots, S_k$ tales que cada $S_i$ ó bien está contenido en algún $\overline{V}_j$ $(1 \leq j \leq M)$ ó bien $S_i \cap V_j = \emptyset \ \forall \ i \leq j \leq M$. Reenumerando los $S_i$ podemos suponer que $S_1, \ldots, S_N$ son los subrectángulos que están contenidos en algún $\overline{V}_j$. Sea $M_i = \sup\{\chi_A(\vec{x}) \mid \vec{x} \in S_i\}$. Por lo tanto $M_1 = \cdots = M_N = 1$ y $M_{N+1} = \cdots = M_k = 0$. Por lo tanto tenemos

$$0 \leq S(\chi_A, P) = \sum_{i=1}^{k} M_i \ \operatorname{vol}(S_i) = \sum_{i=1}^{N} \operatorname{vol}(S_i) \leq \sum_{j=1}^{M} \operatorname{vol}(\overline{V}_j) < \epsilon,$$

por lo que $\inf_{P \in \mathbb{P}} S(\chi_A, P) = \overline{\int_S} \chi_A = 0$.

Ahora si $P'$ es cualquier partición de $S$ se tiene $0 \leq I(\chi_A, P') \leq \overline{\int_S} \chi_A$ por lo tanto $I(\chi_A, P') = 0$, de donde se sigue que $\underline{\int_S} \chi_A = 0$. Por lo tanto $\operatorname{vol}(A) = \int_S \chi_A = \underline{\int_S} \chi_A = \overline{\int_S} \chi_A = 0$, es decir $\chi_A$ es integrable y $\int_S \chi_A = \operatorname{vol}(A) = 0$. ❏

**Definición 2.1.18** Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f \colon A \to \mathbb{R}$ acotada. Sea $\vec{x}_0 \in A$ y sea $\delta > 0$. Se definen:

$$M(f, \vec{x}_0, \delta) = \sup\left\{f(\vec{x}) \mid \vec{x} \in B(\vec{x}_0, \delta) \cap A\right\},$$

$$m(f, \vec{x}_0, \delta) = \inf\left\{f(\vec{x}) \mid \vec{x} \in B(\vec{x}_0, \delta) \cap A\right\}.$$

Entonces $\forall \ \delta > 0$, $M(f, \vec{x}_0, \delta) - m(f, \vec{x}_0, \delta) \geq 0$.

Se define la <u>oscilación</u> de $f$ en $\vec{x}_0$ por:

$$o(f, \vec{x}_0) = \lim_{\delta \to 0^+} \left[M(f, \vec{x}_0, \delta) - m(f, \vec{x}_0, \delta)\right].$$

**Observación 2.1.19** $o(f, \vec{x}_0)$ siempre existe, pues si $g \colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ se define por $g(\delta) = M(f, \vec{x}_0, \delta) - m(f, \vec{x}_0, \delta) \geq 0$, se tiene que $g$ es decreciente pues si $0 < \delta_1 \leq \delta$, entonces

$$M(f, \vec{x}_0, \delta_1) \leq M(f, \vec{x}_0, \delta) \ \text{ y } \ m(f, \vec{x}_0, \delta_1) \geq m(f, \vec{x}_0, \delta),$$

por lo que

$$g(\delta_1) = M(f, \vec{x}_0, \delta_1) - m(f, \vec{x}_0, \delta_1) \leq M(f, \vec{x}_0, \delta) - m(f, \vec{x}_0, \delta) = g(\delta).$$

Por lo tanto

$$o(f, \vec{x}_0) = \lim_{\delta \to 0^+} g(\delta)$$

existe. Además $o(f, \vec{x}_0) \geq 0$.

**Teorema 2.1.20** *Sean $\vec{x}_0 \in A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función acotada. Entonces $f$ es continua en $\vec{x}_0 \iff o(f, \vec{x}_0) = 0$.*

Demostración.

$\Rightarrow)$ Dada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para toda $\vec{x} \in A \cap B(\vec{x}_0, \delta)$, $|f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)| < \epsilon/3$, de donde

$$-\frac{\epsilon}{3} + f(\vec{x}_0) < f(\vec{x}) < f(\vec{x}_0) + \frac{\epsilon}{3}.$$

Por lo tanto

$$M(f, \vec{x}_0, \delta) \le f(\vec{x}_0) + \frac{\epsilon}{3} \ \text{ y } \ m(f, \vec{x}_0, \delta) \ge f(\vec{x}_0) - \frac{\epsilon}{3},$$

por lo que

$$M(f, \vec{x}_0, \delta) - m(f, \vec{x}_0, \delta) \le f(\vec{x}_0) + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} - f(\vec{x}_0) = \frac{2\epsilon}{3} < \epsilon.$$

Por lo tanto

$$o(f, \vec{x}_0) = \lim_{\delta \to 0} [M(f, \vec{x}_0, \delta) - m(f, \vec{x}_0, \delta)] = 0.$$

$\Leftarrow)$ Sea $\epsilon > 0$. Existe un $\delta > 0$ tal que para toda $0 < \delta_1 \le \delta$, se tiene que

$$M(f, \vec{x}_0, \delta) - m(f, \vec{x}_0, \delta) < \epsilon.$$

Sea $\vec{x} \in A \cap B(\vec{x}_0, \delta)$. Entonces

$$m(f, \vec{x}_0, \delta) \le f(\vec{x}) \le M(f, \vec{x}_0, \delta) \ \text{ y } \ - M(f, \vec{x}_0, \delta) \le -f(\vec{x}) \le -m(f, \vec{x}_0, \delta).$$

Por lo tanto

$$-\epsilon < m(f, \vec{x}_0, \delta) - M(f, \vec{x}_0, \delta) \le f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) \le M(f, \vec{x}_0, \delta) - m(f, \vec{x}_0, \delta) < \epsilon.$$

Por lo tanto $|f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)| < \epsilon$, es decir, $f$ es continua en $\vec{x}_0$. ❑

**Proposición 2.1.21** *Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f\colon A \to \mathbb{R}$ acotada y $\epsilon > 0$. Entonces el conjunto $B = \{\vec{x} \in A \mid o(f, \vec{x}) \ge \epsilon\}$ es cerrado en $A$.*

Demostración. Se demostrará que $A \setminus B$ es un conjunto abierto en $A$. Sea $\vec{x} \in A \setminus B$, entonces $o(f, \vec{x}) < \epsilon$. Sea $\delta > 0$ tal que $M(f, \vec{x}, \delta) - M(f, \vec{x}, \delta) < \epsilon$. Sea $\vec{y} \in B(\vec{x}, \delta) \cap A$ y si $\delta_1 > 0$ es tal que $B(\vec{y}, \delta_1) \subseteq B(\vec{x}, \delta)$ se tiene que para $\vec{z} \in B(\vec{y}, \delta_1) \cap A$:

$$M(f, \vec{y}, \delta_1) = \sup \{f(\vec{z}) \mid \vec{z} \in B(\vec{y}, \delta_1) \cap A\} \le \sup \{f(\vec{z}) \mid \vec{z} \in B(\vec{x}, \delta) \cap A\} = M(f, \vec{x}, \delta)$$

y

$$m(f, \vec{y}, \delta_1) = \inf \{f(\vec{z}) \mid \vec{z} \in B(\vec{y}, \delta_1) \cap A\} \ge \inf \{f(\vec{z}) \mid \vec{z} \in B(\vec{x}, \delta) \cap A\} = m(f, \vec{x}, \delta).$$

Por lo tanto

$$M(f, \vec{y}, \delta_1) - m(f, \vec{y}, \delta_1) \le M(f, \vec{x}, \delta) - m(f, \vec{x}, \delta) < \epsilon.$$

Se sigue que $o(f, \vec{y}) < \epsilon$, por lo que $B(\vec{x}, \delta) \cap A \subseteq A \setminus B$. Por lo tanto $A \setminus B$ es abierto en $A$ de donde se sigue que $B$ es cerrado en $A$. ❑

## 2.2 Ejercicios

1) Si $A$ es de medida 0 y $B \subseteq A$, probar que $B$ es de medida 0.

2) Si $A$ es de contenido 0 y $B \subseteq A$, probar que $B$ es de contenido 0.

3) Si $A$ es de medida 0, ¿es $\overline{A}$ de medida 0?

4) Si $A$ tiene contenido 0, ¿tiene $\overline{A}$ contenido 0?

5) Si $A$ tiene contenido 0, probar que $\partial A = \operatorname{Fr} A$ tiene contenido 0.

6) Si $A$ es acotado y tiene medida 0, ¿tiene $\overline{A}$ medida 0?

7) Sean $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Probar que $\mathbb{I} \cap [a, b]$ no tiene medida 0.

8) Sea $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} = A$. Probar que $A$ tiene medida 0.

9) Sea $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ continua. Probar que la gráfica de $\varphi$, $\Gamma_\varphi$, es de medida 0.

10) Probar que si $V$ es subespacio propio de $\mathbb{R}^n$ entonces $V$ es de medida 0, siguiendo los siguientes pasos:

    i).- Si $V$ es de dimensión $n - 1$ con base

    $$\begin{aligned} \vec{\alpha}_1 &= (\alpha_{1,1}, \ldots, \alpha_{1,(n-1)}, \alpha_{1,n}), \\ \vec{\alpha}_2 &= (\alpha_{2,1}, \ldots, \alpha_{2,(n-1)}, \alpha_{2,n}), \\ &\vdots \\ \vec{\alpha}_{n-1} &= (\alpha_{(n-1),1}, \ldots, \alpha_{(n-1),(n-1)}, \alpha_{(n-1),n}), \end{aligned}$$

    tal que $\{\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_{n-1}\}$ generan $\mathbb{R}^{n-1}$. Probar que $V$ es la gráfica de una transformación lineal $T\colon \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ y por lo tanto $V$ es de medida 0.

    ii).- Si $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una transformación lineal tal que

    $$T(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots, a_n) = (a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_i, \ldots, a_n)$$

    y $A$ es de medida 0, entonces $T(A)$ es de medida 0.

    iii).- Concluir que si $V$ es un subespacio propio de $\mathbb{R}^n$, entonces $V$ tiene medida 0.

11) Probar que la elipse: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 3y^2 = 1\}$, tiene medida 0 en $\mathbb{R}^2$.

12) Probar que la esfera: $S(\vec{x}_0, r) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\vec{x} - \vec{x}_0\| = r\}$ con $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ tiene medida 0 en $\mathbb{R}^n$.

13) Probar que $(a, b)$, $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$, no tiene medida 0, ni contenido 0.

14) Si $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ y $A \subseteq [a, b]$ tiene medida 0, entonces $[a, b] \setminus A$ no tiene medida 0.

15) Sea $f\colon B \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Sea $\vec{x} \in A \subseteq B$. Probar que si $o(f\big|_A, \vec{x}) > 0$, entonces $o(f, \vec{x}) > 0$ y concluir que:

$$\left\{\vec{x} \in A \mid o(f\big|_A, \vec{x}) > 0\right\} \subseteq \{\vec{x} \in B \mid o(f, \vec{x}) > 0\}.$$

16) Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ y sea $f\colon A \cup B \to \mathbb{R}$. Probar que:

$$\{\vec{x} \in A \cup B \mid o(f, \vec{x}) > 0\} \subseteq$$

$$\subseteq \{\vec{x} \in A \mid o(f, \vec{x}) > 0\} \cup \{\vec{x} \in B \mid o(f, \vec{x}) > 0\} \cup \partial A \cup \partial B.$$

17) Sea $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una función creciente y sean $a \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_n \leq b$. Probar que

$$\sum_{i=1}^{n} o(f, x_i) < f(b) - f(a).$$

18) Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$. Probar que:

i).- $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B}$.

ii).- $\chi_{A^c} = 1 - \chi_A$.

iii).- $\chi_{A\cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$.

19) Demostrar que si $a_i < b_i$, $1 \leq i \leq n$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, entonces $S = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ no tiene contenido 0.

20) Probar que si un conjunto no es acotado, no puede tener contenido 0.

21) Dar un ejemplo de un conjunto cerrado que tenga medida 0, pero que no tenga contenido 0.

22) Dar un ejemplo de un conjunto $C$ de medida 0 tal que $\partial C$ no sea de medida 0.

23) i).- Si $A \subseteq [0, 1]$ es una unión numerable de intervalos abiertos $(a_i, b_i)$ tales que cada número racional de $(0, 1)$ está en algún $(a_i, b_i)$, probar entonces que $\partial A = [0, 1] \setminus A$.

ii).- Si $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i) < 1$, probar que $\partial A$ no es de medida 0.

iii).- Dar un ejemplo explícito de un conjunto $A$ como en ii).

24) Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función creciente. Probar que $\{x \in [a,b] \mid o(f,x) > 0\}$ es de medida 0.

(Sugerencia: Probar que si $n \in \mathbb{N}$, $\{x \in [a,b] \mid o(f,x) > 1/n\}$ es finito).

# Capítulo 3

# Teorema de Lebesgue

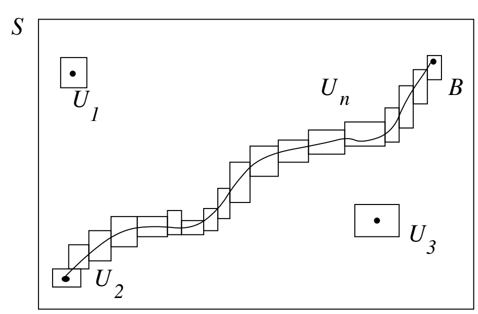
## 3.1 Teorema de Lebesgue

Sabemos, por un ejercicio anterior, que toda función continua es integrable. El siguiente resultado nos caracteriza las funciones integrables por medio del conjunto de discontinuidades de la función.

**Teorema 3.1.1 (Lebesgue)** *Sea $S \subseteq \mathbb{R}^m$ un rectángulo cerrado y sea $f\colon S \to \mathbb{R}$ una fucnción acotada. Sea $B = \{\vec{x} \in S \mid o(f, \vec{x}) > 0\} = \{\vec{x} \in S \mid f \text{ es discontinua en } \vec{x}\}$. Entonces $f$ es integrable $\iff$ $B$ es un conjunto de medida* $0$.

<u>*Demostración*</u>.

<u>$\Leftarrow$)</u> Supongamos primero que $B$ es de medida 0.



Sea $\epsilon > 0$ y sea $M > 0$ tal que $|f(\vec{x})| < M \ \forall\ \vec{x} \in S$. Sea $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ una colección de rectángulos cerrados tales que $B \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \overset{\circ}{U}_i$ y

$$\sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{vol}(U_i) < \frac{\epsilon}{2M + \operatorname{vol}(S)} = \delta.$$

Para cada $\vec{x} \in S \setminus B$, $f$ es continua en $\vec{x}$ por lo que $o(f, \vec{x}) = 0$. Así, existe un rectángulo cerrado $V_{\vec{x}}$ tal que $\vec{x} \in \overset{\circ}{V}_{\vec{x}}$ y $M_{V_{\vec{x}}}(f) - m_{V_{\vec{x}}}(f) < \delta$, donde

$$M_{V_{\vec{x}}}(f) = \sup\{f(\vec{y}) \mid \vec{y} \in S \cap V_{\vec{x}}\} \quad \text{y} \quad m_{V_{\vec{x}}}(f) = \inf\{f(\vec{y}) \mid \vec{y} \in S \cap V_{\vec{x}}\}.$$

Se tiene que $S = B \bigcup (S \setminus B) \subseteq \left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \overset{\circ}{U}_i\right) \bigcup \left(\bigcup\limits_{\vec{x} \in S \setminus B} \overset{\circ}{V}_{\vec{x}}\right)$ y puesto que $S$ es compacto y esta es una cubierta abierta, se tiene que existen $U_{i_1}, \ldots, U_{i_n}$ y $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_r \in S \setminus B$ tales que

$$S \subseteq \left(\bigcup_{j=1}^{n} U_{i_j}\right) \bigcup \left(\bigcup_{i=1}^{r} V_{\vec{x}_i}\right).$$

Sea $P$ una partición de $S$ tal que todo rectángulo determinado por $P$ está contenido en algún $U_{i_j}$, $1 \leq j \leq n$, o en algún $V_{\vec{x}_i}$, $1 \leq i \leq r$.

Sea $\Omega_1$ la colección de rectángulos $T$ determinados por $P$ tales que $T \subseteq V_{\vec{x}_i}$ para algún $1 \leq i \leq r$ y sea $\Omega_2$ la colección de subrectángulos $T$ determinados por $P$ tales que $T \subseteq U_{i_j}$ para algún $1 \leq j \leq n$.

Si $M_T(f) = \sup\{f(\vec{x}) \mid \vec{x} \in T\}$ y $m_T(f) = \inf\{f(\vec{x}) \mid \vec{x} \in T\}$ con $T \in \Omega_1 \cup \Omega_2$, se tiene que

$$S(f,P) - I(f,P) = \sum_{T \in \Omega_1} [M_T(f) - m_T(f)] \cdot \operatorname{vol}(T) + \sum_{T \in \Omega_2} [M_T(f) - m_T(f)] \cdot \operatorname{vol}(T) <$$

$$< \sum_{T \in \Omega_1} \delta \cdot \operatorname{vol}(T) + \sum_{T \in \Omega_2} 2\ M \operatorname{vol}(T) \leq \delta \sum_{T \in \Omega_1 \cup \Omega_2} \operatorname{vol}(T) + 2\ M \sum_{j=1}^{n} \operatorname{vol}(U_{i_j}) \leq$$

$$\leq \delta \cdot \operatorname{vol}(S) + 2\ M \cdot \delta = \epsilon,$$

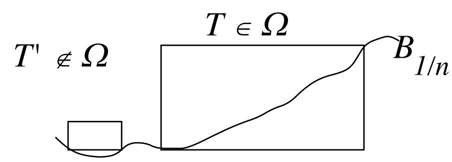
es decir, $\boxed{f \text{ es integrable sobre } S.}$

$\underline{\Rightarrow)}$ Sea $B_n = \left\{\vec{x} \in S \mid o(f, \vec{x}) \geq \frac{1}{n}\right\}$, $n \in \mathbb{N}$. Se tiene que $B = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_{1/n}$ (pues cada $B_{1/n} \subseteq B$ por lo que $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_{1/n} \subseteq B$ y por otro lado si $\vec{x} \in B$ se tiene que $o(f, \vec{x}) > 0$ por lo que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $o(f,\vec{x}) \geq 1/n$ lo cual implica que $\vec{x} \in B_{1/n}$. Por lo tanto $B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_{1/n}$).

Se probará que $\forall\ n \in \mathbb{N}$ el conjunto $B_{1/n}$ tiene contenido 0. Esto implica que $B_{1/n}$ tiene medida 0 lo cual a su vez implica que $B$ tiene medida 0.

Sea $\epsilon > 0$ y sea $P$ una partición de $S$ tal que $S(f,P) - I(f,P) < \epsilon/2n$. Sean $T_1, \ldots, T_k$ los subrectángulos de $S$ determinados por $P$.

Sea $\Omega$ la colección de subrectángulos $T$ determinados por $P$ tales que $\mathring{T} \cap B_{1/n} \neq \emptyset$.




Se tiene que $\bigcup_{i=1}^{k} \partial T_i$ tiene contenido 0. Sean $U_1, \ldots, U_r$ rectángulos cerrados tales que

$$\bigcup_{i=1}^{k} \partial T_i \subseteq \bigcup_{j=1}^{r} U_j \quad \text{y} \quad \sum_{j=1}^{r} \operatorname{vol}(U_j) < \epsilon/2.$$

Ahora si $T \in \Omega$ se tiene que $M_T(f) - m_T(f) \geq 1/n$ pues si $\vec{x} \in \mathring{T} \cap B_{1/n}$, existe $\delta > 0$ tal que $B(\vec{x},\delta) \subseteq T$ y $M(f,\vec{x},\delta) - m(f,\vec{x},\delta) \geq 1/n$ por lo que $M_T(f) - m_T(f) \geq M(f,\vec{x},\delta) - m(f,\vec{x},\delta) \geq 1/n$.

Se tiene que $B_{1/n} \subseteq \left(\bigcup_{j=1}^{r} U_j\right) \cup \left(\bigcup_{T\in\Omega} T\right)$ y además:

$$\frac{1}{n}\sum_{T\in\Omega} \operatorname{vol}(T) = \sum_{T\in\Omega} \frac{1}{n} \cdot \operatorname{vol}(T) \leq \sum_{T\in\Omega} [M_T(f) - m_T(f)] \cdot \operatorname{vol}(T) \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{k} [M_{T_i}(f) - m_{T_i}(f)] \cdot \operatorname{vol}(T_i) = S(f,P) - I(f,P) < \epsilon/2n,$$

de donde obtenemos que $\sum_{T\in\Omega} \operatorname{vol}(T) < \epsilon/2$ y por ende $\sum_{j=1}^{n} \operatorname{vol}(U_j) + \sum_{T\in\Omega} \operatorname{vol}(T) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. De esto concluimos que $B_{1/n}$ tiene contenido 0 y por lo tanto $B$ tiene medida 0. ❏

**Corolario 3.1.2** *Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un rectángulo cerrado y sea $f\colon S \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces $f$ es integrable.*

Demostración. La función $f$ es acotada por ser continua en el compacto $S$ y $B = \{\vec{x} \in S \mid o(f, \vec{x}) > 0\} = \emptyset$. Por lo tanto $B$ es de medida 0, por lo que $f$ es integrable. ❏

**Corolario 3.1.3** *Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un rectángulo cerrado y sea $f\colon S \to \mathbb{R}$ una función acotada. Si $f$ tiene una cantidad a lo más numerable de discontinuidades, entonces $f$ es integrable.*

Demostración. Inmediata. ❏

**Ejemplos 3.1.4**

(1).- Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{I} \\ \\ \dfrac{1}{q} & \text{si} \quad x = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}, (p,q) = 1. \end{cases}$$

Entonces $f$ es continua en $\mathbb{I} \cap [a,b]$ y discontinua en $\mathbb{Q} \cap [a,b]$ el cual es de medida 0 pues $\mathbb{Q}$ lo es, de donde se sigue que $f$ es integrable en $[a,b]$.

Ahora bien, para toda partición $P$ de $[a,b]$, $I(f,P) = 0$ por lo que

$$\int_a^b f = \int_{[a,b]} f = 0.$$

(2).- Sea $f\colon [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{I} \\ \\ 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q},\ y \in \mathbb{I} \\ \\ \dfrac{1}{q} & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q},\ y = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q} \ \text{ y } \ (p,q) = 1. \end{cases}$$

Se tiene que $f$ es discontinua en $(\mathbb{R} \times \mathbb{Q}) \cap ([a,b] \times [c,d])$ y puesto que este conjunto es de medida 0, se sigue que $f$ es integrable y

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} f = 0.$$

Como consecuencia del teorema de Lebesgue se pueden probar fácilmente los teoremas del álgebra de funciones integrables.

**Teorema 3.1.5** *Sea $S \subseteq \mathbb{R}^m$ un rectángulo cerrado $f, g \colon S \to \mathbb{R}$ funciones integrables. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces $f+g$ y $\alpha f$ son funciones integrables y se tiene*

i).- $\displaystyle\int_S (f+g) = \int_S f + \int_S g,$

ii).- $\displaystyle\int_S (\alpha f) = \alpha \int_S f.$

<u>*Demostración*</u>. Se tiene que

$$\{\vec{x} \in S \mid (f+g) \text{ es discontinua en } \vec{x}\} \subseteq \{\vec{x} \in S \mid o(f, \vec{x}) > 0\} \cup \{\vec{x} \in S \mid o(g, \vec{x}) > 0\}$$

y

$$\{\vec{x} \in S \mid o(\alpha f, \vec{x}) > 0\} \subseteq \{\vec{x} \in S \mid o(f, \vec{x}) > 0\}.$$

De aquí se sigue que $f+g$ y $\alpha f$ son integrables pues $f$ y $g$ lo son.

Sean $\epsilon > 0$ y $P$ una partición que determina los subrectángulos $S_1, S_2, \ldots, S_k$ y $\vec{x}_1 \in S_1, \ldots, \vec{x}_k \in S_k$ tales que

$$\left| \sum_{i=1}^{k} f(\vec{x}_i) \cdot \operatorname{vol}(S_i) - \int_S f \right| < \frac{\epsilon}{2 + |\alpha| + 1},$$

$$\left| \sum_{i=1}^{k} g(\vec{x}_i) \cdot \operatorname{vol}(S_i) - \int_S g \right| < \frac{\epsilon}{2 + |\alpha| + 1}.$$

Entonces:

i).-

$$\left| \sum_{i=1}^{k} [f(\vec{x}_i) + g(\vec{x}_i)] \cdot \operatorname{vol}(S_i) - \int_S f - \int_S g \right| \leq$$

$$\leq \left| \sum_{i=1}^{k} f(\vec{x}_i) \cdot \operatorname{vol}(S_i) - \int_S f \right| + \left| \sum_{i=1}^{k} g(\vec{x}_i) \cdot \operatorname{vol}(S_i) - \int_S g \right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

por lo tanto $\boxed{\displaystyle\int_S (f+g) = \int_S f + \int_S g}$.

ii).-

$$\left| \sum_{i=1}^{k} (\alpha f)(\vec{x}_i) \cdot \operatorname{vol}(S_i) - \alpha \int_S f \right| = |\alpha| \left| \sum_{i=1}^{k} f(\vec{x}_i) \cdot \operatorname{vol}(S_i) - \int_S f \right| \leq$$

$$\leq |\alpha| \cdot \frac{\epsilon}{2 + |\alpha| + 1} < \epsilon,$$

por lo tanto $\boxed{\displaystyle\int_S \alpha f = \alpha \int_S f}$. ❏

**Corolario 3.1.6** *Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un rectángulo cerrado y sean $f, g\colon S \to \mathbb{R}$ funciones integrables. Entonces $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha f + \beta g$ es integrable y*

$$\int_S (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_S f + \beta \int_S g.$$

Demostración. Inmediata. ❑

## 3.2 Conjuntos Jordan–medibles

Esta clase de conjuntos nos son necesarios para ampliar la definición de integral.

**Definición 3.2.1** Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto acotado. Se dice que A es Jordan–medible $\iff$ $\partial A$ tiene medida 0.

**Observación 3.2.2** Se tiene que $\partial A$ es cerrado y acotado, por lo que es compacto. Entonces se sigue que $A$ es Jordan–medible $\iff$ $\partial A$ tiene medida 0 $\iff$ $\partial A$ tiene contenido 0.

**Ejemplos 3.2.3**

(1).- Si $S$ es un rectángulo de $\mathbb{R}^n$ (abierto ó cerrado), entonces $S$ es Jordan–medible.

(2).- Si $A = B(\vec{x}_0, r)$, $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$, $\partial A = S(\vec{x}_0, r)$ tiene medida 0 por lo que $A$ es Jordan–medible.

**Proposición 3.2.4** *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto acotado y sea $S$ un rectángulo cerrado de $\mathbb{R}^n$ tal que $A \subseteq \mathring{S}$. Entonces $A$ es Jordan–medible $\iff$ $\chi_A$ es integrable. Por lo tanto $A$ es Jordan–medible $\iff$ $A$ tiene volumen y* $\operatorname{vol}(A) = \displaystyle\int_S \chi_A$.

Demostración. Sea $B = \{\vec{x} \in S \mid o(\chi_A, \vec{x}) > 0\}$. Se probará que $B = \partial A$.

Si $\vec{x} \in \partial A$, entonces $\forall\ \epsilon > 0$, existen $\vec{y} \in B(\vec{x}, \epsilon) \cap A$ y $\vec{x} \in B(\vec{x}, \epsilon) \cap A^c$. Por lo tanto $\chi_A(\vec{y}) = 1$, $\chi_A(\vec{x}) = 0$. Por lo tanto $\chi_A$ es discontinua en $\vec{x}$.

Recíprocamente, si $\vec{x} \notin \partial A$ entonces $\vec{x} \in \mathring{A}$ ó $\vec{x} \in \mathring{A^c}$. Si $\vec{x} \in \mathring{A}$, existe $\epsilon > 0$ tal que $B(\vec{x}, \epsilon) \subseteq A$, por lo que $\chi_A(\vec{y}) = 1$ para toda $\vec{y} \in B(\vec{x}, \epsilon)$. Por lo tanto $\chi_A$ es continua en $\vec{x}$. Si $\vec{x} \in \mathring{A^c}$, existe $\delta > 0$ tal que $B(\vec{x}, \delta) \subseteq A^c$. Por lo tanto $\chi_A(\vec{z}) = 0$ para toda $\vec{z} \in B(\vec{x}, \delta)$. Por lo tanto $\chi_A$ es continua en $\vec{x}$.

Así pues, $B = \partial A$, por lo que $\chi_A$ es integrable $\iff$ $B$ es de medida 0 $\iff$ $\partial A$ es de medida 0 $\iff$ $\chi_A$ es Jordan–medible. ❑

**Teorema 3.2.5** *Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un rectángulo cerrado y sean $f, g\colon S \to \mathbb{R}$ funciones integrables. Entonces $f \cdot g$ es integrable.*

<u>*Demostración*</u>. Se tiene que:

$$\{\vec{x} \in S \mid o(f, \vec{x}) > 0\} \bigcup \{\vec{x} \in S \mid o(g, \vec{x}) > 0\} \supseteq \{\vec{x} \in S \mid o(f \cdot g, \vec{x}) > 0\},$$

por lo que $\{\vec{x} \in S \mid o(f \cdot g, \vec{x}) > 0\}$ es de medida 0 y por lo tanto $f \cdot g$ es integrable. ❏

**Observación 3.2.6** En general $\displaystyle\int_S f \cdot g \neq \left(\int_S f\right)\left(\int_S g\right)$. Por ejemplo si $f, g\colon [0,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = g(x) = 1 \ \forall \ x \in [0,2]$ se tiene que

$$\int_{[0,2]} f \cdot g = \int_0^2 1 \cdot dx = 2 \neq 4 = 2 \cdot 2 = \left[\int_0^2 f \cdot dx\right] \cdot \left[\int_0^2 g \cdot dx\right].$$

**Corolario 3.2.7** *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ acotado y sea $S$ un rectángulo cerrado tal que $A \subseteq S$. Sea $f\colon S \to \mathbb{R}$ una función acotada. Si $f$ es integrable y $A$ es Jordan–medible entonces*

$$\int_A f = \int_S f \cdot \chi_A \text{ existe.}$$

<u>*Demostración*</u>. Se tiene que $f$ y $\chi_A$ son integrables sobre $S$, por lo que $f \cdot \chi_A$ es integrable sobre $S$. Por lo tanto $\displaystyle\int_A f = \int_S f \cdot \chi_A$ existe. ❏

**Proposición 3.2.8** *Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un rectángulo cerrado y sea $f\colon S \to \mathbb{R}$ integrable tal que $f(\vec{x}) \geq 0 \ \forall \ \vec{x} \in S$. Entonces $\displaystyle\int_S f \geq 0$.*

<u>*Demostración*</u>. Sea $P$ una partición cualquiera de $S$ que determina a los subrectángulos $S_1, S_2, \ldots, S_k$ y sea $m_i = \inf\{f(\vec{x}) \mid \vec{x} \in S_i\} \geq 0$.

Entonces

$$\int_S f = \sup_{P \in \mathbb{P}} I(f, P) \geq I(f, P) = \sum_{i=1}^{k} m_i \cdot \text{vol}(S_i) \geq 0.$$ ❏

**Corolario 3.2.9** *Sea $S$ un rectángulo cerrado en $\mathbb{R}^n$ y sean $f, g\colon S \to \mathbb{R}$ funciones integrables tales que $f(\vec{x}) \geq g(\vec{x}) \ \forall \ \vec{x} \in S$. Entonces $\displaystyle\int_S f \geq \int_S g$.*

<u>*Demostración*</u>. La función $f - g$ es integrable y se tiene que $(f - g)(\vec{x}) = f(\vec{x}) - g(\vec{x}) \geq 0 \ \forall \ \vec{x} \in S$. Por lo tanto $\displaystyle\int_S (f - g) = \int_S f - \int_S g \geq 0 \Rightarrow \int_S f \geq \int_S g$. ❏

**Proposición 3.2.10** *Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un rectángulo cerrado y sea $f\colon S \to \mathbb{R}$ una función integrable. Entonces $|f|$ es integrable y se tiene* $\left|\int_S f\right| \leq \int_S |f|$.

Demostración. Si $f$ es continua en $\vec{x}$ entonces $|f|$ es continua en $\vec{x}$ por lo que tenemos $\{\vec{x} \in S \mid o(|f|, \vec{x}) > 0\} \subseteq \{\vec{x} \in S \mid o(f, \vec{x}) > 0\}$. Por tanto el conjunto de discontinuidades de $|f|$ es de medida 0. Se sigue que $|f|$ es integrable. Además $-|f| \leq f \leq |f|$ por lo que $-\int_S |f| \leq \int_S f \leq \int_S |f| \Rightarrow \left|\int_S f\right| \leq \int_S |f|$. ❏

**Proposición 3.2.11** *Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un rectángulo cerrado y sea $f\colon S \to \mathbb{R}$ una función integrable. Sea $M \geq 0$ tal que $|f(\vec{x})| \leq M \ \forall\ \vec{x} \in S$. Entonces*

$$\left|\int_S f\right| \leq M \cdot \operatorname{vol}(S).$$

Demostración. Se tiene que

$$\left|\int_S f\right| \leq \int_S |f| \leq \int_S M = M \cdot \operatorname{vol}(S).$$ ❏

Hemos definido $\int_A f$ aunque $A$ no sea un rectángulo cerrado pero con $f$ definida en un rectángulo cerrado. Si $f$ no está definida en un rectángulo, extendemos $f$ a un rectángulo cerrado definiéndola como 0. Más precisamente:

**Definición 3.2.12** Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto cerrado y Jordan–medible. Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función acotada. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un rectángulo cerrado tal que $A \subseteq S$. Sea $\tilde{f}\colon S \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\tilde{f}(\vec{x}) = \begin{cases} f(\vec{x}) & \text{si} \quad \vec{x} \in A \\ \\ 0 & \text{si} \quad \vec{x} \notin A. \end{cases}$$

Entonces se dice que $f$ es integrable sobre $A$ si $\tilde{f}$ es integrable en $S$ y se define la integral de $f$ sobre $A$ por:

$$\int_A f = \int_A \tilde{f} = \int_S \tilde{f} \cdot \chi_A.$$

**Observaciones 3.2.13**

(1).- Se tiene que:

$$\left\{\vec{x} \in S \mid o(\tilde{f}, \vec{x}) > 0\right\} \subseteq \{\vec{x} \in A \mid o(f, \vec{x}) > 0\} \bigcup \partial A$$

y
$$\{\vec{x} \in A \mid o(f, \vec{x}) > 0\} \subseteq \left\{\vec{x} \in S \mid o(\tilde{f}, \vec{x}) > 0\right\}.$$

Puesto que $A$ es Jordan–medible, $\partial A$ es de medida 0 y entonces $\tilde{f}$ es integrable $\iff \left\{\vec{x} \in S \mid o(\tilde{f}, \vec{x}) > 0\right\}$ es de medida 0 $\iff \{\vec{x} \in A \mid o(f, \vec{x}) > 0\}$ es de medida 0, es decir, el Teorema de Lebesgue sigue siendo cierto para conjuntos Jordan–medibles.

(2).- Anteriormente se había definido que $f\colon S \to \mathbb{R}$ una función acotada era integrable sobre $A$, donde $A \subseteq S$, $S$ un rectángulo cerrado si $f \cdot \chi_A$ era integrable en $S$. Puesto que $\tilde{f} = f \cdot \chi_A$ en $A$, las dos definiciones coinciden, sólo que en la última, $f$ nada más está definida en $A$ y no en todo $S$.

(3).- Hay conjuntos abiertos y también conjuntos compactos $A$, tales que $A$ no es Jordan–medible por lo que $\displaystyle\int_A f$ no está definido. Esto se corregirá cuando se vean particiones de unidad.

**Ejemplos 3.2.14**

(1).- Sea $f\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad -1 \le x \le \dfrac{1}{2} \\ \\ 5x^3 - 8 & \text{si} \quad \dfrac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}.$$

Entonces $\{x \in [-1, 1] \mid o(f, x) > 0\} = \{1/2\}$ que es de medida 0 y además $A = [-1, 1]$ es Jordan–medible pues $\partial A = \{-1, 1\}$. Entonces puesto que $f$ está acotada
$$\int_{[-1,1]} f = \int_{-1}^{1} f$$
existe.

(2).- Sea $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} 1/x & \text{si} \quad x \neq 0 \\ \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

$f$ es acotada y $[0, 1]$ es Jordan–medible y $\{x \in [0, 1] \mid o(f, x) > 0\} = \{0\}$. Por lo tanto $f$ es integrable.

(3).- Sea $f\colon A = B(0,1) \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + \operatorname{sen} 1/y & \text{si} \quad y \neq 0 \\ \\ x^2 & \text{si} \quad y = 0 \end{cases}.$$

Tenemos que

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\},\ \partial A = S(0,1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\},$$

$$\{(x,y) \in A \mid o(f,(x,y)) > 0\} = \{(x,y) \in A \mid y = 0\} \subseteq \mathbb{R} \times \{0\}.$$

Entonces $\partial A$ y $\{(x,y) \in A \mid o(f,(x,y)) > 0\}$ son de medida 0 de donde se sigue que $\displaystyle\int_A f$ existe.

Los resultados para integrales en rectángulos cerrados, se generalizan en forma casi inmediata a conjuntos Jordan–medibles.

**Teorema 3.2.15** *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan–medible y sean $f, g\colon A \to \mathbb{R}$ funciones integrables sobre $A$. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ arbitrarios. Entonces*

(1).- *$\alpha f + \beta g$ es integrable en $A$ y* $\displaystyle\int_A (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_A f + \beta \int_A g.$

(2).- *Si $f(\vec{x}) \leq g(\vec{x})\ \forall\, \vec{x} \in A$ entonces* $\displaystyle\int_A f \leq \int_A g.$

(3).- *$|f|$ es integrable y* $\displaystyle\left|\int_A f\right| \leq \int_A |f|.$

(4).- *Si $|f(\vec{x})| \leq M\ \forall\, \vec{x} \in A$ entonces* $\displaystyle\left|\int_A f\right| \leq M \cdot \mathrm{vol}(A).$

(5).- *Si $m \leq f(\vec{x}) \leq M\ \forall\, \vec{x} \in A$ entonces* $\displaystyle m \cdot \mathrm{vol}(A) \leq \int_A f \leq M \cdot \mathrm{vol}(A).$

(6).- *$f \cdot g$ es integrable en $A$.*

*Demostración*. Sea $S$ un rectángulo cerrado tal que $A \subseteq S$. Sean $\tilde{f}, \tilde{g}\colon S \to \mathbb{R}$ dadas por:

$$\tilde{f}(\vec{x}) = \begin{cases} f(\vec{x}) & \text{si} \quad \vec{x} \in A \\ \\ 0 & \text{si} \quad \vec{x} \notin A \end{cases} \quad ; \quad \tilde{g}(\vec{x}) = \begin{cases} g(\vec{x}) & \text{si} \quad \vec{x} \in A \\ \\ 0 & \text{si} \quad \vec{x} \notin A \end{cases}.$$

Se tiene que $\tilde{f}$ y $\tilde{g}$ son integrables en $S$.

Sean $\widetilde{\alpha f+\beta g}, \widetilde{f\cdot g}, \widetilde{|f|}\colon S\to\mathbb{R}$ dadas por:

$$\widetilde{\alpha f+\beta g}(\vec{x})=\begin{cases}(\alpha f+\beta g)(\vec{x}) & \text{si} \quad \vec{x}\in A\\ \\ 0 & \text{si} \quad \vec{x}\notin A\end{cases} \quad ; \quad \widetilde{f\cdot g}(\vec{x})=\begin{cases}(f\cdot g)(\vec{x}) & \text{si} \quad \vec{x}\in A\\ \\ 0 & \text{si} \quad \vec{x}\notin A\end{cases} \quad ;$$

$$\widetilde{|f|}(\vec{x})=\begin{cases}|f|(\vec{x})=|f(\vec{x})| & \text{si} \quad \vec{x}\in A\\ \\ 0 & \text{si} \quad \vec{x}\notin A\end{cases}.$$

Se tiene que $\widetilde{\alpha f+\beta g}=\alpha\tilde{f}+\beta\tilde{g}$, $\widetilde{f\cdot g}=\tilde{f}\cdot\tilde{g}$, $\widetilde{|f|}=|\tilde{f}|$. Por lo tanto:

(1).- $\alpha f+\beta g$ es integrable y se tiene:

$$\int_A \widetilde{\alpha f+\beta g}=\int_S (\widetilde{\alpha f+\beta g})\cdot\chi_A=\int_S(\alpha\tilde{f}\cdot\chi_A+\beta\tilde{g}\cdot\chi_A)=$$

$$=\alpha\int_S f\cdot\chi_A+\beta\int_S \tilde{g}\cdot\chi_A=\alpha\int_A f+\beta\int_A g.$$

(2).- Si $f(\vec{x})\le g(\vec{x})\ \forall\ \vec{x}\in A$ se tiene que $f(\vec{x})\le g(\vec{x})\ \forall\ \vec{x}\in S$ por lo que

$$\int_A f=\int_S \tilde{f}\cdot\chi_A\le\int_S \tilde{g}\cdot\chi_A\le\int_A g.$$

(3).- $|f|$ es integrable en $A$ y

$$\left|\int_A f\right|=\left|\int_S \tilde{f}\cdot\chi_A\right|\le\int_S |\tilde{f}|\cdot\chi_A\le\int_A |f|.$$

(4).- Si $|f(\vec{x})|\le M\ \forall\ \vec{x}\in A$ entonces

$$\left|\int_f A\right|\le\int_A |f|\le\int_A M=\int_S M\cdot\chi_A=M\int_S \chi_A=M\cdot\operatorname{vol}(A).$$

(5).- Si $m\le f(\vec{x})\le M\ \forall\ \vec{x}\in A$, entonces tenemos

$$\int_A m=m\cdot\operatorname{vol}(A)\le\int_A f\le M\cdot\operatorname{vol}(A)=\int_A M.$$

(6).- Tenemos que $\widetilde{f\cdot g}=\tilde{f}\cdot\tilde{g}$ es integrable. ❏

**Teorema 3.2.16** *Sea $A\subseteq\mathbb{R}^n$ un conjunto Jordan–medible. Sea $f\colon A\to\mathbb{R}$ una función acotada e integrable. Entonces:*

(1).- *Si $A$ es de medida 0, entonces* $\displaystyle\int_A f = 0$.

(2).- *Si* $f(\vec{x}) \geq 0 \ \forall \ \vec{x} \in A$ *y* $\displaystyle\int_A f = 0$, *entonces se tiene que el conjunto* $B = \{\vec{x} \in A \mid f(\vec{x}) \neq 0\}$ *es de medida* 0.

*Demostración*.

(1).- Se tiene que $\overline{A}$ es un conjunto compacto y puesto que $\overline{A} = \mathring{A} \cup \partial A$ y tanto $\mathring{A}$ como $\partial A$ tienen medida 0, $\overline{A}$ tiene medida 0. Por lo tanto $\overline{A}$ tiene contenido 0, es decir $\operatorname{vol}(A) = 0$.

Sea $M$ tal que $|f(\vec{x})| \leq M \ \forall \ \vec{x} \in A$. Entonces $\left|\displaystyle\int_A f\right| \leq M \cdot \operatorname{vol}(A) = 0$, por lo tanto $\displaystyle\int_A f = 0$.

(2).- Sea $B_m = \{\vec{x} \in A \mid f(\vec{x}) \geq 1/m\}$. Se tiene $B = \displaystyle\bigcup_{m=1}^{\infty} B_m$. Se probará que cada $B_m$ es de medida 0.

Sea $\epsilon > 0$ y sea $P$ una partición de $S$ tal que

$$S(f, P) - \int_A f = S(f, P) < \frac{\epsilon}{m}.$$

Sean $S_1, S_2, \ldots, S_N$ los subrectángulos que intersectan a $B_m$. Entonces si $M_i = \sup\{f(\vec{x}) \mid \vec{x} \in S_i\} \geq 0$, $1 \leq i \leq k$, donde $S_1, S_2, \ldots, S_k$ son los subrectángulos de $S$ determinados por $P$, se tiene que $M_j \geq 1/m$, $1 \leq j \leq N$, por lo que

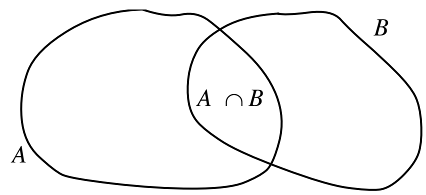
$$\frac{\epsilon}{m} > S(f, P) = \sum_{i=1}^{k} M_i \cdot \operatorname{vol}(S_i) \geq \sum_{i=1}^{N} M_i \cdot \operatorname{vol}(S_i) \geq \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{N} \operatorname{vol}(S_i),$$

por lo que $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \operatorname{vol}(S_i) < \epsilon$ y $B_m \subseteq \displaystyle\bigcup_{i=1}^{N} S_i$. Por tanto $B_m$ tiene contenido 0 y por tanto medida 0. De aquí se sigue que $B = \displaystyle\bigcup_{m=1}^{\infty} B_m$ tiene medida 0. ❏

**Teorema 3.2.17** *Sean $A$, $B$ Jordan–medibles. Sean $f\colon A \cup B \to \mathbb{R}$ una función acotada. Entonces $f$ es integrable en $A \cup B$ $\iff$ $f$ es integrable en $A$, $f$ es integrable en $B$ y $f$ es integrable en $A \cap B$. En este caso se tiene:*

$$\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f - \int_{A \cap B} f.$$

<u>*Demostración*</u>. Se tiene que $\partial(A \cup B) \subseteq \partial A \cup \partial B$ y $\partial(A \cap B) \subseteq \partial A \cup \partial B$ y puesto que $A$ y $B$ son Jordan–medibles se tiene que $A \cup B$ y $A \cap B$ son Jordan–medibles. Además tenemos $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B}$ y




$$\begin{gathered}
\{\vec{x} \in A \mid o(f,\vec{x}) > 0\} \subseteq \{\vec{x} \in (A \cup B) \mid o(f,\vec{x}) > 0\}, \\
\{\vec{x} \in B \mid o(f,\vec{x}) > 0\} \subseteq \{\vec{x} \in (A \cup B) \mid o(f,\vec{x}) > 0\}, \\
\{\vec{x} \in (A \cap B) \mid o(f,\vec{x}) > 0\} \subseteq \{\vec{x} \in (A \cup B) \mid o(f,\vec{x}) > 0\}, \quad \text{y} \\
\{\vec{x} \in (A \cup B) \mid o(f,\vec{x}) > 0\} \subseteq \{\vec{x} \in A \mid o(f,\vec{x}) > 0\} \cup \{\vec{x} \in B \mid o(f,\vec{x}) > 0\} \cup \partial A \cup \partial B.
\end{gathered}$$

<u>$\Rightarrow$)</u> Si $f$ es integrable sobre $A \cup B \Rightarrow f$ es integrable en $A$, $B$, y en $A \cap B$.

<u>$\Leftarrow$)</u> Si $f$ es integrable sobre $A$ y $B$, entonces $f$ es integrable sobre $A \cup B$ pues $\partial A$ y $\partial B$ son de medida 0.

Por último, sea $S$ un rectángulo cerrado tal que $(A \cup B) \subseteq S$. Entonces

$$\int_{A\cup B} f = \int_S \tilde{f} \cdot \chi_{A\cup B} = \int_S \tilde{f} \cdot (\chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B}) = \int_S \tilde{f} \cdot \chi_A + \int_S \tilde{f} \cdot \chi_B - \int_S \tilde{f} \cdot \chi_{A\cap B} =$$
$$= \int_A f + \int_B f - \int_{A\cap B} f. \qquad ❏$$

**Corolario 3.2.18** *Sean $A$ y $B \subseteq \mathbb{R}^n$ conjuntos Jordan–medibles y sea $f\colon A \cup B \to \mathbb{R}$ una función integrable sobre $A$ y sobre $B$. Si $A \cap B$ tiene medida* 0*, entonces $f$ es integrable sobre $A \cup B$ y*

$$\int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f.$$

<u>*Demostración*</u>. Se sigue inmediatamente del hecho de que $\displaystyle\int_{A\cap B} f = 0.$ ❏

**Ejemplo 3.2.19** Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada y sea $c \in [a,b]$. Entonces $f$ es integrable sobre $[a,b] \iff f$ es integrable sobre $[a,c]$ y sobre $[c,b]$ y se tiene

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f,$$

es decir

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

**Teorema 3.2.20 (Valor medio para integrales)** *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$, Jordan–medible conexo y compacto. Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces existe $\vec{x}_0 \in A$ tal que*

$$\int_A f = f(\vec{x}_0) \cdot \operatorname{vol}(A).$$

<u>*Demostración*</u>. Si $\operatorname{vol}(A) = 0$ se tiene que $\displaystyle\int_A f = 0$.

Sea $\operatorname{vol}(A) > 0$. Puesto que $A$ es conexo y compacto, $f(A) \subseteq \mathbb{R}$ y $f$ es continua, se tiene que $f(A) = [m, M]$ con $m, M \in \mathbb{R}$, $m \leq M$, es decir, $m \leq f(\vec{x}) \leq M \ \forall\ \vec{x} \in A$, por tanto

$$m \cdot \operatorname{vol}(A) \leq \int_A f \leq M \cdot \operatorname{vol}(A).$$

Obtenemos que

$$m \leq \frac{1}{\operatorname{vol}(A)} \int_A f \leq M,$$

es decir

$$\frac{1}{\operatorname{vol}(A)} \int_A f \in [m, M].$$

Por tanto existe

$$\vec{x}_0 \in A \text{ tal que } \frac{1}{\operatorname{vol}(A)} \int_A f = f(\vec{x}_0).$$

❏

## 3.3 Ejercicios

1) Sea $f(x, y) = 1$ si $x \neq 0$ y $f(0, y) = 0$. Probar que $f$ es integrable sobre $[0, 1] \times [0, 1] \subseteq \mathbb{R}^2$ y calcular $\displaystyle\int_{[0,1]\times[0,1]} f$.

2) Sean $A_i \subseteq \mathbb{R}^n$, $i \in \mathbb{N}$ conjuntos Jordan–medibles. ¿Es $A = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ Jordan–medible, si $A$ es acotado?

3) Sean $A$, $B$ Jordan–medibles y $A \cap B$ de medida 0. Mostrar que $\operatorname{vol}(A \cup B) = \operatorname{vol}(A) + \operatorname{vol}(B)$.

4) Probar que si $A$ es Jordan–medible, entonces $\overline{A}$ es Jordan–medible y dar un contraejemplo para ver que el recíproco no se cumple en general.

5) Sean $A \subseteq B$ Jordan–medibles. Probar que $\operatorname{vol}(A) \leq \operatorname{vol}(B)$.

6) Sean $A, U_1, \ldots, U_m \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan–medibles. Si $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} U_i$, probar que $\operatorname{vol}(A) \leq \sum_{i=1}^{m} \operatorname{vol}(U_i)$.

7) Probar que todo rectángulo (abierto ó cerrado) es Jordan–medible.

8) Sean $A$, $B$ Jordan–medibles. Probar que $A \setminus B$ es Jordan–medible y que $\operatorname{vol}(A \setminus B) = \operatorname{vol}(A) - \operatorname{vol}(A \cap B)$.

9) Probar que si $A$ es Jordan–medible, $\partial A^c$ es de medida 0.

10) Sean $f, g \colon [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ dadas por:

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{I} \\ 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \ \text{ y } \ y \in \mathbb{I} \\ \dfrac{1}{q} & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q}, \ y = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \ (p,q) = 1 \end{cases} ;$$

$$g(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{I} \\ 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \ \text{ y } \ y \in \mathbb{I} \\ 1 - \dfrac{1}{q} & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q}, \ y = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \ (p,q) = 1 \end{cases} .$$

Probar que $f$ y $g$ son discontinuas en $(\mathbb{R} \times \mathbb{Q}) \cap ([a,b] \times [c,d])$ y continuas en el resto. Concluir que tanto $f$ como $g$ son integrables y calcular

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} f \quad , \quad \int_{[a,b]\times[c,d]} g.$$

11) Sea $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1, x \in \mathbb{Q} \cap [0,1]\}$. ¿Cual es el volumen de $B$?

12) Sean $f, g \colon A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $A$ Jordan–medible y $f$, $g$ integrables. Probar que si $\int_A |f - g| = 0$, entonces $f(\vec{x}) = g(\vec{x}) \ \forall \ \vec{x} \in A$, salvo en un conjunto de medida 0.

13) Probar que toda función creciente $f \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ tiene a lo más una cantidad numerable de discontinuidades y por lo tanto $f$ es integrable.

14) Sean $f, g\colon A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $A$ Jordan–medible, $f$, $g$ funciones integrables tales que $f(\vec{x}) < g(\vec{x})\ \forall\ \vec{x} \in A$. Si $\operatorname{vol}(A) \neq 0$ probar que $\displaystyle\int_A f < \int_A g$.

15) Probar que un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ tiene medida $0 \iff \forall\ \epsilon > 0$, existe una cubierta $\{V_i\}_{i=1}^{\infty}$ de $A$ por conjuntos Jordan–medibles tales que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{vol}(V_i) < \epsilon.$$

16) Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y Jordan–medible. Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $\displaystyle\int_B f = 0$ para cada $B \subseteq A$ Jordan–medible. Probar que $f = 0$.

17) Dar un ejemplo de un conjunto acotado $C$ de medida 0 tal que $\displaystyle\int_S \chi_C$ no exista, donde $S$ es un rectángulo cerrado tal que $C \subseteq S$.

18) Probar que si $C$ tiene contenido 0 entonces existe un rectángulo cerrado $S$ tal que $C \subseteq S$ y $\displaystyle\int_S \chi_C = 0$.

19) Dar un ejemplo de un conjunto abierto y acotado que no sea Jordan–medible. Dar también un ejemplo de un conjunto compacto que no sea Jordan–medible.

20) Sea $C$ un conjunto acotado de medida 0 tal que $\displaystyle\int_S \chi_C$ existe para un rectángulo cerrado $S$ tal que $C \subseteq S$. Probar que $\displaystyle\int_S \chi_C = 0$.

21) Sea $S$ un rectángulo cerrado, probar que $C \subseteq S$ es Jordan–medible $\iff$ para cada $\epsilon > 0$ existe una partición $P$ de $S$ tal que

$$\sum_{S \in \Omega_1} \operatorname{vol}(S) - \sum_{S \in \Omega_2} \operatorname{vol}(S) < \epsilon,$$

donde $\Omega_1$ está formado por los subrectángulos que cortan $C$ y $\Omega_2$ por todos los subrectángulos contenidos en $C$.

22) Sea $A$ Jordan–medible y sea $\epsilon > 0$. Probar que existe $C \subseteq A$ compacto y Jordan–medible tal que

$$\int_A \chi_{A \setminus C} = \operatorname{vol}(A \setminus C) < \epsilon.$$

# Capítulo 4

# Teorema de Fubini

## 4.1 Integrales Paramétricas

Entendemos por integral paramétrica aquella integral cuyo integrando depende de dos variables y se hace la integral sobre una de las dos. Más precisamente, sea $A = [a,b] \times [c,d] \subseteq \mathbb{R}^2$ y sea $f\colon [a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R}$ una función integrable y tal que para cada $t_0 \in [c,d]$, $f_{t_0}\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por $f_{t_0}(x) = f(x,t_0)$ es también integrable. Se define $F\colon [c,d] \to \mathbb{R}$ por:

$$F(t) = \int_a^b f(x,t)dx.$$

Las propiedades más importantes de este tipo de integrales son:

**Teorema 4.1.1**

i).- *Si $f$ es continua, entonces $F$ es continua.*

ii).- *Si $f$ y $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ son continuas, entonces $F$ es derivable y se tiene:*

$$F'(t) = \frac{dF}{dt}(t) = \frac{d}{dt}\left(\int_a^b f(x,t)dx\right) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx = \int_a^b f_t(x,t)dx.$$

*Demostración.*

i).- Por ser $[a,b]\times[c,d]$ compacto y $f$ continua, se tiene que f es uniformemente continua, por lo que dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\|(x,t)-(x',t')\| < \delta \Rightarrow |f(x,t) - f(x',t')| < \dfrac{\epsilon}{b-a}$.

Sea $t_0 \in [c,d]$ fijo y sea $t \in [c,d]$ tal que $|t-t_0| < \delta \Rightarrow\ \forall\ x \in [a,b]$ se tiene $\|(x,t)-(x,t_0)\| = |t-t_0| < \delta$ por lo que $|f(x,t)-f(x,t_0)| < \dfrac{\epsilon}{b-a}$, de donde tendremos:

$$|F((t) - F(t_0)| = \left| \int_a^b (f(x,t) - f(x,t_0)dx \right| \leq \int_a^b |f(x,t) - f(x,t_0)|dx <$$

$$< \int_a^b \frac{\epsilon}{b-a} dx = \frac{\epsilon}{b-a}(b-a) = \epsilon,$$

es decir, $\boxed{F \text{ es continua}}$.

ii).- Se tiene que $f_t\colon [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ es continua y $[a,b] \times [c,d]$ es compacto por lo que $f_t$ es uniformemente continua. Por tanto, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\|(x,t) - (x',t')\| < \delta \Rightarrow |f_t(x,t) - f_t(x',t')| < \dfrac{\epsilon}{b-a}$.

Si $t_0 \in [c,d]$ está fijo y $t \in [c,d]$ es tal que $|t - t_0| < \delta$, entonces $\forall\ x \in [a,b]$, $\|(x,t) - (x,t_0)\| = |t - t_0| < \delta$ por lo que $|f_t(x,t) - f_t(x,t_0)| < \dfrac{\epsilon}{b-a}$.

Por ser $f_t$ continua se sigue del teorema del valor medio que para cada $x \in [a,b]$, existe $t_1 \in [t_0,t]$ (si $t > t_0$) ó $t_1 \in [t,t_0]$ (si $t < t_0$) tal que:

$$\frac{f(x,t) - f(x,t_0)}{t - t_0} = f_t(x,t_1) \quad (t \neq t_0)$$

y se tiene que $|t_1 - t_0| < \delta$ por lo que

$$|f_t(x,t_1) - f_t(x,t_0)| = \left| \frac{f(x,t) - f(x,t_0)}{t - t_0} - f_t(x,t_0) \right| < \frac{\epsilon}{b-a}.$$

Por último tendremos:

$$\left| \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} - \int_a^b f_t(x,t_0)dx \right| = \left| \int_a^b \left\{ \frac{f(x,t) - f(x,t_0)}{t - t_0} - f_t(x,t_0) \right\} dx \right| \leq$$

$$\leq \int_a^b \left| \frac{f(x,t) - f(x,t_0)}{t - t_0} - f_t(x,t_0) \right| dx < \int_a^b \frac{\epsilon}{b-a} dx = \epsilon,$$

es decir,

$$F'(t_0) = \int_a^b f_t(x,t_0)dx.$$ ❏

**Observación 4.1.2** *El inciso (ii) es más general y se dará otra demostración después del Teorema de Fubini.*

**Corolario 4.1.3 (Fórmula de Leibnitz)** *Sea* $f\colon [a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ *continua tal que* $\dfrac{\partial f}{\partial t}=f_t$ *es continua. Sean* $\alpha,\beta\colon [c,d]\to[a,b]$ *diferenciables. Sea* $\varphi\colon [c,d]\to\mathbb{R}$*, dada por:*

$$\varphi(t)=\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x,t)dx.$$

*Entonces se tiene que* $\varphi$ *es diferenciable y:*

$$\varphi'(t)=f\left(\beta(t),t\right)\beta'(t)-f\left(\alpha(t),t\right)\alpha'(t)+\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f_t(x,t)dx.$$

<u>Demostración</u>. Definimos $H\colon [a,b]\times[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ dada por

$$H(u,v,t)=\int_v^u f(x,t)dx.$$

Entonces $\varphi(t)=H\left(\beta(t),\alpha(t),t\right)$. Sea $S\colon [c,d]\to[a,b]\times[a,b]\times[c,d]$ dada por: $S(t)=(\beta(t),\alpha(t),t)$. Se sigue que $S$ es diferenciable y se tiene $\varphi=H\circ S$ por lo que:

$$\varphi'(t)=H'(S(t))\cdot S'(t)=(H_u(S(t)),H_v(S(t)),H_t(S(t)))\begin{pmatrix}\beta'(t)\\ \alpha'(t)\\ 1\end{pmatrix}=$$

$$=H_u(S(t))\beta'(t)+H_v(S(t))\alpha'(t)+H_t(S(t)).$$

Por último, del Teorema Fundamental del Cálculo y del teorema anterior, se tendrá:

$$H_u(u,v,t)=f(u,t),\ H_v(u,v,t)=-f(v,t),\ H_t(u,v,t)=\int_u^v f_t(x,t)dx.$$

Por lo tanto

$$\varphi'(t)=f\left(\beta(t)\right)\beta'(t)-f\left(\alpha(t)\right)\alpha'(t)+\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x,t)dt.$$ ❏

Ahora consideramos

$$S=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\ldots\times[a_n,b_n]\subseteq\mathbb{R}^n$$

un rectángulo cerrado y sea $f\colon S\to\mathbb{R}$. Fijemos

$$\vec{y}=(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})\in[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\ldots\times[a_{n-1},b_{n-1}]$$

y consideremos

$$g_{\vec{y}}\colon\ [a_n,b_n]\to\mathbb{R},\quad g_{\vec{y}}(x)=f(x_1,\ldots,x_{n-1},x).$$

Supongamos que

$$\forall\ \vec{y}=(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})\in[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\ldots\times[a_{n-1},b_{n-1}],$$

$g_{\vec{y}}$ es integrable, entonces obtenemos una función

$$f_1\colon\ [a_1,b_1]\times\ldots\times[a_{n-1},b_{n-1}]\to\mathbb{R}$$

dada por:

$$f_1(x_1,\ldots,x_{n-1})=\int_{a_n}^{b_n} g_{\vec{y}}(x_n)dx_n=\int_{a_n}^{b_n} f(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n)dx_n.$$

Repetimos este proceso ahora con $f_1$, es decir fijamos

$$\vec{z}=(x_1,\ldots,x_{n-2})\in[a_1,b_1]\times\ldots\times[a_{n-2},b_{n-2}]$$

y definimos

$$g_{\vec{z}}\colon\ [a_{n-1},b_{n-1}]\to\mathbb{R}$$

dada por

$$g_{\vec{z}}(x)=f_1(x_1,\ldots x_{n-2},x).$$

Ahora si $\forall\ \vec{z}=(x_1,\ldots,x_{n-2})\in[a_1,b_1]\times\ldots\times[a_{n-2},b_{n-2}]$, $g_{\vec{z}}$ es integrable obtenemos una función

$$f_2\colon\ [a_1,b_1]\times\ldots\times[a_{n-2},b_{n-2}]\to\mathbb{R}$$

dada por

$$f_2(x_1,\ldots,x_{n-2})=\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} f_1(x_1,\ldots,x_{n-2},x_{n-1})dx_{n-1}=$$

$$=\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}}\left\{\int_{a_n}^{b_n} f(x_1,\ldots,x_{n-2},x_{n-1},x_n)dx_n\right\}dx_{n-1}.$$

Repitiendo este proceso $n$–veces (siempre y cuando en cada paso existan las integrales), obtenemos un número:

$$\int_{a_1}^{b_1}\left\{\int_{a_2}^{b_2}\left\{\cdots\left\{\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}}\left\{\int_{a_n}^{b_n} f(x_1,\ldots,x_n)dx_n\right\}dx_{n-1}\right\}\ldots\right\}dx_2\right\}dx_1=$$

$$=\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\cdots\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}}\int_{a_n}^{b_n} f(x_1,\ldots,x_n)dx_ndx_{n-1}\ldots dx_2dx_1$$

el cual recibe el nombre de integral iterada de $f$ en $S$.

El Teorema de Fubini nos da la relación entre la integral de $f$ en $S$ y la integral iterada de $f$ en $S$.

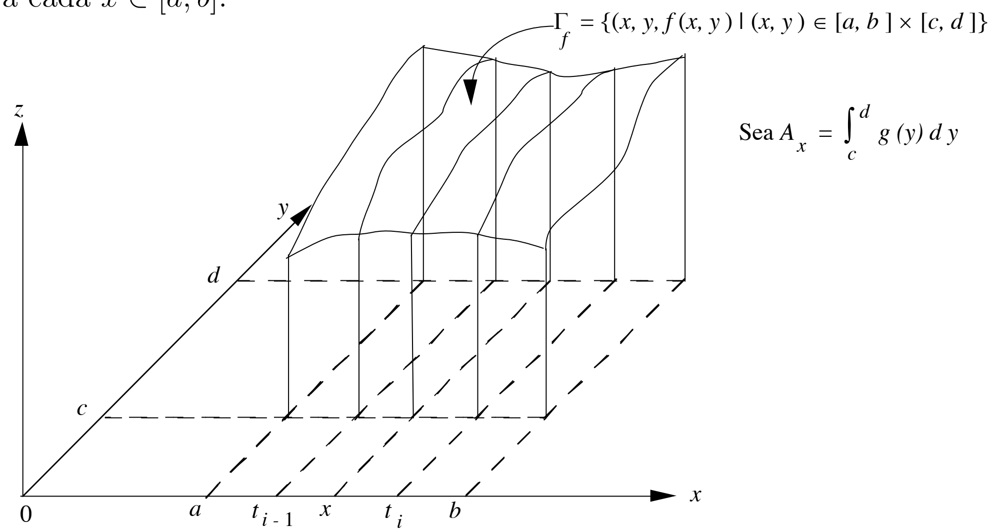
**Ejemplos 4.1.4**

(1).- Si $f\colon S=[a_1,b_1]\times\ldots\times[a_n,b_n]\to\mathbb{R}$ es continua, entonces en cada paso existe la integral y por lo tanto existe la integral iterada de $f$ en $S$.

(2).- Sea $f\colon [a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R}$ una función continua y positiva. Para cada $x\in[a,b]$, sea $g_x\colon [c,d]\to\mathbb{R}$ dada por $g_x(y) = f(x,y)$. Entonces $g_x$ es continua en $[c,d]$ para toda $x\in[a,b]$, por lo que

$$\int_c^d g_x(y)dy = \int_c^d f(x,y)dy$$

existe para cada $x\in[a,b]$.




Sea $\{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ una partición de $[a,b]$. Geométricamente se tiene que $A_x$ es el área en el plano paralelo al plano $yz$ y que pasa por el punto $(x,0,0)$, debajo de $\Gamma_f$ y arriba de $\{x\}\times[c,d]$. El volumen acotado por la gráfica de $f$ y $[t_{i-1},t_i]\times[c,d]$ es

$$\int_{[t_{i-1},t_i]\times[c,d]} f$$

y es aproximadamente

$$(t_i - t_{i-1})\int_{[c,d]} g_x(y)dy = (t_i - t_{i-1})\int_{[c,d]} f(x,y)dy,$$

donde $x\in[t_{i-1},t_i]$.

Ahora la función $F\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = \int_{[c,d]} g_x(y)dy = \int_{[c,d]} f(x,y)dy$$

es continua (ejercicio) por lo que $F$ es integrable y $\displaystyle\int_a^b F(x)dx$ es aproximadamente

$$\sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1})\ F(x_i) = \sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1})\int_c^d f(x_i, y)dy$$

donde $x_i \in [t_{i-1}, t_i]$ $(1 \leq i \leq n)$ y donde $\max\{t_i - t_{i-1} \mid 1 \leq i \leq n\}$ es suficientemente pequeño, es decir, $\{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ es una partición de diámetro pequeño. Entonces

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} f = \sum_{i=1}^{n}\int_{[t_{i-1},t_i]\times[c,d]} f \approx$$

$$\approx \sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1})\int_{[c,d]} f(x,y)dy \approx \sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1})\int_{[c,d]} f(x_i,y)dy \approx$$

$$\approx \int_a^b F(x)dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy\right] dx = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx,$$

es decir es de esperarse que

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} f = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx.$$

(3).- Sea $f\colon [0,1]\times[0,1] = A \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = (x+y)\ x$.

Como se verá más adelante,

$$\int_A f = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)dy\right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^1 (x+y)\ xdy\right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{xy^2}{2}\right]_0^1 dx = \int_0^1 \left(x^2 + \frac{x}{2}\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}.$$

Además notemos que:

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)dx\right) dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 (x+y)\ xdx\right) dy =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{x^3}{3} + \frac{yx^2}{2}\right)_0^1 dy = \int_0^1 \left(\frac{1}{3} + \frac{y}{2}\right) dy = \left[\frac{y}{3} + \frac{y^2}{4}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)dy\right) dx.$$

(4).-

$$\int_1^3\int_2^4\int_0^\pi (x+y^2-\operatorname{sen} z)dzdydx = \int_1^3\int_2^4 [xz+y^2z+\cos z]_0^\pi dydx =$$

$$= \int_1^3\int_2^4 (\pi x+\pi y^2-1-1)dydx = \int_1^3\left[\pi xy+\frac{\pi y^3}{3}-2y\right]_2^4 dx =$$

$$= \int_1^3\left(4\pi x+\frac{64\pi}{3}-8-2\pi x-\frac{8\pi}{3}+4\right)dx = \int_1^3\left(2\pi x+\frac{56\pi}{3}-4\right)dx =$$

$$= \left[\pi x^2+\left(\frac{56\pi}{3}-4\right)x\right]_1^3 = 8\pi+2\left(\frac{56\pi}{3}-4\right) = \frac{136\pi}{3}-8.$$

Análogamente, obtenemos:

$$\int_1^3\int_0^\pi\int_2^4 (x+y^2-\operatorname{sen} z)dydzdx = \int_2^4\int_1^3\int_0^\pi (x+y^2-\operatorname{sen} z)dzdxdy =$$

$$= \int_2^4\int_0^\pi\int_1^3 (x+y^2-\operatorname{sen} z)dxdzdy = \int_0^\pi\int_1^3\int_2^4 (x+y^2-\operatorname{sen} z)dydxdz =$$

$$= \int_0^\pi\int_2^4\int_1^3 (x+y^2-\operatorname{sen} z)dxdydz = \int_1^3\int_2^4\int_0^\pi (x+y^2-\operatorname{sen} z)dzdydx =$$

$$= \frac{136\pi}{3}-8.$$

## 4.2 Teorema de Fubini

Este teorema, el cual es uno de los temas centrales de este trabajo, nos relaciona la integral con la integral iterada.

**Notación 4.2.1** Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un rectángulo cerrado y sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función acotada. Entonces aún en el caso de que $f$ no sea integrable, se tiene que

$$\overline{\int_A} f \quad \text{y} \quad \underline{\int_A} f$$

siempre existe y ponemos:

$$\overline{\int_A} f = S\int_A f \quad ; \quad \underline{\int_A} f = I\int_A f.$$

**Teorema 4.2.2 (Fubini)** *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq \mathbb{R}^m$ rectángulos cerrados y sea $f\colon A \times B \to \mathbb{R}$ una función acotada e integrable. Dada $\vec{x} \in A$, se define: $g_{\vec{x}}\colon B \to \mathbb{R}$ por $g_{\vec{x}}(\vec{y}) = f(\vec{x}, \vec{y})$. Sean $\mathcal{S}\colon A \to \mathbb{R}$, $\mathcal{I}\colon A \to \mathbb{R}$ dadas por:*

$$\mathcal{S}(\vec{x}) = S\int_B g_{\vec{x}} = S\int_B f(\vec{x}, \vec{y})d\vec{y},$$

$$\mathcal{I}(\vec{x}) = I\int_B g_{\vec{x}} = I\int_B f(\vec{x}, \vec{y})d\vec{y}.$$

*Entonces $\mathcal{S}$ e $\mathcal{I}$ son integrables en $A$ y:*

$$\int_{A\times B} f = \int_A \mathcal{S} = \int_A \left(S\int_B f(\vec{x}, \vec{y})d\vec{y}\right) d\vec{x},$$

$$\int_{A\times B} f = \int_A \mathcal{I} = \int_A \left(I\int_B f(\vec{x}, \vec{y})d\vec{y}\right) d\vec{x}.$$

*Análogamente, dada $\vec{y} \in B$, se define $h_{\vec{y}}\colon A \to \mathbb{R}$ dada por $h_{\vec{y}}(\vec{x}) = f(\vec{x}, \vec{y})$. Sean $\mathcal{S}_1\colon B \to \mathbb{R}$, $\mathcal{I}_1\colon B \to \mathbb{R}$ dada por:*

$$\mathcal{S}_1(\vec{y}) = S\int_A h_{\vec{y}} = S\int_A f(\vec{x}, \vec{y})d\vec{x},$$

$$\mathcal{I}_1(\vec{y}) = I\int_A h_{\vec{y}} = I\int_A f(\vec{x}, \vec{y})d\vec{x}.$$

*Entonces $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{I}_1$ son integrables sobre $B$ y se tiene:*

$$\int_{A\times B} f = \int_B \mathcal{S}_1 = \int_B \left(S\int_A f(\vec{x}, \vec{y})d\vec{x}\right) d\vec{y},$$

$$\int_{A\times B} f = \int_B \mathcal{I}_1 = \int_B \left(I\int_A f(\vec{x}, \vec{y})d\vec{x}\right) d\vec{y}.$$

*Es decir se tiene:*

$$\int_{A\times B} f = \int_A \left[S\int_B f(\vec{x}, \vec{y})d\vec{y}\right] d\vec{x} = \int_A \left[I\int_B f(\vec{x}, \vec{y})d\vec{y}\right] d\vec{x} =$$

$$= \int_B \left[S\int_A f(\vec{x}, \vec{y})d\vec{x}\right] d\vec{y} = \int_B \left[I\int_A f(\vec{x}, \vec{y})d\vec{x}\right] d\vec{y}.$$

<u>Demostración</u>. Sea $P$ una partición de $A \times B$ cualquiera. Escribimos $P = P_A \times P_B$, donde $P_A$ es una partición de $A$ y $P_B$ es una partición de $B$.

Sean $S_A^1, \ldots, S_A^k$ y $S_B^1, \ldots, S_B^N$ los subrectángulos de $A$ y de $B$ respectivamente, determinados por $P_A$ y $P_B$, por lo que $P$ determina los subrectángulos $S_A^i \times S_B^j$, $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq N$, de $A \times B$.

Se tiene

$$I(f,P)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{N} m_{S_A^i\times S_B^j}(f)\cdot \operatorname{vol}(S_A^i\times S_B^j)=$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{N} m_{S_A^i\times S_B^j}(f)\cdot \operatorname{vol}(S_B^j)\right)\cdot \operatorname{vol}(S_A^i).$$

Si $\vec{x}\in S_A^i$ entonces para toda $\vec{y}\in S_B^j$ se tiene que

$$g_{\vec{x}}(\vec{y})=f(\vec{x},\vec{y})\geq \inf\{f(\vec{x},\vec{y})\mid (\vec{x},\vec{y})\in S_A^i\times S_B^j\}=m_{S_A^i\times S_B^j}(f)$$

por lo que

$$m_{S_B^j}(g_{\vec{x}})=\inf\{g_{\vec{x}}(\vec{y})\mid \vec{y}\in S_B^j\}\geq m_{S_A^i\times S_B^j}(f).$$

Por lo tanto, si fijamos $\vec{x}\in S_A^i$, se tiene:

$$\sum_{j=1}^{N} m_{S_A^i\times S_B^j}(f)\cdot \operatorname{vol}(S_B^j)\leq \sum_{j=1}^{N} m_{S_B^j}(g_{\vec{x}})\cdot \operatorname{vol}(S_B^j)\leq I\int_B g_{\vec{x}}=\mathcal{I}(\vec{x}).$$

Por lo tanto

$$\sum_{j=1}^{N} m_{S_A^i\times S_B^j}(f)\cdot \operatorname{vol}(S_B^j)\leq \inf\{\mathcal{I}(\vec{x})\mid \vec{x}\in S_A^i\}=m_{S_A^i}(f),$$

de donde obtenemos

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{N} m_{S_A^i\times S_B^j}(f)\cdot \operatorname{vol}(S_B^j)\cdot \operatorname{vol}(S_A^i)\leq \sum_{i=1}^{k} m_{S_A^i}(\mathcal{I})\cdot \operatorname{vol}(S_A^i)=I(\mathcal{I},P_A),$$

por tanto

$$\boxed{I(f,P)\leq I(\mathcal{I},P_A)}.$$

Con las mismas notaciones, se tiene:

$$S(f,P)=\sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{N} M_{S_A^i\times S_B^j}(f)\cdot \operatorname{vol}(S_B^j)\right)\cdot \operatorname{vol}(S_A^i)$$

y si fijamos $\vec{x}\in S_A^i$, entonces para toda $\vec{y}\in S_B^j$, se tiene

$$g_{\vec{x}}(\vec{y})=f(\vec{x},\vec{y})\leq \sup\{f(\vec{x},\vec{y})\mid (\vec{x},\vec{y})\in S_A^i\times S_B^j\}=M_{S_A^i\times S_B^j}(f)$$

por lo que

$$M_{S_B^j}(g_{\vec{x}})\leq M_{S_A^i\times S_B^j}(f)$$

y se tiene:

$$\sum_{j=1}^{N} M_{S_B^j}(g_{\vec{x}}) \cdot \operatorname{vol}(S_B^j) \geq S \int_B g_{\vec{x}} = \mathcal{S}(\vec{x}),$$

lo cual se cumple para $\vec{x} \in S_A^i$. Se sigue que

$$\sum_{i=1}^{k} \left( \sum_{j=1}^{N} M_{S_A^i \times S_B^j}(f) \cdot \operatorname{vol}(S_B^j) \right) \cdot \operatorname{vol}(S_A^i) \geq$$

$$\geq \sum_{i=1}^{k} \left( \sum_{j=1}^{N} M_{S_B^i}(g_{\vec{x}}) \cdot \operatorname{vol}(S_B^j) \right) \cdot \operatorname{vol}(S_A^i) \geq \sum_{i=1}^{k} \mathcal{S}(\vec{x}) \cdot \operatorname{vol}(S_A^i).$$

Por lo tanto

$$S(f,P) \geq \sum_{i=1}^{k} \sup_{\vec{x} \in S_A^i} \mathcal{S}(\vec{x}) \cdot \operatorname{vol}(S_A^i) = \sum_{i=1}^{k} M_{S_A^i}(\mathcal{S}) \cdot \operatorname{vol}(S_A^i) = S(\mathcal{S}, P_A).$$

De aquí obtenemos

$$\boxed{S(f,P) \geq S(\mathcal{S}, P_A)}.$$

Ahora puesto que para toda $\vec{x} \in A$, $\mathcal{I}(\vec{x}) \leq \mathcal{S}(\vec{x})$, se sigue que:

$$I(f,P) \leq I(\mathcal{I}, P_A) \leq S(\mathcal{I}, P_A) \leq S(\mathcal{S}, P_A) \leq S(f,P).$$

Sea $\mathbb{P} = \{$particiones de $A \times B\}$ y se tiene:

$$\sup_{P \in \mathbb{P}} I(f,P) = \int_{A \times B} f = \inf_{P \in \mathbb{P}} S(f,P)$$

por ser $f$ integrable. Por tanto

$$\sup_{P_A \in \mathbb{P}_A} I(\mathcal{I}, P_A) = \inf_{P_A \in \mathbb{P}_A} S(\mathcal{I}, P_A) = \int_{A \times B} f,$$

donde $\mathbb{P}_A = \{$particiones de $A\}$, por lo que $\mathcal{I}$ es integrable en $A$ y

$$\boxed{\int_A \mathcal{I} = \int_{A \times B} f}.$$

Por último se tiene:

$$I(f,P) \leq I(\mathcal{I}, P_A) \leq I(\mathcal{S}, P_A) \leq S(\mathcal{S}, P_A) \leq S(f,P)$$

por lo que $\mathcal{S}$ es integrable en $A$ y

$$\boxed{\int_A \mathcal{S} = \int_{A \times B} f}.$$

La segunda parte del teorema se deduce de las desigualdades:

$$I(f,P) \leq I(\mathcal{I}_1, P_B) \leq S(\mathcal{I}_1, P_B) \leq S(\mathcal{S}_1, P_B) \leq S(f,P)$$

y

$$I(f,P) \leq I(\mathcal{I}_1, P_B) \leq I(\mathcal{S}_1, P_B) \leq S(\mathcal{S}_1, P_B) \leq S(f,P),$$

las cuales se demuestran en forma análoga como las anteriores. ❑

**Corolario 4.2.3** *Sea $f\colon A \times B \to \mathbb{R}$ una función continua, donde $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq \mathbb{R}^m$ son rectángulos cerrados. Entonces $f$ es integrable y $\forall\ \vec{x} \in A$, $\forall\ \vec{y} \in B$, se tiene que:*

$$\int_B f(\vec{x},\vec{y})d\vec{y} \ \text{ y } \ \int_A f(\vec{x},\vec{y})d\vec{x}$$

*existen y se tiene:*

$$\int_{A\times B} f = \int_A \left(\int_B f(\vec{x},\vec{y})d\vec{y}\right) d\vec{x} = \int_B \left(\int_A f(\vec{x},\vec{y})d\vec{x}\right) d\vec{y}.$$

*Demostración*. Basta ver que para toda $\vec{x} \in A$ y para toda $\vec{y} \in B$, $\displaystyle\int_B f(\vec{x},\vec{y})d\vec{y}$ y $\displaystyle\int_A f(\vec{x},\vec{y})d\vec{x}$ existen. Esto se sigue inmediatamente del hecho de que $f$ es continua. ❑

**Corolario 4.2.4** *Si $f\colon A \to \mathbb{R}$ es continua, con*

$$S = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}^n,$$

*entonces*

$$\int_S f = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \cdots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \ldots, x_n)dx_n \ldots dx_2 dx_1.$$

*Demostración*. Es inmediato al aplicar inducción en $n$ y el Teorema de Fubini. ❑

**Corolario 4.2.5** *Sean $\varphi, \psi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continuas tales que $\varphi(x) \leq \psi(x)$ para toda $x \in [a,b]$. Sea*

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}.$$

*Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ continua. Entonces $f$ es integrable en $A$ y*

$$\int_A f = \int_a^b \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dydx.$$

<u>*Demostración*</u>. Se tiene que

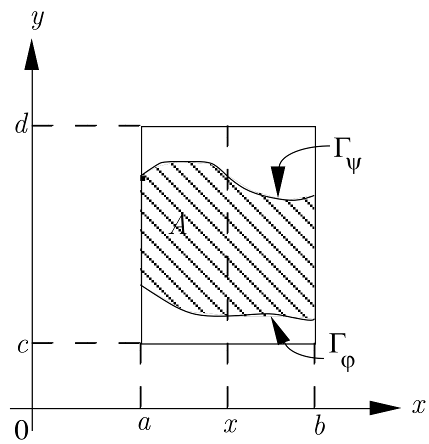
$$\partial A \subseteq \Gamma_\varphi \cup \Gamma_\psi \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x=a, x=b\} \quad \text{(ejercicio)}.$$

Puesto que $\varphi$, $\psi$ son continuas, tenemos que $\Gamma_\varphi$ y $\Gamma_\psi$ son de medida 0, por lo que $\partial A$ es de mediada 0 y $A$ es Jordan–medible.

Consideremos $S = [a,b] \times [c,d]$ un rectángulo cerrado en $\mathbb{R}^2$ tal que $A \subseteq S$.

Sea $\tilde{f}\colon S \to \mathbb{R}$ dada por

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{si} \quad (x,y) \in A \\ \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) \notin A \end{cases}$$




Entonces $\displaystyle\int_A f = \int_S \tilde{f}$

Ahora se tiene que $\{(x,y) \in S \mid o(\tilde{f},(x.y)) > 0\} \subseteq \Gamma_\varphi \cup \Gamma_\psi$ el cual es de medida 0.

Dada $x \in [a,b]$, la función $h_x\colon [c,d] \to \mathbb{R}$ dada por $h_x(y) = \tilde{f}(x,y)$ es a lo más discontinua para $y = \varphi(x)$ y $y = \psi(x)$, por lo tanto $h_x$ es integrable y se tiene:

$$\int_c^d h_x(y)dy = \underbrace{\int_c^{\varphi(x)} \tilde{f}(x,y)dy}_{=\,0} + \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy + \underbrace{\int_{\psi(x)}^d \tilde{f}(x,y)dy}_{=\,0}.$$

Por lo tanto

$$\int_c^d h_x(y)dy = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \tilde{f}(x,y)dy = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy.$$

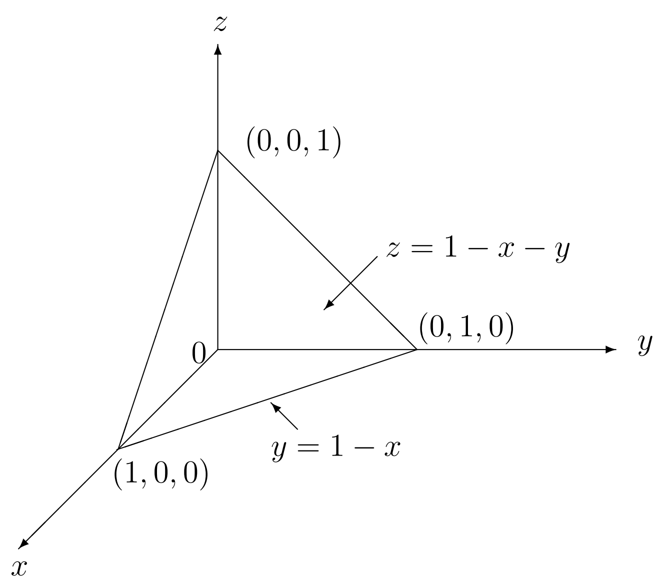
De aquí obtenemos

$$\int_A f = \int_a^b \int_c^d \tilde{f}(x,y)dydx = \int_a^b \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dydx. \qquad ❏$$

**Ejemplos 4.2.6**

(1).- Hallar $\displaystyle\int_A (x+y+z)^2 dxdydz$, donde $A$ es la región de $\mathbb{R}^3$ acotada por los planos coordenados y el plano que pasa por $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$.

Respuesta. Consideremos el plano que pasa por $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$. El vector normal al plano es: $[(1,0,0-(0,1,0)]\times[(1,0,0)-(0,0,1)] = (1,-1,0)\times(1,0,-1) = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \hat{\imath}+\hat{\jmath}+\hat{k} = (1,1,1)$, por lo que la ecuación del plano es: $x+y+z = 1+0+0 = 1$.




Por lo tanto $A = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0, x+y+z\leq 1\}$.

Sea $B = \{(x,y,0)\in\mathbb{R}^3 \mid x\geq 0, y\geq 0, x+y\leq 1\}$, por lo tanto

$$\int_A f = \int_B \left(\int_0^{1-x-y} (x+y+z)^2 dz\right) dxdy =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} (x+y+z)^2 dzdydx =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{1}{3}\left[(x+y+z)^2\right]_0^{1-x-y} dydx =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 \int_0^{1-x} [1-(x+y)^3] dydx = \frac{1}{3}\int_0^1 \left[y - \frac{(x+y)^4}{4}\right]_0^{1-x} dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 \left(1 - x - \frac{1}{4} + \frac{x^4}{4}\right) dx = \frac{1}{3}\left[\frac{3}{4}x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{20}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{20}\right) = \frac{15 - 10 + 1}{60} = \frac{6}{60} = \boxed{\frac{1}{10}}.$$

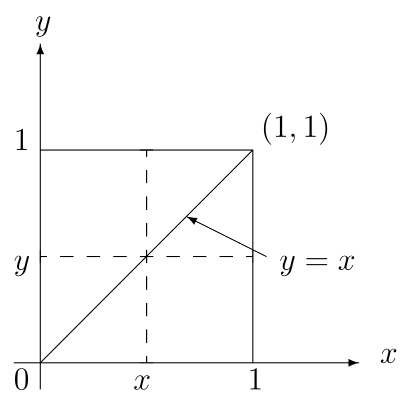
(2).- En la siguiente integral, cambiar el orden de integración y evaluar:

$$\int_0^1 \int_x^1 x \cdot y \; dydx.$$

<u>Respuesta.</u> Para cada $x \in [0,1]$, $x \le y \le 1$, por lo que se tiene

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1, x \le y \le 1\} =$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le 1, 0 \le x \le y\}.$$




Por lo tanto

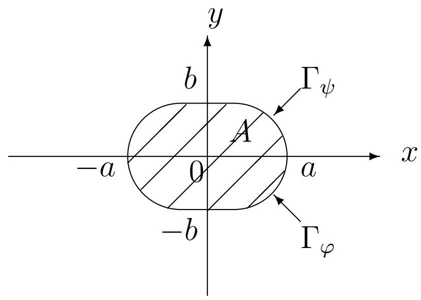
$$\int_0^1 \int_x^1 x \cdot y \; dydx = \int_A x \cdot y = \int_0^1 \int_0^y x \cdot y \; dxdy =$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{x^2 y}{2}\right]_0^y dy = \int_0^1 \frac{y^3}{2} dy = \left[\frac{y^4}{8}\right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{8}}.$$

(3).- Hallar el área de la elipse: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$

<u>Respuesta.</u> De hecho se está pidiendo el área de $A$, donde

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1\right\}.$$




Se tiene que si $(x,y)$ está en la elipse,

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \ \text{ y } \ a^2-x^2 \geq 0 \iff |x| \leq a.$$

Sean $\psi, \varphi\colon [-a,a] \to \mathbb{R}$, dadas por $\psi(x) = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ y $\varphi(x) = -\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$. Entonces

$$\text{vol}(A) = \text{área}(A) = \int_{[-a,a]\times[-b,b]} \chi_A = \int_{-a}^{a}\int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} 1 \, dydx =$$

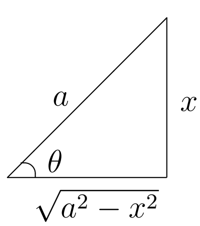
$$= \int_{-a}^{a} [y]_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} \, dx = \frac{2b}{a}\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2} \, dx =$$

$$= \frac{2b}{a}\left[\frac{a^2}{2}\operatorname{arcsen}\frac{x}{a} + \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}\right]_{-a}^{a} =$$

$$= \frac{2b}{a}\left[\frac{a^2}{2}\operatorname{arcsen}1 + 0 - \frac{a^2}{2}\operatorname{arcsen}(-1) - 0\right] =$$

$$= \frac{2b}{a}\left[\frac{a^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{a^2}{2}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = ab\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = \boxed{\pi ab}.$$

(Para calcular $I = \displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2} \, dx$ procedemos como sigue:




$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{sen}\theta = \frac{x}{a} \\ &dx = a\cos\theta d\theta \\ &\sqrt{a^2-x^2} = a\cos\theta \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$I = \int a^2 \cos^2\theta \, d\theta = a^2 \int \frac{1+\cos 2\theta}{2} \, d\theta = \frac{a^2}{2}\left[\theta + \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2}\right].$$

Así: $\theta = \operatorname{arcsen}\dfrac{x}{a}$ y $\operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta = 2\dfrac{x}{a}\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$. Por lo tanto

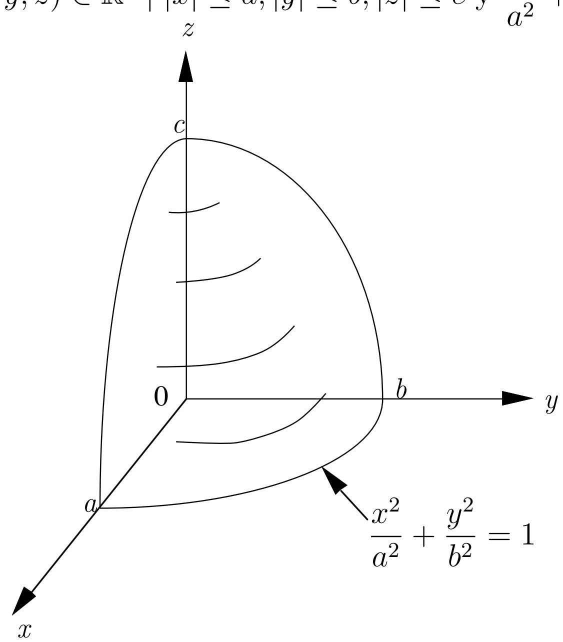
$$I = \frac{a^2}{2}\left[\operatorname{arcsen}\frac{x}{a} + \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{a^2}\right] = \frac{a^2}{2}\operatorname{arcsen}\frac{x}{a} + \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}).$$

(4).- Hallar el volumen de la elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{c^2} = 1.$$

Respuesta. De hecho se esta pidiendo el volumen de $A$, donde

$$A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x| \le a, |y| \le b, |z| \le c \text{ y } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{c^2} \le 1\right\}.$$




Se tiene

$$\operatorname{vol}(A) = \int_{-a}^{a}\int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}\int_{-c\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^{1/2}}^{c\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^{1/2}} dz\,dy\,dx =$$

$$= \int_{-a}^{a}\int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} 2c\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{1/2} dy\,dx = \boxed{\frac{4}{3}\pi abc}.$$

**Observaciones 4.2.7** Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq \mathbb{R}^m$ rectángulos cerrados y sea $f\colon A \times B \to \mathbb{R}$ una función acotada e integrable. Para $\vec{x} \in A$, sea $g_{\vec{x}}\colon B \to \mathbb{R}$ dada por $g_{\vec{x}}(\vec{y}) = f(\vec{x}, \vec{y})$.

(1).- En la mayoría de las veces, el problema que se presenta es que $g_{\vec{x}}$ no es integrable para un número finito de $\vec{x} \in A$. En este caso, si $\mathcal{S}(\vec{x}) = S \displaystyle\int_B g_{\vec{x}} = S \int_B f(\vec{x}, \vec{y})\, d\vec{y}$, se tiene que

$$\mathcal{S}(\vec{x}) = \int_B f(\vec{x}, \vec{y})\, d\vec{y},$$

salvo para un número finito de $\vec{x} \in A$ y puesto que la integral de una función no cambia si cambiamos la definición de la función en un número finito de puntos, podemos redefinir $\mathcal{S}(\vec{x}) = 0$ cuando $g_{\vec{x}}$ no sea integrable, esto es, por definición

$$\int_B f(\vec{x}, \vec{y})\, d\vec{y} = \int_B g_{\vec{x}}(\vec{y})\, d\vec{y} = 0$$

para $\vec{x}$ tal que $g_{\vec{x}}$ no sea integrable. Así, se tiene que

$$\int_{A\times B} f = \int_A \left( \int_B f(\vec{x}, \vec{y})\, d\vec{y} \right) d\vec{x}.$$

(2).- Hay casos en que el Teorema de Fubini se tiene que usar tal como se enuncia. Por ejemplo, sea $f\colon [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{I} \\ 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q},\ y \in \mathbb{I} \\ 1 - 1/q & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q},\ y \in \mathbb{Q},\ x = p/q \text{ con } (p,q) = 1. \end{cases}$$

Puesto que $\{(x,y) \in [0,1] \times [0,1] \mid o(f,(x,y)) > 0\} = ([0,1] \times [0,1]) \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{R})$ tiene medida 0, entonces $f$ es integrable y puesto que para toda partición $P$ de $[0,1] \times [0,1]$, se tiene que $S(f,P) = 1$, se sigue que

$$\int_{[0,1]\times[0,1]} f = 1.$$

Ahora si $x \in \mathbb{I}$ entonces $f(x,y) = 1$ para toda $y \in [0,1]$. Por lo tanto $\displaystyle\int_0^1 f(x,y)\, dy = 1$. Sin embargo si $x \in \mathbb{Q}$, $x = p/q$ con $(p,q) = 1$, entonces $h_x\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$h_x(y) = f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad y \in \mathbb{I} \\ 1 - 1/q & \text{si} \quad y \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

es discontinua en todo $[0,1]$. Por lo tanto $\displaystyle\int_0^1 f(x,y)\,dy$ no existe para ningún $x\in\mathbb{Q}$. De aquí obtenemos que no podemos definir

$$\int_0^1 f(x,y)\,dy = 0$$

para $x\in\mathbb{Q}$ pues se tendría:

$$\int_0^1 f(x,y)\,dy = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x\in\mathbb{I} \\ 0 & \text{si} \quad x\in\mathbb{Q} \end{cases}$$

la cual es discontinua en todo $[0,1]$ por lo que no es integrable.

Aplicando el teorema se tiene:

$$1=\int_{[0,1]\times[0,1]} f = \int_0^1\left(\overline{\int_0^1} f(x,y)\,dy\right)\,dx = \int_0^1 1\,dx = 1,$$

$$1=\int_{[0,1]\times[0,1]} f = \int_0^1\left(\underline{\int_0^1} f(x,y)\,dy\right)\,dx = \int_0^1 \ell(x)\,dx = 1,$$

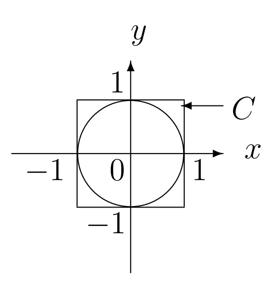
donde

$$\ell(x)=\begin{cases} 1 & \text{si} \quad x\in\mathbb{I} \\ 1-1/q & \text{si} \quad x\in\mathbb{Q},\ x=p/q \text{ con } (p,q)=1. \end{cases}$$

(3).- Si $C\subseteq A\times B$, se puede utilizar el Teorema de Fubini para evaluar integrales del tipo

$$\int_C f = \int_{A\times B} f\cdot\chi_C = \int_A\left(\int_B (f\cdot\chi_C)(\vec{x},\vec{y})\,d\vec{y}\right)\,d\vec{x}.$$

Por ejemplo, sea $C=\{[-1,1]\times[-1,1]\}\setminus\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$.



Se tiene que

$$\chi_C(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \geq \sqrt{1-x^2} \ \text{ ó } \ y \leq -\sqrt{1-x^2}, \ |x| \leq 1 \\ \\ 0 & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

Por lo tanto

$$\int_C f = \int_{[-1,1]\times[-1,1]} f \cdot \chi_C = \int_{-1}^{1} \left( \int_{-1}^{1} f(x,y) \cdot \chi_C(x,y) \ dy \right) \ dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} \left( \int_{-1}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x,y) \ dy \right) \ dx + \int_{-1}^{1} \left( \int_{\sqrt{1-x^2}}^{1} f(x,y) \ dy \right) \ dx.$$

(4).- En general, la mayor dificultad para hallar $\displaystyle\int_C f$ es determinar $C \cap (\{\vec{x}\} \times B)$, $\vec{x} \in A$. Si acaso es más fácil calcular $C \cap (A \times \{\vec{y}\})$ con $\vec{y} \in B$, entonces se calcula

$$\int_C f = \int_B \left( \int_A f(\vec{x},\vec{y}) \ \chi_C(\vec{x},\vec{y}) \ d\vec{x} \right) \ d\vec{y}.$$

(5).- Puede suceder que

$$\int_A \left( \int_B f(\vec{x},\vec{y}) \ d\vec{y} \right) \ d\vec{x} = \int_B \left( \int_A f(\vec{x},\vec{y}) \ d\vec{x} \right) \ d\vec{y}$$

y, por supuesto, que cada integral exista, sin que $f$ se integrable (un ejemplo de este fenómeno se encuentra entre los ejercicios de este capítulo), por lo que no es suficiente que existe la integral iterada para que $f$ sea integrable.

Podemos ahora generalizar un resultado anterior.

**Teorema 4.2.8** *Sea $f \colon [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ una función continua y supongamos que la integral*

$$\int_a^b D_2 f(x,y) \ dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) dx$$

*existe para toda $y \in [c,d]$. Si $F \colon [c,d] \to \mathbb{R}$ está dada por*

$$F(y) = \int_a^b f(x,y) \ dx,$$

*entonces $F$ es derivable y*

$$F'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \ dx.$$

<u>*Demostración*</u>. Se tiene que:

$$\int_c^y \frac{\partial f}{\partial z}(x,z)\ dz = f(x,y) - f(x,c)$$

por lo que

$$\int_a^b \left[ \left\{ \int_c^y \frac{\partial f}{\partial z}(x,z)\ dz \right\} + f(x,c) \right]\ dx = \int_a^b f(x,y)\ dx = F(y) \underbrace{=}_{\text{Fubini}}$$

$$= \int_a^b \int_c^y \frac{\partial f}{\partial z}(x,z)\ dzdx + \int_a^b f(x,c)\ dx = \int_c^y \left\{ \int_a^b \frac{\partial f}{\partial z}(x,z)\ dx \right\} dz + \int_a^b f(x,c)dx$$

y se tiene $\displaystyle\int_a^b f(x,c)\ dx = \text{constante}$.

Sea $g(z) = \displaystyle\int_a^b \frac{\partial f}{\partial z}(x,z)\ dx$. Entonces $g(y) = \displaystyle\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\ dx$. Se tiene que $g$ es continua y que $F(y) = \displaystyle\int_c^y g(z)\ dz + \text{constante}$. Por el Teorema Fundamental del Cálculo se sigue que

$$F'(y) = g(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\ dx. \qquad ❑$$

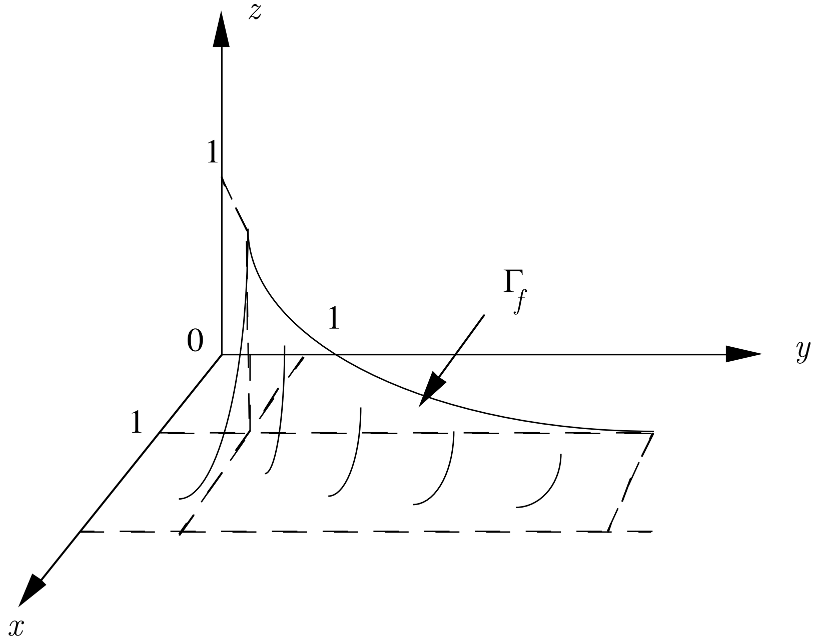
## 4.3 Integrales Impropias

Queremos definir la integral de Riemann de una función $f\colon A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ incluyendo los casos en $f$ o $A$ no sean acotados. En el capítulo de cambio de variable se verá este tipo de integrales en forma sistemática con las particiones de unidad. En esta sección se verá parte de estas integrales con una orientación más práctica.

Empezamos con 2 ejemplos que primero calcularemos de forma intuitiva.

**Ejemplos 4.3.1**

(1).- Sea $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 1, y \geq 1\}$ y sea $f\colon B \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2\ y^2}$.




Sea $B_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq n, 1 \leq y \leq n\}$, $n \in \mathbb{N}$.

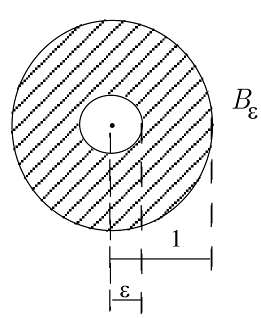
Se tiene

$$\int_{B_n} f = \int_1^n \int_1^n \frac{1}{x^2\ y^2}\ dxdy = \int_1^n \frac{1}{y^2}\ \left[-\frac{1}{x}\right]_1^n\ dy = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2.$$

Es razonable definir

$$\int_B f = \lim_{n\to\infty} \int_{B_n} f = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 = 1.$$

(2).- Sea $B(\vec{0},1) \subseteq \mathbb{R}^2$ y sea $f(x,y) = -\ln(x^2+y^2)$, $0 < x^2+y^2 \leq 1$. Sea $\epsilon > 0$ y sea $B_\epsilon = B(\vec{0},1) \setminus B(\vec{0},\epsilon)$.



Utilizando coordenadas polares, las cuales se verán formalmente en próximo capítulo, se tiene:

$$\int_{B_\epsilon} -\ln(x^2+y^2)\ dxdy = \int_0^{2\pi}\int_\epsilon^1 -\ln(r^2)\cdot r\ d\theta dr = -2\int_\epsilon^1 2\ \pi\ r\ \ \ln r\ dr.$$

Por otro lado tenemos:

$$\int r\ \ln r\ dr = \left[\frac{r^2}{2}\ \ln r - \int \frac{1}{2}\ r\ dr\right] = \frac{r^2}{2}\ \ln r - \frac{r^2}{4}.$$

$$(u = \ln\ r,\quad du = \frac{dr}{r},\quad dv = r\ dr,\quad v = \frac{r^2}{2})$$

Por lo tanto

$$\int_{B_\epsilon} -\ln(x^2+y^2)\ dxdy = -4\pi\left[\frac{r^2}{2}\ \ln r - \frac{r^2}{4}\right]_\epsilon^1 = -4\pi\left[-\frac{1}{4} + \frac{\epsilon^2}{2}\ \ln\epsilon + \frac{\epsilon^2}{4}\right].$$

Ahora

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{\epsilon^2}{2}\ \ln\epsilon = \lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{\ln\epsilon}{2\epsilon^{-2}} = \lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{1/\epsilon}{-4\epsilon^{-3}} = \lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{-\epsilon^2}{4} = 0.$$

Por lo tanto es razonable definir

$$\int_{B(\vec{0},1)} f = \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{B_\epsilon} f = \lim_{\epsilon\to 0^+}\left[-4\pi\left\{-\frac{1}{4} + \frac{\epsilon^2}{2}\ \ln\epsilon + \frac{\epsilon^2}{4}\right\}\right] =$$

$$= -4\pi\left(-\frac{1}{4} + 0 + 0\right) = \pi.$$

A continuación formalizamos lo hecho en los ejemplos anteriores.

**Definición 4.3.2** Sea $B \subseteq \mathbb{R}^n$, $f\colon B \to \mathbb{R}$. Sea $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$ y sea $\{B_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ (es decir, $B_\lambda \subseteq \mathbb{R}^n$) creciente, esto es, $\lambda \leq \mu \Rightarrow B_\lambda \subseteq B_\mu$.

Se dice que $\{B_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ <u>converge a $B$</u> si:

i).- cada $B_\lambda$ está acotado,

ii).- $f$ es acotada en cada $B_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$,

iii).- para todo subconjunto acotado $A \subseteq B$ tal que $f$ es acotada en $A$, se tiene que $A$ está contenido en algún $B_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$,

iv).- $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} B_{\lambda\in\Lambda} = B$.

Si $\{B_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ converge a $B$ se representa:

$$B = \lim_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda = \lim_{\lambda\to\sup\Lambda} B_\lambda.$$

**Observación 4.3.3** La definición anterior se puede dar en igual forma si consideramos $\{B_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ decreciente, esto es, $\lambda \leq \mu \Rightarrow B_\lambda \supseteq B_\mu$. En este caso ponemos

$$B = \lim_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda = \lim_{\lambda\to\inf\Lambda} B_\lambda.$$

Notemos que la definición de que $\{B_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ converge a $B$, no depende únicamente de $B$, sino también de $f$.

**Definición 4.3.4** Sea $f\colon B\subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ donde $f$ o $B$ no están acotadas.

Sea $\{B_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de conjuntos que convergen a $B$ y tal que cada $B_\lambda$ es Jordan–medible. Entonces se define la <u>integral impropia de Riemann</u> de $f$ sobre $B$ por:

$$\int_B f = \lim_{\lambda\in\Lambda}\int_{B_\lambda} f = \lim_{\lambda\to\sup\Lambda}\int_{B_\lambda} f$$

o

$$\int_B f = \lim_{\lambda\to\inf\Lambda}\int_{B_\lambda} f,$$

siempre cuando el límite exista y no dependa de la familia $\{B_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$.

**Teorema 4.3.5** *Sea $B\subseteq\mathbb{R}^n$ y sea $f\colon B\to\mathbb{R}$ una función no negativa. Sea $\{B_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de conjuntos que converge a $B$ y supongamos que $\lim\limits_{\lambda\in\Lambda}\int_{B_\lambda} f$ es finito con $\{B_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia creciente (ó decreciente).*

*Entonces $\int_B f$ está definida y su valor es igual a*

$$\lim_{\mu\to\Delta}\int_{C_\mu} f,$$

*donde $\{C_\mu\}_{\mu\in\Delta}$ es cualquier familia de conjuntos que converge a $B$.*

<u>*Demostración*</u>. Dado $B_\lambda$ existe $\mu\in\Delta$ tal que $B_\lambda\subseteq C_\mu$ y dado este $C_\mu$ existe $\nu\in\Lambda$ tal que $C_\mu\subseteq B_\nu$. Por lo tanto $B_\lambda\subseteq C_\mu\subseteq B_\nu$ y puesto que $f\geq 0$ se tiene que

$$\int_{B_\lambda} f \leq \int_{C_\mu} f \leq \int_{B_\nu} f \leq \lim_{\nu\in\Lambda}\int_{B_\nu} f$$

por lo tanto $\left\{\int_{C_\mu} f\right\}_{\mu\in\Delta}$ es creciente y está acotada. Por lo tanto

$$\lim_{\mu\in\Delta}\int_{C_\mu} f$$

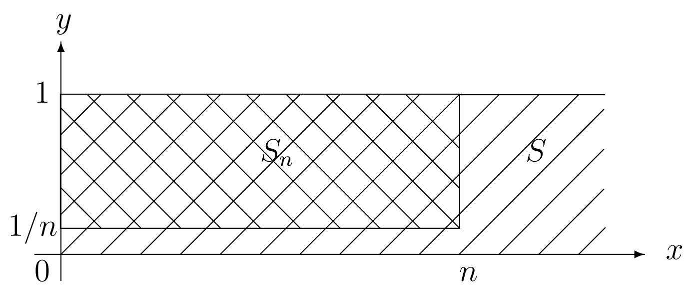
existe y se tiene:

$$\lim_{\mu\in\Delta}\int_{C_\mu} f \leq \lim_{\nu\in\Lambda}\int_{B_\nu} f = \lim_{\lambda\in\Lambda}\int_{B_\lambda} f \leq \lim_{\mu\in\Delta}\int_{C_\mu} f.$$

De aquí se sigue que:

$$\int_B f = \lim_{\lambda\in\Lambda}\int_{B_\lambda} f = \lim_{\mu\in\Delta}\int_{C_\mu} f.$$ ❑

**Ejemplo 4.3.6** Sea $S = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geq 0, 0<y\leq 1\} = [0,\infty)\times(0,1]$ y sea $f\colon S\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=y^{-1/2}e^{x}$. Dado $x\in[0,\infty)$ se tiene que $\lim\limits_{y\to 0^+} f(x,y)=\infty$ y $f\geq 0$.




Sea $S_n=[0,n]\times[1/n,1]$. Se tiene que $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $S$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Por lo tanto

$$\int_{S_n} f = \int_0^1\int_{1/n}^1 y^{-1/2}\ e^{-x}\ dydx = \int_0^n e^{-x}\ \left[\frac{y^{1/2}}{1/2}\right]_{1/n}^1 dx =$$

$$= 2\left[-e^{-x}\right]_0^n\left[1-\sqrt{1/n}\right] = 2(1-e^{-n})(1-1/\sqrt{n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 2.$$

Por lo tanto $\boxed{\int_S f = 2}$.

**Observación 4.3.7** Si $f$ no es positiva, el teorema anterior no se cumple en general como muestra el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 4.3.8** Sea $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{sen} x$. Sea $B_n=[-\pi n,\pi n]$, $n\in\mathbb{N}$. Entonces

$$\int_{B_n} f = \int_{-\pi n}^{\pi n} \operatorname{sen} x\ dx = [-\cos x]_{-\pi n}^{\pi n} = -\cos n\pi + cosn\pi = 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Ahora sea $C_n = [-2n\pi, (2n+1)\pi]$, $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\int_{C_n} f = \int_{-2n\pi}^{(2n+1)\pi} \operatorname{sen} x \; dx = [-\cos x]_{-2n\pi}^{(2n+1)\pi} = -\cos(2n+1)\pi + cos2n\pi =$$

$$= -(-1) + 1 = 2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 2.$$

En ambos casos

$$\lim_{n\to\infty} B_n = \lim_{n\to\infty} C_n = \mathbb{R} \text{ y } \lim_{n\to\infty} \int_{B_n} f = 0 \neq 2 = \lim_{n\to\infty} \int_{C_n} f.$$

**Observación 4.3.9** Si $f\colon A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $A$ un conjunto acotado y $f \geq 0$, entonces se puede definir

$$f_M(\vec{x}) = \begin{cases} f(\vec{x}) & , \quad f(\vec{x}) \leq M \\ 0 & , \quad f(\vec{x}) > M \end{cases} \quad , \; M \in \mathbb{R}^+, \; f_M\colon A \to \mathbb{R}$$

y definir

$$\int_A f = \lim_{M\to\infty} \int_A f_M.$$

La relación con la definición anterior es que podemos definir

$$B_M = \{\vec{x} \in A \mid f(\vec{x}) \leq M\} \text{ y } \int_A f_M = \int_{B_M} f$$

y se tiene que $\lim\limits_{M\in\mathbb{R}} B_M = A$.

**Teorema 4.3.10** *Sean $f, g\colon B \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dos funciones que tienen los mismos puntos de discontinuidad infinita, esto es, donde no son acotadas. Si $|f| \leq g$ y $\int_B g$ existe, entonces $\int_B f$ también existe y se tiene que*

$$\left| \int_B f \right| \leq \int_B g.$$

<u>*Demostración*</u>. Se tiene $f + |f| \geq 0$ y $f + |f| \leq 2g$. Sea $\{B_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de conjuntos tales que $\lim\limits_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda = B$.

Para $\lambda \in \Lambda$ se tiene que $\int_{B_\lambda} |f| \leq \int_{B_\lambda} g$ por lo que $\int_B |f|$ existe.

También tenemos que

$$\int_{B_\lambda} (f + |f|) \leq 2 \int_{B_\lambda} g \leq 2 \lim_{\lambda\in\Lambda} \int_{B_\lambda} g = 2 \int_B g,$$

por lo tanto $\displaystyle\int_B (f+|f|)$ existe.

Se sigue que

$$\int_{B_\lambda} f = \int_{B_\lambda} [(f+|f|)-|f|] = \int_{B_\lambda} (f+|f|) - \int_{B_\lambda} |f| \xrightarrow[\lambda\in\Lambda]{} \int_B (f+|f|) - \int_B |f|.$$

Por lo tanto $\displaystyle\int_B f$ existe. ❑

**Ejemplo 4.3.11** ¿Para cuáles $\alpha$ existe la integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x^\alpha}{1+x^\alpha}\,dx$?

<u>Respuesta.</u>

$$\int_1^\infty \frac{x^\alpha}{1+x^\alpha}\,dx = \int_1^\infty \frac{dx}{1+x^{-\alpha}}.$$

Si $\alpha \geq 0$, entonces $x^\alpha \geq 1$, de donde se sigue que $2x^\alpha \geq 1+x^\alpha$. Por lo tanto $\dfrac{x^\alpha}{1+x^\alpha} \geq \dfrac{1}{2}$. Se sigue que $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{1+x^{-\alpha}} \geq \int_1^\infty \frac{1}{2}\,dx = \infty$.

Si $-1<\alpha<0$, entonces $x^{-\alpha} \geq 1$ por tanto $2x^{-\alpha} \geq 1+x^{-\alpha}$. De aqui obtenemos que $\dfrac{1}{1+x^{-\alpha}} \geq \dfrac{1}{2x^{-\alpha}}$. Por lo tanto

$$\int_1^\infty \frac{dx}{1+x^{-\alpha}} \geq \int_1^\infty \frac{1}{2}\,x^\alpha\,dx = \frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\left[\frac{x^\alpha+1}{\alpha+1}\right]_1^t = \infty.$$

Si $\alpha=-1$ se tiene $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x^\alpha}{1+x^\alpha}\,dx = \int_1^\infty \frac{dx}{1+x} = \lim_{t\to\infty}[\ln(1+x)]_1^t = \infty$.

Si $\alpha<-1$ entonces $x^\alpha \geq 0$ por lo que $1+x^\alpha \geq 1$. Se sigue que $\dfrac{1}{1+x^\alpha} \leq 1$ y por lo tanto $\dfrac{x^\alpha}{1+x^\alpha} \leq x^\alpha$. De aqui se tiene que

$$\int_1^\infty \frac{x^\alpha}{1+x^\alpha}\,dx \leq \int_1^\infty x^\alpha\,dx = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_1^t = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1}\right) =$$

$$= -\frac{1}{\alpha+1} < \infty.$$

Por lo tanto $\boxed{\displaystyle\int_1^\infty \frac{x^\alpha}{1+x^\alpha}\,dx \text{ converge} \iff \alpha<-1}$.

## 4.4 Ejercicios

1) Sea $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ \\ 2y & \text{si} \quad x \in \mathbb{I} \end{cases}$ , $f\colon [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}$.

   Probar que: $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\ dydx = 1$, pero que $f$ no es integrable.

2) Probar que

$$\int_0^1 \int_1^\infty \left(e^{-xy} - 2e^{-2xy}\right)\ dxdy \neq \int_1^\infty \int_0^1 \left(e^{-xy} - 2e^{-2xy}\right)\ dydx.$$

3) Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Sea $M = \sup\{|f(x)| \mid x \in [a,b]\}$ y sea $M_n = \left\{\displaystyle\int_a^b |f(x)|^n\ dx\right\}^{1/n}$, $n \in \mathbb{N}$. Probar que $M = \lim\limits_{n\to\infty} M_n$.

4) Sea $f\colon [a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R}$ una función continua y sea $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada e integrable. Sea $F\colon [c,d] \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(t) = \int_a^b f(x,t)\ g(x)\ dx.$$

   Probar que $F$ es continua.

5) Calcular las siguientes integrales

   i).- $\displaystyle\int_0^2 \int_0^1 (x^2 + 2y)\ dxdy$;

   ii).- $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2}{1+y^2}\ dydx$;

   iii).- $\displaystyle\int_0^{2\pi} \int_{a \operatorname{sen}\varphi}^{a} r\ drd\varphi$;

   iv).- $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}\ dydx$.

6) En las siguientes integrales, describir la región de integración

   i).- $\displaystyle\int_1^3 \int_{x^2}^{x+9} f(x,y)\ dydx$;

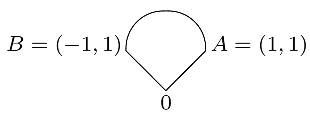
ii).- $\displaystyle\int_0^3 \int_0^{\sqrt{25-x^2}} f(x,y)\ dydx;$

iii).- $\displaystyle\int_{-1}^2 \int_{x^2}^{x+2} f(x,y)\ dydx.$

7) Poner los límites de integración para $\displaystyle\int\int_S f(x,y)\ dxdy$, donde:

i).- $S$ es el trapecio con vértices $0=(0,0)$, $A=(2,0)$, $B=(1,1)$, $C=(0,1)$.

ii).- $S$ es el sector circular $0AB$ con centro $0=(0,0)$ y cuyo arco tiene




extremos $A=(1,1)$, $B=(-1,1)$.

iii).- $S$ es la región, donde se encuentra el origen, de la intersección de la hipérbola $y^2-x^2=1$ y la circunferencia $x^2+y^2=9$.

iv).- $S$ es la región acotada por $x^2+y^2\le x$.

8) Invertir el orden de integración en las integrales:

i).- $\displaystyle\int_0^1 \int_{2x}^{3x} f(x,y)\ dydx;$

ii).- $\displaystyle\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\ dxdy;$

iii).- $\displaystyle\int_0^{\pi} \int_0^{\operatorname{sen} x} f(x,y)\ dydx.$

9) Calcular las siguientes áreas:

i).- La limitada por las parábolas $y^2=10x+25$ y $y^2=-6x+9$.

ii).- La limitada por la curva $\displaystyle\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\right)^2=\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}.$

10) Calcular los siguientes volúmenes:

i).- El limitado por el paraboloide $z=2x^2+y^2+1$, el plano $x+y=1$ y los planos coordenados.

ii).- El limitado por el cilindro $x^2+z^2=a^2$ y los planos $y=0$, $z=0$, $y=x$.

iii).- Del elipsoide: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

11) Poner los límites de integración en $\displaystyle\int\int\int_V f(x,y,z)\ dxdydz$, donde:

i).- $V$ es el tetraedro limitado por $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

ii).- $V$ está acotado por $z=1-x^2-y^2$, $z=0$.

12) Calcular las siguientes integrales:

i).- $\displaystyle\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2-z^2}}\ dzdydx;$

ii).- $\displaystyle\int_0^2\int_0^{2\sqrt{x}}\int_0^{\frac{\sqrt{4x-y^2}}{2}} x\ dzdydx;$

iii).- $\displaystyle\int\int\int_V z\ dxdydz$, donde $V$ está limitado por el interior del cono $z^2=\dfrac{h^2}{R^2}(x^2+y^2)$ y por los planos $z=h$, $z=0$.

13) Calcular los siguientes volúmenes:

i).- El limitado por el interior del cilindro $x^2+y^2=ax$, el plano $x0y$ y la esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$.

ii).- El limitado por el paraboloide $\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{a^2}=2\ \dfrac{x}{c}$ y el plano $x=c$.

14) Calcular las siguientes integrales:

i).- $\displaystyle\int\int_Q |\cos(x+y)|\ dxdy,\ Q=[0,\pi]^2;$

ii).- $\displaystyle\int\int_Q y^{-3}e^{tx/y}\ dxdy,\ Q=[0,t]^2,\ t>0;$

iii).- $\displaystyle\int\int_Q [x+y]\ dxdy$, donde $[t]=$ parte entera de $t$ y $Q=[0,2]^2$.

15) Probar que

$$\int_a^b\int_c^d f(x)g(y)\ dydx=\left\{\int_a^b f(x)\ dx\right\}\cdot\left\{\int_c^d g(y)\ dy\right\}.$$

16) Evaluar $I = 2\displaystyle\int_{-1/2}^{1}\int_{0}^{x} e^{-y^2}\ dydx$ en términos de $A = \displaystyle\int_0^1 e^{-t^2}\ dt$ y $B = \displaystyle\int_0^{1/2} e^{-t^2}\ dt$.

17) Usando el Teorema de Fubini, probar que si $f\colon [a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ es de clase $C^2$, entonces
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}.$$

18) Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq \mathbb{R}^m$ Jordan–medibles y sean $f\colon A\to\mathbb{R}$, $g\colon B\to\mathbb{R}$ funciones integrables. Sea $F\colon A\times B\to\mathbb{R}$ dada por $F(\vec{x},\vec{y}) = f(\vec{x}) + g(\vec{y})$. Mostrar que:
$$\int_{A\times B} F(\vec{x},\vec{y})\ d\vec{x}d\vec{y} = \left(\int_A f(\vec{x})\ d\vec{x}\right)\cdot \operatorname{vol}(B) + \left(\int_B g(\vec{y})\ d\vec{y}\right)\cdot\operatorname{vol}(A).$$

19) Sea $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ una función integrable y no negativa. Sea $A_f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a\le x\le b \text{ y } 0\le y\le f(x)\}$. Probar que $A_f$ es Jordan–medible y que tiene volumen (área) $\displaystyle\int_a^b f$.

20) Si $f\colon [a,b]\times[a,b]\to\mathbb{R}$ es una función integrable, probar que:
$$\int_a^b\int_a^y f(x,y)\ dxdy = \int_a^b\int_x^b f(x,y)\ dydx.$$

21) Sea $S\subseteq\mathbb{R}^n$ un rectángulo cerrado y sea $f\colon S\to\mathbb{R}$ una función continua. Sea $F\colon S\to\mathbb{R}$ dada por
$$F(\vec{x}) = F(x_1,\ldots,x_n) = \int_{[a_1,x_1]\times\ldots\times[a_n,x_n]} f,$$
donde $S = [a_1,b_1]\times\ldots\times[a_n,b_n]$. Si $\vec{x}_0\in\mathring{S}$, ¿qué es $\dfrac{\partial F}{\partial x_i}(\vec{x}_0)$, $1\le i\le n$?

22) Si $f\colon [a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ son funciones continuas, definamos $F(x,y) = \displaystyle\int_a^x f(t,y)dt$.

i).- Hallar $D_1F$ y $D_2F$.

ii).- Si $G(x) = \displaystyle\int_a^{g(x)} f(t,x)\ dt$, hallar $G'(x)$.

23) Sean $g_1, g_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funciones de clase $C^1$ y supongamos que $\dfrac{\partial g_2}{\partial x} = \dfrac{\partial g_1}{\partial y}$.

Sea $f(x,y) = \displaystyle\int_0^x g_1(t,0)\ dt + \int_0^y g_2(x,t)\ dt$. Probar que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = g_1(x,y)$.

24) Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}^3$ Jordan–medibles. Sean

$$A_c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y,c) \in A\} \ \text{ y } \ B_c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y,c) \in B\}.$$

Si cada $A_c$ y cada $B_c$ son Jordan–medibles y tienen la misma área, probar que $A$ y $B$ tienen el mismo volumen.

25) i).- Construir $C \subseteq [0,1] \times [0,1]$ un conjunto tal que $C$ contenga a lo sumo un punto en cada horizontal y uno en cada vertical pero que $\partial C = [0,1] \times [0,1]$.

ii).- Probar que

$$\int_0^1 \left\{ \int_0^1 \ \chi_C(x,y)\ dx \right\} dy = \int_0^1 \left\{ \int_0^1 \ \chi_C(x,y)\ dy \right\} dx,$$

pero que $\displaystyle\int_{[0,1]\times[0,1]} \chi_C$ no existe.

26) Determinar si las siguientes integrales existen o no y, de ser posible, calcular su valor:

i).- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 1}$;

ii).- $\displaystyle\int_{x^2+y^2\leq 1} \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

iii).- $\displaystyle\int_R \frac{(x-y)\ dxdy}{x^2+y^2}$, $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max(|x|,|y|) \leq 1\}$;

iv).- $\displaystyle\int_{x^2+y^2+z^2\geq 1} \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+x^2)^2}$;

v).- $\displaystyle\int_{x^2+y^2+z^2\geq 1} \frac{dxdydz}{xyz}$;

vi).- $\displaystyle\int_R e^{-x-y-z}\ dxdydz$,
$R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq 0 \text{ y } \max(|x|,|y|) \leq 1\}$;

vii).- $\displaystyle\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} (x+y)\ e^{-(x+y)}\ dxdy$;

viii).- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^{2/3}};$

ix).- $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2+1}\ dx.$

27) Calcular los valores de $g(y) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x\ dx}{x-y}$ tomando los valores principales de la integral en caso de ser necesario.

28) Demostrar que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\ dx = \sqrt{\pi}.$

(Sugerencia: $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\ dxdy = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\ dx\right)^2$).

# Capítulo 5

# Cambio de Variable

## 5.1 Particiones de Unidad

El Teorema de Cambio de Variable, en una variable, dice:

**Teorema 5.1.1 (Cambio de Variable en una variable)** *Sean* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función continua y* $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *una función de clase* $C^1$*. Entonces:*

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx = \int_a^b f(g(x))g'(x)\ dx,$$

*es decir,*

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx = \int_a^b (f \circ g) \cdot g'.$$

<u>*Demostración*</u>. Sea $F$ tal que $F'(x) = f(x)$, la cual existe pues $f$ es continua (Teorema Fundamental del Cálculo), por ejemplo $F(x) = \int_0^x f(t)\ dt$. Entonces

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\ dx = F(g(b)) - F(g(a)).$$

Ahora se tiene que $(F \circ g)'(x) = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$, es decir, $F \circ g$ es una primitiva de $(f \circ g) \cdot g'$. Por lo tanto

$$\int_a^b (f \circ g) \cdot g' = (F \circ g)(b) - (F \circ g)(a) = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\ dx. \quad ❏$$

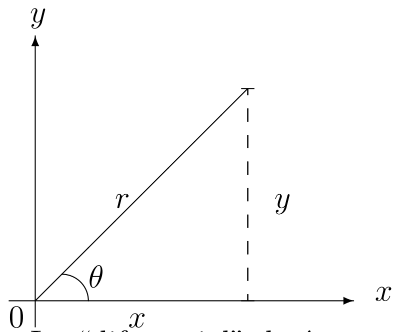
**Ejemplo 5.1.2** Hallar $\int_a^b (1 + x^2)^{10} x \cdot dx = I$.

Respuesta. Sea $g(x) = 1 + x^{10}$ y $f(x) = x^{10}$, $g'(x) = 2x$. Por lo tanto

$$I = \frac{1}{2}\int_a^b (f \circ g)(x) \cdot g'(x)\ dx = \frac{1}{2}\int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\ dy = \frac{1}{2}\int_{1+a^2}^{1+b^2} y^{10}\ dy =$$

$$= \frac{1}{22}\left[y^{11}\right]_{1+a^2}^{1+b^2} = \frac{1}{22}\left\{(1+b^2)^{11} - (1+a^2)^{11}\right\}.$$

Para el caso de dos variables, se puede integrar en coordenadas polares (informalmente) procediendo como a continuación describimos.

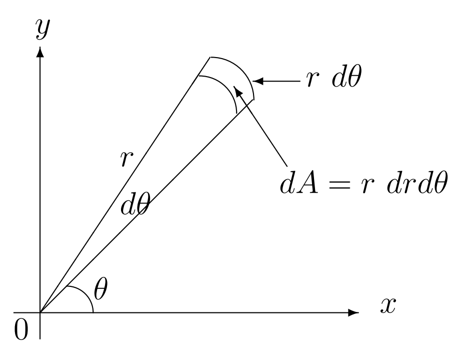



$x = r\cos\theta$;

$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$; $x, y \in \mathbb{R}$, $r \in [0, \infty)$,

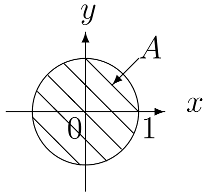
$\theta \in [0, 2\,\pi]$.

La "diferencial" de área en coordenadas polares, se obtiene:




$r\ d\theta$ es la "diferencial" de arco y $dr$ es la "diferencial" del radio. Por lo tanto la "diferencial" del área acotada por los rayos $\theta$, $\theta + d\theta$ junto con los radios $r$ y $r + dr$ es: $dA = r\ d\theta dr$, es decir "$dxdy = r\ d\theta dr$".

**Ejemplo 5.1.3** Sea $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. Se quiere hallar $\displaystyle\int_A (x^2 + y^2)\ dxdy$.




Se tiene : $x^2 + y^2 = r^2$ y $dxdy = r\ d\theta dr$

Además $A$ " = " $\{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$.

Por lo tanto

$$\int_A (x^2+y^2)\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} r^2\cdot r\,d\theta\right) dr = \int_0^1 2\pi r^3\,dr =$$

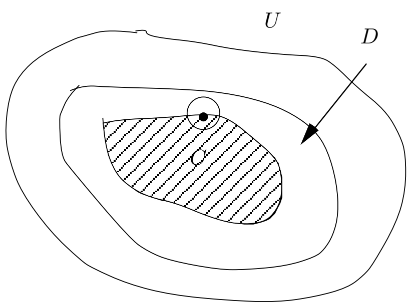
$$= \left[\frac{2\pi r^4}{4}\right]_0^1 = \frac{2\pi}{4} = \boxed{\frac{\pi}{2}}.$$

El teorema de cambio de variable en dimensiones mayores a uno no es, ni con mucho, lo simple que en el caso 1–dimensional.

El concepto de las particiones de unidad nos es de extrema utilidad, tanto para el teorema de cambio de variable, como para extender nuestra definición de integral de Riemann a funciones no acotadas o sobre conjuntos no acotados.

**Lema 5.1.4** *Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y sea $C \subseteq U$ compacto. Entonces existe un conjunto compacto $D$ tal que $C \subseteq \overset{\circ}{D}$ y $D \subseteq U$.*

Demostración.




Se tiene : que $\partial C = C$ es cerrado, por lo que $\partial C$ es compacto. Para cada $\vec{x} \in \partial C \subseteq C \subseteq U$, existe $\epsilon_{\vec{x}} > 0$ tal que

$$B(\vec{x}, \epsilon_{\vec{x}}) \subseteq U \Rightarrow \overline{B}(\vec{x}, \epsilon_{\vec{x}/2}) \subseteq U.$$

Se tiene que $\partial C \subseteq \bigcup\limits_{\vec{x}\in\partial C} B(\vec{x}, \epsilon_{\vec{x}/2})$ y por ser $\partial C$ compacto, existen $\vec{x}_1, \ldots \vec{x}_m \in \partial C$ tales que $\partial C \subseteq \bigcup\limits_{1=1}^{m} B(\vec{x_i}, \epsilon_{\vec{x}_i/2})$.

Definimos $D = \overset{\circ}{C} \bigcup \left( \bigcup\limits_{i=1}^{m} \overline{B}(\vec{x_i}, \epsilon_{\vec{x}_i/2}) \right)$ y veamos que $D$ cumple lo pedido.

Claramente $D$ es cerrado y acotado, por lo que $D$ es compacto. Además $D \subseteq U$ pues cada $\overline{B}(\vec{x_i}, \epsilon_{\vec{x}_i/2}) \subseteq U$, $1 \le i \le m$. Por último, si $\vec{x} \in C = \overset{\circ}{C} \bigcup \partial C$, entonces $\vec{x} \in \overset{\circ}{C}$ ó $\vec{x} \in \partial C$. Si $\vec{x} \in \overset{\circ}{C}$, puesto que $C \subseteq D$, entonces $\overset{\circ}{C} \subseteq \overset{\circ}{D}$. De esto se sigue que $\vec{x} \in \overset{\circ}{D}$. Si $\vec{x} \in \partial C$, existe $1 \le i \le m$ tal que $\vec{x} \in B(\vec{x_i}, \epsilon_{\vec{x}_i/2}) \subseteq \overset{\circ}{D}$. Por lo tanto $C \subseteq \overset{\circ}{D}$, y $D \subseteq U$. ❏

**Lema 5.1.5** *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y sea $C \subseteq A$ un conjunto compacto. Entonces existe una función de clase $C^\infty$, $f\colon A \to \mathbb{R}$ tal que $f(\vec{x}) \geq 0$ para toda $\vec{x} \in A$, $f(\vec{x}) > 0$ para toda $\vec{x} \in C$ y $f = 0$ en $D^c$, donde $D$ es compacto y $C \subseteq \mathring{D}$, $D \subseteq A$.*

<u>*Demostración*</u>. Sea $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por: $h(x) = \begin{cases} e^{-x^{-2}} = e^{-1/x^2} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$.

Entonces $h$ es de clase $C^\infty$ y se tiene que $h^{(n)}(0) = 0 \ \forall \ n \in \mathbb{N}$.

Ahora sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} h(x-1) \cdot h(x+1) & , \quad x \in (-1,1) \\ 0 & , \quad x \notin (-1,1) \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} e^{-(x-1)^{-2}} \cdot e^{-(x+1)^{-2}} & , \quad x \in (-1,1) \\ 0 & , \quad x \notin (-1,1) \end{cases}.$$

Para todo intervalo $(a,b) \subseteq \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$, $f$ es de clase $C^\infty$ en $(a,b)$ y puesto que la derivada, tanto por la izquierda como por la derecha, de cualquier orden y tanto para $x =$ como para $x = -1$ de $f$ es 0, se sigue que $f$ es de clase $C^\infty$ en $\mathbb{R}$.

Además tenemos $f(x) > 0$ para toda $|x| < 1$ y $f = 0$ para toda $|x| \geq 1$.

Sea $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ y sea $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(\vec{x}) = g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f\left(\frac{x_1 - a_1}{\epsilon}\right) \cdot f\left(\frac{x_2 - a_2}{\epsilon}\right) \cdots f\left(\frac{x_n - a_n}{\epsilon}\right),$$

$\epsilon > 0$ dado.

Entonces $g$ es de clase $C^\infty$ en $\mathbb{R}^n$ y $g$ es positiva $\iff \left|\frac{x_i - a_i}{\epsilon}\right| < 1$, $1 \leq i \leq n \iff |x_i - a_i| < \epsilon$, $1 \leq i \leq n \iff \vec{x} \in (a_1 - \epsilon, a_1 + \epsilon) \times (a_2 - \epsilon, a_2 + \epsilon) \times \ldots \times (a_n - \epsilon, a_n + \epsilon)$, es decir $g$ es positiva en $(a_1 - \epsilon, a_1 + \epsilon) \times (a_2 - \epsilon, a_2 + \epsilon) \times \ldots \times (a_n - \epsilon, a_n + \epsilon)$ y 0 en el resto.

Sea $\vec{x} \in C \subseteq A$, entonces existe $\epsilon_{\vec{x}} > 0$ tal que

$$V_{2\epsilon_{\vec{x}}}(\vec{x}) = (x_1 - 2\epsilon_{\vec{x}}, x_1 + 2\epsilon_{\vec{x}}) \times (x_2 - 2\epsilon_{\vec{x}}, x_2 + 2\epsilon_{\vec{x}}) \times \ldots \times (x_n - 2\epsilon_{\vec{x}}, x_n + 2\epsilon_{\vec{x}}) \subseteq A.$$

Sea $g_{\vec{x}}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, una función de clase $C^\infty$ tal que $g_{\vec{x}}$ es positiva en $V_{\epsilon_{\vec{x}}}(\vec{x})$ y 0 en el resto. Se tiene que:

$$\overline{V}_{\epsilon_{\vec{x}}}(\vec{x}) = [x_1 - \epsilon_{\vec{x}}, x_1 + \epsilon_{\vec{x}}] \times [x_2 - \epsilon_{\vec{x}}, x_2 + \epsilon_{\vec{x}}] \times \ldots \times [x_n - \epsilon_{\vec{x}}, x_n + \epsilon_{\vec{x}}] \subseteq V_{2\epsilon_{\vec{x}}} \subseteq A.$$

Ahora $C \subseteq \bigcup\limits_{\vec{x} \in C} V_{\epsilon_{\vec{x}}}$ y $C$ es compacto, por lo que existen $\vec{x}_1, \ldots \vec{x}_m \in C$ tales que $C \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{m} V_{\epsilon_{\vec{x}_i}}(\vec{x}_i)$. Definamos $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $g = g_{\vec{x}_1} + \cdots + g_{\vec{x}_m} = \sum\limits_{i=1}^{m} g_{\vec{x}_i}$.

Si $\vec{x} \in C$, entonces $\vec{x} \in V_{\epsilon_{\vec{x}_i}}(\vec{x}_i)$ para algún $1 \leq i \leq m$. Por lo tanto $g(\vec{x}) \geq g_{\vec{x}_i}(\vec{x}) > 0$. Por lo tanto $g(\vec{x}) > 0$ para toda $\vec{x} \in C$.

Sea $D = \bigcup\limits_{i=1}^{m} \overline{V_{\epsilon_{x_i}}(\vec{x}_i)} \subseteq A$. Se tiene que $D$ es un conjunto compacto.

Si $\vec{x} \notin D$ entonces $\vec{x} \notin \overline{V_{\epsilon_{x_i}}(\vec{x}_i)}$ para toda $1 \leq i \leq m$. Por lo tanto $g_{\vec{x}_i}(\vec{x}) = 0$ para toda $1 \leq i \leq m$. Se sigue que $g(\vec{x}) = 0$ para toda $\vec{x} \in D^c$.

Se tiene que $g$ es una función de clase $C^\infty$ en $\mathbb{R}^n$, $g(\vec{x}) > 0$ para toda $\vec{x} \in C$, $g(\vec{x}) = 0$ para toda $\vec{x} \in D^c$ y $D$ es un conjunto compacto tal que $C \subseteq \overset{\circ}{D}$, $D \subseteq A$. ❏

**Teorema 5.1.6** *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\mathcal{O}$ un recubrimiento abierto de $A$. Entonces existen un conjunto abierto $W$ tal que $A \subseteq W$ y una colección $\Phi$ de funciones $\varphi\colon W \to \mathbb{R}$ de clase $C^\infty$ tal que:*

(1).- *Para toda $\vec{x} \in A$, $0 \leq \varphi(\vec{x}) \leq 1$;*

(2).- *Para cada $\vec{x} \in A$, existe un conjunto abierto $V$ que contiene a $\vec{x}$ tal que todas, salvo un número finito de $\varphi \in \Phi$, son $0$ en $V$;*

(3).- *Para cada $\vec{x} \in A$, en virtud de (2), todas, salvo un número finito de $\varphi \in \Phi$, son $0$ en $\vec{x}$ y la suma $\sum\limits_{\varphi \in \Phi} \varphi(\vec{x})$ es finita y se tiene que*

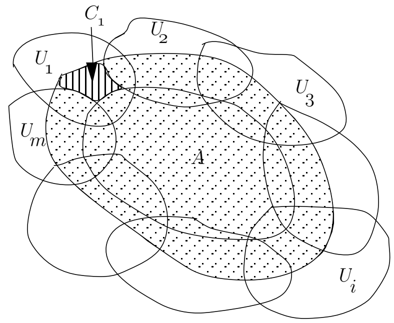
$$\sum_{\varphi \in \Phi} \varphi(\vec{x}) = 1.$$

(4).- *Para cada $\varphi \in \Phi$, existe $U \in \mathcal{O}$ tal que $\varphi = 0$ fuera de un conjunto cerrado contenido en $U$.*

<u>*Demostración*</u>. Para demostrar el resultado para un conjunto $A$ arbitrario, primero lo demostraremos para conjuntos abiertos y puesto que $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^n$ es abierto, se seguirá para $A$. Ahora bien, para demostrar que el resultado es cierto para conjuntos abiertos, veremos que todo abierto es unión numerable de conjuntos compactos tales que cada uno está contenido en el interior del siguiente. Por tanto, lo primero que tendremos que demostrar es que el resultado se cumple para un conjunto compacto $A$ arbitrario.

<u>Caso 1: $A$ compacto.</u>

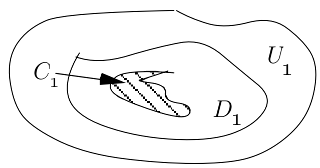
Puesto que $\mathcal{O}$ es una cubierta abierta del conjunto compacto $A$, existen $U_1, U_2, \ldots, U_m \in \mathcal{O}$ que recubren a $A$. Por inducción en $k$, $1 \leq k \leq m$, construiremos conjuntos compactos $D_1, D_2, \ldots, D_m$ tales que $D_i \subseteq U_i$, $1 \leq k \leq m$ y $A \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{m} \overset{\circ}{D}_i$.




Sea $C_1 = A \setminus (U_2 \cup U_3 \cup \ldots \cup U_m)$. Entonces $C_1$ es un conjunto cerrado y puesto que $C_1 \subseteq A$ se tiene que $C_1$ es compacto.

Ahora $C_1 \subseteq U_1$, entonces por el Lema 5.1.4 existe un conjunto compacto $D_1$ tal que $C_1 \subseteq \overset{\circ}{D}_1$ y $D_1 \subseteq U_1$.

Sea $\vec{x} \in A$. Si $\vec{x} \in C_1$ entonces $\vec{x} \in \overset{\circ}{D}_1$. Si $\vec{x} \notin C_1$ entonces $\vec{x} \in \displaystyle\bigcup_{i=2}^{m} U_i$. Por lo tanto




$A \subseteq \overset{\circ}{D}_1 \cup \left(\displaystyle\bigcup_{i=2}^{m} U_i\right)$.

Supongamos que para $1 \leq k < m$ se han construidos conjuntos compactos $D_1, \ldots, D_k$ tales que $D_i \subseteq U_i$, $1 \leq i \leq k$ y $A \subseteq \left(\displaystyle\bigcup_{i=1}^{k} \overset{\circ}{D}_i\right) \bigcup \left(\displaystyle\bigcup_{i=k+1}^{m} U_i\right)$.

Sea $C_{k+1} = A \setminus \left(\overset{\circ}{D}_1 \cup \cdots \cup \overset{\circ}{D}_k \cup U_{k+2} \cup \cdots \cup U_m\right) \subseteq A$. Se tiene que $C_{k+1}$ es cerrado y $C_{k+1} \subseteq A$. Por lo tanto $C_{k+1}$ es compacto. Ahora si $\vec{x} \in C_{k+1}$, entonces $\vec{x} \in A$ y $\vec{x} \notin \overset{\circ}{D}_1 \cup \cdots \cup \overset{\circ}{D}_k \cup U_{k+2} \cup \cdots \cup U_m$, por lo que $\vec{x} \in U_{k+1}$. Se sigue que $C_{k+1} \subseteq U_{k+1}$. Por el Lema 5.1.4 se tiene que existe un conjunto compacto $D_{k+1}$ tal que $C_{k+1} \subseteq \overset{\circ}{D}_{k+1}$ y $D_{k+1} \subseteq U_{k+1}$. Ahora bien, se tiene que

$$A \subseteq C_{k+1} \bigcup \left(\bigcup_{i=1}^{k} \overset{\circ}{D}_i\right) \bigcup \left(\bigcup_{i=k+2}^{m} U_i\right) \subseteq \left(\bigcup_{i=1}^{k+1} \overset{\circ}{D}_i\right) \bigcup \left(\bigcup_{i=k+2}^{m} U_i\right),$$

con lo que termina la construcción requerida.

Para cada $1 \leq i \leq m$, existe $\psi_i \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ función de clase $C^\infty$ tal que $\psi_i(\vec{x}) > 0$ para toda $\vec{x} \in D_i$, $\psi(\vec{x}) \geq 0$ para toda $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ y $\psi = 0$ fuera de un conjunto compacto $K_i$ contenido en $U_i$ (Lema 5.1.5).

Ahora bien, $\forall\, \vec{x} \in \displaystyle\bigcup_{i=1}^{m} \overset{\circ}{D}_i = U \supseteq A$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \psi_i(\vec{x}) > 0$ y $U$ es un conjunto abierto.

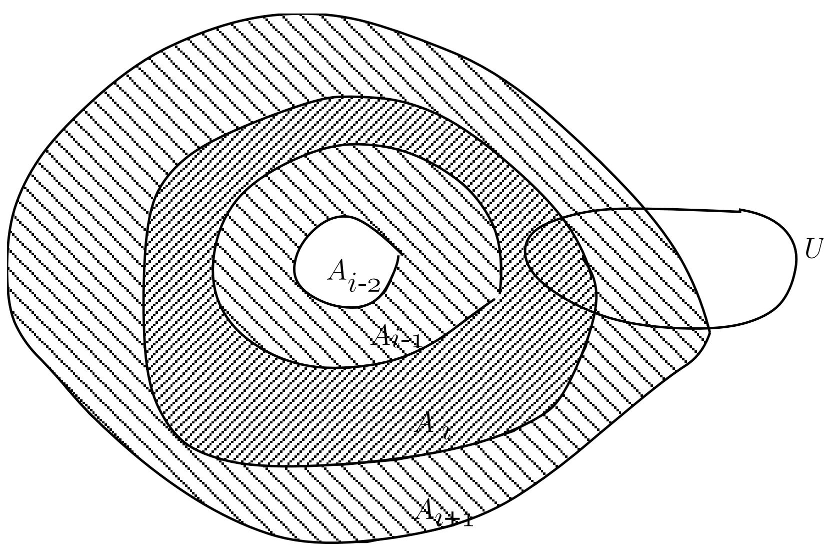
Sea $\varphi_i \colon U \to \mathbb{R}$ dado por $\varphi_i(\vec{x}) = \dfrac{\psi_i(\vec{x})}{\sum_{i=1}^{m} \psi_i(\vec{x})}$, $1 \leq i \leq m$.

Se tiene que $0 \leq \varphi_i(\vec{x}) \leq 1 \ \forall \ \vec{\in} A$ y $\forall \ 1 \leq i \leq m$ y además $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \varphi_i(\vec{x}) = 1 \ \forall \ \vec{x} \in A$. Puesto que $\varphi_i = 0$ en $U \setminus (K_1 \cup \ldots \cup K_m)$, podemos extender $\varphi_i$ a todo $\mathbb{R}^n$ definiendo $\varphi_i(\vec{x}) = 0 \ \forall \ \vec{x} \in U^c$ y $\varphi_i \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase $C^\infty$.

Por último, si $\mathcal{O} = \{U_1, \ldots, U_m, U_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$, definimos $\varphi_\alpha \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ por $\varphi_\alpha \equiv 0$, $\alpha \in \Delta$. Entonces $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_m, \varphi_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$ es la colección buscada.

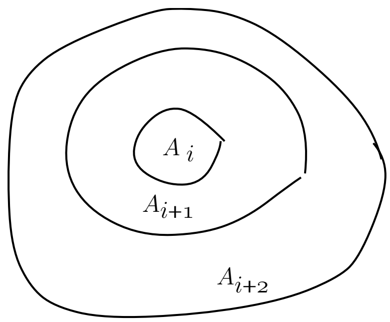
Caso 2: Si $A = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, $A_i$ es compacto y $A_i \subseteq \mathring{A}_{i+1}$, $i \in \mathbb{N}$.

Definimos $A_{-1} = A_0 = \emptyset$ y para $i \in \mathbb{N}$, $\mathcal{O}_i = \left\{U \cap \left(\mathring{A}_{i+1} \setminus A_i\right) \mid U \in \mathcal{O}\right\}$. Puesto que $A \subseteq \displaystyle\bigcup_{U \in \mathcal{O}} U$, se tiene que $A_i \setminus \mathring{A}_{i-1} = B_i \subseteq \mathring{A}_{i+1} \setminus A_{i-2} = \left(\displaystyle\bigcup_{U \in \mathcal{O}} U\right) \bigcap \left(\mathring{A}_{i+1} \setminus A_{i-2}\right) = \displaystyle\bigcup_{U \in \mathcal{O}} \left(U \cap \left(\mathring{A}_{i+1} \setminus A_{i-2}\right)\right) = \displaystyle\bigcup_{V \in \mathcal{O}_i} V$ (se tiene $\mathring{A}_{i-1} \supseteq A_{i-2}$ por lo tanto $\left(\mathring{A}_{i-1}\right)^c \subseteq (A_{i-2})^c$).




Es decir $\mathcal{O}_i$ es un recubrimiento abierto del conjunto compacto $B_i = A_i \setminus \mathring{A}_{i-1}$. Tendremos además que $A = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ pues se tiene que $B_i \subseteq A$ para todo $i \in \mathbb{N}$ y, recíprocamente, si $\vec{x} \in A = \displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$, existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $\vec{x} \in A_i$. Elegimos $i_0$ el primer número natural tal que $\vec{x} \in A_{i_0}$, por lo tanto $\vec{x} \notin \mathring{A}_{i_0-1}$. De aqui se sigue que $\vec{x} \in A_{i_0} \setminus \mathring{A}_{i_0-1} = B_{i_0}$.

Por el caso 1, para cada $i \in \mathbb{N}$ existe una colección $\Phi_i$ que cumple las condiciones con $\mathcal{O}_i$ la cual es una cubierta abierta de $B_i$.




Sea $\vec{x} \in A$, digamos $\vec{x} \in A_i$. Sea $j \geq i+2$ y sea $\varphi \in \Phi_j$. Se tiene que $\vec{x} \in A_i$ por lo que $\vec{x} \in A_{j-2}$. Entonces se tiene que $\vec{x} \in \mathring{A}_{j+1} \setminus A_{j-2}$ y $\mathcal{O}_j = \left\{ U \cap (\mathring{A}_{j+1} \setminus A_{j-2}) \mid U \in \mathcal{O} \right\}$. Por lo tanto $\vec{x} \notin V$ para toda $V \in \mathcal{O}_j$, de donde $\varphi(\vec{x}) = 0 \ \forall \ \varphi \in \Phi_j$.

Entonces la suma $\sigma(\vec{x}) = \displaystyle\sum_{\substack{\varphi \in \Phi_j \\ j \in \mathbb{N}}} \varphi(\vec{x})$ es una suma finita en un conjunto abierto que contiene a $\vec{x}$.

Además $\sigma(\vec{x}) \geq \displaystyle\sum_{\varphi \in \Phi_m} \varphi(\vec{x}) = 1$ para algún $m \in \mathbb{N}$.

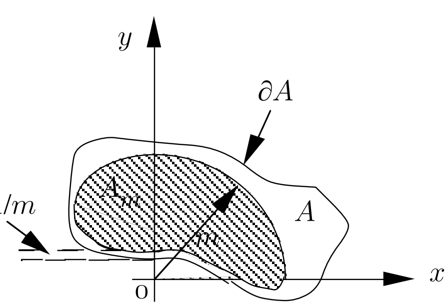
Para cada $\varphi \in \Phi_i$ definimos $\varphi_1(\vec{x}) = \dfrac{\varphi(\vec{x})}{\sigma(\vec{x})}$, $i \in \mathbb{N}$. Sea $\Phi = \left\{ \varphi_1 \mid \varphi \in \displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} \Phi_i \right\}$, $\varphi_1$ es una función de clase $C^\infty$ y se puede extender $\varphi_1 \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiendo $\varphi_1 = 0$ en donde originalmente no estaba definida. Se tiene que $\varphi_1$ es de clase $C^\infty$. Por otro lado $\varphi(\vec{x})$, $\sigma(\vec{x}) \geq 0$ y $\varphi(\vec{x}) \leq \sigma(\vec{x})$. Por lo tanto $0 \leq \varphi_1(\vec{x}) \leq 1$ y $\varphi_1(\vec{x}) = 0 \iff \varphi(\vec{x}) = 0$ y puesto que $\varphi \in \Phi_i$, existe un conjunto abierto $V$ que contiene a $\vec{x}$ en donde todas, salvo un número finito de las $\varphi_1$, son 0.

Además tenemos $\displaystyle\sum_{\varphi_1 \in \Phi} \varphi_1(\vec{x}) = \sum_{\substack{\varphi \in \Phi_i \\ i \in \mathbb{N}}} \frac{\varphi(\vec{x})}{\sigma(\vec{x})} = 1 \ \forall \ \vec{x} \in A$.

Por último, sea $\varphi_1 \in \Phi$, $\varphi_1 = \dfrac{\varphi}{\sigma}$. Existe un conjunto abierto $V$ de $\mathcal{O}_i$ tal que $\varphi_1$ se anula fuera de un conjunto compacto contenido en $V$ y existe $U \in \mathcal{O}$ tal que $V \subseteq U$. Por lo tanto $\varphi_1$ se anula en el exterior de un conjunto cerrado contenido en $U$.

<u>Caso 3: $A$ es abierto</u>

Para $m \in \mathbb{N}$, definimos $A_m = \{\vec{x} \in A \mid \|\vec{x}\| \leq m \text{ y } \|\vec{x} - \vec{y}\| \geq 1/m \ \forall \ \vec{y} \in \partial A\}$.




Si $\vec{x} \in A$, sea $\epsilon_1 = \dfrac{1}{m} - \dfrac{1}{m+1} = \dfrac{1}{m(m+1)}$.

Además existe $\epsilon_2 > 0$ tal que $B(\vec{x}, \epsilon_2) \subseteq A$.

Sea $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\} > 0$.

Sea $\vec{y} \in B(\vec{x}, \epsilon) \subseteq B(\vec{x}, \epsilon_2) \subseteq A$ y $\|\vec{y}\| \leq \|\vec{y} - \vec{x}\| + \|\vec{x}\| < \epsilon + m \leq 1 + m$.

Si $z \in \partial A$, $\|\vec{z}-\vec{x}\| \geq \dfrac{1}{m}$, $\|\vec{z}-\vec{y}\| \geq \|\vec{z}-\vec{x}\| - \|\vec{x}-\vec{y}\| \geq \dfrac{1}{m} - \dfrac{1}{m(m+1)} = \dfrac{1}{m+1}$, es decir, $B(\vec{x},\epsilon) \subseteq A_{m+1}$ por lo que $\vec{x} \in \mathring{A}_{m+1}$, de donde se sigue que $A_m \subseteq \mathring{A}_{m+1}$.

Ahora, $A_m$ está acotado ya que $A_m \subseteq \overline{B}(\vec{0},m)$. Veamos que $A_m$ es un conjunto cerrado. Sea $\vec{x} \in \overline{A}_m$, existe una sucesión $\{\vec{x}_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq A_m$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} \vec{x}_k = \vec{x}$ por lo que $\|\vec{x}_k\| \leq m \ \forall\ k \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $\|\vec{x}\| \leq m$.

Ahora si $\vec{z} \in \partial A$ entonces $\|\vec{x}_k - \vec{z}\| \geq \dfrac{1}{m}$ para toda $k \in \mathbb{N}$. Si sucediese que $\|\vec{x}-\vec{z}\| = \delta < \dfrac{1}{m}$, elegimos $k \in \mathbb{N}$ tal que $\|\vec{x}_k - \vec{z}\| < \dfrac{1}{m} - \delta = \delta_1$. Por lo tanto

$$\|\vec{x}_k - \vec{z}\| \leq \|\vec{x}_k - \vec{x}\| + \|\vec{x} - \vec{z}\| < \delta_1 + \delta = \frac{1}{m}$$

lo cual es absurdo. Por tanto $\|\vec{x}-\vec{z}\| \geq \dfrac{1}{m}\ \forall\ z \in \partial A$ y puesto que $\vec{x} \in \overline{A}_m \subseteq \overline{A}$ y $\vec{x} \notin \partial A$, se sigue que $\vec{x} \in A_m$, por lo que $A_m$ es un conjunto cerrado y por lo tanto $A_m$ es un conjunto compacto.

El resultado se seguirá del caso 2 si probamos que $A = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_m$. Sea $\vec{x} \in A$. Entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $B(\vec{x},\epsilon) \subseteq A$ y elijamos $M > 0$ tal que $\|\vec{x}\| \leq M$.

Sea $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\|\vec{x}\| \leq k_1$ y sea $k_2 \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{k_2} \leq \epsilon$.

Sea $k = \max\{k_1, k_2\}$. Entonces $\vec{x} \in A$, $\|\vec{x}\| \leq k$ y $\|\vec{x}-\vec{z}\| \geq \epsilon \geq \dfrac{1}{k_2} \geq \dfrac{1}{k}$ para toda $\vec{z} \in \partial A$. Por lo tanto $\vec{x} \in A_k$. Se tiene entonces que $A \subseteq \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ y, puesto que, $A_k \subseteq A\ \forall\ k \in \mathbb{N}$, se tiene $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \subseteq A$. Se sigue que $A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$.

<u>Caso 4: $A$ es arbitrario</u>

Sea $B = \bigcup\limits_{U \in \mathcal{O}} U$, $A \subseteq B$ y $B$ es un conjunto abierto. Entonces, por el caso 3, existe una colección $\Phi$ para $B$ que cumple las condiciones del teorema. Esta misma colección sirve para el conjunto $A$. ❏

**Definición 5.1.7** Si la colección $\Phi$ satisface las propiedades (1), (2) y (3) del teorema anterior y $\varphi \in \Phi$ es una función de clase $C^k$ para toda $\varphi$, entonces a $\Phi$ se le llama <u>partición de unidad $C^k$ para $A$</u> ($k \geq 1$). Si $\Phi$ además satisface la propiedad (4) del teorema anterior, se dice que <u>$\Phi$ está subordinada a la cubierta $\mathcal{O}$</u>.

En el teorema anterior probamos que todo conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ con una cubierta abierta $\mathcal{O}$, tiene una partición de unidad $C^\infty$ subordinada a $\mathcal{O}$.

## 5.2 Aplicaciones de las Particiones de Unidad

Primero notemos que si $C$ es un conjunto compacto y si se da una partición de unidad $\Phi$, entonces dada $\vec{x} \in C$, existe un conjunto abierto $V_{\vec{x}}$ tal que $\vec{x} \in V_{\vec{x}}$ y sólo un número finito de las funciones $\varphi \in \Phi$ no son cero en $V_{\vec{x}}$. Se tiene que $C \subseteq \displaystyle\bigcup_{\vec{x}\in C} V_{\vec{x}}$ y $C$ es un conjunto compacto. Por tanto existen $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m \in C$ tales que $C \subseteq \displaystyle\bigcup_{i=1}^{m} V_{\vec{x}_i}$. Entonces tenemos que sólo un número finito de las $\varphi \in \Phi$ no son 0 en $C$, es decir, para un conjunto compacto $C$, la partición de unidad consta de un número finito de funciones.

**Observación 5.2.1** Se ha visto que existe un conjunto abierto (ó compacto) $A \subseteq \mathbb{R}^n$ acotado y $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que el conjunto $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid o(f, \vec{x}) > 0\}$ tiene medida 0, pero $\displaystyle\int_A f$ no existe (si $A$ no es Jordan–medible). Este problema lo evitaremos definiendo $\displaystyle\int_A f$ de tal forma que generalice nuestra definición anterior.

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto. Dado $\vec{x} \in A$, existe $\epsilon_{\vec{x}} > 0$ tal que

$$V_{\epsilon_{\vec{x}}}(\vec{x}) = (x_1 - \epsilon_{\vec{x}}, x_1 + \epsilon_{\vec{x}}) \times \cdots \times (x_n - \epsilon_{\vec{x}}, x_n + \epsilon_{\vec{x}}) \subseteq A,$$

donde $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$.

Entonces $A = \displaystyle\bigcup_{\vec{x}\in A} V_{\epsilon_{\vec{x}}}(\vec{x})$. Ahora bien, $V_{\epsilon_{\vec{x}}}(\vec{x})$ es un rectángulo abierto y por lo tanto Jordan–medible, es decir, si $A$ es abierto, existe un recubrimiento abierto $\mathcal{O}$ de $A$ tal que para toda $U \in \mathcal{O}$, $U$ es Jordan–medible y además $A = \displaystyle\bigcup_{U\in\mathcal{O}} U$.

**Definición 5.2.2** Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto. Una cubierta abierta $\mathcal{O}$ de $A$ se llama <u>admisible</u> si $\forall\, U \in \mathcal{O}$, $U \subseteq A$ y $U$ es Jordan–medible.

Si $\mathcal{O}$ es una cubierta admisible de $A$ se tiene que $A = \displaystyle\bigcup_{U\in\mathcal{O}} U$.

**Definición 5.2.3** Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto. Sea $\mathcal{O}$ un recubrimiento admisible de $A$. Sea $\Phi$ una partición de unidad de $A$ subordinada a $\mathcal{O}$. Sea $f \colon A \to \mathbb{R}$ tal que para cada $\vec{x} \in A$, toda vecindad abierta $U$ de $\vec{x}$ con $U \in \mathcal{O}$, $f$ está acotada en $U$ y además suponemos que el conjunto $\{\vec{x} \in A \mid o(f, \vec{x}) > 0\}$ es de medida 0. Entonces dada $\varphi \in \Phi$, existe $U \in \mathcal{O}$ tal que $\varphi$ se anula fuera de un conjunto cerrado contenido en $U$ y por lo tanto $\displaystyle\int_A \varphi \cdot |f| = \int_U \varphi \cdot |f|$ existe.

Se dice que $f$ es <u>integrable</u> (en un sentido más amplio a la definición anterior), si

$$\sum_{\varphi\in\Phi} \int_A \varphi \cdot |f|$$

converge y este caso se define la integral de $f$ en $A$ por:

$$\int_A f = \sum_{\varphi \in \Phi} \int_A \varphi \cdot f$$

y se llama integral impropia de Riemann de $f$ en $A$.

**Observaciones 5.2.4**

(1).- En el caso 3 de teorema anterior, se demostró que $A$ es unión numerable de conjuntos compactos, digamos $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ con $A_i$ un conjunto compacto, y si $\Phi$ es una partición de unidad de $A$, entonces $\Phi$ es una partición de cada $A_i$, por lo que para cada $i \in \mathbb{N}$ sólo un número finito de $\varphi \in \Phi$ son diferentes de 0, de donde sólo una cantidad a lo más numerable de $\varphi \in \Phi$ son diferentes de 0 en $A$, es decir,

$$\sum_{\varphi \in \Phi} \int_A \varphi \cdot f$$

es una serie numérica.

(2).- Se tiene que $\displaystyle\sum_{\varphi \in \Phi} \left| \int_A \varphi \cdot f \right| \leq \sum_{\varphi \in \Phi} \int_A \varphi \cdot |f| < \infty$ por lo que la serie $\displaystyle\sum_{\varphi \in \Phi} \int_A \varphi \cdot f$ es absolutamente convergente y por lo tanto convergente.

(3).- Se va a demostrar en el siguiente teorema que $\displaystyle\int_A f$ no depende del recubrimiento admisible $\mathcal{O}$ de $A$ ni de la partición de unidad $\Phi$. Sin embargo, si no se pide que

$$\sum_{\varphi \in \Phi} \int_A \varphi \cdot |f|$$

converja, la integral

$$\int_A f = \sum_{\varphi \in \Phi} \int_A \varphi \cdot f$$

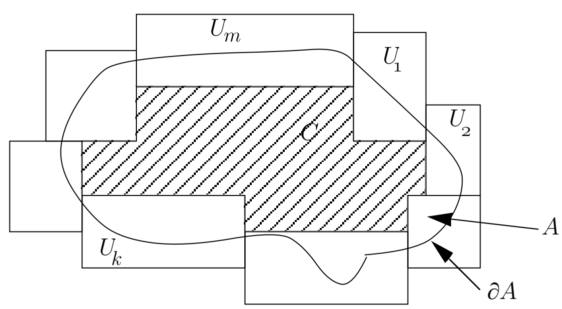
puede depender de $\mathcal{O}$ y de $\Phi$, aunque $\displaystyle\sum_{\varphi \in \Phi} \int_A \varphi \cdot f$ sea absolutamente convergente. Un ejemplo de este fenómeno se da en los ejercicios al final del capítulo.

(4).- En el caso de que $A$ sea Jordan–medible y $f$ acotada, las 2 definiciones de integral coinciden, por lo que la nueva definición es una generalización de la noción de integral de Riemann a conjuntos no acotados y a funciones no acotadas. Sin embargo esta construcción es muy teórica y por eso se dio una sección de integral impropia en el capítulo anterior.

(5).- Si $C$ es un conjunto arbitrario, consideremos $A$ un conjunto abierto tal que $C \subseteq A$ y definimos
$$\int_C f = \int_A f \cdot \chi_C.$$

**Lema 5.2.5** *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto acotado y Jordan–medible. Sea $\epsilon > 0$. Entonces existe un conjunto compacto $C$ el cual es Jordan–medible tal que $C \subseteq A$ y* $\operatorname{vol}(A \setminus C) = \int_A \chi_{A \setminus C} < \epsilon$.

<u>*Demostración*</u>. Puesto que $A$ es un conjunto Jordan–medible, se tiene que $\partial A$ tiene




medida 0. Por tanto existen rectángulos abiertos $U_1, \ldots, U_m$ tales que $\partial A \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} U_i$ y $\sum_{i=1}^{m} \operatorname{vol}(U_i) < \epsilon$ ($\partial A$ tiene contenido 0).

Sea $C = \overline{A} \setminus \left( \bigcup_{i=1}^{m} U_i \right)$ el cual es Jordan–medible. Ahora $C$ es cerrado y acotado (puesto que $C \subseteq \overline{A}$), por lo tanto $C$ es compacto.

Por último, si $\vec{x} \in C$ se tiene que $\vec{x} \in \overline{A} = \mathring{A} \cup \partial A$, pero $\vec{x} \notin \bigcup_{i=1}^{m} U_i$. Se sigue que $\vec{x} \notin \partial A$ por lo que $\vec{x} \in \mathring{A} \subseteq A$. Se obtiene que $C \subseteq A$ y $A \setminus C \subseteq \overline{A} \setminus C \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} U_i$. Por lo tanto $\operatorname{vol}(A \setminus C) = \int_A \chi_{A \setminus C} \leq \operatorname{vol} \left( \bigcup_{i=1}^{m} U_i \right) \leq \sum_{i=1}^{m} \operatorname{vol}(U_i) < \epsilon$. ❏

**Teorema 5.2.6** *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $A$ un conjunto abierto y sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función tal que el conjunto $\{\vec{x} \in A \mid o(f, \vec{x}) > 0\}$ es de medida 0. Sea $\mathcal{O}$ una cubierta admisible de $A$ y sea $\Phi$ una partición de unidad de $A$ subordinada a $\mathcal{O}$.*

(1).- *Si $f$ es integrable, si $\mathcal{O}'$ es otra cubierta admisible y $\Psi$ es una partición de unidad de $A$ subordinada a $\mathcal{O}'$, entonces*

$$\sum_{\psi\in\Psi}\int_A \psi\cdot|f|$$

*también converge y se tiene:*

$$\sum_{\varphi\in\Phi}\int_A \varphi\cdot f=\sum_{\psi\in\Psi}\int_A \psi\cdot f.$$

(2).- *Si $A$ y $f$ son acotados, entonces $f$ es integrable en el nuevo sentido.*

(3).- *Si $A$ es Jordan–medible y $f$ es acotada, entonces las 2 definiciones de integral $\displaystyle\int_A f$ coinciden.*

*Demostración*.

(1).- Veamos que $\Phi\cdot\Psi=\{\varphi\cdot\psi\mid\varphi\in\Phi,\psi\in\Psi\}$ es una partición de unidad subordinada a la cubierta admisible $\mathcal{O}\cap\mathcal{O}'=\{U\cap U'\mid U\in\mathcal{O},U'\in\mathcal{O}'\}$ de $A$.

Se tiene que para toda $\vec{x}\in A$, $0\le\varphi(\vec{x})\cdot\psi(\vec{x})\le 1$, $\forall\ \varphi\in\Phi,\psi\in\Psi$. Ahora si $\vec{x}\in A$, $\displaystyle\sum_{\varphi\in\Phi}\varphi(\vec{x})=1=\sum_{\psi\in\Psi}\psi(\vec{x})$ y cada suma consta de un número finito de elementos diferentes de 0, es decir, cada suma es finita. Por lo tanto

$$\sum_{\varphi\in\Phi,\psi\in\Psi}\varphi(\vec{x})\cdot\psi(\vec{x})=\sum_{\varphi\in\Phi}\sum_{\psi\in\Psi}\varphi(\vec{x})\cdot\psi(\vec{x})=\left[\sum_{\varphi\in\Phi}\varphi(\vec{x})\right]\cdot\left[\sum_{\psi\in\Psi}\psi(\vec{x})\right]=1\cdot 1=1.$$

Sea $\vec{x}\in A$. Entonces existen conjuntos abiertos $V$ y $V'$ que contienen a $\vec{x}$ tales que sólo un número finito de $\varphi\in\Phi$ y un número finito de $\psi\in\Psi$ son diferentes de 0 en $V$ y $V'$ respectivamente. Por lo tanto sólo un número finito de productos $\varphi\cdot\psi$, $\varphi\in\Phi$, $\psi\in\Psi$ son diferentes de 0 en $V\cap V'$ el cual es abierto y es tal que $\vec{x}\in V\cap V'$.

Por último, dados $\varphi\in\Phi$, $\psi\in\Psi$, existen conjuntos abiertos $V\in\mathcal{O}$, $V'\in\mathcal{O}'$ tales que $\varphi$ se anula fuera de un conjunto cerrado $D$ contenido en $V$ y $\psi$ se anula en el exterior de un conjunto cerrado $D'$ contenido en $V'$. Por lo tanto $\varphi\cdot\psi$ se anula en el exterior del conjunto cerrado $D\cap D'$ contenido en $V\cap V'\in\mathcal{O}\cap\mathcal{O}'$. Se tiene que

$$A=\left(\bigcup_{U\in\mathcal{O}}U\right)\bigcap\left(\bigcup_{U'\in\mathcal{O}'}U'\right)=\bigcup_{U\in\mathcal{O},U'\in\mathcal{O}'}(U\cap U')$$

y cada conjunto $U \cap U'$ es un conjunto abierto y Jordan–medible. Por lo tanto $\mathcal{O} \cap \mathcal{O}'$ es una cubierta abierta admisible de $A$.

Sea $\varphi \in \Phi$. Existe un conjunto $V$ de $\mathcal{O}$, $V$ acotado, tal que $\varphi$ se anula en el exterior de un conjunto cerrado $D \subseteq V$ ($D$ compacto). Por lo tanto $(\varphi \cdot f)(\vec{x}) = 0 \ \forall \ \vec{x} \notin D$. Sólo un número finito de $\psi \in \Psi$ son diferentes de 0 en $D$. Se sigue que se puede escribir:

$$\varphi \cdot f = 1 \cdot \varphi \cdot f = \left( \sum_{\psi \in \Psi} \psi \right) \cdot \varphi \cdot f = \sum_{\psi \in \Psi} \psi \cdot \varphi \cdot f$$

y se tiene:

$$\sum_{\varphi \in \Phi} \int_A \varphi \cdot f = \sum_{\varphi \in \Phi} \int_A \left( \sum_{\psi \in \Psi} \psi \cdot \varphi \cdot f \right) = \sum_{\varphi \in \Phi} \int_D \left( \sum_{\psi \in \Psi} \psi \cdot \varphi \cdot f \right) \overset{(*)}{=}$$

$$= \sum_{\varphi \in \Phi} \sum_{\psi \in \Psi} \int_D \psi \cdot \varphi \cdot f = \sum_{\varphi \in \Phi} \sum_{\psi \in \Psi} \int_A \psi \cdot \varphi \cdot f$$

(($*$): por ser $\displaystyle\sum_{\psi \in \Psi} \psi \cdot \varphi \cdot f$ una suma finita).

Aplicando este resultado a $|f|$ en lugar en $f$, se tiene que

$$\sum_{\varphi \in \Phi} \sum_{\psi \in \Psi} \int_A \psi \cdot \varphi \cdot |f|$$

converge, por lo que

$$\sum_{\varphi \in \Phi} \sum_{\psi \in \Psi} \left| \int_A \psi \cdot \varphi \cdot f \right|$$

converge. Por lo tanto

$$\sum_{\varphi \in \Phi} \sum_{\psi \in \Psi} \int_A \psi \cdot \varphi \cdot f$$

es absolutamente convergente, por lo que podemos sumar en cualquier orden y obtenemos que:

$$\sum_{\varphi \in \Phi} \sum_{\psi \in \Psi} \int_A \psi \cdot \varphi \cdot f = \sum_{\psi \in \Psi} \sum_{\varphi \in \Phi} \int_A \psi \cdot \varphi \cdot f,$$

por lo que

$$\sum_{\psi \in \Psi} \int_A \psi \cdot f = \sum_{\psi \in \Psi} \int_A \sum_{\varphi \in \Phi} \varphi \cdot \psi \cdot f = \sum_{\psi \in \Psi} \sum_{\varphi \in \Phi} \int_A \varphi \cdot \psi \cdot f =$$

$$= \sum_{\varphi\in\Phi}\sum_{\psi\in\Psi}\int_A \varphi\cdot\psi\cdot f = \sum_{\varphi\in\Phi}\int_A \varphi\cdot f.$$

Aplicando esta última igualdad a $|f|$ en lugar de $f$, se tiene que:

$$\sum_{\psi\in\Psi}\int_A \psi\cdot|f| = \sum_{\varphi\in\Phi}\int_A \varphi\cdot|f|,$$

es decir

$$\sum_{\psi\in\Psi}\int_A \psi\cdot|f|$$

converge.

(2).- Sea $B$ un rectángulo cerrado tal que $A\subseteq B$ y sea $M>0$ tal que $|f(\vec{x})|\leq M\ \forall\ \vec{x}\in A$.

Sea $F\subseteq\Phi$ un conjunto finito. Entonces dada $\varphi\in\Phi$, se tiene que

$$\int_A \varphi\cdot|f| \leq \int_A M\cdot\varphi = M\int_A \varphi = M\int_B \varphi \quad \forall\ \varphi\in\Phi,$$

por lo tanto

$$\sum_{\varphi\in F}\int_A \varphi\cdot|f| \leq \sum_{\varphi\in F} M\int_B \varphi \overset{(*)}{=} M\int_B \left(\sum_{\varphi\in F}\varphi\right) \leq M\int_B \left(\sum_{\varphi\in\Phi}\varphi\right) \leq$$

$$\leq M\int_B 1 = M\cdot\operatorname{vol}(B) < \infty,$$

$$((*)\text{: se puede permutar } \sum \text{ y } \int \text{ por ser suma finita})$$

por lo que $\displaystyle\sum_{\varphi\in\Phi}\int_A \varphi\cdot|f|$ es acotada y por ser de términos positivos converge.

Se sigue que $\displaystyle\int_A f$ existe.

(3).- La definición original de integral $f$ en $A$ la denotamos por $\displaystyle\int_A f$. Sea $\epsilon>0$ y sea $M>0$ tal que $|f(\vec{x})|\leq M\ \forall\ \vec{x}\in A$. Por el lema anterior, se tiene que existe un conjunto compacto $C$ Jordan–medible tal que $C\subseteq A$ y $\operatorname{vol}(A\setminus C)<\epsilon/2M$.

Ahora bien, sólo un número finito de $\varphi\in\Phi$ son diferentes de 0 en $C$. Sea $F\subseteq\Phi$ un conjunto finito que contenga a todas las funciones $\varphi$ que son diferentes de 0 en $C$. Entonces:

$$\left|\int_A f - \sum_{\varphi\in F}\int_A \varphi\cdot f\right| = \left|\int_A \left(f - \sum_{\varphi\in F}\varphi\cdot f\right)\right| \leq \int_A \left|f\left(1-\sum_{\varphi\in F}\varphi\cdot f\right)\right| \leq$$

$$\leq \int_A |f| \cdot \left| 1 - \sum_{\varphi \in F} \varphi \right| \leq M \int_A \left( 1 - \sum_{\varphi \in F} \varphi \right) = M \int_A \sum_{\varphi \in \Phi \setminus F} \varphi =$$

$$= M \int_{A \setminus C} \sum_{\varphi \in \Phi \setminus F} \varphi \leq M \int_{A \setminus C} 1 = M \cdot \operatorname{vol}(A \setminus C) \leq M \cdot \frac{\epsilon}{2M} = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

por lo que

$$\sum_{\varphi \in \Phi} \int_A \varphi \cdot f = \int_A f. \qquad ❑$$

## 5.3 Teorema del Cambio de Variable

Antes de dar este teorema, que es lo central de esta capítulo, damos un lema auxiliar que de hecho es un caso particular del teorema.

**Lema 5.3.1** *Sea $g \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una transformación lineal y sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto Jordan–medible. Entonces $g(U)$ es Jordan–medible y se tiene que* $\operatorname{vol}(g(U)) = |\det g| \cdot \operatorname{vol}(U)$.

*Demostración*.

Caso 1: $g$ es singular.

Si $g$ es singular, entonces $g(U) \subseteq V$, donde $V$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ de dimensión $n-1$. Por lo tanto $\partial(g(U)) \subseteq \overline{V} = V$ y puesto que $\operatorname{vol}(V) = 0$, se tiene que $\operatorname{vol}(g(U)) = 0 = \operatorname{vol}(\partial(g(U)))$. Se sigue que $g(U)$ es Jordan–medible y, puesto que $\det g = 0$, se tiene que $\operatorname{vol}(g(U)) = 0 = |\det g| \cdot \operatorname{vol}(U)$.

Caso 2: $g$ es no singular.

i).- Primero supongamos que $U = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ es un rectángulo cerrado y consideremos que $g$, con respecto a la base canónica, tiene como representación matricial a alguna de las siguientes:

a)

$$g = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & \ldots & . & . & . & \ldots & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & x & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & \ldots & . & . & . & \ldots & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \uparrow \\ i \end{array} \qquad \begin{array}{c} x \in \mathbb{R}, x \neq 0, \\ 1 \leq i \leq n. \end{array}$$

b)

$$
g = \begin{array}{cc}
\begin{bmatrix}
1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
. & . & \dots & . & . & . & \dots & . & . & . & \dots & . & . \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
. & . & \dots & . & . & . & \dots & . & . & . & \dots & . & . \\
0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
. & . & \dots & . & . & . & \dots & . & . & . & \dots & . & . \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1
\end{bmatrix} &
\begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \\
\begin{matrix} & & & & \uparrow & & & & \uparrow & & & & \\ & & & & i & & & & j & & & & \end{matrix} &
\end{array}
$$

$$1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq n, \quad i \neq j, \quad i < j.$$

c)

$$
g = \begin{array}{cc}
\begin{bmatrix}
1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
. & . & \dots & . & . & . & \dots & . & . & . & \dots & . & . \\
0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
. & . & \dots & . & . & . & \dots & . & . & . & \dots & . & . \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
. & . & \dots & . & . & . & \dots & . & . & . & \dots & . & . \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1
\end{bmatrix} &
\begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \\
\begin{matrix} & & & & \uparrow & & & & \uparrow & & & & \\ & & & & i & & & & j & & & & \end{matrix} &
\end{array}
$$

$$1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq n, \quad i \neq j, \quad i < j.$$

Las matrices expresadas en a), b) y c) son las matrices elementales y se obtienen de la siguiente forma:

a) En la matriz identidad $I_n$ al renglón $i$ lo multiplicamos por $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$.

b) En la matriz identidad $I_n$, permutamos los renglones $i$, $j$ con $1 \leq i < j \leq n$.

c) En la matriz identidad $I_n$, en la fila $i$, columna $j$ ($i < j$, $1 \leq i, j \leq n$) cambiamos el 0 por 1.

Ahora $\mathrm{vol}(U) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$.

En el caso a) se tiene que $\det g = x$ y

$$g(U) = [a_1, b_1] \times \dots [xa_i, xb_i] \times \dots \times [a_n, b_n] \quad \text{si } x > 0$$

y

$$g(U) = [a_1, b_1] \times \dots [xb_i, xa_i] \times \dots \times [a_n, b_n] \quad \text{si } x < 0$$

por lo que

$$\text{vol}(g(U)) = x \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i) \quad \text{si } x > 0$$

y

$$\text{vol}(g(U)) = -x \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i) \quad \text{si } x < 0.$$

Por lo tanto $\text{vol}(g(U)) = |x| \displaystyle\prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i) = |\det g| \cdot \text{vol}(U)$.

En el caso b), $\det g = -1$ y

$$g(U) = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_{i-1}, b_{i-1}] \times [a_j, b_j] \times \ [a_{i+1}, b_{i+1}] \times \cdots$$
$$\cdots \times [a_{j-1}, b_{j-1}] \times [a_i, b_i] \times \ [a_{j+1}, b_{j+1}] \times \cdots \times [a_n, b_n].$$

Por lo tanto

$$\text{vol}(g(U)) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i) = |-1| \cdot \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i) = |\det g| \cdot \text{vol}(U).$$

Por último, en el caso c), $\det g = 1$ y se tiene:

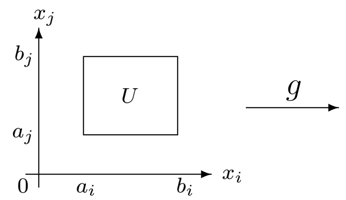
$$g(U) = \{(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + x_j, x_{i+1}, \dots x_j, \dots, x_n) \mid x_k \in [a_k, b_k], 1 \leq k \leq n\}$$
$$= A \subseteq C = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_{i-1}, b_{i-1}] \times [a_i + a_j, b_i + b_j] \times [a_{i+1}, b_{i+1}] \times \dots$$
$$\dots \times [a_j, b_j] \times \dots \times [a_n, b_n].$$

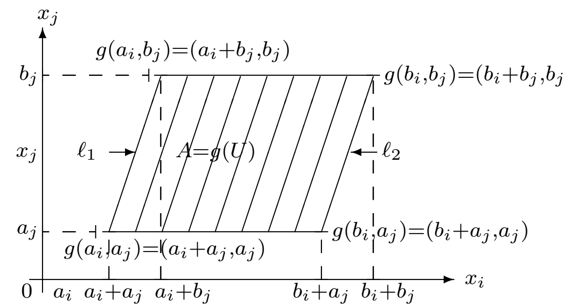
Aplicando el Teorema de Fubini, se tiene que:

$$\text{vol}(A) = \int_C \chi_A = \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_{i-1}}^{b_{i-1}} \int_{a_{i+1}}^{b_{i+1}} \cdots \int_{a_{j-1}}^{b_{j-1}} \int_{a_{j+1}}^{b_{j+1}} \cdots$$
$$\cdots \int_{a_n}^{b_n} \left( \int_{a_j}^{b_j} \int_{a_i + a_j}^{b_i + b_j} \chi_A \ dx_i dx_j \right) dx_n \dots dx_{j+1} dx_{j-1} \dots dx_{i+1} dx_{i-1} \dots dx_1.$$

Para calcular $\displaystyle\int_{a_j}^{b_j}\int_{a_i+a_j}^{b_i+b_j} \chi_A \, dx_i dx_j$, observemos que para $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in C$:

$$\chi_A(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } a_i + x_j \leq x_i \leq b_i + x_j, \; x_j \in [a_j, b_j] \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$




$$\ell_1\colon \; x_j = x_i - a_i \quad ; \quad \ell_2\colon \; x_j = x_i - b_i.$$

Por lo tanto

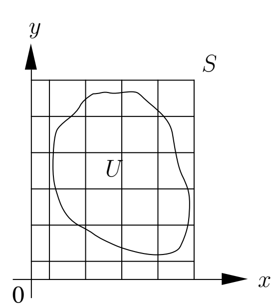
$$\int_{a_j}^{b_j}\int_{a_i+a_j}^{b_i+b_j} \chi_A \; dx_i dx_j = \int_{a_j}^{b_j}\int_{a_i+x_j}^{b_i+x_j} \; dx_i dx_j =$$

$$= \int_{a_j}^{b_j} \; [(b_i + x_j) - (a_i + x_j)] \; dx_j = (b_i - a_i) \cdot (b_j - a_j).$$

Se sigue que

$$\text{vol}(g(U)) = \text{vol}(A) = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i) = \text{vol}(U) = |\det g| \cdot \text{vol}(U).$$

ii).- Ahora sea $U$ Jordan–medible y $g$ como en a), b) ó c) de i). Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un rectángulo cerrado tal que $U \subseteq S$. Sea $\epsilon > 0$ y sea $P$ una partición de $S$ tal que:




$$S(\chi_U, P) - \text{vol}(U) < \frac{\epsilon}{2|\det g|}$$

$$\text{vol}(U) - I(\chi_U, P) < \frac{\epsilon}{2|\det g|}.$$

Sea $S_i$ un subrectángulo de $S$ determinado por $P$. Se tiene que:

$$\left.\begin{array}{lcl} M_{S_i}(\chi_U)=1 & \iff & S_i\cap U\neq\emptyset \\ \\ M_{S_i}(\chi_U)=0 & \iff & S_i\cap U=\emptyset \end{array}\right\}\Rightarrow S(\chi_U,P)=\sum_{S_i\cap U\neq\emptyset}\operatorname{vol}(S_i).$$

$$\left.\begin{array}{lcl} m_{S_i}(\chi_U)=1 & \iff & S_i\subseteq U \\ \\ m_{S_i}(\chi_U)=0 & \iff & S_i\not\subseteq U \end{array}\right\}\Rightarrow I(\chi_U,P)=\sum_{S_i\subseteq U}\operatorname{vol}(S_i).$$

Definimos: $V_\epsilon=\bigcup\limits_{S_i\subseteq U}S_i$ y $W_\epsilon=\bigcup\limits_{S_i\cap U\neq\emptyset}S_i$, donde los $S_i$ son los subrectángulos de $S$ determinados por $P$.

Por ser $g$ como en a), b) ó c) de i), la intersección de dos conjuntos $g(S_i)$ es de medida 0 y por lo tanto se tiene:

$$\operatorname{vol}(g(V_\epsilon))=\operatorname{vol}\left(\bigcup_{S_i\subseteq U}g(S_i)\right)=\sum_{S_i\subseteq U}\operatorname{vol}(g(S_i))=$$

$$=\sum_{S_i\subseteq U}|\det g|\cdot\operatorname{vol}(S_i)=|\det g|\cdot I(\chi_U,P),$$

$$\operatorname{vol}(g(W_\epsilon))=\operatorname{vol}\left(\bigcup_{S_i\cap U\neq\emptyset}g(S_i)\right)=\sum_{S_i\cap U\neq\emptyset}\operatorname{vol}(g(S_i))=$$

$$=\sum_{S_i\cap U\neq\emptyset}|\det g|\cdot\operatorname{vol}(S_i)=|\det g|\cdot S(\chi_U,P).$$

Por lo tanto:

$$\operatorname{vol}(g(W_\epsilon))-\operatorname{vol}(g(V_\epsilon))=|\det g|\,(S(\chi_U,P)-I(\chi_U,P))<\epsilon.$$

Además

$\partial(g(U))\subseteq g(W_\epsilon)-g(V_\epsilon)$ y $\operatorname{vol}(g(W_\epsilon)-g(V_\epsilon))=\operatorname{vol}(g(W_\epsilon))-\operatorname{vol}(g(V_\epsilon))<\epsilon$.

Por lo tanto $\partial(g(U))$ tiene medida 0. Se sigue que $g(U)$ es Jordan–medible y puesto que $g(V_\epsilon)\subseteq g(U)\subseteq g(W_\epsilon)$, se obtiene que

$$\operatorname{vol}(g(V_\epsilon))\leq\operatorname{vol}(g(U))\leq\operatorname{vol}(g(W_\epsilon)).$$

Entonces

$$|\det g|\cdot I(\chi_U,P)\leq\operatorname{vol}(g(U))\leq|\det g|\cdot S(\chi_U,P).$$

Por lo tanto $\operatorname{vol}(g(U))=|\det g|\cdot\operatorname{vol}(U)$.

iii).- Sea $U$ Jordan–medible y $g$ arbitrario. Entonces existen transformaciones lineales $g_1, g_2, \ldots, g_k \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de los tipos de a), b) ó c) de i) tales que $g = g_1 \circ g_2 \circ \cdots \circ g_k$ y se tiene $\det g = \prod_{i=1}^{k} \det g_i$. Por lo tanto $g(U) = (g_1 \circ g_2 \circ \cdots \circ g_{k-1})(g_k(U))$ es Jordan–medible y

$$\operatorname{vol}(g(U)) = \operatorname{vol}(g_1 \circ \cdots \circ g_{k-1} \circ g_k)(U) = |\det(g_1 \circ \cdots \circ g_{k-1})| \cdot (g_k(U)) =$$

$$= |\det(g_1 \circ \cdots \circ g_{k-1})| \cdot |\det g_k| \cdot \operatorname{vol}(U) = |\det g| \cdot \operatorname{vol}(U). \qquad ❏$$

**Teorema 5.3.2 (Cambio de Variable)** *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y sea $g \colon A \to \mathbb{R}^n$ una función inyectiva y de clase $C^1$ tal que* det $g'(\vec{x}) \neq 0 \ \forall \ \vec{x} \in A$. *Si $f \colon g(A) \to \mathbb{R}$ es una función integrable, entonces*

$$\int_{g(A)} f = \int_A (f \circ g) \cdot |\operatorname{deg} \ g'|.$$

*Demostración*. La demostración la realizaremos haciendo algunas reducciones, pero antes observemos que si $\vec{x} \in g(A)$, entonces existe $\vec{a} \in A$ tal que $\vec{x} = g(\vec{a})$ y, puesto que, det $g'(\vec{a}) \neq 0$ y $g$ es de clase $C^1$, se tiene que, por el Teorema de la función inversa, existen conjuntos abiertos $U$ y $V$ con $\vec{a} \in U$, $\vec{x} \in V$, tales que $g \colon U \to V$ es biyectiva y su inversa es de clase $C^1$. Por lo tanto se tiene que $V \subseteq g(A)$ y se sigue que $g(A)$ es un conjunto abierto.

Paso 1.

*Supongamos que existe un recubrimiento admisible $\mathcal{O}$ de $A$ tal que para cada $U \in \mathcal{O}$ y $f$ integrable, se tiene:*

$$\int_{g(U)} f = \int_U (f \circ g) \cdot |\det \ g'|.$$

*Entonces el teorema es cierto para $A$.*

*Demostración* (Paso 1). Se tiene que $\{g(U)\}_{U \in \mathcal{O}}$ es un recubrimiento abierto de $g(A)$ pues para toda $U \in \mathcal{O}$, $g(U)$ es un conjunto abierto. Consideremos $\Phi$ una partición de unidad de $g(A)$ subordinada a la cubierta $\{g(U) \mid U \in \mathcal{O}\}$.

Si $\varphi = 0$ fuera de $g(U)$, puesto que $g$ es inyectiva, tendremos que si $\vec{x} \notin U$, entonces $g(\vec{x}) \notin g(U)$. Por lo tanto $(\varphi \cdot f) \circ g(\vec{x}) = \varphi(g(\vec{x})) \cdot f(g(\vec{x})) = 0$. Se sigue que $(\varphi \cdot f) \circ g = 0$ fuera del conjunto $U$. Por tanto la igualdad

$$\int_{g(U)} \varphi \cdot f = \int_U [(\varphi \cdot f) \circ g] \cdot |\det \ g'|$$

se puede escribir:

$$\int_{g(A)} \varphi \cdot f = \int_A [(\varphi \cdot f) \circ g] \cdot |\det \ g'|$$

y por lo tanto:

$$\int_{g(A)} f = \sum_{\varphi\in\Phi} \int_{g(A)} \varphi \cdot f = \sum_{\varphi\in\Phi} \int_A [(\varphi \cdot f) \circ g] \cdot |\det\ g'| =$$

$$= \sum_{\varphi\in\Phi} \int_A (\varphi \circ g) \cdot (f \circ g) \cdot |\det\ g'| = \int_A (f \circ g) \cdot |\det\ g'|$$

pues $\{\varphi \circ g \mid \varphi \in \Phi\}$ es una partición de unidad subordinada a $\mathcal{O}$ (ejercicio). ✰

**Observación 5.3.3** Este paso 1 se puede dar considerando $\mathcal{O}$ una cubierta admisible de $g(A)$. Se tiene en este caso que $\mathcal{O}' = \{g^{-1}(V) \mid V \in \mathcal{O}\}$ es una cubierta abierta de $A$ y

$$\int_{g(g^{-1}(V))} f = \int_V f = \int_{g^{-1}(V)} (f \circ g) \cdot |\det\ g'|$$

y consideremos $\Phi$ una partición de unidad de $g(A)$ subordinada a $\mathcal{O}$. Por lo tanto:

$$\int_{g(A)} f = \sum_{\varphi\in\Phi} \int_{g(A)} \varphi \cdot f = \sum_{\varphi\in\Phi} \int_A [(\varphi \cdot f) \circ g] \cdot |\det\ g'| =$$

$$= \sum_{\varphi\in\Phi} \int_A (\varphi \circ g) \cdot (f \circ g) \cdot |\det\ g'| = \int_A (f \circ g) \cdot |\det\ g'|$$

pues $\Phi' = \{\varphi \circ g \mid \varphi \in \Phi\}$ es una partición de unidad de $A$ subordinada a $\mathcal{O}'$.

Paso 2.

*Si para $f = 1$ el teorema se cumple, entonces el teorema es cierto en general.*

*Demostración* (Paso 2). Supongamos cierto el teorema para $f = 1$, es decir que tendremos: $\int_{g(A)} 1 = \int_A |\det\ g'|$. Por lo tanto para toda $c \in \mathbb{R}$,

$$\int_{g(A)} c = c\int_{g(A)} 1 = c\int_A |\det\ g'| = \int_A c \cdot |\det\ g'|,$$

es decir el teorema será cierto también para $f = c =$ constante.

Sea $f$ una función cualquiera que sea integrable en $g(A)$.

Sea $V$ un rectángulo cerrado en $\mathbb{R}^n$ contenido en $g(A)$ y sea $P$ una partición de $V$. Para cada subrectángulo $S$ determinado por $P$, sean $f_S$ y $f'_S$ las funciones constantes (sobre $S$), definidas por:

$$f_S(\vec{x}) = m_S(f) = \inf\{f(\vec{x}) \mid \vec{x} \in S\} \ \ \forall\, \vec{x} \in S,$$

$$f'_S(\vec{x}) = M_S(f) = \sup\{f(\vec{x}) \mid \vec{x} \in S\} \ \ \forall\, \vec{x} \in S.$$

Entonces:

$$I(f,P)=\sum_S m_S(f)\cdot\operatorname{vol}(S)=\sum_S\int_S f_S=\sum_S\int_{g^{-1}(\overset{\circ}{S})}(f_S\circ g)\cdot|\det\ g'|\leq$$

$$\leq\sum_S\int_{g^{-1}(\overset{\circ}{S})}(f\circ g)\cdot|\det\ g'|=\int_{g^{-1}(V)}(f\circ g)\cdot|\det\ g'|.$$

Por lo tanto

$$\int_V f\leq\int_{g^{-1}(V)}(f\circ g)\cdot|\det\ g'|$$

y

$$S(f,P)=\sum_S M_S(f)\cdot\operatorname{vol}(S)=\sum_S\int_{\overset{\circ}{S}} f'_S=\sum_S\int_{g^{-1}(\overset{\circ}{S})}(f'_S\circ g)\cdot|\det\ g'|\geq$$

$$\geq\sum_S\int_{g^{-1}(\overset{\circ}{S})}(f\circ g)\cdot|\det\ g'|=\int_{g^{-1}(V)}(f\circ g)\cdot|\det\ g'|.$$

Por lo tanto

$$\int_V f\geq\int_{g^{-1}(V)}(f\circ g)\cdot|\det\ g'|.$$

Se sigue que

$$\int_V f=\int_{g^{-1}(V)}(f\circ g)\cdot|\det\ g'|.$$

Sea $U=g^{-1}(V)$, $g(U)=V$. Entonces

$$\int_{g(U)} f=\int_U (f\circ g)\cdot|\det\ g'|,$$

con lo cual, aplicando el paso 1, implica que el teorema se cumple para $f$ una función arbitraria. ✰

<u>Paso 3.</u>

*Si el teorema es cierto para $g\colon A\to\mathbb{R}^n$, $h\colon B\to\mathbb{R}^n$, donde $A,B\subseteq\mathbb{R}^n$ son conjuntos abiertos, $g$, $h$ son funciones de clase $C^1$ e inyectivas y $g(A)\subseteq B$, entonces el teorema es cierto para $h\circ g\colon A\to\mathbb{R}^n$.*

<u>*Demostración*</u> (Paso 3). Se tiene

$$\int_{(h\circ g)(A)} f=\int_{h(g(A))} f=\int_{g(A)}(f\circ h)\cdot|\det\ h'|=\int_A[(f\circ h)\cdot|\det\ h'|]\circ g\cdot[|\det\ g'|]=$$

$$=\int_A (f\circ h\circ g)\cdot\{|\det\ h'|\circ g\}\cdot|\det\ g'|=\int_A[f\circ(h\circ g)]\cdot|\det\ (h\circ g)'|,$$

pues $|\det\ (h\circ g)'|=[|\det\ h'|\circ g]\cdot|\det\ g'|$. ✰

Paso 4.

*El teorema es cierto si $g$ es una transformación lineal.*

Demostración (Paso 4). Por el paso 2, es suficiente verlo para $f = 1$, es decir que

$$\int_{g(A)} 1 = \int_A |\det\ g'|,$$

pero, por el paso 1, es suficiente verificar esta igualdad sobre un rectángulo abierto $U$. Esto es, necesitamos verificar la igualdad:

$$\operatorname{vol}(g(U)) = \int_{g(U)} 1 = \int_U |\det\ g'| = |\det\ g'| \int_U 1 = |\det\ g'| \cdot \operatorname{vol}(U)$$

(pues $g' = g$ y $|\det\ g'| = |\det\ g| =$ constante). La igualdad se sigue del lema anterior y del hecho de que $g' = g$. ✰

Paso 5.

*El teorema es cierto en general.*

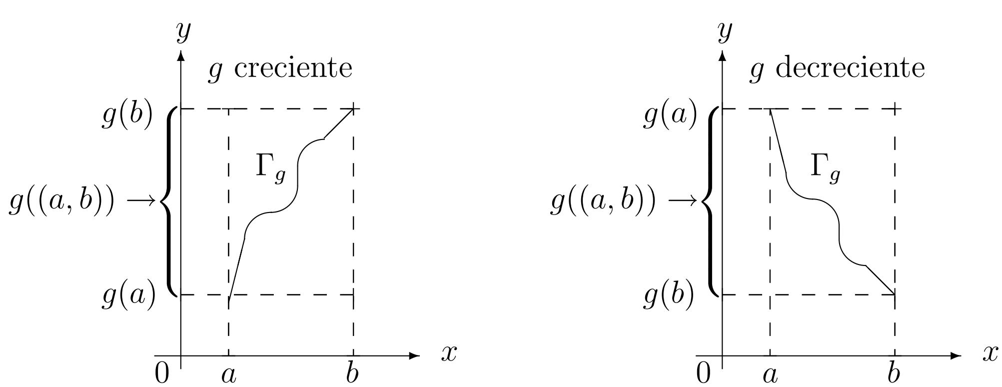
Demostración (Paso 5). Por el paso 2, es suficiente hacerlo para la función $f = 1$. Esto lo haremos por inducción en $n$.

Sea $n = 1$. Puesto que $f = 1$, se tiene, en particular, que $f$ es continua. Por el Paso 1, es suficiente probar el resultado para un intervalo abierto $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ arbitrario, $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$. Necesitamos verificar la igualdad:

$$\int_{g((a,b))} 1 = \int_{(a,b)} |g'|.$$

Ahora bien, $g$ es una función inyectiva y de clase $C^1$, por lo que necesariamente $g$ es o bien creciente o bien decreciente. Si $g$ es creciente, entonces $g'(x) > 0\ \forall\, x \in (a, b)$. Por lo tanto

$$\int_{(a,b)} |g'| = \int_a^b g' = g(b) - g(a) = \int_{g(a)}^{g(b)} 1 = \int_{(g(a),g(b))} 1 = \int_{g((a,b))} 1.$$



Si $g$ es decreciente, entonces $g'(x) < 0 \; \forall \; x \in (a, b)$, por lo tanto

$$\int_{(a,b)} |g'| = -\int_a^b g' = g(a) - g(b) = \int_{g(b)}^{g(a)} 1 = \int_{(g(b),g(a))} 1 = \int_{g((a,b))} 1.$$

Por tanto tenemos $\displaystyle\int_{g((a,b))} = \int_{(a,b)} |g'|$.

Suponemos ahora que el resultado se cumple para $n-1$ y lo probaremos para $n$.

Para cada $\vec{a} \in A$ necesitamos hallar un conjunto abierto $U$, con $\vec{a} \in U \subseteq A$ de tal suerte que el teorema sea cierto en $U$ (Paso 1).

Ahora si $T = Dg(\vec{a}) = g'(\vec{a})\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, el teorema es cierto para $T$ por el Paso 4. Además $(T^{-1} \circ g)'(\vec{a}) = (T^{-1})'(g(\vec{a}) \circ g'(\vec{a}) = T^{-1} \circ T = I_{\mathbb{R}^n}$. Así tenemos que si probamos el teorema para $T^{-1} \circ g$, el teorema será cierto para $T \circ (T^{-1} \circ g) = g$, esto es, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $g'(\vec{a}) = I_n$.

Sea $h\colon A \to \mathbb{R}^n$ dada por $h(\vec{x}) = (g_1(\vec{x}), \ldots, g_{n-1}(\vec{x}), x_n)$ con $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in A$. Entonces si $h = (h_1, \ldots, h_{n-1}, h_n)$, se tiene que $h_i = g_i$, $1 \le i \le n-1$ y $h_n(\vec{x}) = x_n$, por lo tanto

$$\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(\vec{a}) = \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\vec{a}) = \delta_{ij}, \; 1 \le i \le n-1, \; 1 \le j \le n$$

y

$$\frac{\partial h_n}{\partial x_j}(\vec{a}) = \delta_{nj}, \; 1 \le j \le n.$$

Por lo tanto $h'(\vec{a}) = I_n$.

Además tenemos que existe una vecindad abierta $U'$ de $\vec{a}$ tal que $U' \subseteq A$ y $h$ es inyectiva, pues de lo contrario, para todo conjunto abierto $U$ con $\vec{a} \in U$ existiría un elemento $\vec{x}_U \in U$, $\vec{x}_U \neq \vec{a}$ tal que $h(\vec{x}_U) = h(\vec{a})$. De esto obtenemos una sucesión $\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A$ tal que $\vec{x}_n \neq \vec{a} \; \forall \; n \in \mathbb{N}$ y $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \vec{x}_n = \vec{a}$ con $h(\vec{x}_n) = h(\vec{a})$. Así, tenemos que

$$0 = \lim_{n\to\infty} \frac{\|h(\vec{x}_n) - h(\vec{a}) - h'(\vec{a})(\vec{x}_n - \vec{a})\|}{\|\vec{x}_n - \vec{a}\|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\|\vec{x}_n - \vec{a}\|}{\|\vec{x}_n - \vec{a}\|} = 1,$$

lo cual es absurdo.

Por ser $h$ de clase $C^1$, podemos elegir $U'$ tal que $\det\, h'(\vec{x}) \neq 0 \; \forall \; \vec{x} \in U'$.

Ahora sea $k\colon h(U') \to \mathbb{R}^n$ dada por $k(\vec{x}) = k(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_{n-1}, g_n(h^{-1}(\vec{x})))$.

Se tiene que para toda $\vec{x} \in U'$:

$$(k \circ h)(\vec{x}) = k(h(\vec{x})) = (k_1(h(\vec{x})), \ldots, k_n((h(\vec{x})))) =$$

$$= (h_1(\vec{x}), \ldots, h_{n-1}(\vec{x}), g_n(h^{-1}(h(\vec{x})))) = (g_1(\vec{x}), \ldots, g_{n-1}(\vec{x}), g_n(\vec{x})) = g(\vec{x}).$$

Por lo tanto $k \circ h = g$ y $h$ es del mismo tipo que $g$.

Veamos que $k$ también es del mismo tipo de $g$. Se tiene que:

$$(k \circ h)'(\vec{a}) = k'(h(\vec{a})) \circ h'(\vec{a}) = k'(h(\vec{a})) \circ I = k'(h(\vec{a})) = g'(\vec{a}) = I,$$

por lo que $h'(h(\vec{a})) = I$.

Existe un conjunto abierto $V$ que contiene a $h(\vec{a}) \in V \subseteq h(U')$ tal que $k$ es inyectiva en $V$ y tal que $\det\ k'(\vec{x}) \neq 0\ \forall\ \vec{x} \in V$.

Sea $U = h^{-1}(V) \subseteq U'$ y se tiene que $g = k \circ h$, $h\colon U \to \mathbb{R}^n$, $k\colon V \to \mathbb{R}^n$, $h(U) = h(h^{-1}(V)) \subseteq V$. Por el Paso 3, es suficiente probar el teorema para $h$ y para $k$ (la idea es que, tanto $h$ como $k$, cambian menos de $n$ coordenadas).

Sea $W \subseteq U$ un rectángulo cerrado, $W = D \times [a_n, b_n]$, con $D$ un rectángulo cerrado en $\mathbb{R}^{n-1}$.

Ahora bien, $h(W) = \{h(\vec{x}) \mid \vec{x} \in W\} = \{(g_1(\vec{x}), \dots, g_{n-1}(\vec{x}), x_n \mid \vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in W\} = \displaystyle\bigcup_{x_n \in [a_n, b_n]} h(D \times \{x_n\})$.

Sea $C$ un rectángulo que contiene a $h(W)$, con $C$ de la forma $C = C' \times [a_n, b_n]$. Se tiene:

$$\int_{h(W)} 1 = \int_C \chi_{h(W)} = \int_{[a_n,b_n]} \left( \int_{C'} \chi_{h(W)}(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_{n-1} \right) dx_n$$

(Teorema de Fubini).

Ahora

$$\chi_{h(W)}(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \in h(D \times \{x_n\}) \\ \\ 0 & \text{si} \quad (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \notin h(D \times \{x_n\}) \end{cases}.$$

Por lo tanto

$$\int_{h(W)} 1 = \int_{a_n}^{b_n} \left( \int_{h(D \times \{x_n\})} dx_1 \cdots dx_{n-1} \right) dx_n =$$

$$= \int_{[a_n,b_n]} \left( \int_{h(D \times \{x_n\})} dx_1 \cdots dx_{n-1} \right) dx_n.$$

Fijemos $x_n \in [a_n, b_n]$ y sea $h_{x_n}\colon D \to \mathbb{R}^{n-1}$ dada por:

$$h_{x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}) = (g_1(\vec{x}), \dots, g_{n-1}(\vec{x})) \quad \text{con} \quad \vec{x} = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n).$$

Se tiene que $h_{x_n}(D) \times \{x_n\} = h(D \times \{x_n\})$. Entonces $h_{x_n}$ es inyectiva puesto que $h$ lo es y $\det\ (h_{x_n})'(x_1, \dots, x_n) = \det\ h'(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \neq 0$. Se tiene que

$$\int_{h(D \times \{x_n\})} dx_1 \cdots dx_{n-1} = \int_{h_{x_n}(D) \times \{x_n\}} dx_1 \cdots dx_{n-1}.$$

Puesto que estamos suponiendo, por hipótesis de inducción, que el teorema se cumple para $(n-1)$ variables, se tiene:

$$\int_{h(W)} 1 = \int_{[a_n,b_n]} \left( \int_{h_{x_n}(D) \times \{x_n\}} 1 \cdot dx_1 \cdots dx_{n-1} \right) dx_n =$$

$$= \int_{[a_n,b_n]} \left( \int_D |\det\ (h_{x_n})'(x_1, \ldots, x_{n-1})|\ dx_1 \cdots dx_{n-1} \right)\ dx_n =$$

$$= \int_{[a_n,b_n]} \left( \int_D |\det\ h'(x_1, \ldots, x_n)|\ dx_1 \cdots dx_{n-1} \right)\ dx_n = \int_W |\det\ h'|.$$

Ahora probaremos lo mismo para la función $k$.

Sea $W$ un rectángulo cerrado contenido en $V$, $W = D \times [a_n, b_n]$ con $D$ un rectángulo cerrado en $\mathbb{R}^{n-1}$. Se tiene

$$k(W) = k\left( \bigcup_{x_n \in [a_n,b_n]} D \times \{x_n\} \right) = \bigcup_{x_n \in [a_n,b_n]} k(D \times \{x_n\}) = D \times [a_n', b_n'] \,.$$

Por lo tanto

$$\int_{k(W)} 1 = \left( \int_D \left( \int_{[a_n',b_n']} dx_n \right) dx_1 \cdots dx_{n-1} \right).$$

Fijemos $\vec{y} = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in D$ y sea $k_{\vec{y}}\colon [a_n, b_n] \to [a_n', b_n']$ dada por $k_{\vec{y}}(x_n) = g_n(h^{-1}(\vec{y}, x_n)) = g_n(h^{-1}(\vec{x}))$ con $\vec{x} = (\vec{y}, x_n)$.

Se tiene: $|k_{\vec{y}}'(x_n)| = \left| \dfrac{\partial}{\partial x_n}(g \circ h^{-1})(\vec{x}) \right| = |\det\ k'(\vec{x})|$. Por lo tanto

$$\int_{k(W)} 1 = \int_D \left( \int_{[a_n',b_n']} dx_n \right)\ dx_1 \ldots dx_{n-1} = \int_D \left( \int_{[a_n,b_n]} |k_{\vec{y}}'(x_n)|\ dx_n \right)\ dx_1 \ldots dx_{n-1} =$$

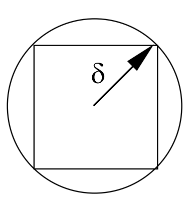
$$= \int_D \left( \int_{a_n}^{b_n} |\det\ k'(\vec{x})| dx_n \right)\ dx_1 \ldots dx_{n-1} = \int_{D \times [a_n . b_n]} |\det\ k'(\vec{x})| = \int_W |\det\ k'|.$$

☆ ❑

Ahora damos un teorema que nos servirá para poder quitar hipótesis en el Teorema de Cambio de Variable.

**Teorema 5.3.4 (Sard)** *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y sea $g\colon A \to \mathbb{R}^n$ una función de clase $C^1$. Sea $B = \{\vec{x} \in A \mid \det\ g'(\vec{x}) = 0\}$. Entonces $g(B)$ es un conjunto de medida 0.*

*Demostración.* Sea $\epsilon > 0$ y consideremos $U \subseteq A$ un rectángulo cerrado tal que todos los lados de $U$ tengan cierta longitud $\ell$. Puesto que $U$ es un conjunto compacto y $D_j g_i = \dfrac{\partial g_i}{\partial x_j}\colon U \to \mathbb{R}$ es una función continua para toda $1 \leq i, j \leq n$, se tiene que $D_j g_i$ es uniformemente continua para toda $1 \leq i, j \leq n$, por lo que existe $\delta > 0$ tal que si $\vec{x}, \vec{y} \in U$




y $\|\vec{x} - \vec{y}\| < \delta \Rightarrow |D_j g_i(\vec{x}) - D_j g_i(\vec{y})| < \epsilon/n^2$.

Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{n\ell}{N} < \delta$.

Dividimos a $U$ en $N^n$ rectángulos cerrados con cada lado de longitud $\ell/N$. Sea $S$ uno de estos rectángulos y sean $\vec{x}, \vec{y} \in S$. Entonces

$$\|\vec{x}-\vec{y}\| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} \ell/N = n\ell/N < \delta,$$

por lo que $|D_j g_i(\vec{x}) - D_j g_i(\vec{y})| < \epsilon/n^2$.

Sea $\vec{x} \in S$ y definimos $f\colon A \to \mathbb{R}^n$ por $f(\vec{z}) = Dg(\vec{x})(\vec{z}) - g(\vec{z})$. Entonces si $\vec{z} \in S$ se tiene:

$$|D_j f_i(\vec{z})| = |D_j g_i(\vec{x}) - D_j g_i(\vec{z})| < \epsilon/n^2 \ \forall\ 1 \leq i, j \leq n.$$

Desarrollando cada $f_i$ $(1 \leq i \leq n)$ en su polinomio de Taylor de grado 1, se tiene:

$$f_i(\vec{y}) = f_i(\vec{x}) + Df_i(\vec{c})(\vec{y}-\vec{x})$$

con $\vec{c} \in [\vec{x}, \vec{y}]$ por lo que

$$|f_i(\vec{y}) - f_i(\vec{x})| = |Df_i(\vec{c})(\vec{y}-\vec{x})| = \left| \sum_{j=1}^{n} D_j f_i(\vec{c}) \cdot (y_i - x_i) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} |D_j f_i(\vec{c})|\ |y_i - x_i| \leq \sum_{j=1}^{n} \frac{\epsilon}{n^2}\ \|\vec{x}-\vec{y}\| = \frac{\epsilon}{n}\ \|\vec{x}-\vec{y}\|.$$

Se sigue que

$$\|f(\vec{x}) - f(\vec{y})\| \leq \sum_{i=1}^{n} |f_i(\vec{x}) - f_i(\vec{y})| \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\epsilon}{n}\ \|\vec{x}-\vec{y}\| = \epsilon\ \|\vec{x}-\vec{y}\|.$$

Así, si $\vec{x}, \vec{y} \in S$,

$$\|Dg(\vec{x})(\vec{y}-\vec{x}) - (g(\vec{y}) - g(\vec{x}))\| = \|f(\vec{y}) - f(\vec{x})\| \leq \epsilon \|\vec{x}-\vec{y}\| =$$

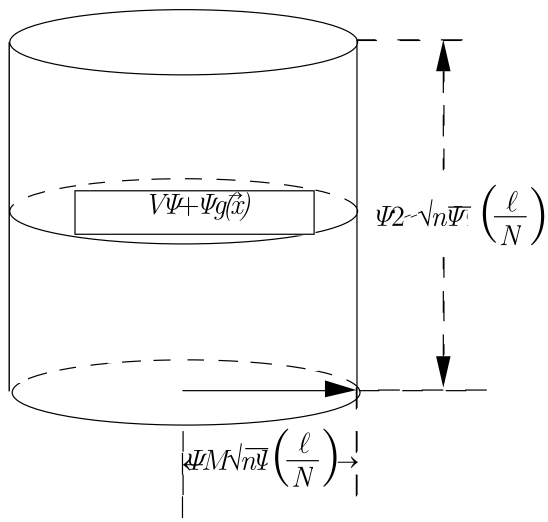
$$= \epsilon\ \left[\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right]^{1/2} \leq \epsilon\ \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\ell^2}{N^2}\right]^{1/2} = \epsilon\ \sqrt{n}\ \frac{\ell}{N}.$$

Ahora si $S \cap B \neq \emptyset$, elegimos $\vec{x} \in S \cap B$ y se tiene que det $g'(\vec{x}) = 0$, lo cual significa que $Dg(\vec{x})$ es singular. Entonces existe un subespacio $V$ de $\mathbb{R}^n$ de dimensión $(n-1)$ tal que $T = \{Dg(\vec{x})(\vec{y}-\vec{x}) \mid \vec{y} \in S\} \subseteq V$.

Por lo tanto se tiene que si $R = \{g(\vec{y}) - g(\vec{x}) \mid \vec{y} \in S\}$, entonces dist $(R, V) = \inf\{\|\vec{r} - \vec{v}\| \mid \vec{r} \in R, \vec{v} \in V\} \leq \epsilon\ \sqrt{n}\ (\ell/N)$. Se sigue que $R + g(\vec{x}) = \{g(\vec{y}) \mid \vec{y} \in S\}$ y dist $(R + g(\vec{x}), V + g(\vec{x})) =$ dist $(R, V) \leq \epsilon\ \sqrt{n}\ (\ell/N)$.

Repitiendo lo hecho para $f$ con la función $g$, obtenemos $M > 0$ tal que $\|g(\vec{y}) - g(\vec{x})\| \leq M\|\vec{x}-\vec{y}\| \leq M\sqrt{n}\ (\ell/N)\ \forall\ \vec{x}, \vec{y} \in S$.

Así, si $S \cap B \neq \emptyset$, el conjunto $R + g(\vec{x})$ está contenido en un "cilindro" de base



"circular″ de radio $M\sqrt{n}\ (\ell/N)$ y altura $2\,\epsilon\,\sqrt{n}\ (\ell/N)$, es decir la base es una esfera $(n-1)-$dimensional de radio $M\sqrt{n}\ (\ell/N)$.

Bajo una rotación podemos considerar que la esfera $(n-1)$-dimensional está contenida en $\mathbb{R}^{n-1}\times\{0\}$ y tendrá volumen menor o igual a $\left[2M\sqrt{n}\ \left(\frac{\ell}{N}\right)\right]^{n-1}$ y por ende, el cilindro tendrá volumen menor o igual a

$$\left[2M\sqrt{n}\ \left(\frac{\ell}{N}\right)\right]^{n-1}\cdot 2\epsilon\sqrt{n}\ \left(\frac{\ell}{N}\right) = 2^n M^{n-1}\sqrt{n^n}\left(\frac{\ell}{n}\right)^n\cdot\epsilon = c\cdot\left(\frac{\ell}{N}\right)^n\cdot\epsilon,$$

donde $c = 2^n M^{n-1}\sqrt{n^n} =$ constante.

Se sigue que $g(U\cap B)$ está contenido en un conjunto de volumen menor a $N^n\cdot c\cdot\left(\frac{\ell}{N}\right)^n\cdot\epsilon = c\cdot\ell^n\cdot\epsilon\ (\forall\ \epsilon>0)$. Por lo tanto se tiene $\operatorname{vol}(g(U\cap B))=0$, es decir $g(U\cap B)$ es de medida 0 y puesto que $A$ se puede cubrir con una cantidad numerable de estos rectángulos $U$, se tiene que $g(B)$ está contenido en una cantidad a lo más numerable de conjuntos de medida 0, por lo que $g(B)$ es de medida 0. ❑

**Corolario 5.3.5** *En el Teorema de Cambio de Variable, se puede quitar la hipótesis de que* $\det\ g'(\vec{x})\neq 0$.

*Demostración*. Sea $B=\{\vec{x}\in A\mid \det\ g'(\vec{x})=0\}$. $B$ es un conjunto cerrado pues tanto $g'$ como det son funciones continuas y $B=(\det\circ g)^{-1}(\{0\})$. Entonces el conjunto $A\setminus B$ es abierto así como el conjunto $g(A\setminus B)$. Además, $g(B)$ es un conjunto de medida 0 y por lo tanto:

$$\int_{g(B)} f = 0 \ \text{ y } \ \int_B (f\circ g)|\det\ g'| = \int_B 0 = 0.$$

Se sigue que:

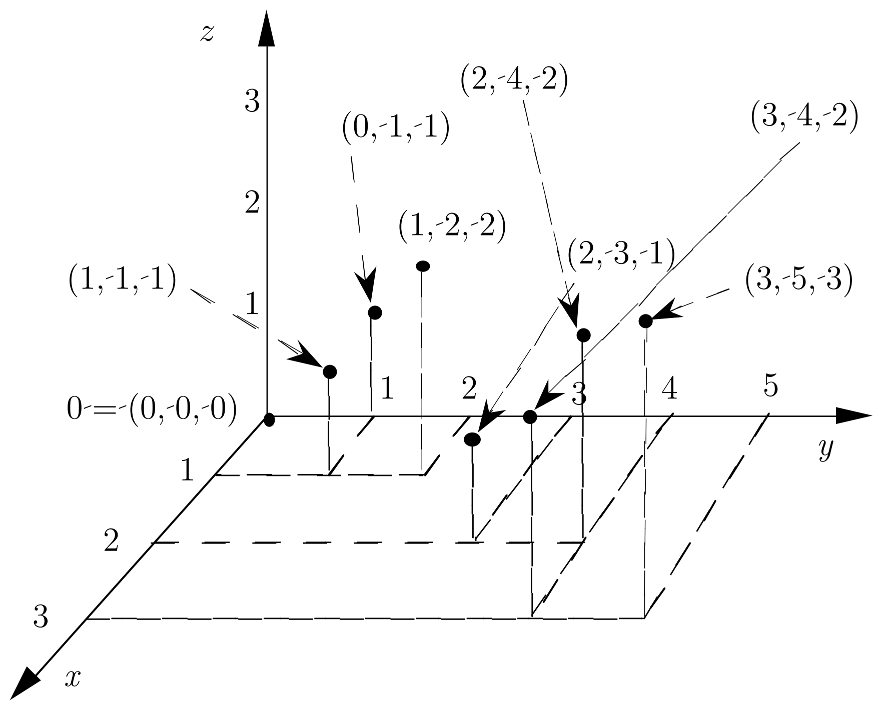
$$\int_{g(A)} f = \int_{g(A\setminus B)} f + \int_{g(B)} f = \int_{g(A\setminus B)} f = \int_{A\setminus B} (f\circ g)|\det\ g'| =$$

$$= \int_{A\setminus B} (f\circ g)|\det\ g'| + \int_B (f\circ g)|\det\ g'| = \int_A (f\circ g)|\det\ g'|. \qquad ❑$$

**Ejemplos 5.3.6**

(1).- Determinar cual es el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $(1,1,1)$, $(2,3,1)$ y $(0,1,1)$ en $\mathbb{R}^3$.

<u>Solución.</u>




El paralelepípedo buscado $P$, está determinado por los puntos:

$$\begin{aligned}
&(0,0,0),(1,1,1),(2,3,1),(0,1,1),\\
&(1,1,1)+(2,3,1)=(3,4,2),\\
&(1,1,1)+(0,1,1)=(1,2,2),\\
&(2,3,1)+(0,1,1)=(2,4,2),\\
&(1,1,1)+(2,3,1)+(0,1,1)=(3,5,3).
\end{aligned}$$

Sea $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por:

$$T(1,0,0)=(1,1,1) \ \ ; \ \ T(0,1,0)=(2,3,1) \ \ ; \ \ T(0,0,1)=(0,1,1).$$

Sea $U$ es el paralelepípedo en $\mathbb{R}^3$ expandido por los vectores $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$. Entonces $U=[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$ y se tiene que $P=T(U)$. Por lo tanto

$$\mathrm{vol}(P)=\mathrm{vol}(T(U))=|\det\ T|\cdot \mathrm{vol}(U)=|\det\ T|\cdot 1=|\det\ T|.$$

Ahora, con respecto a la base canónica, $T$ tiene representación matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y por lo tanto $\det\ T = 3 + 2 - 2 - 1 = 2$, de donde se sigue que $\mathrm{vol}(P) = |\det\ T| = |2| = 2$.

(2).- Evaluar $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 (x^4 - y^4)\ dxdy$ usando el cambio de variable, $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$.

<u>Solución.</u> Sea $g(x, y) = (u, v) = (x^2 - y^2, 2xy)$. Se tiene que para $x \geq 0$, $y \geq 0$, $g$ es inyectiva y

$$Dg(x, y) = \begin{bmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto $\det\ g'(x, y) = 4(x^2 + y^2)$.

Ahora, se tiene que

$$x^4 - y^4 = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) = \frac{x^2 - y^2}{4}(4(x^2 + y^2)) = (f \circ g)(x, y)|\det\ g'(x, y)|,$$

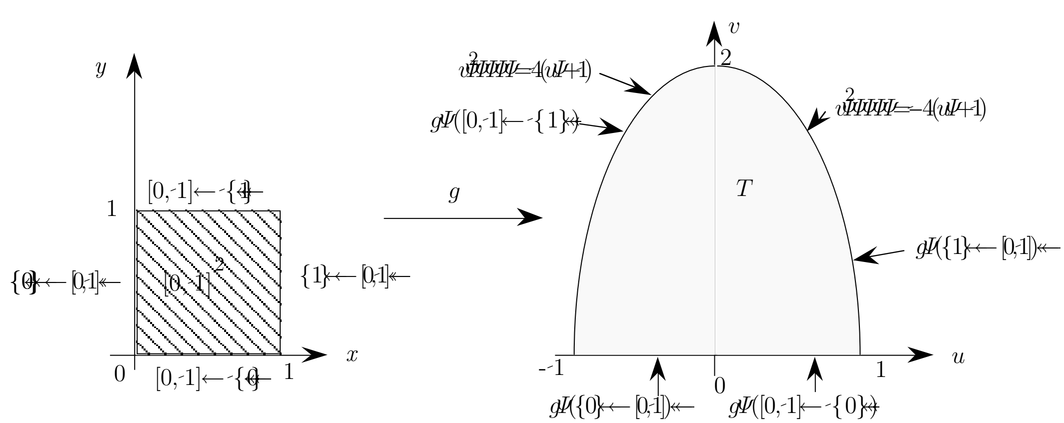
es decir

$$(f \circ g)(x, y) = f(x^2 - y^2, 2xy) = \frac{x^2 - y^2}{4}.$$

Definimos $f(u, v) = \dfrac{u}{4}$.

Se tiene

$$\int_{[0,1]^2} (f \circ g)|\det\ g'| = \int_0^1 \int_0^1 (x^4 - y^4)\ dxdy = \int_{g([0,1]^2)} f = \int\int_T \frac{u}{4}\ dudv.$$



Ahora:
$$g(x,b)=(x^2,0),\ 0\le x\le 1\Rightarrow 0\le x^2\le 1,$$
por lo que
$$g([0,1]\times\{0\})=[0,1]\times\{0\};$$
$$g(x,1)=(x^2-1,2x)=(u,v),\ 0\le x\le 1\Rightarrow 0\le 2x\le 2,$$
de donde
$$0\le v\le 2 \text{ y } v^2=4x^2,\ u=x^2-1\Rightarrow x^2=u+1.$$
Por lo tanto $v^2=4(u+1)$;
$$g(0,y)=(-y^2,0),\ 0\le y\le 1\Rightarrow -1\le y^2\le 0.$$
Entonces
$$g(\{0\}\times[0,1])=[-1,0]\times\{0\},$$
$$g(1,y)=(1-y^2,2y)=(u,v),\ 0\le y\le 1\Rightarrow 0\le 2y\le 2,$$
por lo tanto
$$0\le v\le 2 \text{ y } v^2=4y^2,\ u=1-y^2.$$
Por lo tanto
$$y^2=1-u\Rightarrow v^2=4(1-u)=-4(u-1).$$
Entonces se obtiene que
$$T=g\left([0,1]^2\right)=\left\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le v\le 2, \frac{v^2}{4}-1\le u\le 1-\frac{v^2}{4}\right\}.$$
Por lo tanto
$$\int_0^1\int_0^1 (x^4-y^4)\ dxdy=\int_0^2\int_{\frac{v^2}{4}-1}^{1-\frac{v^2}{4}}\frac{u}{4}\ dudv=\int_0^2\ \left[\frac{u^2}{8}\right]_{\frac{v^2}{4}-1}^{1-\frac{v^2}{4}}\ dv=$$
$$=\frac{1}{8}\int_0^2\ \left\{\left(1-\frac{v^2}{4}\right)^2-\left(\frac{v^2}{4}-1\right)^2\right\}\ dv=\boxed{0}.$$

(3).- Sea $S$ el rectángulo acotado por los ejes $x$ y $y$ y la línea $x+y=2$. Calculemos
$$\int\int_S e^{\frac{y-x}{y+x}}\ dxdy.$$
Sea $g(x,y)=(u,v)=(y-x,y+x)$, $\det\ g'(x,y)=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-2.$

Se tiene

$$e^{\frac{y-x}{y+x}} = \frac{e^{\frac{y-x}{y+x}}}{2} \cdot (2) = (f \circ g)(x,y) \cdot |\det\ g'(x,y)|.$$

Por lo tanto

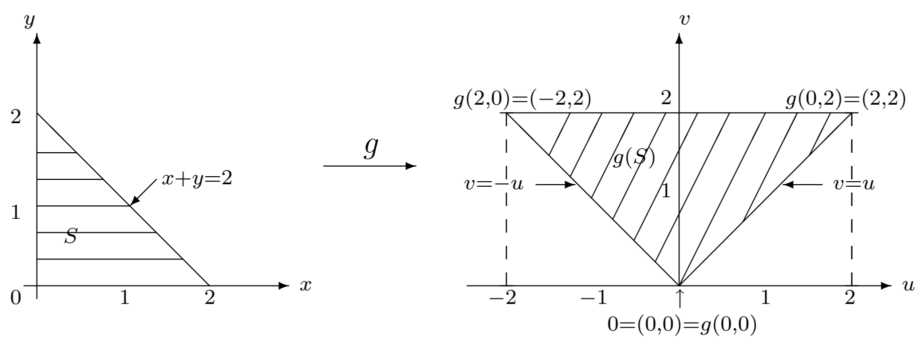
$$(f \circ g)(x,y) = f(y-x, y+x) = \frac{e^{\frac{y-x}{y+x}}}{2}.$$

Entonces $f(u,v) = \dfrac{1}{2}e^{u/v}$. Además $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una función inyectiva.

Por lo tanto

$$\int\int_S e^{\frac{y-x}{y+x}}\ dxdy = \int\int_S (f \circ g) \cdot |\det\ g'| = \int\int_{g(S)} f.$$

Se tiene que $g$ es la transformación lineal y $g(0,0) = (0,0)$, $g(2,0) = (-2,2)$, $g(0,2) = (2,2)$. Por lo tanto $g(S) = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq v \leq 2, -v \leq u \leq v\}$.




Se tiene:

$$\int\int_S e^{\frac{y-x}{y+x}}\ dxdy = \int_0^2 \int_{-v}^{v} \frac{1}{2}\ e^{u/v}\ dudv = \frac{1}{2}\int_0^2\ [v\ e^{u/v}]_{-v}^{v}\ dv =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2\ v(e - e^{-1})\ dv = \frac{1}{2}(e - e^{-1})\left[\frac{v^2}{2}\right]_0^2 = e - e^{-1} = e - \frac{1}{e} = \boxed{\frac{e^2-1}{e}}.$$

# 5.4 Coordenadas Polares, Esféricas y Cilíndricas

Como casos particulares al Teorema de Cambio de Variable tenemos las coordenadas polares en $\mathbb{R}^2$ y sus generalizaciones en $\mathbb{R}^3$ que son las coordenadas esféricas y las coordenadas cilíndricas.

(a) Coordenadas Polares.

Sea $g\colon [0,\infty)\times[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$ dada por $g(r,\theta)=(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$. $g$ es inyectiva en $(0,\infty)\times(0,2\pi)$. Pongamos $x=r\cos\theta$, $y=r\,\mathrm{sen}\,\theta$, $0\le r<\infty$, $0\le\theta\le 2\pi$, de donde $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\theta=\arctan y/x\in[0,2\pi](x\neq 0)$.

Es decir, en donde $g$ es inyectiva, se tiene que

$$g^{-1}(x,y)=(r,\theta)=(\sqrt{x^2+y^2},\arctan y/x),$$

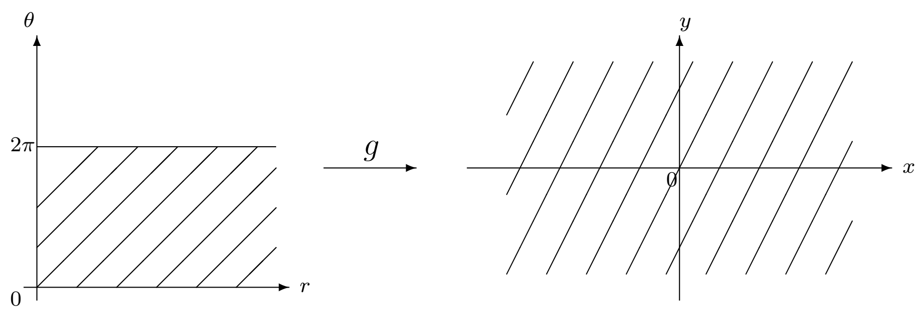
de donde

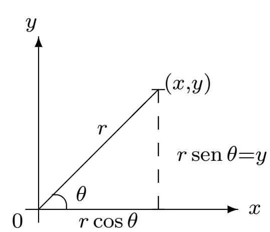
$$\arctan y/x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\qquad \text{si}\quad y\ge 0,\ x>0,$$

$$\arctan y/x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]\qquad \text{si}\quad y\ge 0,\ x<0,$$

$$\arctan y/x\in\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]\qquad \text{si}\quad y\le 0,\ x<0,$$

$$\arctan y/x\in\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]\qquad \text{si}\quad y\le 0,\ x>0.$$




Se tiene:

$$\det\ g'(r,\theta)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial g_1}{\partial r} & \dfrac{\partial g_1}{\partial\theta}\\[2ex] \dfrac{\partial g_2}{\partial r} & \dfrac{\partial g_2}{\partial\theta}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta\\[2ex] \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=r\left(\cos^2\theta+\mathrm{sen}^2\,\theta\right)=r.$$

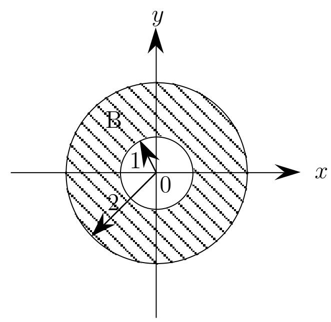
Dado $S \subseteq \mathbb{R}^2$, sea $T = g^{-1}(S)$ ($g\big|_S$ es inyectiva) y $g\colon T \subseteq \mathbb{R}^2 \to S \subseteq \mathbb{R}^2$, $g(T) = S$, entonces

$$\boxed{\begin{aligned}\int\int_{g(T)=S} f(x,y)\ dxdy = \int\int_T (f\circ g)\ |\det\ g'| = \\ = \int\int_T f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\ r\ drd\theta\end{aligned}}.$$

**Ejemplo 5.4.1** Sea $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < \|(x,y)\| < 2\}$. Calculemos

$$\int\int_B \left(x^2+y^2\right)^{-3/2}\ dxdy.$$

Sea $A = (1,2)\times[0,2\pi]$, se tiene que $g(A) = B$ con $g(r,\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) = (x,y)$




$$f(x,y) = \left(x^2+y^2\right)^{-3/2}$$

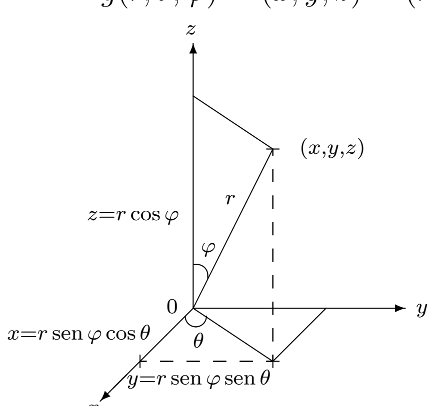
$$\int\int_B f(x,y)\ dxdy = \int\int_A r\ f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\ drd\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_1^2 r\cdot r^{-3}\ drd\theta = \int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{r}\right]_1^2\ d\theta = \frac{1}{2}[d\theta]_0^{2\pi} = \boxed{\pi}.$$

(b) Coordenadas Esféricas.

Sea $g = [0,\infty)\times[0,2\pi]\times[0,\pi] \to \mathbb{R}^3$ dada por:

$$g(r,\theta,\varphi) = (x,y,z) = (r\operatorname{sen}\varphi\cos\theta, r\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta, r\cos\varphi).$$




$g$ es inyectiva sobre

$(0,\infty)\times(0,2\pi)\times(0,\pi)$ y

$x = r\operatorname{sen}\varphi\cos\theta$

$y = r\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta$

$z = r\cos\varphi$

Se tiene:

$$\det\ g'(r,\theta,\varphi) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \operatorname{sen}\varphi\cos\theta & -r\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta & r\cos\varphi\cos\theta \\ \\ \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta & r\operatorname{sen}\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\operatorname{sen}\theta \\ \\ \cos\varphi & 0 & -r\operatorname{sen}\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= \cos\varphi \begin{vmatrix} -r\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta & r\cos\varphi\cos\theta \\ \\ r\operatorname{sen}\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\operatorname{sen}\theta \end{vmatrix} -$$

$$-r\operatorname{sen}\varphi \begin{vmatrix} \operatorname{sen}\varphi\cos\theta & -r\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta \\ \\ \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta & r\operatorname{sen}\varphi\cos\theta \end{vmatrix} =$$

$$= \cos\varphi\left(-r^2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\operatorname{sen}^2\theta - r^2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\cos^2\theta\right) -$$
$$-r^2\operatorname{sen}^3\varphi\left(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta\right) =$$

$$= -r^2\operatorname{sen}\varphi\cos^2\varphi\left(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta\right) - r^2\operatorname{sen}^3\varphi =$$

$$= -r^2\operatorname{sen}\varphi\left(\cos^2\varphi + \operatorname{sen}^2\varphi\right) = -r^2\operatorname{sen}\varphi.$$

Por lo tanto $|\det\ g'(r,\theta,\varphi)| = r^2\operatorname{sen}\varphi$.

Dado $B \subseteq \mathbb{R}^3$, sea $A = g^{-1}(B)$ ($g\big|_B$ es inyectiva) y $g(A) = B$. Por lo tanto

$$\boxed{\begin{gathered} \int\!\!\int\!\!\int_{B=g(A)} f(x,y,z)\ dxdydz = \\ = \int\!\!\int\!\!\int_A f(r\operatorname{sen}\varphi\cos\theta, r\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta, r\cos\varphi)\ r^2\operatorname{sen}\varphi\ drd\theta d\varphi \end{gathered}}.$$

**Ejemplo 5.4.2** Sea $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ y sea $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 < 1\}$. Calculemos

$$\int\int\int_B f(x,y,z)\ dxdydz.$$

Si $g(r,\theta,\varphi) = (x,y,z)$, entonces $x^2+y^2+z^2 = r^2$ y por lo tanto $(f \circ g)(r,\theta,\varphi) = r^2$.

Sea $A = \{(r,\theta,\varphi) \mid 0 \le r < 1, 0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le \varphi \le \pi\}$. Entonces $g(A) = B$ y por lo tanto

$$\int\int\int_B f(x,y,z)\ dxdydz = \int\int\int_A (f \circ g)(r,\theta,\varphi)\ r^2\ \operatorname{sen}\varphi\ drd\theta d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2 \cdot r^2\ \operatorname{sen}\varphi\ drd\theta d\varphi = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^1 \operatorname{sen}\varphi\ d\theta d\varphi =$$

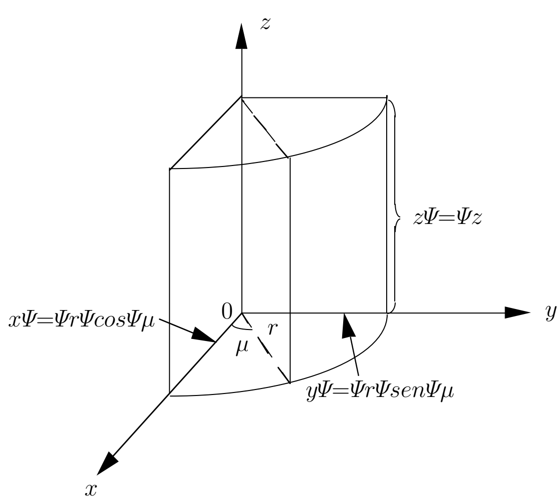
$$= \frac{1}{5}(2\pi)[-\cos\varphi]_0^{\pi} = \frac{2\pi}{5}(-(-1)+1) = \boxed{\frac{4\pi}{5}}.$$

(c) <u>Coordenadas Cilíndricas.</u>

Sea $g\colon [0,\infty) \times [0,2\pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por:

$$g(r,\theta,z) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, z) = (x,y,z).$$

Se tiene que $g$ es inyectiva en $(0,\infty) \times [0,2\pi] \times \mathbb{R}$ y $x = r\cos\theta$; $y = r\operatorname{sen}\theta$; $z = z$.




Se tiene

$$\det\ g'(r,\theta,z) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial x}{\partial z} \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial z} \\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r(cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) = r.$$

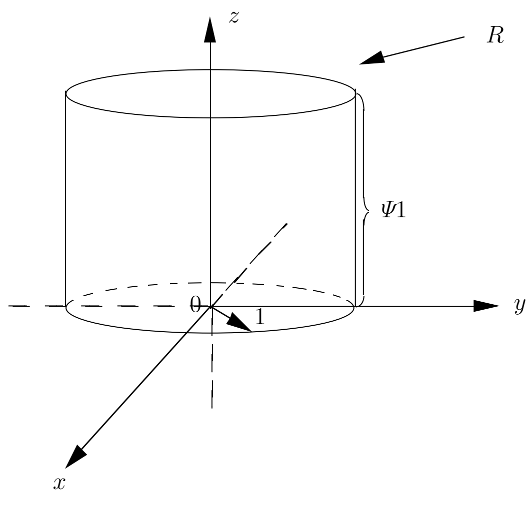
Para $B \subseteq \mathbb{R}^3$, sea $A = g^{-1}(B)$ $(g\big|_B$ es inyectiva) y $g(A) = B$. Entonces

$$\boxed{\int\int\int_{B=g(A)} f(x,y,z)\ dxdydz = \int\int\int_A f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, z)\ r\cdot drd\theta dz}.$$

**Ejemplo 5.4.3** Sea $f(x,y,z) = ze^{-x^2-y^2}$ y sea $R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$.

Calculemos

$$\int\int\int_R f(x,y,z)\ dxdydz.$$




Sea $A = \{(r,\theta,z) \mid 0 \leq r \leq 1,$

$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 1\}$.

Entonces $g(A) = R$ y por lo tanto:

$$\int\int\int_R f(x,y,z)\ dxdydz =$$

$$= \int\int\int_R ze^{-x^2-y^2}\ dxdydz =$$

$$= \int\int\int_A z\cdot e^{-r^2}\ r\ drd\theta dz = \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^1 z\cdot e^{-r^2}\cdot r\ drd\theta dz =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^{2\pi} z\cdot\left[-e^{-r^2}\right]_0^1\ d\theta dz = \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^{2\pi} z\cdot\left(1-\frac{1}{e}\right)\ d\theta dz =$$

$$= \pi\left(1-\frac{1}{e}\right)\int_0^1 zdz = \pi\left(1-\frac{1}{e}\right)\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^1 = \boxed{\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)}.$$

## 5.5 Ejercicios

1) Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $g\colon A \to \mathbb{R}^n$ una función inyectiva de clase $C^1$ tal que $\det\, g'(\vec{x}) \neq 0 \; \forall\, \vec{x} \in A$. Sea $\mathcal{O}$ un recubrimiento abierto de $A$. Sea $\mathcal{O}' = \{g(U) \mid U \in \mathcal{O}\}$. Demostrar que $\mathcal{O}'$ es un recubrimiento abierto de $g(A)$. Sea $\Phi$ una partición de unidad $C^1$ subordinada a $\mathcal{O}'$. Demostrar que $\{\varphi \circ g \mid \varphi \in \Phi\}$ es una partición de unidad $C^1$ subordinada a $\mathcal{O}$.

2) Sea $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ una función no negativa y continua. Probar que

$$\int_{(0,1)} f \text{ existe} \iff \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\epsilon}^{1-\epsilon} f \text{ existe.}$$

3) Sea $A_n = \left[1 - \dfrac{1}{2^n}, 1 - \dfrac{1}{2^{n+1}}\right]$, $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ satisface

$$\int_{A_n} f = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

y además que $f(x) = 0 \; \forall\, x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Mostrar que $\int_{(0,1)} f$ no existe, pero que

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{(\epsilon, 1-\epsilon)} f = \ln 2.$$

4) Sea $A_n$ un conjunto cerrado en $(n, n+1)$. Supongamos que $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisface

$$\int_{A_n} f = \frac{(-1)^n}{n} \; \forall\, n \in \mathbb{N} \text{ y } f(x) = 0 \; \forall\, x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Encontrar 2 particiones de unidad $\Phi$ y $\Psi$ tales que

$$\sum_{\varphi \in \Phi} \int_{\mathbb{R}} \varphi \cdot f \text{ y } \sum_{\psi \in \Psi} \int_{\mathbb{R}} \psi \cdot f$$

convergen absolutamente pero a diferentes valores.

5) ¿Cuál es el volumen del paralelepípedo generado por $(1,1,1,1)$, $(0,1,1,0)$, $(2,0,3,0)$ y $(1,1,0,1)$ en $\mathbb{R}^4$?

6) Calcular $\displaystyle\int_0^1 \int_y^1 (x^2 + y^2)\, dxdy$, usando el cambio de variable $x = u + v$, $y = u - v$.

7) Mostrar que el volumen del paralelepípedo contenido en $\mathbb{R}^n$ expandido por los vectores $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in \mathbb{R}^n$ está dado por $\left|\det(A_{ij})_{1\le i\le n}^{1\le j\le n}\right|$, donde $A_{ij} = \langle \vec{v}_i, \vec{v}_j\rangle$, $1 \le i, j \le n$.

8) Mostrar que el área de la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ es $\pi ab$, haciendo un cambio de variables adecuado para reducir el problema a encontrar el área de un círculo.

9) Usando coordenadas polares, evaluar las siguientes integrales:

i).- $\displaystyle\int_D e^{x^2+y^2}\, dxdy$, donde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$.

ii).- $\displaystyle\int_D \ln(x^2 + y^2)\, dxdy$, donde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \ge 0, y \ge 0, a^2 \le x^2 + y^2 \le b^2\}$.

10) Probar que $\displaystyle\int_D e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\, dxdydz = \frac{4\pi(e-1)}{3}$, donde $D = B(\vec{0}, 1) \subseteq \mathbb{R}^3$.

11) Sea $D = B(\vec{0}, 1) \subseteq \mathbb{R}^3$. Evaluar $\displaystyle\int_D \frac{dxdydz}{\sqrt{2 + x^2 + y^2 + z^2}}$.

12) Evaluar $\displaystyle\int_D z \cdot \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdydz$, donde $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \le x^2 + y^2 \le 2, 1 \le z \le 2\}$.

13) Calcular $\displaystyle\int_0^1 \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} z \cdot (x^2 + y^2)\, dxdydz$ usando coordenadas cilíndricas.

14) Usando las funciones $f, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = 1$ y $g(x, y) = (e^x \cos y, e^x \operatorname{sen} y)$, probar que la fórmula del Teorema del Cambio de Variable no necesariamente se cumple si $g$ no es inyectiva (aunque $|\det\ g'(x, y)| \ne 0\ \forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2$).

15) Usando coordenadas polares, calcular:

i).- $\displaystyle\int_0^{2a} \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} (x^2 + y^2)\, dydx$;

ii).- $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^2}^{x} (x^2 + y^2)^{-1/2}\, dydx$;

iii).- $\displaystyle\int_0^1 \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\, dydx$;

iv).- $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{x^2} f(x,y)\ dydx.$

16) Usando una transformación lineal adecuada, calcular

$$\int\int_S (x-y)^2 \operatorname{sen}^2(x+y)\ dxdy,$$

donde $S$ es el paralelogramo con vértices en $(\pi,0)$, $(2\pi,\pi)$, $(\pi,2\pi)$, $(0,\pi)$.

17) Haciendo cambios de variables adecuados, probar:

i).- $\displaystyle\int\int_S f(x+y)\ dxdy = \int_{-1}^{1} f(u)du$, donde $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \le 1\}$;

ii).- $\displaystyle\int\int_S f(ax+by+c)\ dxdy = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-u^2}\ f(u\sqrt{a^2+b^2}+c)\ du$, donde $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 1\}$ y $a^2+b^2 > 0$.

iii).- $\displaystyle\int\int_S f(x,y)\ dxdy = \ln 2 \int_1^2 f(u)\ du$, donde $S$ es la región del primer cuadrante acotada por las curvas $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x$, $y = 4x$.

18) Sea $B_n(R) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\vec{x}\| \le R\} = B(\vec{0}, R) \subseteq \mathbb{R}^n$.

i).- Probar que $\operatorname{vol}(B_n(R)) = R^n\ \operatorname{vol}(B_n(1))$.

ii).- Probar por inducción que $\operatorname{vol}(B_{n+2}(1)) = \operatorname{vol}(B_n(1)) \cdot \dfrac{2\pi}{n+2}$.

iii).- Probar que si $n = 2k$, $n$ par, entonces $\operatorname{vol}(B_n(1)) = \dfrac{\pi^k}{k!} = \dfrac{\pi^{n/2}}{\left(\dfrac{n}{2}\right)!}$ y que si $n = 2k-1$ es impar, entonces $\operatorname{vol}(B_n(1)) = \dfrac{\pi^{k-1} \cdot 4^k \cdot k!}{(2k)!} = \dfrac{\pi^{(n-1)/2} \cdot 2^{n+1} \cdot \left(\dfrac{n+1}{2}\right)!}{(n+1)!}$.

iv).- Calcular $\operatorname{vol}(B_n(R))$.

# Capítulo 6

# Integrales de Línea y de Superficie

## 6.1 Integrales de Línea

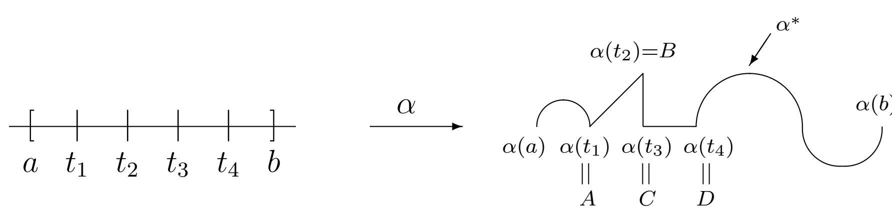
**Definición 6.1.1** Un camino en $A \subseteq \mathbb{R}^n$ o arco en $A$, es una función $\alpha\colon [a,b] \to A$ continua.

A $\alpha([a,b]) = \alpha^*$ se le llama la traza de la curva o camino.

El camino $\alpha$ se llama $C^1$ o continuamente diferenciable o suave si $\alpha'$ existe y además es continua.

El camino $\alpha$ se llama $C^1$ por tramos o continuamente diferenciable por tramos o suave por tramos si el intervalo $[a,b]$ se puede partir en un número finito de subintervalos tal que en cada uno de ellos, $\alpha$ es de clase $C^1$.

**Ejemplo 6.1.2**




$\alpha$ es diferenciable en $[a,t_1]$, $[t_1.t_2]$, $[t_2,t_3]$, $[t_3,t_4]$ y $[t_4,b]$.

**Definición 6.1.3** Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f\colon A \to \mathbb{R}^n$ integrable y sea $\alpha\colon [a,b] \to A$ un camino suave por tramos en $A$. Se define la integral de línea de $f$ sobre el camino $\alpha$ por:

$$\int_a^b \langle f(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle \, dt,$$

la cual es un integral en una variable real.

Se tiene que:

$$\int_a^b \langle f(\alpha(t)), \alpha'(t)\rangle\ dt = \int_a^b [f_1(\alpha(t))\ \alpha_1'(t) + f_2(\alpha(t))\ \alpha_2'(t) + \cdots + f_n(\alpha(t))\ \alpha_n'(t)]\ dt =$$

$$= \int_a^b \left\{ \sum_{k=1}^n f_k(\alpha(t))\ \alpha_k'(t) \right\}\ dt = \sum_{k=1}^n \int_a^b\ f_k(\alpha(t))\ \alpha_k'(t)\ dt,$$

donde

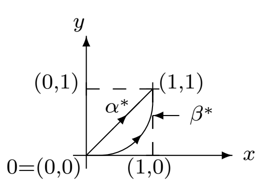
$$f = (f_1, \ldots, f_n), \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\ \text{ y }\ f_i\colon A \to \mathbb{R},\ 1 \le i \le n,\ \alpha_j\colon [a,b] \to \mathbb{R},\ 1 \le j \le n.$$

**Notación 6.1.4** Si $\alpha(a) = \vec{a}$, $\alpha(b) = \vec{b}$, la integral de línea tiene las siguientes notaciones:

$$\int_a^b \langle f(\alpha(t)), \alpha'(t)\rangle\ dt = \int_\alpha\ f = \int_\alpha\ f_1\ dx_1 + f_2\ dx_2 + \ldots + f_n\ dx_n =$$

$$= \int_a^b\ f_1\ d\alpha_1 + f_2\ d\alpha_2 + \ldots + f_n\ d\alpha_n = \int_a^b\ f \cdot d\alpha = \int_{\vec{a}}^{\vec{b}}\ f.$$

**Ejemplo 6.1.5** Sea $f\colon A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \ge 0\}$ y $f(x,y) = (\sqrt{y}, x^3+y)$. Sean $\alpha, \beta\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ dadas por $\alpha(t) = (t,t)$, $\beta(t) = (t^2, t^3)$.




Notemos que tanto $\alpha$ como $\beta$ conectan $(0,0)$ con $(1,1)$, es decir, $\alpha(0) = \beta(0) = (0,0)$ y $\alpha(1) = \beta(1) = (1,1)$.

Se tiene:

$$\int_\alpha\ f = \int_0^1 \langle f(\alpha(t)), \alpha'(t)\rangle\ dt = \int_0^1 \langle(\sqrt{t}, t^3+t), (1,1)\rangle\ dt =$$

$$= \int_0^1\ (\sqrt{t} + t^3 + t)\ dt = \left[\frac{t^{3/2}}{3/2} + \frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{17}{12}}.$$

$$\int_\beta\ f = \int_0^1 \langle f(\beta(t)), \beta'(t)\rangle\ dt = \int_0^1 \langle(t^{3/2}, t^6+t^3), (2t, 3t^2)\rangle\ dt =$$

$$= \int_0^1\ (2t^{5/2} + 3t^8 + 3t^5)\ dt = \left[\frac{2t^{7/2}}{7/2} + \frac{3t^9}{9} + \frac{3t^6}{6}\right]_0^1 = \frac{4}{7} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{59}{42}}.$$

Entonces $\displaystyle\int_\alpha\ f \neq \int_\beta\ f$ aunque $\alpha$ y $\beta$ conectan los puntos $(0,0)$ y $(1,1)$, es decir la integral de línea <u>depende del camino</u>.

Ahora sea $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ dado por $\gamma(t) = (t, t^{3/2})$. Entonces $\gamma$ conecta $(0,0)$ con $(1,1)$ pues $\gamma(0) = (0,0)$ y $\gamma(1) = (1,1)$. Además $\gamma$ conecta $(0,0)$ con $(1,1)$ por la misma traza de $\beta$, es decir, $\gamma^* = \beta^*$, y se tiene:

$$\int_\gamma f = \int_0^1 \langle f(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle\, dt = \int_0^1 \langle (t^{3/4}, t^3 + t^{3/2}), (1, \frac{3}{2}\, t^{1/2})\rangle\, dt =$$

$$= \int_0^1 (t^{3/4} + \frac{3}{2}\, t^{7/2} + \frac{3}{2}\, t^2)\, dt = \left[\frac{t^{7/4}}{7/4} + \frac{3}{2}\,\frac{t^{9/2}}{9/2} + \frac{3}{2}\,\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{4}{7} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{59}{42}}.$$

Por lo tanto

$$\int_\beta f = \int_\gamma f.$$

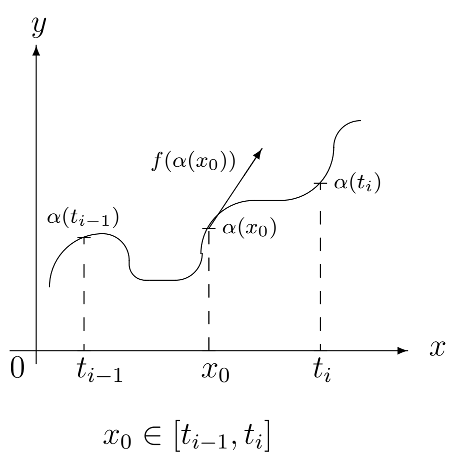
### 6.1.1 Interpretación Geométrica de la Integral de Línea

Sea $f\colon A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ con $f = (f_1, \ldots, f_n)$ y cada $f_i$ $(1 \le i \le n)$ una función integrable.

Sea $\alpha\colon [a,b] \to A$ un camino $C^1$.

Sea $P_m = \{a = t_0, t_1, t_2, \ldots, t_m = b\}$, $m \in \mathbb{N}$ la suceción de particiones canónicas de $[a,b]$, es decir, $t_k = a + \dfrac{k}{m}(b-a)$, $0 \le k \le m$.

Por el Teorema del Valor Intermedio, existen $x_i^j \in [t_{i-1}, t_i]$, $1 \le j \le n$ tales que $\alpha_j(t_i) - \alpha_j(t_{i-1}) = \alpha'(x_i^j)(t_i - t_{i-1})$.




El trabajo realizado por la "fuerza" $f$ a lo largo del segmento de curva que une $\alpha(t_{i-1})$ con $\alpha(t_i)$ es aproximadamente igual a $\langle f(\alpha(x_0)), \alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\rangle =$
$= \displaystyle\sum_{j=1}^n f_j(\alpha(x_0))(\alpha_j(t_i) - \alpha_j(t_{i-1}))$.

Por lo tanto el trabajo realizado por la fuerza $f$ a lo largo de la curva $\alpha$ será:

$$W = \lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n f_j(\alpha(x_0)) \cdot (\alpha_j(t_i) - \alpha_j(t_{i-1}))\right) =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m f_j(\alpha(x_0)) \cdot \alpha_j'(x_i^j) \cdot (t_i - t_{i-1})\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left\{ \lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{m} f_j(\alpha(x_0)) \cdot \alpha_j'(x_i^j) \cdot (t_i - t_{i-1}) \right\} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \int_a^b f_j(\alpha(t)) \cdot \alpha_j'(t)\ dt = \int_\alpha f.$$

Por lo tanto

$$\boxed{\int_\alpha f \text{ se interpreta como el trabajo realizado por la “fuerza” } f \text{ a lo largo de la curva } \alpha}.$$

### 6.1.2 Propiedades de la Integral de Línea

**Proposición 6.1.6** *Sean $f, g\colon A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ funciones integrables, esto es, cada componente $f_i$, $g_j$ de $f$ y $g$ respectivamente, son funciones integrables. Sea $\alpha\colon [a,b] \to A$ un camino $C^1$ por tramos. Entonces*

$$\int_\alpha (a\, f + b\, g) = a \int_\alpha f + b \int_\alpha g, \text{ con } a, b \in \mathbb{R}.$$

Demostración. Ejercicio. ❑

**Proposición 6.1.7** *Sea $f\colon A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función integrable y sean $\alpha\colon [a,b] \to A$, $\beta\colon [b.c] \to A$ dos caminos $C^1$ por tramos y sea $\gamma\colon [a,c] \to A$ dada por*

$$\gamma(t) = \begin{cases} \alpha(t) & si \quad a \le t \le b \\ \\ \beta(t) & si \quad b \le t \le c \end{cases} \quad \text{con} \quad \alpha(b) = \beta(b).$$

*Entonces a $\gamma$ la denotamos por $\gamma = \alpha \cup \beta$ y se tiene que*

$$\gamma^* = \alpha^* \cup \beta^* \ \text{ y } \ \int_\gamma f = \int_{\alpha\cup\beta} f = \int_\alpha f + \int_\beta f.$$

Demostración. Ejercicio. ❑

**Definición 6.1.8** Sean $\alpha\colon [a,b] \to A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\beta\colon [c,d] \to A \subseteq \mathbb{R}^n$ dos curvas $C^1$ por tramos. Se dice que $\alpha$ y $\beta$ son equivalentes, y se denota por $\alpha \sim \beta$, si existe $u\colon [a,b] \to [c,d]$ suprayectiva y derivable tal que $u'(t) \neq 0\ \forall\ t \in [a,b]$ y $\beta \circ u = \alpha$.

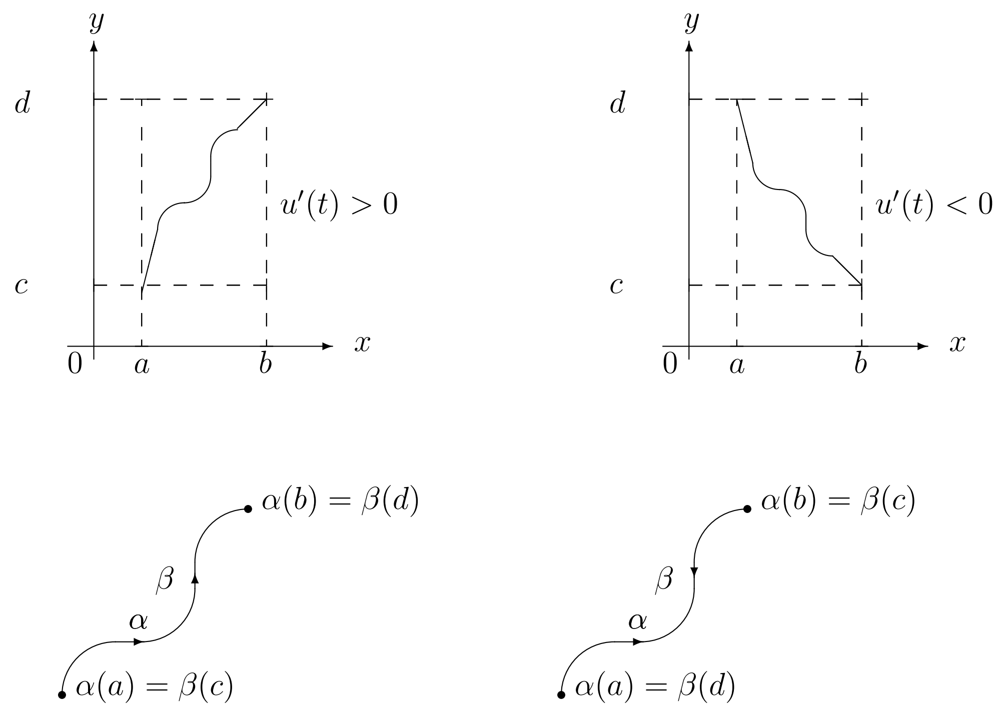
**Observaciones 6.1.9**

(1).- Puesto que la derivada de una función derivable en $\mathbb{R}$ tiene la propiedad del valor intermedio, se tiene que $u'(t) > 0\ \forall\ t \in [a,b]$ ó $u'(t) < 0\ \forall\ t \in [a,b]$.

(2).- $\alpha^* = \alpha([a,b]) = \beta(u([a,b])) = \beta([c,d]) = \beta^*$, es decir si $\alpha \sim \beta$, entonces tienen la misma traza.

(3).- Si $u'(t) > 0$, $u$ es creciente y por lo tanto $u(a) = c$, $u(b) = d$. Por lo tanto $\alpha(a) = \beta(c)$ y $\alpha(b) = \beta(b)$ de donde se sigue que $\alpha$ y $\beta$ recorren la curva en la <u>misma dirección</u>.

Si $u'(t) < 0$, $u$ es decreciente, por lo que $u(a) = d$, $u(b) = c$. Por lo tanto $\alpha(a) = \beta(d)$ y $\alpha(b) = \beta(d)$, de donde se sigue que $\alpha$ y $\beta$ recorren la curva en <u>dirección contraria</u>.




**Proposición 6.1.10** *La relación $\sim$ es una relación de equivalencia.*

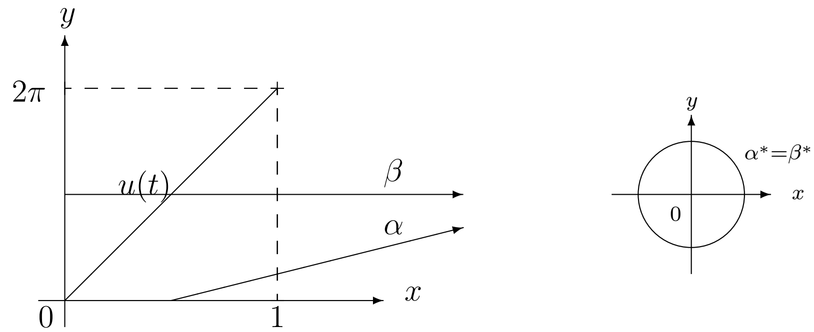
<u>*Demostración*</u>. Ejercicio. ❏

**Ejemplos 6.1.11**

(1).- Sean $\alpha\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $\beta\colon [0,2] \to \mathbb{R}^2$ dadas por:

$$\alpha(t) = (\cos 2\pi t, \operatorname{sen} 2\pi t),\ 0 \le t \le 1 \quad \text{y} \quad \beta(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t),\ 0 \le t \le 2\pi.$$

Sea $u\colon [0,1] \to [0,2\pi]$ dada por $u(t) = 2\pi t$. Se tiene que $u$ es suprayectiva, derivable y $u'(t) = 2\pi > 0\ \forall\ t \in [0,1]$ y $\alpha = \beta \circ u$. Por lo tanto $\alpha$ y $\beta$ son equivalentes y tienen la misma dirección.

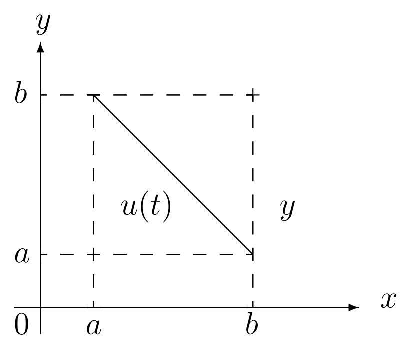



(2).- Sea $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una curva $C^1$ por tramos.

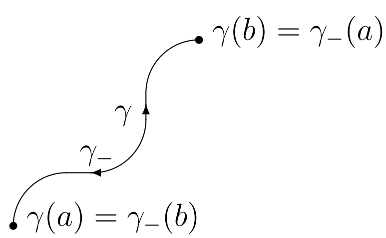
Sea $u\colon [a,b] \to [a,b]$, dada por

$u(t) = a + b - t$, $u$ es suprayectiva,

derivable y $u'(t) = -1 < 0\ \forall\ t \in [a,b]$.




Por lo tanto $\gamma$ es equivalente a $\gamma \circ u = \gamma_-$ y $\gamma_-\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ se da por $\gamma_-(t) = \gamma(a+b-t)$ y $\gamma_-(a) = \gamma(b)$, $\gamma_-(b) = \gamma(a)$.




**Teorema 6.1.12** *Sean $f\colon A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ función integrable y $\alpha\colon [a,b] \to A$, $\beta\colon [c,d] \to A$ dos curvas $C^1$ por tramos tales que $\alpha \sim \beta$. Entonces:*

(1).- *Si $\alpha$ y $\beta$ tienen la misma dirección:* $\displaystyle\int_\alpha f = \int_\beta f.$

(2).- *Si $\alpha$ y $\beta$ tienen la dirección contraria:* $\displaystyle\int_\alpha f = -\int_\beta f.$

<u>Demostración</u>. Basta demostrarlo en el caso en que tanto $\alpha$ como $\beta$ son de clase $C^1$.

Se tiene $\beta = \alpha \circ u$, con $u\colon [c,d] \to [a,b]$, derivable, suprayectiva y $u'(t) \neq 0\ \forall\, t \in [c,d]$. Por lo tanto $\beta'(t) = (\alpha \circ u)'(t) = \alpha'(u(t)) \cdot u'(t)$. Se sigue que

$$\int_\beta f = \int_a^d \langle f(\beta(t)), \beta'(t)\rangle\ dt = \int_c^d \langle f(\alpha(u(t))), \alpha'(u(t)) \cdot u'(t)\rangle\ dt =$$

$$= \int_c^d\ g(u(t)) \cdot u'(t)\ dt = \int_{u(c)}^{u(d)}\ g(t)\ dt = \int_{u(c)}^{u(d)} \langle f(\alpha(t)), \alpha'(t)\rangle\ dt = I,$$

donde $g = \langle f \circ \alpha, \alpha'\rangle$ y donde además aplicamos el Teorema de Cambio de Variable $\displaystyle\int_c^d\ g(u(t)) \cdot u'(t)\ dt = \int_{u(c)}^{u(d)}\ g(t)\ dt$.

(1).- Si $\alpha$ y $\beta$ recorren la curva en el mismo sentido, entonces $u(c) = a$ y $u(d) = b$. Por lo tanto

$$\int_\beta f = I = \int_a^b \langle f(\alpha(t)), \alpha'(t)\rangle\ dt = \int_\alpha\ f.$$

(2).- Si $\alpha$ y $\beta$ recorren la curva en el sentido contrario, entonces $u(c) = b$ y $u(d) = a$. Por lo tanto

$$\int_\beta f = I = \int_b^a \langle f(\alpha(t)), \alpha'(t)\rangle\ dt = -\int_a^b \langle f(\alpha(t)), \alpha'(t)\rangle\ dt = -\int_\alpha\ f. \quad ❏$$

A continuación damos los Teoremas Fundamentales del Cálculo (TFC) para integrales de Línea.

**Teorema 6.1.13 (2do. TFC para Integrales de Línea)** *Sea $\varphi\colon A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase $C^1$, $\nabla\varphi = D\varphi\colon A \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^n$, donde $\nabla\varphi = \left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2}, \cdots, \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right)$ y $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = \{T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \mid T\, es\ lineal\}$.*

*Supongamos que $A$ es un conjunto abierto y conexo y consideremos $\vec{a}$, $\vec{b} \in A$ y $\alpha\colon [a,b] \to A$ cualquier camino $C^1$ por tramos que conecta $\vec{a}$ con $\vec{b}$ (es decir, $\alpha(a) = \vec{a}$, $\alpha(b) = \vec{b}$). Tal camino siempre existe por ser $A$ arco conexo. Entonces:*

$$\int_\alpha \nabla\varphi = \int\ \nabla\varphi \cdot d\alpha = \varphi(\vec{b}) - \varphi(\vec{a}) = \varphi(\alpha(b)) - \varphi(\alpha(a)).$$

*En particular la integral de línea no depende del camino.*

<u>Demostración</u>. Se puede suponer que $\alpha$ es un camino $C^1$.

Sea $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $g(t) = \varphi(\alpha(t))$ y se tiene que:

$$g'(t) = D\varphi(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) = \langle \nabla\varphi(\alpha(t)), \alpha'(t)\rangle,$$

por lo tanto

$$\int_\alpha \nabla\varphi = \int_a^b \langle \nabla\varphi(\alpha(t)), \alpha'(t)\rangle\ dt = \int_a^b g'(t)\ dt = g(b) - g(a) =$$

$$= \varphi(\alpha(b)) - \varphi(\alpha(a)) = \varphi(\vec{b}) - \varphi(\vec{a}). \qquad \square$$

**Teorema 6.1.14 (1er. TFC para Integrales de Línea)** *Sea $f\colon A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función continua con $A$ una conjunto abierto. Supongamos que la integral de línea de $f$ es independiente del camino en $A$. Sea $\vec{a} \in A$ fijo.*

*Sea $\vec{x} \in A$ arbitrario y consideremos $\alpha_{\vec{x}}$ un camino $C^1$ por tramos que une $\vec{a}$ con $\vec{x}$. Definimos*

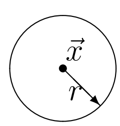
$$\varphi(\vec{x}) = \int_{\alpha_{\vec{x}}} f = \int_{\vec{a}}^{\vec{x}} f = \int_{\vec{a}}^{\vec{x}} f \cdot d\alpha_{\vec{x}}.$$

*Entonces $\varphi\colon A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es derivable y*

$$\nabla\varphi(\vec{x}) = D\varphi(\vec{x}) = f(\vec{x})\ \forall\ \vec{x} \in A.$$

Demostración. Probaremos que $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_k}(\vec{x}) = f_k(\vec{x})$, $1 \leq k \leq n$ y puesto que $f_k(\vec{x})$ es continua, se seguirá que $\varphi$ es diferenciable y $\nabla\varphi(\vec{x}) = f(\vec{x})$.

Sea $r > 0$ tal que $B(\vec{x}, r) \subseteq A$.



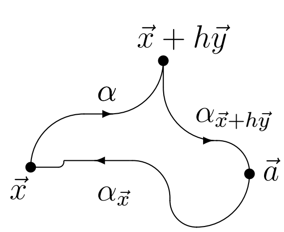

Sea $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ cualquier vector unitario. Se tiene que

$\vec{x} + h\vec{y} \in B(\vec{x}, r)\ \forall\ h \in (-r, r)$ pues

$$\|\vec{x} + h\vec{y} - \vec{x}\| = \|h\vec{y}\| = |h| \cdot \|\vec{y}\| = |h| < r.$$

Por ser la integral de línea independiente del camino se tiene que

$$\varphi(\vec{x} + h\vec{y}) - \varphi(\vec{x}) = \int_{\vec{a}}^{\vec{x}+h\vec{y}} f - \int_{\vec{a}}^{\vec{x}} f = \int_{\vec{a}}^{\vec{x}+h\vec{y}} f + \int_{\vec{x}}^{\vec{a}} f = \int_{\vec{x}}^{\vec{x}+h\vec{y}} f.$$




Sea $\alpha\colon [0,1] \to B(\vec{x}, r) \subseteq A$ definida por $\alpha(t) = \vec{x} + th\vec{y}$. Entonces $\alpha(0) = \vec{x}$, $\alpha(1) = \vec{x} + h\vec{y}$ y $\alpha'(t) = h\vec{y}$. Por lo tanto:

$$\int_\alpha f = \int_{\vec{x}}^{\vec{x}+h\vec{y}} f = \int_0^1 \langle f(\vec{x}+th\vec{y}), h\vec{y}\rangle \, dt = \varphi(\vec{x}+h\vec{y}) - \varphi(\vec{x}),$$

de donde obtenemos

$$\frac{\varphi(\vec{x}+h\vec{y})-\varphi(\vec{x})}{h} = \frac{1}{h}\int_0^1 \langle f(\vec{x}+th\vec{y}), h\vec{y}\rangle \, dt =$$

$$= \int_0^1 \langle f(\vec{x}+th\vec{y}), \frac{h\vec{y}}{h}\rangle \, dt = \int_0^1 \langle f(\vec{x}+th\vec{y}), \vec{y}\rangle \, dt.$$

Tomamos $\vec{y} = \vec{e}_k$, $1 \le k \le n$. Entonces:

$$\langle f(\vec{x}+th\vec{y}), \vec{y}\rangle = \langle f(\vec{x}+th\vec{e}_k), \vec{e}_k\rangle = f_k(\vec{x}+th\vec{e}_k),$$

por lo que

$$\frac{\varphi(\vec{x}+h\vec{e}_k)-\varphi(\vec{x})}{h} = \int_0^1 f_k(\vec{x}+the_k) \, dt = \frac{1}{h}\int_0^1 f_k(\vec{x}+th\vec{e}_k) \, h \, dt.$$

Sea $\ell(u) = f_k(\vec{x}+u\vec{e}_k)$ y $m(t) = ht$, $m'(t) = h$. Entonces

$$\frac{1}{h}\int_0^1 f_k(\vec{x}+th\vec{e}_k) \, h \, dt = \frac{1}{h}\int_0^1 \ell(m(t))\cdot m'(t) \, dt = \frac{1}{h}\int_{m(0)}^{m(1)} \ell(t) \, dt = \frac{1}{h}\int_0^h f_k(\vec{x}+t\vec{e}_k) \, dt.$$

Sea $g\colon (-r,r) \to \mathbb{R}$ dada por $g(h) = \displaystyle\int_0^h f_k(\vec{x}+t\vec{e}_k) \, dt$. Entonces $g$ es diferenciable, $g'(h) = f_k(\vec{x}+h\vec{e}_k)$ y $g'(0) = f_k(\vec{x})$ $(g(0) = 0)$ y por tanto

$$\frac{\varphi(\vec{x}+h\vec{e}_k)-\varphi(\vec{x})}{h} = \frac{g(h)-g(0)}{h},$$

de donde

$$g'(0) = f_k(\vec{x}) = \lim_{h\to 0}\frac{g(h)-g(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\varphi(\vec{x}+h\vec{e}_k)-\varphi(\vec{x})}{h} = D\vec{e}_k(\varphi(\vec{x})) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(\vec{x}). \quad ❏$$

Como consecuencia de los 2 TFC, se tiene

**Teorema 6.1.15** *Sea $f\colon A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $A$ un conjunto abierto y conexo y $f$ continua. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

i).- *La integral de línea es independiente del camino en $A$.*

ii).- *$f$ es el gradiente de una función $\varphi\colon A \to \mathbb{R}$, es decir, $f = \nabla\varphi$.*

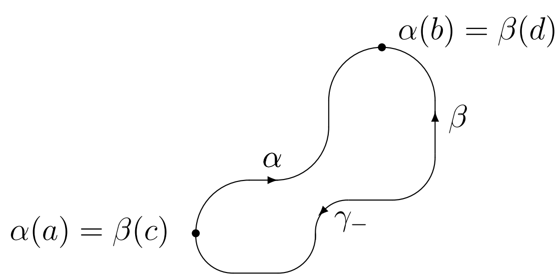
iii).- *La integral de línea vale $0$ para cualquier curva cerrada en $A$.*

<u>*Demostración*</u>.

<u>i) $\Rightarrow$ ii).</u> Sea $\varphi(\vec{x}) = \displaystyle\int_{\vec{a}}^{\vec{x}} f$ la cual esta bien definida pues la integral es independiente del camino. Entonces, por el 1er. TFC, se tiene $\nabla\varphi(\vec{x}) = f(\vec{x})$.

<u>ii) $\Rightarrow$ iii).</u> Si $\alpha\colon [a,b] \to A$ es un camino cerrado, esto es, $\alpha(a) = \alpha(b)$, entonces $\displaystyle\int_\alpha f = \int_\alpha \nabla\varphi = \varphi(\alpha(b)) - \varphi(\alpha(a)) = 0$.

<u>iii) $\Rightarrow$ i).</u> Sean $\alpha\colon [a,b] \to A$, $\beta\colon [c,d] \to A$ dos caminos $C^1$ por tramos tales que $\alpha(a) = \beta(c)$ y $\alpha(b) = \beta(d)$.




Sea $\gamma\colon [b,e] \to A$ un camino equivalente a $\beta$ que recorre la curva en el mismo sentido (tal $\gamma$ existe y se deja como ejercicio probarlo). Entonces $\alpha \cup \gamma_-$ es una curva cerrada $C^1$ por tramos y por tanto:

$$0 = \int_{\alpha\cup\gamma_-} f = \int_\alpha f + \int_{\gamma_-} f = \int_\alpha f - \int_\gamma f = \int_\alpha f - \int_\beta f,$$

por lo tanto $\displaystyle\int_\alpha f = \int_\beta f$. ❏

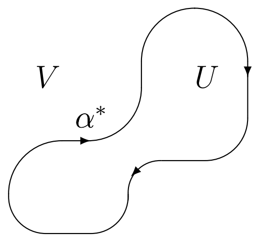
## 6.2 Teorema de Green

De aquí en adelante se definirán de forma intuitiva y no con el rigor deseado, algunos conceptos como “sentido positivo” de una curva en $\mathbb{R}^2$ y vector normal “exterior” (o “hacia afuera”) de una superficie. La razón de que se haya elegido este camino, es que para hacerlo con todo el rigor necesario, se requieren conocimientos sobre orientación de variedades, lo cual nos aparta del objetivo de este libro.

**Definición 6.2.1** Una curva $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ se llama <u>simple de Jordan</u>, si $\alpha$ es continua, inyectiva en $(a,b)$ y cerrada, es decir, $\alpha(a) = \alpha(b)$.

A continuación enunciamos un teorema sin demostración, el cual es geométricamente claro.

**Teorema 6.2.2 (Teorema de la curva de Jordan)** *Si $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ es una curva simple de Jordan, entonces $\mathbb{R}^2 \setminus \alpha^*$ es un conjunto en $\mathbb{R}^2$ que consta de dos componentes conexas, una no acotada y la otra acotada.* ❏




$U$, $V$ conexos

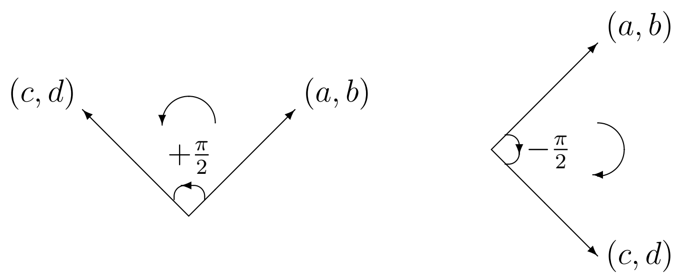
$U$ acotada

$V$ no acotada

$U \cup V = \mathbb{R}^2 \setminus \alpha^*$.

**Definición 6.2.3** Si $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ es una curva simple de Jordan, a $U$, la componente acotada, se le llama el <u>interior</u> de la curva $\alpha$ y a $V$, la componente no acotada, se le llama el <u>exterior</u> de la curva $\alpha$.

Dado ahora un vector $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $(a,b) \neq \vec{0}$, veamos que vector forma un ángulo de $+\pi/2$ con el vector $(a,b)$.




Sea $(c,d) \in \mathbb{R}^2$, $(c,d) \neq \vec{0}$ un vector que forme un ángulo de $+\pi/2$ con el vector $(a,b)$. Entonces, se tiene que $\langle (a,b),(c,d)\rangle = ac + bd = 0$.

Si consideramos $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal que rota al plano un ángulo de $+\pi/2$, entonces $T$, con respecto a la base canónica, tiene representación matricial $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y por lo tanto podemos poner:

$$T((a,b)) = (-b,a) = (c,d),$$

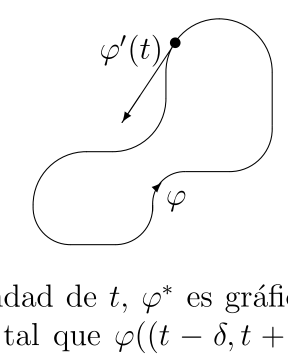
es decir, $c = -b$, $d = a$.

Ahora consideremos $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ una curva simple de Jordan de clase $C^1$. Entonces

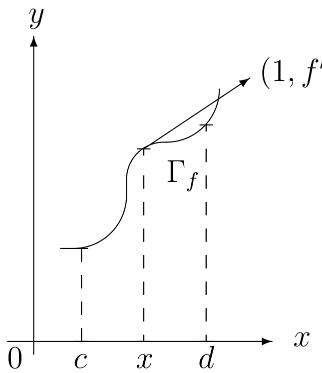
$\varphi'(t) = (\varphi_1'(t), \varphi_2'(t))$ es el vector tangente

a la curva en el punto $\varphi(t)$ en la

dirección de la curva.




Para ver esto supongamos que en una vecindad de $t$, $\varphi^*$ es gráfica de cierta función derivable $f\colon (c,d) \to \mathbb{R}$, es decir, exise $\delta > 0$ tal que $\varphi((t-\delta, t+\delta) \cap [a,b]) = \Gamma_f = \{(x,y) \mid y = f(x), x \in (c,d)\}$.



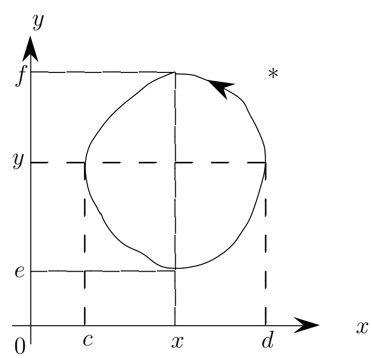

La dirección de la recta tangente a la gráfica $\Gamma_f$ en $(x, f(x))$ "=" $\varphi(t) =$ $= (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ es $(1, f'(x))$ $(x = \varphi_1(t),$ $y = \varphi_2(t) = f(x) = f(\varphi_1(t)))$.

Por lo tanto

$$\varphi'(t) = (\varphi_1'(t), f'(\varphi_1(t)) \cdot \varphi_1'(t)) = \varphi_1'(t)(1, f'(\varphi_1(t))) = \varphi_1'(t)(1, f'(x)).$$

Por lo tanto si $\varphi_1'(t) > 0$ (es decir, $x$ crece cuando $t$ crece), $\varphi'(t)$ es el vector tangente a $\varphi^*$ en $\varphi(t)$ con la misma dirección de la curva pues $x$ y $t$ van en la misma dirección y si $\varphi_1'(t) < 0$ (es decir, $x$ decrece cuando $t$ crece), $\varphi'(t)$ va en dirección contraria al vector $(1, f'(x))$, pero en este caso $x$ y $t$ van en dirección contraria, por lo que $\varphi^*$ y $\Gamma_f$ van en dirección contraria y por lo tanto $\varphi'(t)$ va en la dirección de la curva.

**Definición 6.2.4** Sea $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una curva $C^1$ por tramos, simple de Jordan. Entonces $\alpha$ se llama curva regular si cada línea paralela al eje $x$ y cada línea paralela al eje $y$, con excepción de los extremos, cortan a la curva en cuando más 2 puntos. Más precisamente, si $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\alpha_1([a,b]) = [c,d]$, $\alpha([a,b]) = [e,f]$, entonces los conjuntos:




$$\{t \in [a,b] \mid \alpha_1(t) = x\},\ x \in (c,d)$$

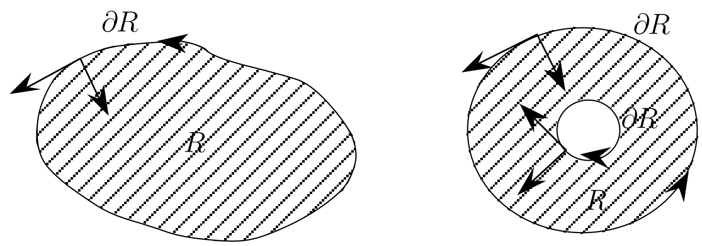
$$\{t \in [a,b] \mid \alpha_2(t) = y\},\ y \in (e,f)$$

constan de cuando más 2 elementos.

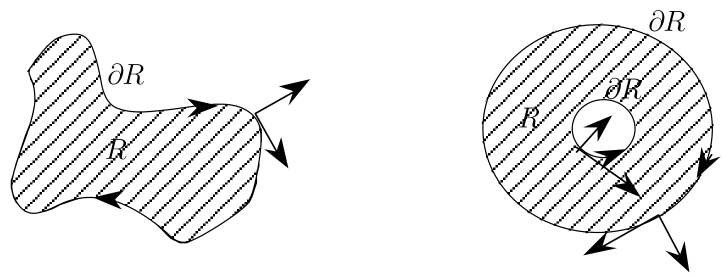
**Definición 6.2.5** Una región acotada $R \subseteq \mathbb{R}^2$ se llama regular si su frontera $\partial R$ es la traza de una curva regular $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$, $\alpha^* = \partial R$.

Sea $R \subseteq \mathbb{R}^2$ una región regular con frontera $\partial R = \alpha^*$. Entonces se dice que $\alpha$ tiene sentido positivo si para toda $t$ donde $\alpha$ es derivable, el vector que forma un ángulo de $+\pi/2$ con el vector $\alpha'(t)$ está dirigido al interior de la región. Se dice que $\alpha$ tiene sentido negativo si el vector que forma un ángulo de $+\pi/2$ con $\alpha'(t)$ está dirigido al exterior de la región.

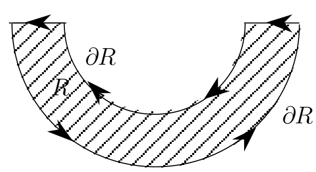
Sea $R$ una región donde $\partial R$ es una unión finita de trazas de curvas. $\partial R$ se dice orientada positivamente si cada curva de la frontera está en sentido positivo y $\partial R$ se dice orientada negativamente si cada curva de la frontera está en sentido negativo.




Orientación positiva




Orientación negativa




$\partial R$ está orientado en sentido positivo

Geométricamente, decir que $\partial R$ está orientada en sentido positivo, significa que al recorrer $\partial R$, el interior de la región se encuentra a la izquierda. Decir que $\partial R$ está orientada negativamente, significa que al recorrer $\partial R$, el interior de la región se encuentra a la derecha.

**Teorema 6.2.6 (Green)** *Sea $R \subseteq \mathbb{R}^2$, tal que $R$ una unión de regiones regulares. Sean $P, Q\colon A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dos funciones de clase $C^1$ donde $A$ es un conjunto abierto y $\overline{R} \subseteq A$. Equivalentemente, $f = (P, Q)\colon R \to \mathbb{R}^2$ es una función de clase $C^1$. Sea $C$ la curva de la frontera $\partial R$, es decir, $C^* = \partial R$. Si $C$ está orientada en sentido positivo, entonces*

$$\int\int_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\, dxdy = \int_C P\ dx + Q\ dy \left(= \oint_{\partial R} P\ dx + Q\ dy\right).$$

*Demostración*.

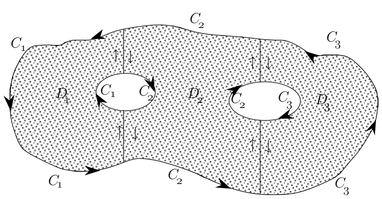
1o.) Primero veamos que la fórmula de Green es equivalente a las 2 igualdades siguientes:

$$\int\int_R \frac{\partial Q}{\partial x}\,dxdy = \int_C Q\,dy \quad \text{y} \quad -\int\int_R \frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy = \int_C P\,dx.$$

En efecto si se cumplen las igualdades anteriores, sumando obtenemos la fórmula de Green.

Recíprocamente, si se cumple la fórmula de Green, la primera igualdad se obtiene con $P = 0$ y la segunda con $Q = 0$.

2o.) Si hemos demostrado la fórmula de Green para una región regular, entonces si $R = D_1 \cup D_2 \cup \cdots \cup D_k$ con cada $D_i$ una región regular y si $C_i$ es la curva $\partial D_i$ orientada en sentido positivo ($1 \leq i \leq k$), para cada región se tiene:



$$\int\int_{D_i} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\,dxdy = \int_{C_i} P\,dx + Q\,dy \ldots (\diamondsuit)$$

Ahora $C^* \subseteq \displaystyle\bigcup_{i=1}^{k} C_i^*$ y la parte de cada $C_i$ que no pertenece a $C$ se recorre en un sentido y después en el contrario, por lo que esta parte de la integral de línea se anula. Se sigue que al sumar las igualdades ($\diamondsuit$) se obtiene:

$$\int\int_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\,dxdy = \sum_{i=1}^{k}\int\int_{D_i} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\,dxdy =$$

$$= \sum_{i=1}^{k}\int_{C_i} P\,dx + Q\,dy = \int_C P\,dx + Q\,dy.$$

3o.) Por los pasos anteriores, podemos suponer que $R$ es una región regular y demostraremos:

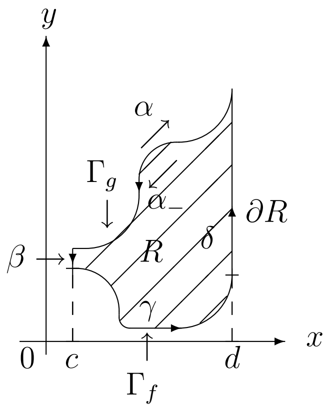
$$\int\int_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\,dxdy = \int_C Q\,dy \quad \text{y} \quad \int\int_R \left(-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\,dxdy = \int_C P\,dx.$$

Por ser $R$ una región regular, se puede poner

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [c,d], f(x) \leq y \leq g(x)\} =$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [e,f], h(y) \leq x \leq \ell(y)\},$$

con $f$, $g$, $h$ y $\ell$ funciones de clase $C^1$.




Usando la primera forma de $R$ se tiene:

$$-\int\int_R \frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy = -\int_c^d \left\{\int_{f(x)}^{g(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy\right\}\,dx =$$

$$= -\int_c^d \left[P(x,g(x)) - P(x,f(x))\right]\,dx = \int_c^d P(x,f(x))\,dx - \int_c^d P(x,g(x))\,dx.$$

Ahora ponemos $C = \gamma \cup \delta \cup \alpha_- \cup \beta$, $\alpha_-^* = \Gamma_g$, $\gamma^* = \Gamma_f$.

Ahora sobre $\beta$ y sobre $\delta$, se tiene que $C_1$ es constante y por lo tanto $C_1' = 0$ ahí. Se sigue que $\displaystyle\int_\beta P\,dx = \int_\delta P\,dx = 0$. Por lo tanto

$$\int_C P\,dx = \int_\gamma P\,dx + \int_\delta P\,dx + \int_{\alpha_-} P\,dx + \int_\beta P\,dx =$$

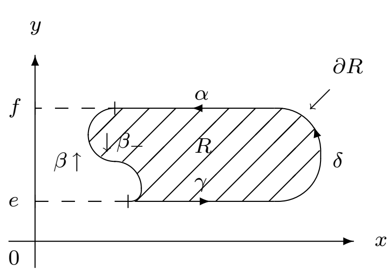
$$= \int_\gamma P\,dx + \int_{\alpha_-} P\,dx = \int_\gamma P\,dx - \int_\alpha P\,dx.$$

Se tiene que $\gamma\colon [c,d] \to \mathbb{R}^2$ está dado por $\gamma(x) = (x, f(x))$, $\gamma'(x) = (1, f'(x))$ y $\alpha\colon [c,d] \to \mathbb{R}^2$ está dada por $\alpha(x) = (x, g(x))$, $\alpha'(x) = (1, g'(x))$, de donde se sigue que:

$$\int_C P\,dx = \int_c^d P(C(x))\cdot C_1'(x)\,dx = \int_c^d P(\gamma(x))\cdot \gamma_1'(x)\,dx - \int_c^d P(\alpha(x))\cdot \alpha_1'(x)\,dx =$$

$$= \int_c^d P(x,f(x))\,dx - \int_c^d P(x,g(x))\,dx,$$

de donde se sigue la primera igualdad.




Para la segunda igualdad usamos la segunda forma de $R$. Ponemos $C = \alpha \cup \beta_- \cup \gamma \cup \delta$ y la integral línea vale 0 sobre $\alpha$ y sobre $\gamma$.

Por lo tanto $\int_C Q\ dy = \int_\delta Q\ dy - \int_\beta Q\ dy$ y ponemos $\delta(y) = (\ell(y), y)$, $\beta(y) = (h(y), y)$ con $e \leq y \leq f$. Se sigue que

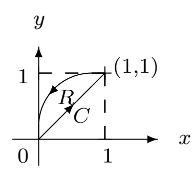
$$\int_C Q\ dy = \int_e^f\ Q(\ell(y), y)\ dy - \int_e^f\ Q(h(y), y)\ dy$$

y

$$\int\int_R \frac{\partial Q}{\partial x}\ dxdy = \int_e^f \left\{ \int_{h(y)}^{f(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}\ dx \right\}\ dy = \int_e^f\ Q(\ell(y), y)\ dy - \int_e^f\ Q(h(y), y)\ dy. \quad ❏$$

**Ejemplos 6.2.7**

(1).- Sea $R$ la región acotada por las curvas $y = x$ y $y^3 = x^2$. Sea $C$ la frontera de $R$ orientada positivamente. Evaluemos $\int_C (x^2 y\ dx + y^3\ dy)$.




$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0, 1], x \leq y \leq x^{2/3}\}$.

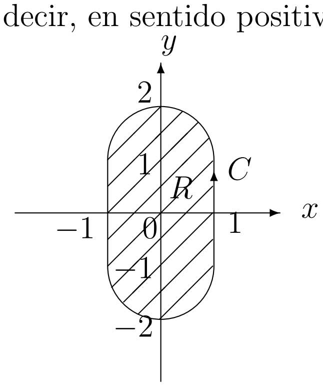
Por el Teorema de Green tenemos ($P = x^2 y$, $Q = y^3$):

$$\int_C x^2 y\ dx + y^3\ dy = \int_C P\ dx + Q\ dy = \int\int_R \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)\ dxdy =$$

$$= \int\int_R \left( \frac{\partial y^3}{\partial x} - \frac{\partial (x^2 y)}{\partial y} \right)\ dxdy = \int_0^1 \int_x^{x^{2/3}} -x^2\ dydx = -\int_0^1 x^2\ [y]_x^{x^{2/3}}\ dx =$$

$$= -\int_0^1 \left( x^{8/3} - x^3 \right)\ dx = -\left[ \frac{3}{11}\ x^{11/3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = -\left( \frac{3}{11} - \frac{1}{4} \right) = \boxed{-\frac{1}{44}}.$$

(2).- Calculamos el trabajo realizado por la fuerza $f(x, y) = (y + 3x, 2y - x)$ sobre la elipse $4x^2 + y^2 = 4$ recorrida en el sentido de las manecillas del reloj, es decir, en sentido positivo.




Se tiene que el interior de la curva es:

$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + y^2 \leq 4\}$ y $C$ es la curva

$f(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)) = (y + 3x, 2y - x)$.

Área de $R = \pi ab = 2\pi \quad (a = 1,\ b = 2)$.

El trabajo es:

$$W = \int_C f = \int_C P\ dx + Q\ dy = \int\int_R \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy =$$

$$= \int\int_R (-1-1)\ dxdy = -2\int\int_R dxdy = 2\ (\text{área de } R) = \boxed{-4\pi}.$$

(3).- <u>Cálculo de Áreas.</u>

Sean $R \subseteq \mathbb{R}^2$ una región, y $P$, $Q$ dos funciones que satisfacen las hipótesis del Teorema de Green.

Si $P$ y $Q$ cumplen $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 1$ se tendrá que:

$$\text{Área } R = \text{vol}(R) = \int_R 1 = \int\int_R dxdy =$$

$$= \int\int_R \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \oint_{\partial R = C} P\ dx + Q\ dy.$$

Por ejemplo, tomemos:

(a) $Q(x,y) = x \quad , \quad P(x,y) = 0.$

(b) $Q(x,y) = 0 \quad , \quad P(x,y) = -y.$

(a) $Q(x,y) = \dfrac{1}{2}\ x \quad , \quad P(x,y) = -\dfrac{1}{2}\ y.$

Entonces:

$$\boxed{\text{Área } R = \int\int_R dxdy = \int_C x\ dy = \int_C y\ dx = \frac{1}{2}\int_C (-y\ dx + x\ dy)}.$$

Para el caso (c), si $\alpha = C\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ es la frontera de $R$ recorrida en sentido positivo, se tendrá:

$$\text{Área } R = \int_\alpha (-y\ dx + x\ dy) = \frac{1}{2}\int_a^b (-\alpha_2\alpha_1' + \alpha_1\alpha_2')\ dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_a^b \det \begin{pmatrix} \alpha_1(t) & \alpha_2(t) \\ \alpha_1'(t) & \alpha_2'(t) \end{pmatrix} dt = \frac{1}{2}\int_a^b \begin{vmatrix} \alpha_1(t) & \alpha_2(t) \\ \alpha_1'(t) & \alpha_2'(t) \end{vmatrix} dt.$$

## 6.3 Integrales de Superficie

Para definir una superficie $S \subseteq \mathbb{R}^3$ tenemos varias alternativas de como hacerlo y lo haremos de tres formas, esencialmente iguales.

**Definición 6.3.1**

i) Una superficie $S$ en $\mathbb{R}^3$ es cualquier componente conexa de un conjunto $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x,y,z) = 0\}$, donde $F\colon A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es de clase $C^1$, con $A$ un conjunto abierto. Se tiene que $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x,y,z) = 0\} = F^{-1}(\{0\})$ es un conjunto cerrado en $A$.

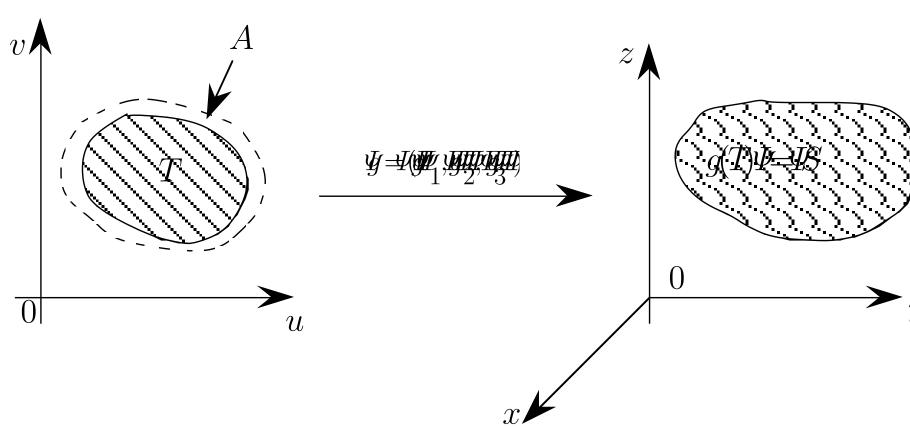
ii) Una superficie en $\mathbb{R}^3$ es la gráfica de una función de clase $C^1$, $f\colon T \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, donde $T$ o bien es un conjunto abierto, o bien es un conjunto cerrado y conexo. Esto es, una superficie es un conjunto de la forma:

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x,y), (x,y) \in T\}.$$

iii) La tercera forma de definir una superficie es por medio de una parametrización y es la forma en que nosotros la usaremos.

Sea $T \subseteq \mathbb{R}^2$ un conjunto conexo. Sea $A$ un conjunto abierto tal que $\overline{T} \subseteq A \subseteq \mathbb{R}^2$ y sea $g\colon A \to \mathbb{R}^3$ una función de clase $C^1$ e inyectiva. Entonces $S = g(T)$ es una superficie en $\mathbb{R}^3$. A $g$ se le llama una parametrización de $S$. La superficie es:

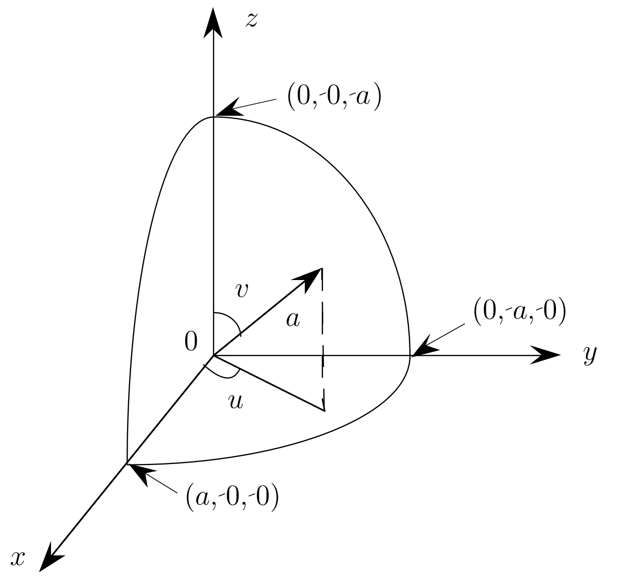
$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = g_1(u,v), y = g_2(u,v), z = g_3(u,v), (u,v) \in T\}.$$




**Ejemplos 6.3.2**

(1).- Si $S \subseteq \mathbb{R}^3$ es una superficie determinada por la ecuación $z = f(x,y)$, es decir, $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x,y)\}$. Entonces una parametrización de $S$ es $g(u,v) = (u,v,f(u,v)) = (x,y,z)$ o, por abuso de la notación, podemos poner $g(x,y) = (x,y,f(x,y))$.

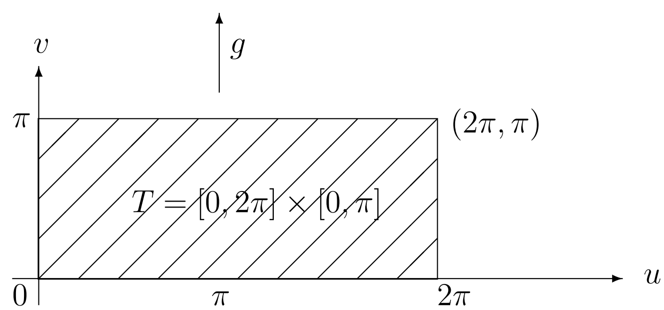
(2).- Parametricemos la esfera con centro en el origen y radio $a$.




$x = a \operatorname{sen} v \cos u$

$y = a \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u$

$z = a \cos v$




Sea $T = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ y sea $g\colon T \to \mathbb{R}^3$ dada por:

$$g(u, v) = (a \operatorname{sen} v \cos u, a \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u, a \cos v) = (x, y, z).$$

Entonces $g$ es una parametrización de la esfera.

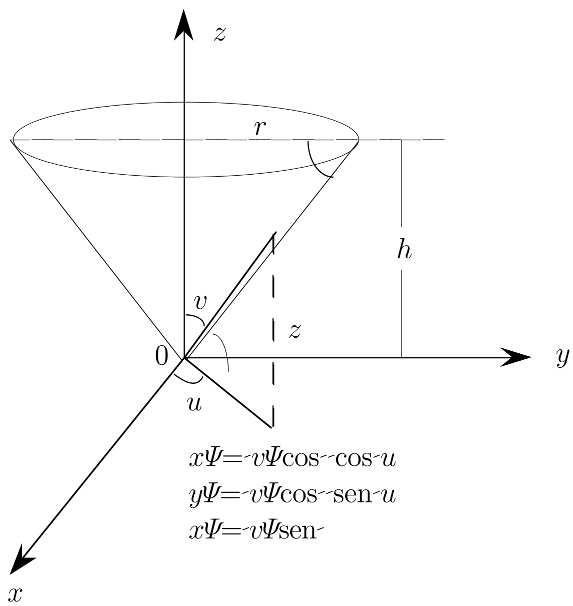
Otra forma de dar esta superficie, es partir de su ecuación, la cual es: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, por lo que $z = \pm\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$.

Entonces $z_1 = f_1(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, $z_2 = f_2(x, y) = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ y por lo tanto $S = \Gamma_{f_1} \cup \Gamma_{f_2}$.

Una última forma de describir $S$ es:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}.$$

(3).-




Parametrización de un cono circular recto de altura $h$ y radio de la base $r$, y vértice en el origen:

Sea $\alpha$ el ángulo que forma el lado recto del cono con el plano $xy$ y $R$ el lado recto del cono. Se tiene

$$\tan\alpha = \frac{h}{r}, \quad \operatorname{sen}\alpha = \frac{h}{R}, \quad \cos\alpha = \frac{r}{R}.$$

Sea $T = [0, 2\pi] \times [0, R] = [0, 2\pi] \times [0, \sqrt{h^2 + r^2}]$ y sea $g\colon T \to \mathbb{R}^3$, $g(u, v) = (x, y, z) = (v\cos\alpha\cos u, v\cos\alpha \operatorname{sen} u, v \operatorname{sen}\alpha)$. Entonces $g$ es una parametrización del cono.

Además: $x^2 + y^2 = v^2\cos^2\alpha(\cos^2 u + \operatorname{sen}^2 u) = v^2\cos^2\alpha = v^2\operatorname{sen}^2\alpha\cot^2\alpha = \cot^2\alpha \cdot z^2$. Es decir la ecuación del cono es:

$$x^2 + y^2 = \cot^2\alpha \cdot z^2 = \frac{r^2}{h^2} \cdot z^2$$

y por lo tanto el cono puede ser descrito por:

$$C = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = \frac{r^2}{h^2} \cdot z^2, 0 \le z \le h \right\}.$$

### 6.3.1 Interpretación Geométrica de $\dfrac{\partial g}{\partial u} \times \dfrac{\partial g}{\partial v}$

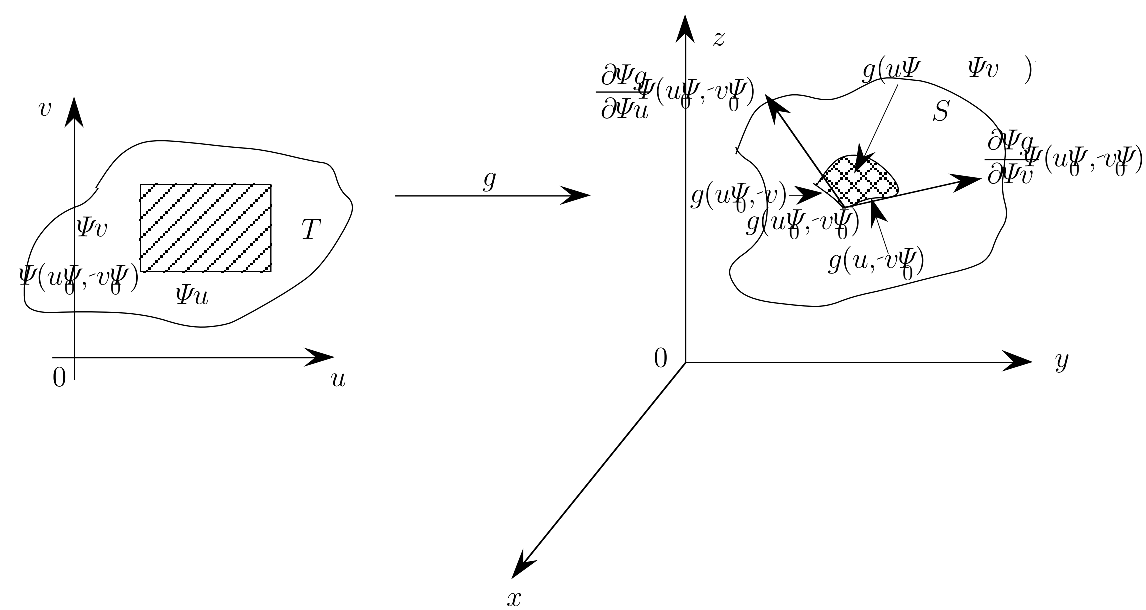
Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie y sea $g\colon T \subseteq \mathbb{R}^2 \to S \subseteq \mathbb{R}^3$ una parametrización de $S$, $g$ función de clase $C^1$, $g = (g_1, g_2, g_3)$.

Fijamos un punto $(u_0, v_0) \in T$ y se tiene que $\dfrac{\partial g}{\partial u}$ y $\dfrac{\partial g}{\partial v}$, valuadas en $(u_0, v_0)$, son vectores en $\mathbb{R}^3$ y se tiene que:

$$\frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial g_1}{\partial u} & \dfrac{\partial g_2}{\partial u} & \dfrac{\partial g_3}{\partial u} \\ \dfrac{\partial g_1}{\partial v} & \dfrac{\partial g_2}{\partial v} & \dfrac{\partial g_3}{\partial v} \end{vmatrix} = \hat{\imath} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial g_2}{\partial u} & \dfrac{\partial g_3}{\partial u} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial v} & \dfrac{\partial g_3}{\partial v} \end{vmatrix} + \hat{\jmath} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial g_3}{\partial u} & \dfrac{\partial g_1}{\partial u} \\ \dfrac{\partial g_3}{\partial v} & \dfrac{\partial g_1}{\partial v} \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial u} & \dfrac{\partial g_2}{\partial u} \\ \dfrac{\partial g_1}{\partial v} & \dfrac{\partial g_2}{\partial v} \end{vmatrix} =$$

$$= \left( \frac{\partial(g_2, g_3)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(g_3, g_1)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(u, v)} \right) = \vec{N}.$$

Ahora, al considerar $\dfrac{\partial g}{\partial u}(u_0, v_0)$, obtenemos el vector tangente a la curva $g(u, v_0)$ y al considerar $\dfrac{\partial g}{\partial v}(u_0, v_0)$, obtenemos el vector tangente a la curva $g(u_0, v)$.




Al variar $\Delta u$ en $T$ en la dirección $u$, entonces se varía aproximadamente $\left\| \dfrac{\partial g}{\partial u} \right\| \cdot \Delta u$ en la dirección $\dfrac{\partial g}{\partial u}$ en $g(T) = S$ puesto que $\dfrac{\partial g}{\partial u}(u_0, v_0)$ es la "velocidad" de variación en la dirección de la curva $g(u, v_0)$.

Al variar $\Delta v$ en $T$ en la dirección $v$, se varía aproximadamente $\left\|\frac{\partial g}{\partial v}\right\| \cdot \Delta v$ en la dirección $\frac{\partial g}{\partial v}$ en $g(T) = S$, puesto que $\frac{\partial g}{\partial v}(u_0, v_0)$ es la “velocidad” de variación en la dirección de la curva $g(u_0, v)$.

Entonces la imagen del rectángulo $\Delta u \times \Delta v$ en $T$ bajo la función $g$ es aproximadamente el paralelogramo en $S$ determinado por los vectores $\frac{\partial g}{\partial u}(u_0, v_0) \cdot \Delta u$ y $\frac{\partial g}{\partial v}(u_0, v_0) \cdot \Delta v$ y cuya área es:

$$\left(\left\|\frac{\partial g}{\partial u}\right\| \Delta u\right) \cdot \left(\left\|\frac{\partial g}{\partial v}\right\| \Delta v\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\angle\left(\frac{\partial g}{\partial u}\Delta u, \frac{\partial g}{\partial v}\Delta v\right)\right) =$$

$$= \left\|\frac{\partial g}{\partial u}\ \Delta u \times \frac{\partial g}{\partial v}\Delta v\right\| = \left\|\frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v}\right\| \Delta u \cdot \Delta v.$$

Además $\frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v}$ es un vector normal al plano tangente de la superficie $S$, en el punto $g(u_0, v_0) = (x_0, y_0, z_0)$.

En resumen: $\left\|\frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v}\right\|$ $dudv$ “es la diferencial $dS$” de área en $S$ y $\frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v}$ es un vector normal al plano $S$ en el punto $g(u_0, v_0) = (x_0, y_0, z_0)$.

Con esta interpretación damos la siguiente:

**Definición 6.3.3** Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ y sea $g\colon T \subseteq \mathbb{R}^2 \to S \subseteq \mathbb{R}^3$ una parametrización de la superficie $S$ de clase $C^1$. Entonces se define el área de $S$ por:

$$\boxed{\text{Área } S = a(S) = \int\int_T \left\|\frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v}\right\|\ dudv}.$$

Al vector unitario $\vec{n} = \frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|}$, en el caso en que $\vec{N} = \frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} \neq \vec{0}$, se le llama <u>vector normal</u> a $S$ y $\vec{n}$ depende de $u$ y de $v$.

Es importante notar que si cambiamos la parametrización, el vector normal que obtengamos puede ser $\vec{n}$ ó $-\vec{n}$. Por ejemplo si $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es la rotación de $+\pi/2$ y $T_1 = \varphi(T)$, entonces $h\colon T_1 \to S$ dada por $g \circ \varphi^{-1} = h$, y por lo tanto $g = h \circ \varphi$, cumple que $\frac{\partial h}{\partial r} \times \frac{\partial h}{\partial s} = -\left(\frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v}\right)$ con $(r, s) \in T_1$. Por lo tanto es importante decidir cual de los dos vectores tomamos. La elección de tal vector significa “orientar” la superficie.

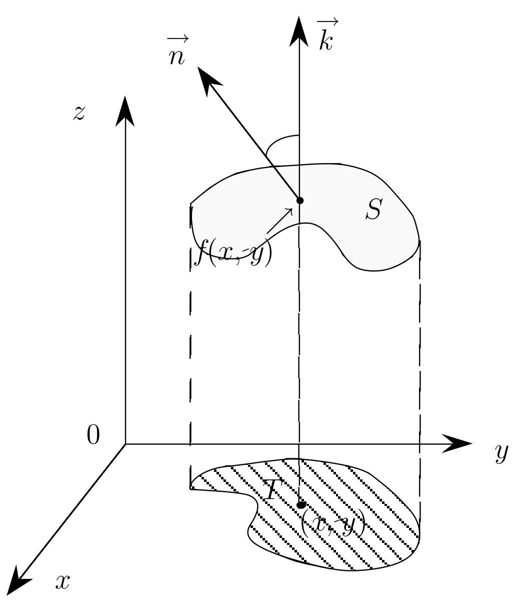
**Ejemplos 6.3.4**

(1).- Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ la superficie determinada por la ecuación $z = f(x, y)$ donde $f$ es una función de clase $C^1$, es decir, $S = \Gamma_f$. Sea $g\colon T \subseteq \mathbb{R}^2 \to S \subseteq \mathbb{R}^3$ la parametrización de $S$ dada por $g(u, v) = (u, v, f(u, v))$. En este caso:

$$\frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 0 & \dfrac{\partial f}{\partial u} \\ 0 & 1 & \dfrac{\partial f}{\partial v} \end{vmatrix} = -\frac{\partial f}{\partial u}\hat{\imath} - \frac{\partial f}{\partial v}\hat{\jmath} + \hat{k} = \left(-\frac{\partial f}{\partial u}, -\frac{\partial f}{\partial v}, 1\right)$$

y por lo tanto

$$\boxed{\begin{aligned} a(S) = \text{área } S &= \int\!\!\int_T \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2}\, dudv = \\ &= \int\!\!\int_T \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dxdy. \end{aligned}}$$




Ahora si tenemos

$\vec{N} = \dfrac{\partial g}{\partial u} \times \dfrac{\partial g}{\partial v}$ y $\vec{n} = \dfrac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|}$

y $\gamma$ es el ángulo que forman los vectores $\vec{n}$ y $\vec{k}$, entonces se tiene que:

$$\cos\gamma = \frac{\vec{n} \cdot \vec{k}}{\|\vec{n}\| \cdot \|\vec{k}\|} = \frac{\vec{n} \cdot \vec{k}}{\|\vec{n}\|} = \frac{\vec{N} \cdot \vec{k}}{\|\vec{N}\|} = \frac{\left(-\dfrac{\partial f}{\partial u}, -\dfrac{\partial f}{\partial v}, 1\right) \cdot (0, 0, 1)}{\|\vec{N}\|} =$$

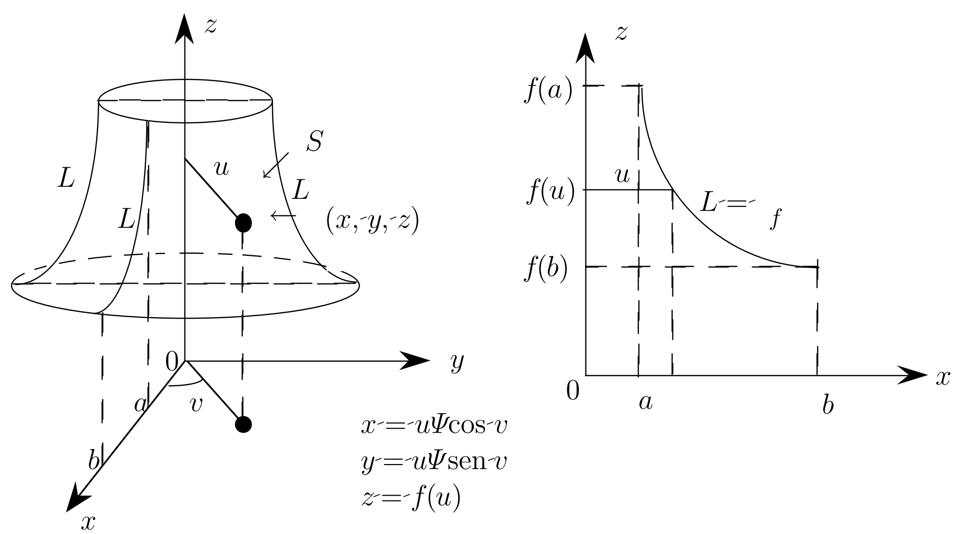
$$= \frac{1}{\|\vec{N}\|} = \frac{1}{\left\| \dfrac{\partial f}{\partial u} \times \dfrac{\partial f}{\partial v} \right\|}$$

y por lo tanto

$$\boxed{a(S) = \int\!\!\int_T \left\| \frac{\partial f}{\partial x} \times \frac{\partial f}{\partial y} \right\| \, dxdy = \int\!\!\int_T \frac{1}{\cos\gamma} \, dxdy = \int\!\!\int_T \sec\gamma \, dxdy}.$$

(2).- Cálculo de áreas de revolución:

Sea $L$ la curva dada por la ecuación $z = f(x)$, $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ con $a \geq 0$, es decir, $L = \Gamma_f$.




La parametrización de la superficie $S$ que se obtiene al girar $2\pi$ la curva $L$ alrededor del eje $z$ queda:

$$g\colon [a,b] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \quad g(u,v) = (u\cos v, u \operatorname{sen} v, f(u)) = (x,y,z).$$

Ahora

$$\frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \cos v & \operatorname{sen} v & f'(u) \\ -u \operatorname{sen} v & u\cos v & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= u\cos^2 v \; \hat{k} - u f'(u) \operatorname{sen} v \; \hat{\jmath} + u \operatorname{sen}^2 v \; \hat{k} - u\cos v \; f'(u) \; \hat{\imath} =$$

$$= (-u\cos v\ f'(u), -u\,\mathrm{sen}\, v\ f'(u), u),$$

por lo tanto

$$\left\|\frac{\partial g}{\partial u}\times\frac{\partial g}{\partial v}\right\| = |u|\sqrt{(f'(u))^2\ (\cos^2 v+\mathrm{sen}^2\, v)+1} = u\sqrt{1+(f'(u))^2},\ u\geq 0.$$

Se sigue que

$$a(S) = \int\int_{[a,b]\times[0,2\pi]} u\sqrt{1+(f'(u))^2}\ dudv =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left\{\int_a^b u\sqrt{1+(f'(u))^2}\ du\right\}\ dv = 2\pi\int_a^b u\sqrt{1+(f'(u))^2}\ du,$$

por lo que

$$a(S) = 2\pi\int_a^b u\sqrt{1+(f'(u))^2}\ du,$$

o lo que es lo mismo

$$\boxed{a(S) = 2\pi\int_a^b x\sqrt{1+(f'(x))^2}\ dx}.$$

En seguida extendemos la definición de área de una superficie a la integral de superficie.

**Definición 6.3.5** Sea $S\subseteq\mathbb{R}^3$ una superficie y $g\colon T\subseteq\mathbb{R}^2\to S\subseteq\mathbb{R}^3$ una parametrización de $S$, $g$ una función de clase $C^1$. Sea $f\colon S\to\mathbb{R}$ una función acotada. Se define la <u>integral de superficie</u> de $f$ sobre $S$ por:

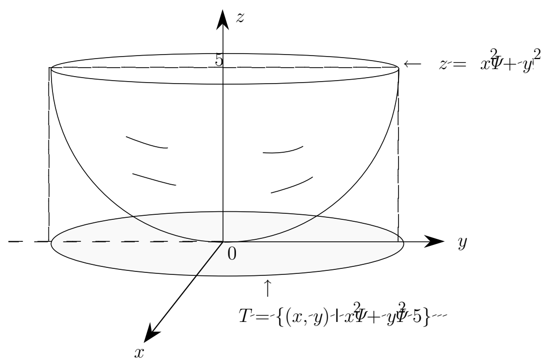
$$\int\int_S f\cdot dS = \int\int_T f(g(u,v))\left\|\frac{\partial g}{\partial u}\times\frac{\partial g}{\partial v}\right\|\ dudv$$

siempre y cuando la integral del segundo miembro de la igualdad exista.

**Ejemplos 6.3.6**

(1).- Si $f=1$, $\displaystyle\int\int_S f\cdot dS = \int\int_T\left\|\frac{\partial g}{\partial u}\times\frac{\partial g}{\partial v}\right\|\ dudv = a(S) =$ área $S$.

(2).- Calculemos la integral de la función $f(x,y,x) = \sqrt{1+z+3(x^2+y^2)}$ sobre la superficie dada por $z=x^2+y^2$ con $0\leq z\leq 5$.




La superficie está parametrizada por:

$g\colon T \to \mathbb{R}^3$, $g(u,v) = (u, v, f(u,v)) =$

$= (u, v, u^2 + v^2)$ con

$T = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 \leq 5\}$.

$f(x,y,z) = \sqrt{1 + x + 3(x^2 + y^2)}$,

por lo tanto

$$(f \circ g)(u,v) = f(u, v, u^2 + v^2) = \sqrt{1 + 4(u^2 + v^2)}$$

y

$$\left\| \frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} \right\| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{1 + (2u)^2 + (2v)^2} = \sqrt{1 + 4(u^2 + v^2)}.$$

Por lo tanto

$$\int\int_S f \cdot dS = \int\int_{u^2+v^2\leq 5} (\sqrt{1 + 4(u^2+v^2)}) \cdot (\sqrt{1 + 4(u^2+v^2)})\ dudv =$$

$$= \int\int_{u^2+v^2\leq 5} (1 + 4(u^2+v^2))\ dudv.$$

Utilizando coordenadas polares se tendrá:

$$\int\int_S f \cdot dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{5}} (1 + 4r^2)\ r\ drd\theta = 2\pi \left[\frac{r^2}{2} + r^4\right]_0^{\sqrt{5}} =$$

$$= 2\pi \left[\frac{5}{2} + 25\right] = \pi[5 + 50] = \boxed{55\pi}.$$

**Teorema 6.3.7** *La integral de superficie es invariante bajo cambio de parametrización, es decir, sean $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie, $f\colon S \to \mathbb{R}$ una función acotada y sean $g\colon T \subseteq \mathbb{R}^2 \to S \subseteq \mathbb{R}^3$ y $h\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S \subseteq \mathbb{R}^3$ dos parametrizaciones de clase $C^1$ de $S$ tales que existe $\varphi\colon T \to U$ función biyectiva y de clase $C^1$ tal que $h \circ \varphi = g$. Entonces*

$$\int\int_T f(g(u,v)) \left\| \frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} \right\|\ dudv = \int\int_U f(h(s,t)) \left\| \frac{\partial h}{\partial s} \times \frac{\partial h}{\partial t} \right\|\ dsdt = \int\int_S f \cdot dS.$$

*Demostración*. Se tiene: $g(u,v) = h(\varphi(u,v)) = h(\varphi_1(u,v), \varphi_2(u,v)) = h(s,t)$. Por lo tanto

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial u} &= \frac{\partial h}{\partial s}\cdot\frac{\partial \varphi_1}{\partial u} + \frac{\partial h}{\partial t}\cdot\frac{\partial \varphi_2}{\partial u} \\ \frac{\partial g}{\partial v} &= \frac{\partial h}{\partial s}\cdot\frac{\partial \varphi_1}{\partial v} + \frac{\partial h}{\partial t}\cdot\frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \end{aligned}\right\} \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial g}{\partial u}\times\frac{\partial g}{\partial v} = \left(\frac{\partial h}{\partial s}\times\frac{\partial h}{\partial t}\right)\cdot\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial u}\cdot\frac{\partial \varphi_2}{\partial v} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}\cdot\frac{\partial \varphi_1}{\partial v}\right) = \left(\frac{\partial h}{\partial s}\times\frac{\partial h}{\partial t}\right)\cdot\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(u,v)},$$

por lo tanto

$$\left\|\frac{\partial g}{\partial u}\times\frac{\partial g}{\partial v}\right\| = \left|\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(u,v)}\right|\cdot\left\|\frac{\partial h}{\partial s}\times\frac{\partial h}{\partial t}\right\|.$$

Además se tiene $\varphi(T) = U$ y $|\det\ \varphi'| = \left|\dfrac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(u,v)}\right|$. Aplicando el Teorema de Cambio de Variable, tendremos:

$$\int\!\!\int_{U=\varphi(T)} f(h(s,t))\cdot\left\|\frac{\partial h}{\partial s}\times\frac{\partial h}{\partial t}\right\|\,dsdt = \int\!\!\int_{\varphi(T)} (f\circ h)\left\|\frac{\partial h}{\partial s}\times\frac{\partial h}{\partial t}\right\| =$$

$$= \int\!\!\int_T (f\circ h\circ\varphi)\left(\left\|\frac{\partial h}{\partial s}\times\frac{\partial h}{\partial t}\right\|\circ\varphi\right)|\det\ \varphi'| =$$

$$= \int\!\!\int_T (f\circ g)\ \left\|\left(\frac{\partial h}{\partial s}\circ\varphi\right)\times\left(\frac{\partial h}{\partial t}\circ\varphi\right)\right\|\ \left|\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(u,v)}\right| =$$

$$= \int\!\!\int_T (f\circ g)\ \left\|\frac{\partial g}{\partial u}\times\frac{\partial g}{\partial v}\right\| = \int\!\!\int_T f(g(u,v))\ \left\|\frac{\partial g}{\partial u}\times\frac{\partial g}{\partial v}\right\|\ dudv. \qquad ❏$$

Sea $S\subseteq\mathbb{R}^3$ una superficie y sea $g\colon T\subseteq\mathbb{R}^2\to S\subseteq\mathbb{R}^3$ una parametrización de $S$ de clase $C^1$ fijada de antemano (después aclararemos porqué la necesitamos fija). Sea $F\colon S\to\mathbb{R}^3$. Extendemos nuestra definición de integral de superficie a $F$ definiendo:

**Definición 6.3.8** La integral de superficie de $F$ sobre $S$ está dada por:

$$\int\!\!\int_S F\cdot\vec{n}\ dS = \int\!\!\int_S F\cdot d\vec{S},$$

donde $\vec{n} = \dfrac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|}$ con $\vec{N} = \dfrac{\partial g}{\partial u}\times\dfrac{\partial g}{\partial v}\neq\vec{0}$.

Desarrollando la definición anterior, se tiene:

$$\boxed{\begin{aligned}\int\int_S F\cdot\vec{n}\ dS &= \int\int_T F(g(u,v))\cdot\vec{n}(u,v)\ \left\|\frac{\partial g}{\partial u}\times\frac{\partial g}{\partial v}\right\|\ dudv =\\ = \int\int_T F(g(u,v))\cdot\left(\frac{\partial g}{\partial u}\times\frac{\partial g}{\partial v}\right)\ dudv &= \int\int_T \langle F(g(u,v)),\frac{\partial g}{\partial u}\times\frac{\partial g}{\partial v}\rangle\ dudv.\end{aligned}}$$

Si $F(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$ y $g(u,v)=(g_1(u,v),g_2(u,v),g_3(u,v))$ y

$$\frac{\partial g}{\partial u}\times\frac{\partial g}{\partial v}=\left(\frac{\partial(g_2,g_3)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(g_3,g_1)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(g_1,g_2)}{\partial(u,v)}\right),$$

entonces se tiene:

$$\boxed{\begin{aligned}\int\int_S F\cdot\vec{n}\ dS &= \int\int_T P(g(u,v))\ \frac{\partial(g_2,g_3)}{\partial(u,v)}\ dudv+\\ +\int\int_T Q(g(u,v))\ \frac{\partial(g_3,g_1)}{\partial(u,v)}\ dudv &+ \int\int_T R(g(u,v))\ \frac{\partial(g_1,g_2)}{\partial(u,v)}\ dudv.\end{aligned}}$$

**Notación 6.3.9**

$$\int\int_T P(g(u,v))\ \frac{\partial(g_2,g_3)}{\partial(u,v)}\ dudv = \int\int_S P(x,y,z)\ dy\wedge dz = \int\int_S P\ dy\wedge dz,$$

$$\int\int_T Q(g(u,v))\ \frac{\partial(g_3,g_1)}{\partial(u,v)}\ dudv = \int\int_S Q(x,y,z)\ dz\wedge dx = \int\int_S Q\ dz\wedge dx,$$

$$\int\int_T R(g(u,v))\ \frac{\partial(g_1,g_2)}{\partial(u,v)}\ dudv = \int\int_S R(x,y,z)\ dx\wedge dy = \int\int_S R\ dx\wedge dy.$$

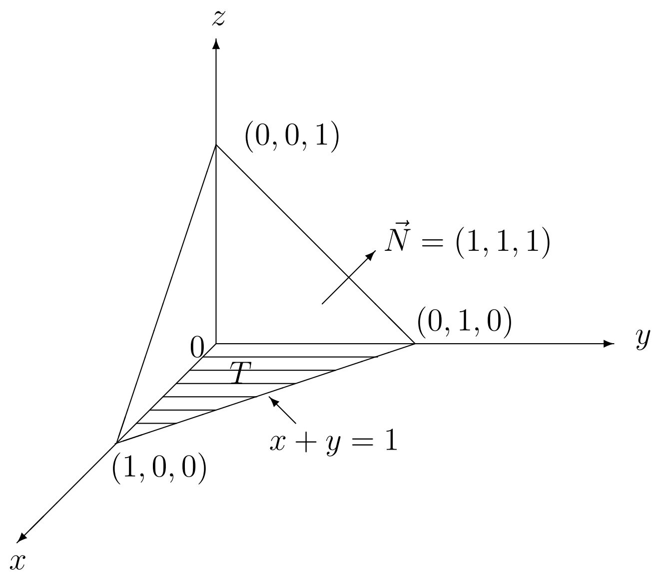
Con las notaciones anteriores, tendremos:

$$\boxed{\int\int_S F\cdot\vec{n}\ dS = \int\int_S P\ dy\wedge dz + Q\ dz\wedge dx + R\ dx\wedge dy.}$$

**Observación 6.3.10** La razón de prefijar la parametrización de $g$, es que si tomamos otra parametrización podemos obtener el vector $-\vec{n}$ en lugar de $\vec{n}$ y en este caso obtendremos $-\int\int_S F\cdot\vec{n}\ dS$ en lugar de $\int\int_S F\cdot\vec{n}\ dS$.

De hecho el problema es mucho más complejo y depende de que la superficie $S$ sea "orientable" o "no orientable".

**Ejemplo 6.3.11**




Sea $S$ la superficie en $\mathbb{R}^3$ determinado por el plano $x+y+z=1$ en el primer octante, parametrizada por $g\colon T \to S$.

$$g(u,v) = (u, v, 1-u-v),\ T = \{(u,v) \mid 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1-u\}.$$

Sea $F(x,y,z) = (x^2, \operatorname{sen} y, e^z)$. Se tiene

$$\frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} = \left(-\frac{\partial g}{\partial u}, -\frac{\partial g}{\partial v}, 1\right) = (1,1,1).$$

Entonces

$$\int\int_S F \cdot \vec{n}\ dS = \int\int_T \langle F(g(u,v)), \frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v}\rangle\ dudv =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-u} (u^2 + \operatorname{sen} v + e^{1-u-v})\ dvdu = \int_0^1 \left[u^2 v - \cos v - e^{1-u-v}\right]_0^{1-u}\ du =$$

$$= \int_0^1 \left\{u^2(1-u) - \cos(1-u) + 1 - 1 + e^{1-u}\right\}\ du = \left[\frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \operatorname{sen}(1-u) - e^{1-u}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \operatorname{sen} 0 - e^0 - 0 + 0 - \operatorname{sen} 1 + e^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - 1 - \operatorname{sen} 1 + e = \boxed{e - \operatorname{sen} 1 - \frac{11}{12}}.$$

## 6.4 Teoremas de Stokes y Gauss

El Teorema de Stokes es una generalización al Teorema de Green:

$$\int\int_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)\ dxdy = \oint_{\partial S} P\ dx + Q\ dy$$

para superficies en $\mathbb{R}^3$.

**Definición 6.4.1** Sea $A \subseteq \mathbb{R}^3$ y $F\colon A \to \mathbb{R}^3$ una función de clase $C^1$ con $A$ un conjunto abierto. Se define el rotacional de $F$ por:

$$\text{rot } F = \nabla \times F = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \left( \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \hat{\imath} + \left( \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \hat{\jmath} + \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \hat{k} =$$
$$= \left( \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right).$$

También definimos la divergencia de $F$ por:

$$\text{div } F = \nabla \cdot F = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (F_1, F_2, F_3) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}.$$

**Observación 6.4.2** Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ y sea $g\colon T \subseteq \mathbb{R}^2 \to S \subseteq \mathbb{R}^3$ una parametrización de clase $C^1$ de $S$ fijada de antemano. Sea $F\colon S \to \mathbb{R}^3$ una función de clase $C^1$ con $F = (P, Q, R)$. Entonces la integral de superficie del rotacional de $F$ con respecto a la parametrización $g$ es:

$$\int\!\!\int_S \text{rot } F \cdot d\vec{S} = \int\!\!\int_T (\text{rot } F \cdot \vec{n})\, dS =$$
$$= \int\!\!\int_T \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \circ g(u,v)\, \frac{\partial(g_2, g_3)}{\partial(u,v)}\, dudv +$$
$$+ \int\!\!\int_T \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \circ g(u,v)\, \frac{\partial(g_3, g_1)}{\partial(u,v)}\, dudv +$$
$$+ \int\!\!\int_T \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \circ g(u,v)\, \frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(u,v)}\, dudv =$$
$$= \int\!\!\int_S \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy,$$

por lo tanto

$$\boxed{\begin{gathered} \int\!\!\int_S \text{rot } F \cdot d\vec{S} = \\ = \int\!\!\int_S \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy. \end{gathered}}$$

Ahora si $g\colon T \subseteq \mathbb{R}^2 \to S \subseteq \mathbb{R}^3$ es una parametrización de $S$ con $g$ una función de clase $C^1$ y definida sobre un conjunto abierto $A \subseteq \mathbb{R}^2$ tal que $\overline{T} \subseteq A$ ($g$ es de clase $C^1$ en $A$), y además $T$ es un conjunto acotado por una curva simple de Jordan $\Gamma$ de clase $C^1$ por tramos orientada (positiva o negativamente), entonces si $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ es una parametrización de $\Gamma$, es decir, $\alpha^* = \Gamma$, se tiene que $g \circ \alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$ es la parametrización inducida de $g(\Gamma) = C$ y $C$ tiene la orientación inducida por $\Gamma$. También, al haber fijado $g$, $S$ tiene la orientación que le da la parametrización.

Con estas aclaraciones, podemos enunciar el Teorema de Stokes:

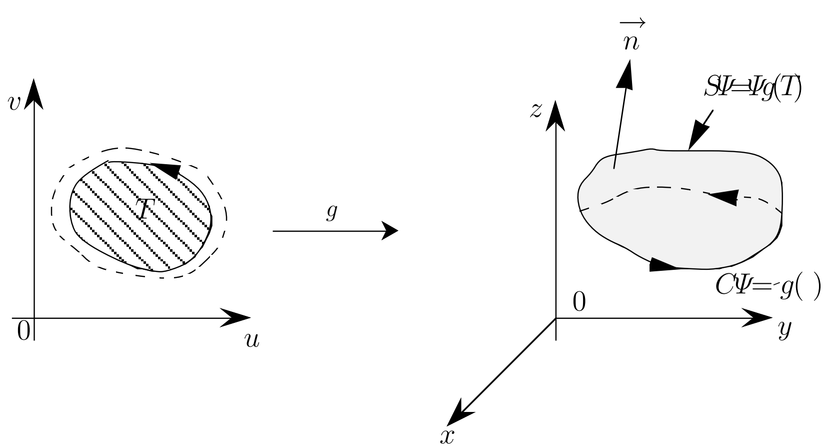
**Teorema 6.4.3 (Stokes)** *Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie y $g\colon T \subseteq \mathbb{R}^2 \to S \subseteq \mathbb{R}^3$ una parametrización (fija) de $S$, con $g$ una función de clase $\underline{C^2}$ sobre un conjunto abierto $A \subseteq \mathbb{R}^2$ tal que $\overline{T} \subseteq A$. Si $T$ está acotado por una curva simple de Jordan $\Gamma$ de clase $C^1$ por tramos y $\underline{\Gamma \text{ orientada en sentido positivo}}$ y si $C = g(\Gamma)$, la cual es una curva de clase $C^1$ por tramos simple de Jordan, tiene la orientación inducida por $\Gamma$, entonces para una función $F = (P, Q, R)\colon S \to \mathbb{R}^3$ de clase $C^1$, se tiene:*

$$\int\!\!\int_S (\text{rot } F) \cdot d\vec{S} = \int_C F,$$

*o en símbolos:*

$$\boxed{\begin{gathered}\int\!\!\int_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy = \\ = \int_C P\ dx + Q\ dy + R\ dz.\end{gathered}}$$

<u>Demostración</u>.



$$\text{Probaremos :} \quad \int_C P\ dx = \int\int_S \left(-\frac{\partial P}{\partial y}\ dx \wedge dy + \frac{\partial P}{\partial z}\ dz \wedge dx\right),$$

$$\int_C Q\ dy = \int\int_S \left(-\frac{\partial Q}{\partial z}\ dy \wedge dz + \frac{\partial Q}{\partial x}\ dx \wedge dy\right),$$

$$\int_R R\ dz = \int\int_S \left(-\frac{\partial R}{\partial x}\ dz \wedge dx + \frac{\partial R}{\partial y}\ dy \wedge dz\right).$$

Al tener estas tres igualdades, sumando, obtenemos la fórmula de Stokes.
Sólo haremos la primera igualdad, pues las otras dos son completamente análogas.
Se tiene

$$\int\int_S \left(-\frac{\partial P}{\partial y}\ dx \wedge dy + \frac{\partial P}{\partial z}\ dz \wedge dx\right) =$$

$$= \int\int_T \left\{\left(-\frac{\partial P}{\partial y} \circ g\right)\ \frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(u, v)} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} \circ g\right)\ \frac{\partial(g_3, g_1)}{\partial(u, v)}\right\}\ dudv.$$

Ahora:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left((P \circ g)\frac{\partial g_1}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left((P \circ g)\frac{\partial g_1}{\partial u}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial u}(P \circ g)\ \frac{\partial g_1}{\partial v} + (P \circ g)\ \frac{\partial^2 g_1}{\partial u \partial v} - \frac{\partial}{\partial v}(P \circ g)\ \frac{\partial g_1}{\partial u} - (P \circ g)\ \frac{\partial^2 g_1}{\partial v \partial u}.$$

Por ser $g$ función de clase $C^2$, se tiene que $\dfrac{\partial^2 g_1}{\partial u \partial v} = \dfrac{\partial^2 g_1}{\partial v \partial u}$, de donde :

$$\frac{\partial}{\partial u}\left((P \circ g)\frac{\partial g_1}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left((P \circ g)\frac{\partial g_1}{\partial u}\right) = \frac{\partial}{\partial u}(P \circ g)\frac{\partial g_1}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial v}(P \circ g)\frac{\partial g_1}{\partial u} =$$

$$= \frac{\partial P}{\partial x} \cdot \frac{\partial g_1}{\partial u} \cdot \frac{\partial g_1}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \frac{\partial g_2}{\partial u} \cdot \frac{\partial g_1}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial g_3}{\partial u} \cdot \frac{\partial g_1}{\partial v} -$$

$$-\frac{\partial P}{\partial x} \cdot \frac{\partial g_1}{\partial v} \cdot \frac{\partial g_1}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \frac{\partial g_2}{\partial v} \cdot \frac{\partial g_1}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial g_3}{\partial v} \cdot \frac{\partial g_1}{\partial u} =$$

$$= -\frac{\partial P}{\partial y}\left\{\frac{\partial g_1}{\partial u} \cdot \frac{\partial g_2}{\partial v} - \frac{\partial g_1}{\partial v} \cdot \frac{\partial g_2}{\partial u}\right\} + \frac{\partial P}{\partial z}\left\{\frac{\partial g_3}{\partial u} \cdot \frac{\partial g_1}{\partial v} - \frac{\partial g_3}{\partial v} \cdot \frac{\partial g_1}{\partial u}\right\} =$$

$$= -\frac{\partial P}{\partial y} \cdot \frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(u, v)} + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial(g_3, g_1)}{\partial(u, v)},$$

por lo tanto:

$$\int\int_T \left(-\frac{\partial P}{\partial y} \cdot \frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(u, v)} + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial(g_3, g_1)}{\partial(u, v)}\right)\ dudv =$$

$$= \int\int_T \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left( (P \circ g) \frac{\partial g_1}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left( (P \circ g) \frac{\partial g_1}{\partial u} \right) \right\} \, dudv.$$

Aplicamos el Teorema de Green al segundo miembro de la igualdad anterior y obtenemos:

$$\int\int_T \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left( (P \circ g) \frac{\partial g_1}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left( (P \circ g) \frac{\partial g_1}{\partial u} \right) \right\} \, dudv =$$

$$= \int_\Gamma (P \circ g) \, \frac{\partial g_1}{\partial u} \, du + (P \circ g) \, \frac{\partial g_1}{\partial v} \, dv.$$

Si $\alpha \colon [a, b] \to \mathbb{R}^2$ es una parametrización de $\Gamma$, es decir, $\alpha^* = \Gamma$, entonces $g \circ \alpha \colon [a, b] \to \mathbb{R}^3$ es una parametrización de $C$ que le da la orientación inducida por $\Gamma$. Se sigue que:

$$\int_C P \, dx = \int_a^b P(g(\alpha(t))) \, (g \circ \alpha)'_1(t) \, dt = \int_a^b P(g(\alpha(t))) \, (g_1(\alpha_1(t), \alpha_2(t)))' \, dt =$$

$$= \int_a^b P(g(\alpha(t))) \, \left\{ \frac{\partial g_1}{\partial u} \, \alpha'_1(t) + \frac{\partial g_1}{\partial v} \, \alpha'_2(t) \right\} \, dt.$$

Por otro lado, tenemos que:

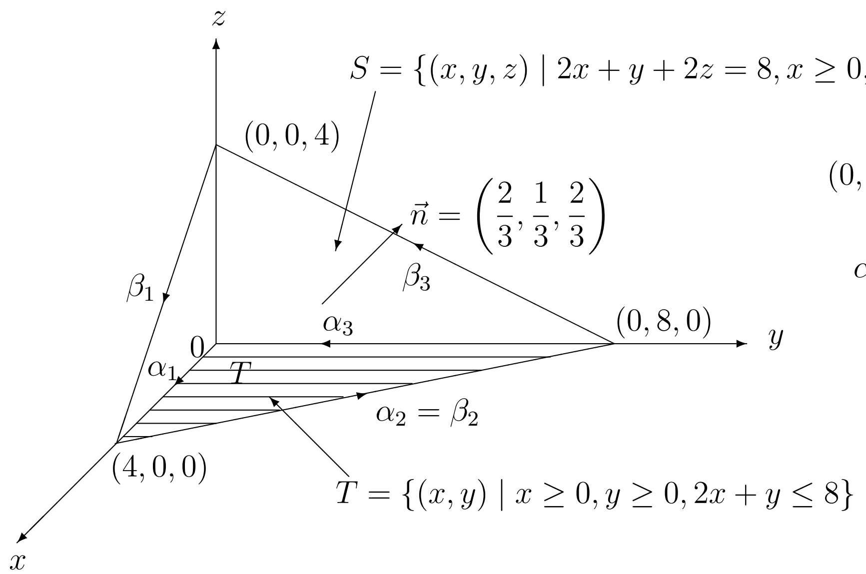
$$\int\int_S -\frac{\partial P}{\partial y} \, dx \wedge dy + \frac{\partial P}{\partial z} \, dz \wedge dx = \int_\Gamma (P \circ g) \, \frac{\partial g_1}{\partial u} \, du + (P \circ g) \, \frac{\partial g_1}{\partial v} \, dv =$$

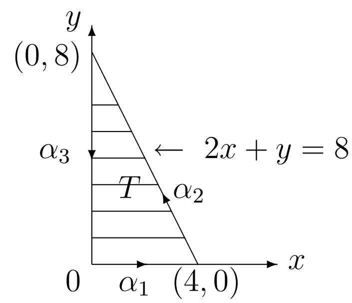
$$= \int_a^b \left\{ P(g(\alpha(t))) \, \frac{\partial g_1}{\partial u} \, \alpha'_1(t) + P(g(\alpha(t))) \, \frac{\partial g_1}{\partial v} \, \alpha'_2(t) \right\} \, dt = \int_C P \, dx.$$

Por lo tanto

$$\int\int_S \left( -\frac{\partial P}{\partial y} \, dx \wedge dy + \frac{\partial P}{\partial z} \, dz \wedge dx \right) = \int_C P \, dx. \qquad \square$$

**Ejemplo 6.4.4** Comprobemos directamente que el Teorema de Stokes se cumple para la función $F(x, y, z) = (xz, -y, x^2 y)$ y $S$ es la superficie determinada por $2x + y + 2z = 8$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.




Se tiene: $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y + 2z = 8, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$ y $g\colon T \subseteq \mathbb{R}^2 \to S \subseteq \mathbb{R}^3$, $g(x, y) = \left(x, y, \dfrac{8 - 2x - y}{2}\right)$, es decir, si $z = f(x, y) = \dfrac{8 - 2x - y}{2}$, entonces $g(x, y) = (x, y, f(x, y))$ con $T = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, 2x + y \leq 8\}$.

Además $\Gamma = \alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \alpha_3$, donde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\colon [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ están dadas por $\alpha_1(t) = (4t, 0)$, $\alpha_2(t) = (4 - 4t, 8t)$, $\alpha_3(t) = (0, 8 - 8t)$.

Si $C = g(\Gamma)$ está con la orientación inducida, entonces $C = \beta_1 \cup \beta_2 \cup \beta_3$, con $\beta_1 = g \circ \alpha_1$, $\beta_2 = g \circ \alpha_2$, $\beta_3 = g \circ \alpha_3$, es decir:

$$\beta_1(t) = (4t, 0, 4 - 4t), \quad \beta_2(t) = (4 - 4t, 8t, 0), \quad \beta_3(t) = (0, 8 - 8t, 4t).$$

Por último,

$$\text{rot } F = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xz & -y & x^2 y \end{vmatrix} = (x^2, x - 2xy, 0)$$

y

$$\frac{\partial g}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial y} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right) = \left(1, \frac{1}{2}, 1\right) \ \left(= \frac{3}{2}\vec{n}\right).$$

Por lo tanto

$$\int\int_S \text{rot } F \cdot d\vec{S} = \int\int_T \langle \text{rot } F, \frac{\partial g}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial y} \rangle \, dxdy = \int_0^4 \int_0^{8-2x} \left(x^2 + \frac{x}{2} - xy\right) \, dydx =$$

$$= \int_0^4 \left[x^2 y + \frac{xy}{2} - \frac{xy^2}{2}\right]_0^{8-2x} \, dx = \int_0^4 (8x^2 - 2x^3 + 4x - x^2 - 32x + 16x^2 - 2x^3) \, dx =$$

$$= \left[-x^4 + \frac{23x^3}{3} - 14x^2\right]_0^4 = -256 + \frac{1472}{3} - 224 = \boxed{\frac{32}{3}}.$$

Por otro lado

$$\int_C F = \int_{\beta_1} F + \int_{\beta_2} F + \int_{\beta_3} F =$$

$$= \int_{\beta_1} F_1\, dx + F_2\, dy + F_3\, dz + \int_{\beta_2} F_1\, dx + F_2\, dy + F_3\, dz + \int_{\beta_3} F_1\, dx + F_2\, dy + F_3\, dz =$$

$$= \int_0^1 \langle F(\beta_1(t)), \beta_1'(t)\rangle\, dt + \int_0^1 \langle F(\beta_2(t)), \beta_2'(t)\rangle\, dt + \int_0^1 \langle F(\beta_3(t)), \beta_3'(t)\rangle\, dt =$$

$$= \int_0^1 \langle F(4t, 0, 4-4t), (4, 0, -4)\rangle\, dt + \int_0^1 \langle F(4-4t, 8t, 0), (-4, 8, 0)\rangle\, dt +$$

$$+ \int_0^1 \langle F(0, 8-8t, 4t), (0, -8, 4)\rangle\, dt =$$

$$= \int_0^1 \{\langle (16t - 16t, 0, 0), (4, 0, -4)\rangle + \langle (0, -8t, 128t - 256t^2 + 128t^3), (-4, 8, 0)\rangle +$$

$$+ \langle (0, 8t-8, 0), (0, -8, 4)\rangle\}\, dt =$$

$$= \int_0^1 \{64t - 64t^2 - 64t - 64 + 64\}\, dt = -64 \int_0^1 (t^2 + t - 1)\, dt = -64 \left[\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} - t\right]_0^1 =$$

$$= -64\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 1\right) = -64\left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{64}{6} = \boxed{\frac{32}{3}}.$$

Por lo tanto hemos obtenido

$$\boxed{\int\int_S (\text{rot } F) \cdot d\vec{S} = \int_C F = \frac{32}{3}}.$$

**Observación 6.4.5** Si $R$ es una región en $\mathbb{R}^2$ y si $f = (P, Q)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una función de clase $C^1$, se puede considerar la superficie $S = R \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^3$ con la parametrización $g\colon R \to S$ dada por $g(x, y) = (x, y, 0)$. En este caso tenemos

$$\frac{\partial g}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial y} = (0, 0, 1).$$

Si $\Gamma$ es la frontera de $R$ orientada positivamente, $g(\Gamma) = \Gamma \times \{0\} = C$. Sea $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por:

$$F(x, y, z) = (P(x, y), Q(x, y), 0).$$

Entonces se tiene rot $F = \left(0, 0, \dfrac{\partial q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right)$.

Además

$$\int\int_S \text{rot } F \cdot d\vec{S} = \int_R \langle \text{rot } F, \frac{\partial g}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial y} \rangle \; dxdy = \int\int_S \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \; dxdy.$$

Por otro lado:

$$\int_C F = \int_{\Gamma \times \{0\}} F = \int_\Gamma f.$$

Por el Teorema de Stokes:

$$\int\int_S \text{rot } F \cdot d\vec{S} = \int_C F,$$

es decir se tiene

$$\int_R \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \; dxdy = \int_\Gamma f = \int_\Gamma P \; dx + Q \; dy$$

el cual es el Teorema de Green.

Resumiendo, tenemos:

$$\boxed{\text{El Teorema de Green es el Teorema de Stokes en 2 dimensiones.}}$$

Para un sólido $V \subseteq \mathbb{R}^3$ entenderemos un conjunto que se puede expresar en las 3 formas siguientes:

$$\begin{aligned} & \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in T_1, f_1(x,y) \le z \le g_1(x,y)\} = \\ = \; & \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,z) \in T_2, f_2(x,z) \le y \le g_2(x,z)\} = \\ = \; & \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (y,z) \in T_3, f_3(y,z) \le x \le g_3(y,z)\}, \end{aligned}$$

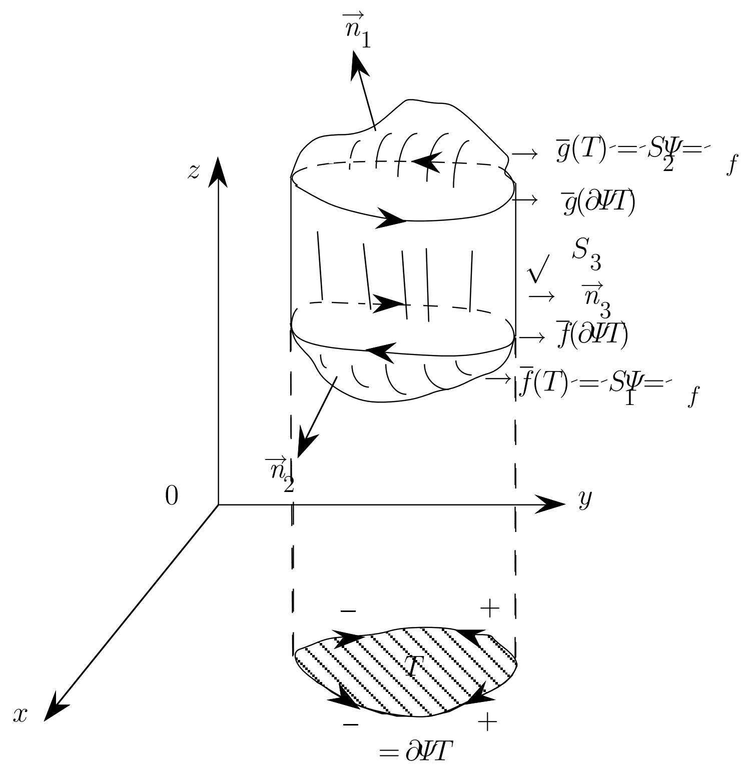
donde $T_i \subseteq \mathbb{R}^2$ es conexo y acotado, $f_i, g_i \colon T_i \to \mathbb{R}$ son funciones de clase $C^1$ en un conjunto abierto $A_i \subseteq \mathbb{R}^2$ tal que $\overline{T}_i \subseteq A_i$ y además $f_i$, $g_i$ son inyectivas, $i = 1, 2, 3$.

Fijémonos sólo en la primera expresión y pongamos $T_1 = T$, $f_1 = f$, $g_1 = g$, $\overline{f}(x,y) = (x,y,f(x,y))$, $\overline{g}(x,y) = (x,y,g(x,y))$.

Ahora si $S = \partial V = \overline{f}(T) \cup \overline{g}(T) \cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in \partial T, f(x,y) \le z \le g(x,y)\}$, entonces

$$\overline{f}(T) = S_1, \; \overline{g}(T) = S_2 \;\; \text{y} \;\; \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in \partial T, f(x,y) \le z \le g(x,y)\} = S_3$$

son tres superficies que orientamos de tal forma que el vector $\vec{n}_i$, $i = 1, 2, 3$, va en dirección contraria al interior de $V$.




$\overline{f}$ es la parametrización de $S_1$ y $\overline{g}$ es la parametrización de $S_2$. Ahora $\vec{n}_3$ es paralelo al plano $xy$. En $S_1$, para tener la orientación deseada de $\vec{n}_1$, debemos tomar $\Gamma = \partial T$ orientada negativamente.

En $S_2$, para tener la orientación deseada de $\vec{n}_2$, se debe tomar $\Gamma$ orientada en sentido positivo.

Ahora si $F\colon V \to \mathbb{R}^3$ es de clase $C^1$ en un conjunto abierto $U \subseteq \mathbb{R}^3$ tal que $\overline{V} \subseteq U$, al calcular $\displaystyle\int\int_S F \cdot d\vec{S}$ entenderemos:

$$\int\int_S F \cdot d\vec{S} = \int\int_{\partial V} F \cdot d\vec{S} = \int\int_{S_1} F \cdot d\vec{S}_1 + \int\int_{S_2} F \cdot d\vec{S}_2 + \int\int_{S_3} F \cdot d\vec{S}_3 =$$

$$= \int\int_{S_1} F \cdot \vec{n}_1 \; dS_1 + \int\int_{S_2} F \cdot \vec{n}_2 \; dS_2 + \int\int_{S_3} F \cdot \vec{n}_3 \; dS_3,$$

es decir, los vectores $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$, $\vec{n}_3$ van "hacia afuera".

Con las aclaraciones anteriores, tenemos:

**Teorema 6.4.6 (de la divergencia de Gauss)** *Sea $V$ un sólido en $\mathbb{R}^3$. Entonces*

$$\boxed{\int\int\int_V (\nabla \cdot F) \; dxdydz = \int\int_S F \cdot \vec{n} \; dS = \int\int_S F \cdot \; d\vec{S}},$$

*donde $S=\partial V$ es una superficie y $F\colon V\to\mathbb{R}^3$ es de clase $C^1$ en un conjunto abierto que contiene a $\overline{V}$. En términos de sus componentes, si*

$$F(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)) \ \text{ y } \ \vec{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma):$$

$$\boxed{\int\!\!\int\!\!\int_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\,dxdydz=\int\!\!\int_S (P\ \cos\alpha+Q\ \cos\beta+R\ \cos\gamma)\ dS}.$$

<u>*Demostración*</u>. Se probarán las igualdades:

$$\int\!\!\int\!\!\int_V \frac{\partial P}{\partial x}\,dxdydz=\int\!\!\int_S P\ \cos\alpha\ dS,$$

$$\int\!\!\int\!\!\int_V \frac{\partial Q}{\partial y}\,dxdydz=\int\!\!\int_S Q\ \cos\beta\ dS,$$

$$\int\!\!\int\!\!\int_V \frac{\partial R}{\partial z}\,dxdydz=\int\!\!\int_S R\ \cos\gamma\ dS.$$

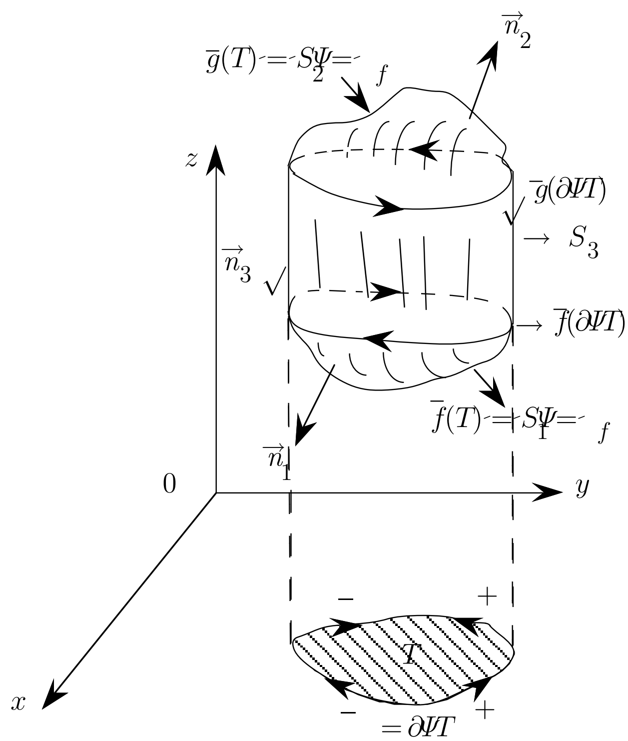
Una vez obtenidas estas igualdades, sumándolas obtendremos la fórmula de Gauss.

Sólo demostraremos la igualdad:

$$\int\!\!\int\!\!\int_V \frac{\partial R}{\partial z}\,dxdydz=\int\!\!\int_S R\ \cos\gamma\ dS,$$

pues las otras dos se hacen de forma completamente análoga.

Para tal fin, consideremos $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid(x,y)\in T, f(x,y)\le z\le g(x,y)\}$ con $T\subseteq\mathbb{R}^2$ conexo y acotado y $f,g\colon T\to\mathbb{R}$ dos funciones de clase $C^1$ en un conjunto abierto que contiene $\overline{T}$. Ponemos $S_1=\overline{f}(T)$, $S_2=\overline{g}(T)$, $S_3=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid(x,y)\in\partial T, f(x,y)\le z\le g(x,y)\}$. En $S_1$, $\partial T$ está orientada negativamente y, en $S_2$, $\partial T$ está orientada positivamente.




Ahora

$$\int\int\int_V \frac{\partial R}{\partial z}\,dxdydz = \int\int_T \left\{\int_{f(x,y)}^{g(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\,dz\right\} dxdy =$$

$$= \int\int_T \{R(x,y,g(x,y)) - R(x,y,f(x,y))\}\,dxdy.$$

Por otro lado, se tiene:

$$\int\int_S R\,\cos\gamma\,dS = \int\int_{S_1} R\,\cos\gamma_1\,dS + \int\int_{S_2} R\,\cos\gamma_2\,dS + \int\int_{S_3} R\,\cos\gamma_3\,dS.$$

Sobre $S_3$, $\vec{n}_3$ es paralela al plano $xy$, por lo que $\cos\gamma_3 = \cos\frac{\pi}{2} = 0$ puesto que $\gamma_3$ es el ángulo que forma el vector $\vec{n}_3$ con el eje $z$.

Ahora, se tiene que para la superficie $S_1 = \{(x,y,f(x,y)) \mid (x,y) \in T\} = \overline{f}(T)$, donde $\overline{f}(x,y) = (x,y,f(x,y))$ y para la superficie $S_2 = \{(x,y,g(x,y)) \mid (x,y) \in T\} = \overline{g}(T)$, donde $\overline{g}(x,y) = (x,y,g(x,y))$, los siguientes vectores normales:

$$\vec{n}_1 = -\frac{\dfrac{\partial\overline{f}}{\partial x} \times \dfrac{\partial\overline{f}}{\partial y}}{\left\|\dfrac{\partial\overline{f}}{\partial x} \times \dfrac{\partial\overline{f}}{\partial y}\right\|}$$

por estar $\partial T$ orientada negativamente, y

$$\vec{n}_2 = \frac{\dfrac{\partial \overline{g}}{\partial x} \times \dfrac{\partial \overline{g}}{\partial y}}{\left\| \dfrac{\partial \overline{g}}{\partial x} \times \dfrac{\partial \overline{g}}{\partial y} \right\|}.$$

De aquí se sigue que

$$\cos\gamma_1 = \vec{n}_1 \cdot \hat{k} = -\frac{1}{\left\| \dfrac{\partial \overline{f}}{\partial x} \times \dfrac{\partial \overline{f}}{\partial y} \right\|} \ \left\langle \left( -\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right), (0,0,1) \right\rangle = -\frac{1}{\left\| \dfrac{\partial \overline{f}}{\partial x} \times \dfrac{\partial \overline{f}}{\partial y} \right\|},$$

$$\cos\gamma_2 = \vec{n}_2 \cdot \hat{k} = \frac{1}{\left\| \dfrac{\partial \overline{g}}{\partial x} \times \dfrac{\partial \overline{g}}{\partial y} \right\|} \ \left\langle \left( -\frac{\partial g}{\partial x}, -\frac{\partial g}{\partial y}, 1 \right), (0,0,1) \right\rangle = \frac{1}{\left\| \dfrac{\partial \overline{g}}{\partial x} \times \dfrac{\partial \overline{g}}{\partial y} \right\|}.$$

Por tanto

$$\int\int_{S_2} R \ \cos\gamma_2 \ dS = \int\int_T R \left( \frac{1}{\left\| \dfrac{\partial \overline{g}}{\partial x} \times \dfrac{\partial \overline{g}}{\partial y} \right\|} \right) \cdot \left\| \frac{\partial \overline{g}}{\partial x} \times \frac{\partial \overline{g}}{\partial y} \right\| \ dxdy =$$

$$= \int\int_T R \circ \overline{g} \ dxdy = \int\int_T R(x,y,g(x,y)) \ dxdy,$$

$$\int\int_{S_1} R \ \cos\gamma_1 \ dS = \int\int_T R \left( -\frac{1}{\left\| \dfrac{\partial \overline{f}}{\partial x} \times \dfrac{\partial \overline{f}}{\partial y} \right\|} \right) \cdot \left\| \frac{\partial \overline{f}}{\partial x} \times \frac{\partial \overline{f}}{\partial y} \right\| \ dxdy =$$

$$= -\int\int_T R \circ \overline{f} \ dxdy = -\int\int_T R(x,y,f(x,y)) \ dxdy$$

y

$$\int\int_{S_3} R \ \cos\gamma_3 \ dS = \int\int_T 0 \cdot dS = 0.$$

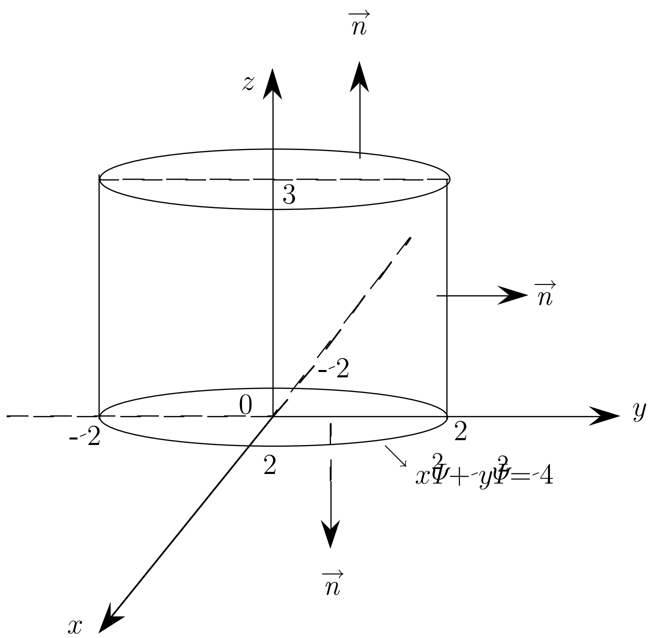
Por lo tanto

$$\int\int_S R \ \cos\gamma \ dS = \int\int_{S_1} R \ \cos\gamma_1 \ dS + \int\int_{S_2} R \ \cos\gamma_2 \ dS + \int\int_{S_3} R \ \cos\gamma_3 \ dS =$$

$$= -\int\int_T R(x,y,f(x,y)) \ dxdy + \int\int_T R(x,y,g(x,y)) \ dxdy =$$

$$= \int\int_T \left( R(x,y,g(x,y)) - R(x,y,f(x,y)) \right) \ dxdy = \int\int\int_V \frac{\partial R}{\partial z} \ dxdydz. \qquad ❏$$

**Ejemplo 6.4.7** Calculemos la integral de superficie $\displaystyle\int\int_S F \cdot \vec{n}\; dS$, donde




$S$ es la superficie que acota al cilindro $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$, $z = 3$, $\vec{n}$ es el vector normal a la superficie que va hacia el exterior del cilindro y $F$ está dada por: $F(x, y, z) = (4x, -2y^2, z^2)$.

Entonces, por el Teorema de la Divergencia de Gauss:

$$\int\int_S F \cdot \vec{n}\; dS = \int\int\int_V \nabla \cdot F\; dxdydz =$$

$$= \int\int\int_V \left\{ \frac{\partial}{\partial x}(4x) + \frac{\partial}{\partial y}(-2y^2) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2) \right\}\, dxdydz = \int\int\int_V (4 - 4y + 2z)\; dxdydz.$$

Utilizando coordenadas cilíndricas, tendremos:

$$\int\int\int_V (4 - 4y + 2z)\; dxdydz = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^3 (4 - 4r \operatorname{sen}\theta + 2z)\; dz d\theta dr =$$

$$= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \left[4z - 4r \operatorname{sen}\theta\; z + z^2\right]_0^3\; d\theta dr = \int_0^2 \int_0^{2\pi} (21 - 12\; r \operatorname{sen}\theta)\; d\theta dr =$$

$$= \int_0^2 \left[21\; \theta + 12\; r \cos\theta\right]_0^{2\pi}\; dr = \int_0^2 (42\pi + 12r(1-1))\; dr = [42\pi r]_0^2 = \boxed{84\pi}.$$

## 6.5 Ejercicios

1) Sean $\alpha\colon [a,b] \to A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\beta\colon [c,d] \to A \subseteq \mathbb{R}^n$ dos caminos de clase $C^1$ por tramos. Entonces $\alpha$ y $\beta$ se llaman equivalentes, y se denota por $\alpha \sim \beta$, si existe $u\colon [a,b] \to [c,d]$ una función suprayectiva y derivable tal que $u'(t) \neq 0$ $\forall\, t \in [a,b]$ y $\beta \circ u = \alpha$. Probar que $\sim$ es una relación de equivalencia.

2) Sean $f, g\colon A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $a, b \in \mathbb{R}$ y $\alpha\colon [c,d] \to A$ un camino $C^1$ por tramos en $A$. Probar que
$$\int_\alpha (af + bg) = a\int_\alpha f + b\int_\alpha g.$$

3) Sea $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ un camino $C^1$ por tramos. Sea $[c,d] \subseteq \mathbb{R}$ cualquiera (con $c < d$). Demostrar que existe un camino $C^1$ por tramos $\beta\colon [c,d] \to \mathbb{R}^n$ que es equivalente a $\alpha$.

4) Sean $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $\beta\colon [c,d] \to \mathbb{R}^n$ dos caminos de clase $C^1$ por tramos. Sea $\gamma\colon [b,c_1] \to \mathbb{R}^n$ un camino de clase $C^1$ por tramos equivalente a $\beta$. Si $\alpha(b) = \beta(c) = \gamma(b)$, se define:
$$\alpha \cup \beta = \alpha \cup \gamma\colon [a,c_1] \to \mathbb{R}^n \;\text{ por }\; (\alpha\cup\gamma)(t) = \begin{cases} \alpha(t) & \text{si } \; a \le t \le b \\ \gamma(t) & \text{si } \; b \le t \le c_1 \end{cases}.$$

Probar que $\displaystyle\int_{\alpha\cup\beta} f = \int_\alpha f + \int_\beta f.$

5) Calcular las siguientes integrales de línea a lo largo de los caminos dados:

i).- $f(x,y) = (x^2 - 2xy, y^2 - 2xy)$ de $(-1,1)$ a $(1,1)$ a través de la parábola $y = x^2$.

ii).- $f(x,y) = (2a - y, x)$ a lo largo del camino $\alpha(t) = (a(t - \operatorname{sen} t), a(1 - \cos t))$, $0 \le t \le 2\pi$.

iii).- $f(x,y) = (x+y, x-y)$ alrededor de la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ en sentido positivo.

iv).- $f(x,y,z) = (2xy, x^2 + z, y)$ por el segmento que une $(1,0,2)$ con $(3,4,1)$.

v).- $f(x,y,z) = (x, y, xz - y)$ a lo largo del camino $\alpha(t) = (t, t^2, t^3)$, $0 \le t \le 1$.

6) Sea $S \subseteq \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto. Sea $f\colon S \to \mathbb{R}^2$ una función de clase $C^1$, con $f(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$. Probar que si $f$ es el gradiente de una función $\varphi$, entonces $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

7) Usando el ejercicio anterior, probar que las siguientes funciones $f$ no son el gradiente de ninguna función $\varphi$ y hallar un camino cerrado $C$ tal que $\displaystyle\int_C f \neq 0$:

   i).- $f(x,y) = (y, -x)$;
   ii).- $f(x,y) = (y, xy - x)$.

8) En las siguientes funciones $f$, determinar si son o no el gradiente de cierta función $\varphi$. En caso afirmativo, hallar $\varphi$.

   i).- $f(x,y) = (x,y)$.
   ii).- $f(x,y) = (2xe^y + y, x^2e^y + x - 2y)$.
   iii).- $f(x,y,z) = (x+z, -(y+z), x-y)$.
   iv).- $f(x,y) = (\operatorname{sen}(xy) + xy\cos(xy), x^2\cos(xy))$.
   v).- $f(x,y,z) = (3y^4z^2, 4x^3z^2, -3x^2y^2)$.
   vi).- $f(x,y,z) = (y^2\cos x + z^3, -(4 - 2y\operatorname{sen} x), 3xz^2 + 2)$.

9) Usar el Teorema de Green para evaluar la integral $\displaystyle\int_C y^2\, dx + x\, dy$, donde:

   i).- $C$ es el cuadrado con vértices $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,2)$, $(0,2)$ en sentido positivo.
   ii).- $C$ es el círculo de radio 2 y centro en el origen en sentido positivo.
   iii).- $C$ está dada por: $C(t) = (2\cos^3 t, 2\operatorname{sen}^3 t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

10) Sean $P(x,y) = xe^{-y^2}$ y $Q(x,y) = -x^2ye^{-y^2} + \dfrac{1}{x^2+y^2}$. Evaluar $\displaystyle\int_\alpha P\,dx + Q\,dy$ donde $\alpha$ es la frontera del cuadrado $|x| \leq a$, $|y| \leq a$ recorrido en sentido positivo.

11) Si $f, g\colon S \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ son de clase $C^1$, $S$ una región y $\alpha$ es un camino cerrado $C^1$ por tramos en $S$, probar que

$$\int_\alpha f \cdot \nabla g \; d\alpha = -\int_\alpha g \cdot \nabla f \; d\alpha.$$

12) Calcular directamente y por el Teorema de Green:

$$\int_{\alpha} (yx^3 + e^y)\ dx + (xy^3 + xe^y - 2y)\ dy,$$

donde $\alpha$ se recorre en sentido positivo,

i).- La elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$;

ii).- $x^2 + y^2 = ax$.

13) Sean $u, v\colon S \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funciones de clase $C^2$, $S$ una región. Sea $R$ la región en $S$ que es interior a la curva suave por tramos simple de Jordan $\alpha$, la cual es recorrida en sentido positivo. Probar que:

i).- $\displaystyle\int_{\alpha} uv\ dx + uv\ dy = \int\int_{R} \left\{ v\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) + u\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)\right\}\ dxdy.$

ii).-

$$\frac{1}{2}\int_{\alpha} \left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}\right)\ dx + \left(u\frac{\partial v}{\partial y} - v\frac{\partial u}{\partial y}\right)\ dy =$$

$$= \int\int_{R} \left(u\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - v\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)\ dxdy.$$

14) Sea $A$ la región interior a una curva simple de Jordan, $C^1$ por tramos, orientada positivamente y sea $f\colon A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase $C^2$ en un conjunto abierto $U \subseteq \mathbb{R}^2$ tal que $\overline{A} \subseteq U$ y que satisface la ecuación de Laplace: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$. Probar que

$$\int_{\alpha} \frac{\partial f}{\partial y}\ dx - \frac{\partial f}{\partial x}\ dy = 0.$$

15) Sea $S$ un paralelogramo en $\mathbb{R}^3$ que no es paralelo a ningún plano ni eje coordenado. Sean $S_1$, $S_2$, $S_3$ las áreas de las proyecciones de $S$ sobre los tres planos coordenados. Mostrar que el área de $S$ es $\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}$.

16) Calcular el área de la región cortada del plano $x + y + z = 0$ por el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$.

17) Calcular el área de la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, situada en el interior del cilindro $x^2 + y^2 = ay$, $a > 0$.

18) Calcular el área de la porción de superficie $z^2 = 2xy$ que está arriba del primer cuadrante del plano $xy$ y que es cortado por los planos $x = 2$, $y = 1$.

19) Una superficie $S \subseteq \mathbb{R}^3$ está parametrizada con $(u, v) \in [0, 4] \times [0, 2\pi]$ y $g(u, v) = (u \cos v, u \operatorname{sen} v, u^2)$. Calcular el área de $S$.

20) Calcular el área de la porción de la superficie cónica $x^2 + y^2 = z^2$ que está arriba del plano $xy$ y que es cortada por la esfera $x^2 + y^2 + x^2 = 2ax$.

21) Calcular el área de la porción de la superficie cónica $x^2 + y^2 = z^2$ que está entre los planos $z = 0$ y $x + 2z = 3$.

22) Calcular el área de la porción del paraboloide $x^2 + z^2 = 2ay$ que es cortada por el plano $y = a$.

23) Si $S$ es la superficie exterior de la esfera $x^2+y^2+z^2 = a^2$, calcular $\displaystyle\int\int_S xz\, dy \wedge dz + yzdz \wedge dx + x^2 dx \wedge dy$.

24) Sea $S$ la superficie que recorta el cilindro $x^2 + y^2 = 2x$ de la parte superior del cono $x^2 + y^2 = z^2$. Calcular $\displaystyle\int\int_S (x^4 - y^4 + y^2 z^2 - z^2 x^2 + 1)\, dS$.

25) Utilizando el Teorema de Stokes, calcular:

i).- $\displaystyle\int_C (y + z)\, dx + (z + x)\, dy + (x + y)\, dz$, donde $C$ es la circunferencia $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = 0$.

ii).- $\displaystyle\int_C (y-z)\, dx+(z-x)\, dy+(x-y)\, dz$, donde $C$ es la elipse $x^2+y^2 = 1$, $x + z = 1$.

iii).- $\displaystyle\int_C x\, dx+(x+y)\, dy+(x+y+z)\, dz$, donde $C$ es la curva $x = a \operatorname{sen} t$, $y = a \cos t$, $z = a(\operatorname{sen} t + \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

iv).- $\displaystyle\int_{ABCA} y^2\, dx + z^2\, dy + x^2\, dz$, donde $ABCA$ es el contorno del triángulo $\triangle ABCA$ con vértices $A = (a, 0, 0)$, $B = (0, a, 0)$, $C = (0, 0, a)$.

26) Por medio del Teorema de la Divergencia de Gauss, calcular:

i).- $\displaystyle\int\int_S x^2\, dy \wedge dz + y^2\, dz \wedge dx + z^2 dx \wedge dy$, donde $S$ es la cara exterior del cubo $0 \leq x, y, z \leq a$.

ii).- $\displaystyle\int\int_S x\, dy \wedge dz + y\, dz \wedge dx + z\, dx \wedge dy$, donde $S$ es la cara exterior de la pirámide limitada por las superficies $x + y + z = a$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

iii).- $\displaystyle\int\int_S x^3\ dy \wedge dz + y^3\ dz \wedge dx + z^3\ dx \wedge dy$, donde $S$ es la cara exterior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

iv).- $\displaystyle\int\int_S (x^2, y^2, z^2) \cdot \vec{n}\ dS$, donde $S$ es la superficie del cono $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{b^2} = 0$, $0 \leq z \leq b$ y $\vec{n}$ es el vector normal exterior a la superficie $S$.

27) Calcular la integral de superficie $\displaystyle\int\int_S f \cdot d\vec{S}$, donde $S$ es la cara exterior del cubo con centro en el origen y lado de longitud 2 y $f(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$.

28) Calcular $\displaystyle\int\int_S f \cdot d\vec{S}$, donde $f(x, y, z) = (x+y, y+z, x+z)$, $S$ es la superficie que limita la región $0 \leq x^2 + y^2 \leq 9$, $0 \leq z \leq 5$.

29) Verificar el Teorema de Stokes en los siguientes casos:

i).- $F(x, y, z) = (z, x, y)$, $S$ definida por $z = 4 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$.

ii).- $F(x, y, z) = (x^2 + y, yz, x - z^2)$ y $S$ es el triángulo definido por el plano $2x + y + 2z = 2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

iii).- $F(x, y, z) = (x, z, -y)$ y $S$ es la porción de la esfera de radio 2, con centro en el origen y $y \geq 0$.

iv).- $F(x, y, z) = (x, y, 0)$ y $S$ es la parte del paraboloide $z = x^2 + y^2$, dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 4$.

# Apéndice A

# Teorema de Cantor-Bernstein

## Teorema de Cantor-Bernstein

En este apéndice, damos la demostración del Teorema de Cantor–Bernstein, el cual fue enunciado en el Teorema 1.3.4.

**Teorema A.0.1 (Cantor–Bernstein)** *Sean $A$, $B$ dos conjuntos tales que existen dos funciones $f\colon A \to B$ y $g\colon B \to A$ inyectivas. Entonces existe una función $\varphi\colon A \to B$ biyectiva.*

*Demostración*. Sean $f(A) = B_1 \subseteq B$, $g(B) = A_1 \subseteq A$. Entonces $f\colon A \to B_1$ y $g\colon G \to A_1$ son biyectivas y se tiene que $g^{-1}\colon A_1 \to B$ es también biyectiva.

Se tiene: $g(f(A)) = g(B_1) = A_2 \subseteq A_1$ y $f(g(B)) = f(A_1) = B_2 \subseteq B_1$.

Puesto que $g \circ f$ y $f \circ g$ son funciones inyectivas, se tiene que existen biyecciones entre $A$ y $A_2$ y entre $B$ y $B_2$.

Ahora sean $(g \circ f)(A_1) = g(f(A_1)) = A_3 \subseteq A_2$ y $(g \circ f)(A_2) = g(f(A_2)) = A_4 \subseteq A_3$.

En general, si tenemos $A_1, \ldots, A_k$ con $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots \supseteq A_k$, sea $A_{k+1} = g(f(A_{k-1})) \subseteq A_k$ pues $A_k = g(f(A_{k-2})) \supseteq g(f(A_{k-1})) = A_{k+1}$. Además $A_{k+2} = g(f(A_k)) \subseteq A_{k+1}$ pues $A_{k+1} = g(f(A_{k-1})) \supseteq g(f(A_k)) = A_{k+2}$.

Sea $D = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$. Se tiene que:

$$A = (A \setminus A_1) \cup (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup \ldots \cup (A_k \setminus A_{k+1}) \cup \ldots \cup D =$$

$$= D \bigcup \left( \bigcup_{i=0}^{\infty} (A_{i-1} \setminus A_i) \right) \quad \text{con} \quad A_0 = A.$$

En efecto, para toda $i \in \mathbb{N}$ tenemos $A_{i-1} \setminus A_i \subseteq A$ y $D \subseteq A$ de donde se sigue que $D \bigcup \left( \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} (A_{i-1} \setminus A_i) \right) \subseteq A$. Recíprocamente, si $x \in A$ y $x \notin D$ entonces $x \in A = A_0$

y $x \notin A_k$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Sea $k_0$ el primer natural tal que $x \notin A_{k_0}$. Por lo tanto $x \in A_{k_0-1} \setminus A_{k_0}$. Se sigue que $A \subseteq D \bigcup \left( \bigcup_{i=0}^{\infty} (A_{i-1} \setminus A_i) \right)$.

Ahora

$$D \cap (A_{i-1} \setminus A_i) = D \cap A_{i-1} \cap A_i^c = (D \cap A_i^c) \cap A_{i-1} \subseteq (A_i \cap A_i^c) \cap A_{i-1} = \emptyset \cap A_{i-1} = \emptyset.$$

Por lo tanto

$$D \cap (A_{i-1} \cap A_i) = \emptyset \ \forall i \in \mathbb{N}.$$

Además, si $n \neq m$, digamos $n > m$, $A_{n-1} \subseteq A_{m-1}$ y por lo tanto $A_{n-1}^c \supseteq A_{m-1}^c$ y $(A_{n-1} \setminus A_n) \cap (A_{m-1} \setminus A_m) = A_{n-1} \cap A_n^c \cap A_{m-1}^c \cap A_m \subseteq A_{m-1}^c \cap A_{m-1} = \emptyset$. Por lo tanto $(A_{n-1} \setminus A_n) \cap (A_{m-1} \setminus A_m) = \emptyset \ \forall \ n \neq m$, es decir, $A = D \bigcup \left( \bigcup_{i=0}^{\infty} (A_{i-1} \setminus A_i) \right)$ está expresado como unión de conjuntos disjuntos dos a dos.

Análogamente:

$$A_1 = D \cup (A_1 \setminus A_2) \cup (A_3 \setminus A_4) \cup \ldots \cup (A_{k-1} \setminus A_k) \cup \ldots = D \bigcup \left( \bigcup_{i=0}^{\infty} (A_i \setminus A_{i+1}) \right).$$

Se tiene:

$$A = D \bigcup \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_{2k-1} \setminus A_{2k}) \right) \bigcup \left( \bigcup_{k=0}^{\infty} (A_{2k} \setminus A_{2k+1}) \right) = C \bigcup \left( \bigcup_{k=0}^{\infty} (A_{2k} \setminus A_{2k+1}) \right)$$

$$\Big\downarrow \psi_{-1} \qquad\qquad \Big\downarrow \begin{matrix} \psi_k, \\ {\scriptstyle k \in \mathbb{N} \cap \{0\}} \end{matrix}$$

$$A_1 = D \bigcup \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_{2k-1} \setminus A_{2k}) \right) \bigcup \left( \bigcup_{k=0}^{\infty} (A_{2k+2} \setminus A_{2k+3}) \right) = C \bigcup \left( \bigcup_{k=0}^{\infty} (A_{2k+2} \setminus A_{2k+3}) \right)$$

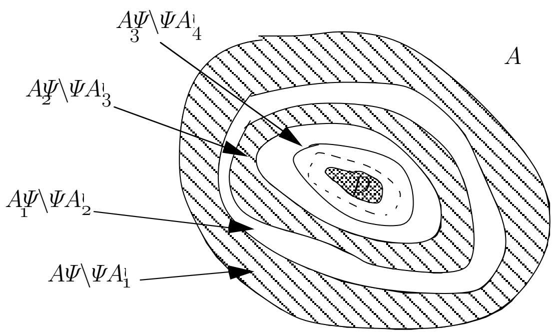
Sea $\psi_{-1} \colon C \to C$, $\psi_{-1}(x) = x$, es decir, $\psi_{-1} = Id_C$, la cual es biyectiva.

Ahora para $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, sea $\psi_k \colon (A_{2k} \setminus A_{2k+1}) \to (A_{2k+2} \setminus A_{2k+3})$ definida por $\psi_k = g \circ f\big|_{(A_{2k} \setminus A_{2k+1})}$.

$\psi_k$ es inyectiva pues $g \circ f$ lo es y además se tiene que:

$$\psi_k(A_{2k} \setminus A_{2k+1}) = (g \circ f)(A_{2k} \setminus A_{2k+1}) = g(f(A_{2k})) - g(f(A_{2k+1})) = A_{2k+2} \setminus A_{2k+3}.$$

Por lo tanto $\psi_k$ es biyectiva para toda $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.




$$C = D \bigcup \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_{2k-1} \setminus A_{2k}) \right)$$

Por último, sea $h\colon A \to A_1$ dada por

$$h(x) = \begin{cases} \psi_{-1}(x) = x & \text{si} \quad x \in C \\ \psi_k(x) = (g \circ f)(x) & \text{si} \quad x \in A_{2k} \setminus A_{2k+1}, \ k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \end{cases} .$$

Por ser cada $\psi_i$, $i \in \mathbb{N} \cup \{0, -1\}$ biyectiva y $\{A_{2k} \setminus A_{2k+1}\}_{k=0}^{\infty}$ y $C$ son disjuntos a pares y cubren al conjunto $A$, se sigue que $h$ es biyectiva. Por lo tanto la función $\varphi\colon A \to B$ dada por $\varphi = g^{-1} \circ h$ es biyectiva:

$$\underbrace{A \xrightarrow{h} A_1 \xrightarrow{g^{-1}} B}_{\overrightarrow{\varphi}}$$

pues tanto $h$ como $g^{-1}$ lo son.

Si $x \in C$, $\varphi(x) = (g^{-1} \circ h)(x) = g^{-1}(x)$.

Si $x \notin C$, $\varphi(x) = (g^{-1} \circ h)(x) = g^{-1}(g \circ f)(x) = f(x)$. Por lo tanto $\varphi$ está dada por:

$$\varphi(x) = \begin{cases} g^{-1}(x) & \text{si} \quad x \in C \\ f(x) & \text{si} \quad x \notin C \end{cases} . \qquad ❏$$

# Bibliografía


[1] Apostol, Tom M, *Calculus, Vol II, 2nda. Edición*, Xerox College Publishing, Waltman, Massachusetts, 1969.

[2] Berman, G.N., *Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático*, Editorial Mir, Moscú, 1977.

[3] Cartan, Henri, *Formas Diferenciales*, Editorial Omega, Colección Métodos, Barcelona, 1972.

[4] Demidovich B., Baranenkov, G., Efimenko, V., Kogan, S., Lunts, G., Porshneva, E., Sichova, E., Frolov, S., Shostak, R. y Yampolski, A., *Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático, Quinta Edición*, Editorial Mir, Moscú, 1977.

[5] Kolmogorov, A.N. y Fomin, S.V., *Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional*, Editorial Mir, Moscú, 1975.

[6] Lang, S., *Calculus of Several Variables*, Addison–Wesley, Reading Massachusetts, 1974.

[7] Mardsen, J.E., *Elementary Classical Analysis*, W.H. Freeman and Company, San Francisco, 1974.

[8] Spiegel, M.R., *Análisis Vectorial*, McGraw–Hill, Colección Schaum, México, 1969.

[9] Spivak, M., *Cálculo en Variedades*, Reverté, S.A., Barcelona, 1972.

[10] Williamson, R.E., Crowell R. H. y Trotter H.F., *Cálculo de Funciones Vectoriales*, Pentice Hall Internacional, México, 1973.

# Notaciones

$\mathbb{N}$ Conjunto de los números naturales.

$\mathbb{Z}$ Conjunto de los números enteros.

$\mathbb{Q}$ Conjunto de los números racionales.

$\mathbb{I}$ Conjunto de los números irracionales.

$\mathbb{R}$ Conjunto de los números reales.

$\mathbb{R}^n$ $\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$.

$B(\vec{a}, \epsilon)$ Bola abierta con centro en $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ y radio $\epsilon$.

$\overline{B}(\vec{a}, \epsilon)$ Bola cerrada con centro en $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ y radio $\epsilon$.

$\langle\ ,\ \rangle$ Producto interno en $\mathbb{R}^n$.

$D_i f$ Derivada parcial de $f$.

$\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ Derivada parcial de $f$.

$S(f, P)$ Suma superior de la función $f$ con respecto a la partición $P$.

$I(f, P)$ Suma inferior de la función $f$ con respecto a la partición $P$.

$\overline{\int_A} f$ Integral superior de la función $f$ sobre el conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

$\underline{\int_A} f$ Integral inferior de la función $f$ sobre el conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

$\int_A f$ Integral de Riemann de la función $f$ sobre el conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

$\chi_A$ Función característica del conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

$\text{vol}(A)$ Volumen del conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

$\partial A$ Frontera del conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

$\overline{A}$ Cerradura del conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

$\mathring{A}$ Interior del conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

$\text{Fr}A$ Frontera del conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

$A^c$ Complemento del conjunto $A$.

$\displaystyle\oint_C f$ Integral de línea de la función $f$ sobre la curva cerrada $C$.

$\displaystyle\int_C f$ Integral de línea de la función $f$ sobre la curva $C$.

$\displaystyle\int\int_S f \cdot dS$ Integral de superficie de la función $f$.

$\displaystyle\int\int_S f \cdot \vec{n}\ dS$ Integral de superficie de la función $f$.

$\displaystyle\int\int_S f \cdot d\vec{S}$ Integral de superficie de la función $f$.

$\displaystyle\int\int_S Pdx \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$ Integral de superficie de la función $f$.

$\text{rot } F$ Rotacional de la función $F$.

$\text{div } F$ Divergencia de la función $f$.

# Indice alfabético

áreas de revolución, 152

arco, 129

camino, 129
camino $C^1$ por tramos, 129
camino continuamente diferenciable, 129
camino continuamente diferenciable por tramos, 129
camino de clase $C^1$, 129
camino suave por tramos, 129
caminos equivalentes, 132
conjunto a lo más numerable, 18
conjunto contable, 17
conjunto Jordan–medible, 44
conjunto numerable, 17
contenido 0, 27, 29
cubierta admisible, 96
curva regular, 140
curva simple de Jordan, 138
curva suave, 129

dirección de una curva, 140
divergencia de una función, 158

exterior de una curva, 139

función característica, 31
función integrable, 6, 96
función Riemann-integrable, 6

integrabilidad, 46
integral de línea, 129
integral de Riemann de una función, 6
integral de superficie, 153, 155
integral de una función, 31, 97
integral impropia de Riemann, 77, 97
integral inferior, 6
integral iterada, 58
integral paramétrica, 55
integral superior, 6
interior de una curva, 139

medida 0, 25, 28

orientación de superficies, 150
orientación de una curva, 141
oscilación, 33

parametrización de una superficie, 146
partición, 1
partición de unidad, 95
partición de unidad subordinada a una cubierta, 95
particiones canónicas, 1
Primer Teorema Fundamental del Cálculo para integrales de línea, 136

rectángulo abierto, 28
rectángulo cerrado, 1
región regular, 140
rotacional de una función, 158

Segundo Teorema Fundamental del Cálculo para integrales de línea, 135
signo, 18
suma inferior, 3
suma superior, 3
superficie, 146

Teorema de cambio de variable, 107

Teorema de Cambio de Variable en una variable, 87
Teorema de Cantor–Bernstein, 17, 175
Teorema de Fubini, 62
Teorema de Green, 141
Teorema de la curva de Jordan, 138
Teorema de la divergencia de Gauss, 165
Teorema de Lebesgue, 39
Teorema de Sard, 113
Teorema de Stokes, 159
Teorema del valor medio para integrales, 52
traza, 129

vector normal, 150
volumen de un conjunto, 32
volumen de un rectángulo, 1