Notas del Curso Propedéutico de Álgebra Lineal

En estas notas se presentan los temas que corresponden al curso propedéutico de álgebra lineal que se imparte en el Departamento de Control Automático del Cinvestav-IPN. El propósito es proveer al estudiante de una ayuda para prepararse en los temas mencionados. El tratamiento de ninguna manera es exhaustivo y, aunque se incluyen algunas demostraciones, muchas otras se omiten. Uno de los objetivos es ir conduciendo al alumno por el camino de la demostración lógica de los enunciados.

Martha Rzedowski Calderón
Mayo de 2016

Índice general

Capítulo 1

Teoría de conjuntos

1.1. Conjuntos

Un ***conjunto*** A es una colección de objetos que son los ***elementos*** de A. Escribimos $s \in A$ para denotar que s ***pertenece a*** A o que s es ***elemento*** de A. Escribimos $s \notin A$ en caso contrario.

Ejemplo 1.1.1 Sea $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ el conjunto de números naturales o enteros positivos. Tenemos $2 \in \mathbb{N}$, $126 \in \mathbb{N}$, $-5 \notin \mathbb{N}$, $\frac{3}{4} \notin \mathbb{N}$,$\sqrt{2} \notin \mathbb{N}$, $\pi \notin \mathbb{N}$, $i = \sqrt{-1} \notin \mathbb{N}$. Entre otros conjuntos de números se encuentran los enteros $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$, los racionales $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} | a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$, los reales $\mathbb{R}$ y los complejos $\mathbb{C} = \{a + bi | a, b \in \mathbb{R}\}$.

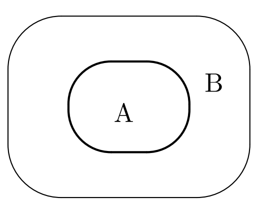
Definición 1.1.2 Sean A, B conjuntos. Decimos que A es un ***subconjunto*** de B y escribimos $A \subseteq B$ si $s \in A \Rightarrow s \in B$ (lo cual leemos $s \in A$ implica $s \in B$). También lo podemos expresar como $B \supseteq A$.

Ejemplos 1.1.3

(1) Sean $A = \{s \in \mathbb{N} \, | s \text{ es múltiplo de } 3\}$ y $B = \mathbb{N}$. Tenemos $A \subseteq B$.

(2) Sea A cualquier conjunto. Tenemos $A \subseteq A$.

(3) Diagrama de Venn que ilustra $A \subseteq B$:

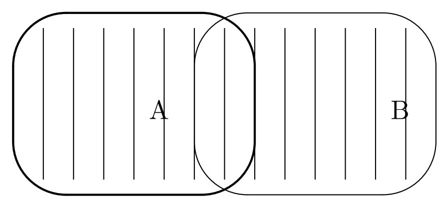


Observación 1.1.4 Tenemos $A = B \iff$ (si y sólo si) $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.

El ***conjunto vacío*** no tiene elementos, se denota por $\emptyset$ y cumple $\emptyset \subseteq A$ para todo conjunto A.

Definición 1.1.5 Sean A, B subconjuntos de un conjunto S. Definimos la ***unión*** de A y B por $A \cup B = \{s \in S \mid s \in A \text{ o } s \in B\}$. Aquí o significa que s pertenece a A, s pertenece a B o a ambos.

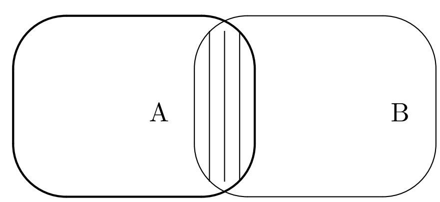
Diagrama de Venn que ilustra $A \cup B$:



Ejemplo 1.1.6 Sean $A = \{1, 2, 3, 5, 7\}$ y $B = \{1, 4, 6, 8, 9\}$. Tenemos $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Definición 1.1.7 Sean A, B subconjuntos de un conjunto S. Definimos la ***intersección*** de A y B por $A \cap B = \{s \in S \mid s \in A \text{ y } s \in B\}$.

Diagrama de Venn que ilustra $A \cap B$:



Ejemplo 1.1.8 Como en el ejemplo anterior, sean $A = \{1, 2, 3, 5, 7\}$ y $B = \{1, 4, 6, 8, 9\}$. Tenemos $A \cap B = \{1\}$.

Observaciones 1.1.9 El conjunto S mencionado en la Definición 1.1.5 puede pensarse como un conjunto que contiene a todos los conjuntos bajo consideración.

Las definiciones de unión y de intersección se pueden generalizar a más de dos conjuntos, inclusive a una infinidad de conjuntos. Si $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es una colección de subconjuntos de S, tenemos

$$\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha = \{s \in S \mid s \in A_\alpha \text{ para algún } \alpha \in I\} \text{ y}$$

$$\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha = \{s \in S \mid s \in A_\alpha \text{ para todo } \alpha \in I\}.$$

Proposición 1.1.10 *Sean A, B, C subconjuntos de un conjunto S. Tenemos:*

(i) $A \cup \emptyset = A$,

(ii) $A \cup A = A$,

(iii) $A \subseteq A \cup B$,

(iv) $A \cup S = S$,

(v) $A \subseteq C$, $B \subseteq C \Rightarrow A \cup B \subseteq C$,

(vi) $A \cup B = B \cup A$, *(conmutatividad de la unión)*

(vii) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$, *(asociatividad de la unión)*

(viii) $A \cap \emptyset = \emptyset$,

(ix) $A \cap A = A$,

(x) $A \cap B \subseteq A$,

(xi) $A \cap S = A$,

(xii) $C \subseteq A$, $C \subseteq B \Rightarrow C \subseteq A \cap B$,

(xiii) $A \cap B = B \cap A$, *(conmutatividad de la intersección)*

(xiv) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$, *(asociatividad de la intersección)*

(xv) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, *(distributividad de la intersección respecto a la unión)*

(xvi) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. *(distributividad de la unión respecto a la intersección)*

Demostración. Probaremos solamente (iii), (vi) y (xvi). El resto queda como ejercicio para el lector.

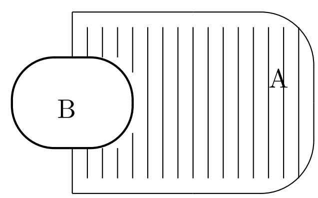
(iii) $x \in A \implies x \in A$ o $x \in B \implies x \in A \cup B$. Luego $A \subseteq A \cup B$.

(vi) $x \in A \cup B \iff x \in A$ o $x \in B \iff x \in B$ o $x \in A \iff x \in B \cup A$. Por tanto $A \cup B = B \cup A$,

(xvi) $x \in A \cup (B \cap C) \iff x \in A$ o $x \in (B \cap C) \iff x \in A$ o $(x \in B$ y $x \in C) \iff (x \in A$ o $x \in B)$ y $(x \in A$ o $x \in C) \iff (x \in A \cup B)$ y $(x \in A \cup C) \iff x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Por lo que tenemos $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. ■

Definición 1.1.11 Sean A, B subconjuntos de un conjunto S. Definimos la ***diferencia*** A menos B por $A \backslash B = \{s \in S \mid s \in A \text{ y } s \notin B\}$.

Diagrama de Venn que ilustra $A \backslash B$:



Ejemplo 1.1.12 Sean $A = \{1, 2, 3, 5, 7\}$ y $B = \{2, 5, 9\}$. Tenemos $A \backslash B = \{1, 3, 7\}$.

Definición 1.1.13 Sean A, B subconjuntos de un conjunto S. Definimos el ***producto cartesiano*** A cruz B por $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ y } b \in B\}$.

Ejemplo 1.1.14 Sean $A = \{1, 2, 3, 5\}$ y $B = \{2, 5, 9\}$. Tenemos $A \times B = \{(1, 2), (1, 5), (1, 9), (2, 2), (2, 5), (2, 9), (3, 2), (3, 5), (3, 9), (5, 2), (5, 5), (5, 9)\}$.

Definición 1.1.15 Sea A un conjunto. Definimos el ***conjunto potencia*** de A, denotado por $\mathcal{P}(\mathcal{A})$, como el conjunto de subconjuntos de A.

Proposición 1.1.16 *Si el conjunto A tiene n elementos, entonces $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ tiene 2^n elementos, o lo que es lo mismo, A tiene 2^n subconjuntos.*

Demostración. Ver Ejemplo 1.4.8 (5) ■

Ejemplo 1.1.17 Sea $A = \{a, b, c\}$. Entonces el conjunto potencia de A es $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, A\}$. La cardinalidad de A es 3 y la de $\mathcal{P}(A)$ es $2^3 = 8$.

1.2. Relaciones de equivalencia

Definición 1.2.1 Sea A un conjunto no vacío. Una ***relación*** en A es un subconjunto R de $A \times A$.

Escribimos $a \sim b$ si $(a, b) \in R$. También nos referimos a la relación por $\sim$.

Definición 1.2.2 Una relación en A se dice que es:

(i) ***reflexiva*** si $a \sim a \ \ \forall\, a \in A$,

(ii) ***simétrica*** si $a \sim b \implies b \sim a \ \ \forall\, a, b \in A$,

(iii) ***transitiva*** si $a \sim b$ y $b \sim c \implies a \sim c \ \ \forall\, a, b, c \in A$.

Definición 1.2.3 Una relación en A se dice que es una ***relación de equivalencia*** si es reflexiva, simétrica y transitiva.

Ejemplos 1.2.4

(1) Sea A el conjunto de todos los artículos en un tienda. Se declara $a \sim b$ para $a, b \in A$ si a y b tienen exactamente el mismo precio. Ésta es una relación de equivalencia.

(2) Sea $A = \mathbb{Z}$. Sean $a, b \in A$. Definimos que a y b tienen la misma paridad si a y b son ambos pares o son ambos impares. Diremos que a y b están relacionados, $a \sim b$, si a y b tienen la misma paridad. Ésta es una relación de equivalencia.

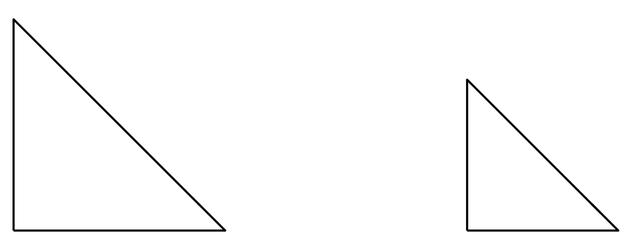
Observemos que $a \sim b \iff (-1)^a = (-1)^b$ y que $a \sim b \iff b - a$ es par.

Sean $m, n \in \mathbb{Z}$. Decimos que m ***divide*** a n o que n es un ***múltiplo*** de m si $\exists\, q \in \mathbb{Z}$ (existe $q \in \mathbb{Z}$) tal que $n = mq$. En este caso escribimos $m \mid n$.

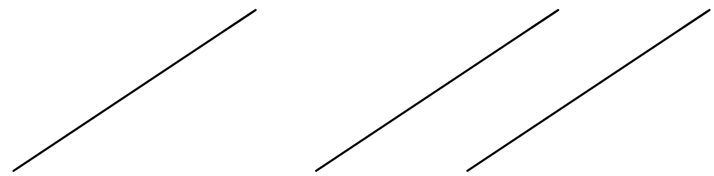
(3) Sea $n \in \mathbb{N}$. Para $a, b \in \mathbb{Z}$ decimos que a ***es congruente con*** b ***módulo*** n y escribimos $a \equiv b \pmod{n}$, si $n \mid b - a$. La congruencia módulo n es una relación de equivalencia. Cuando $n = 2$ tenemos el caso del Ejemplo (2).

(4) La relación de orden usual $\leq$ en $\mathbb{Z}$ no es una relación de equivalencia, pues aunque se cumplen la reflexividad ($a \leq a \ \forall\, a \in \mathbb{Z}$) y la transitividad ($a \leq b$ y $b \leq c \implies a \leq c \ \ \forall\, a, b, c \in \mathbb{Z}$), no se cumple la simetría ($3 \leq 4$, pero $4 \not\leq 3$, basta con un ejemplo para probar que no se cumple la simetría).

(5) La semejanza de triángulos es una relación de equivalencia.



(6) El paralelismo de rectas en el plano es una relación de equivalencia (definimos que una recta es paralela a sí misma)



(7) La contención de conjuntos no es una relación de equivalencia ($\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$, pero $\mathbb{Z} \nsubseteq \mathbb{N}$).

Definición 1.2.5 Sea $\sim$ una relación de equivalencia en A. La ***clase de equivalencia*** de un elemento $a \in A$ es $\mathcal{C} = [a] = \{x \in A \mid x \sim a\}$. Los elementos de $[a]$ son los elementos de A que son equivalentes a a. Si $\mathcal{C}$ es una clase de equivalencia, cualquier elemento de $\mathcal{C}$ es un ***representante*** de $\mathcal{C}$.

Ejemplos 1.2.6 En las relaciones de equivalencia en los Ejemplos 1.2.4 tenemos:

(1) Sea a un producto de la tienda. Denotamos por P_a su precio. La clase de equivalencia de a es $[a] = \{b \mid b \text{ es producto de la tienda y } P_b = P_a\}$.

(2) $[0] = \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\} = \{2m \mid m \in \mathbb{Z}\}$,
$[1] = \{\ldots, -3, -1, 1, 3, 5, \ldots\} = \{2m+1 \mid m \in \mathbb{Z}\}$ son las únicas dos clases de equivalencia.

(3) Pongamos $n = 5$:
$[0] = \{\ldots, -10, -5, 0, 5, 10, \ldots\} = \{5m \mid m \in \mathbb{Z}\}$,
$[1] = \{\ldots, -9, -4, 1, 6, 11, \ldots\} = \{5m + 1 \mid m \in \mathbb{Z}\}$,
$[2] = \{\ldots, -8, -3, 2, 7, 12, \ldots\} = \{5m + 2 \mid m \in \mathbb{Z}\}$,
$[3] = \{\ldots, -7, -2, 3, 8, 13, \ldots\} = \{5m + 3 \mid m \in \mathbb{Z}\}$,
$[4] = \{\ldots, -6, -1, 4, 9, 14, \ldots\} = \{5m + 2 \mid m \in \mathbb{Z}\}$
son las únicas cinco clases de equivalencia.

(4) Considerando la congruencia módulo n en $\mathbb{Z}$, hay n clases de equivalencia.

(5) En la medida del tiempo usamos módulo 12 y módulo 24 para las horas del día, módulo 7 para los días de la semana, etc.

(6) En la medida de los ángulos, usamos módulo 360 para los grados y módulo 2π para los radianes.

(7) La clase de equivalencia de un triángulo dado consiste de los triángulos semejantes a él, es decir, consiste de los triángulos que tienen los mismos ángulos que el triángulo dado. Por ejemplo, sea T el triángulo de lados $1, 1, \sqrt{2}$ y ángulos $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$. La clase de equivalencia de T consiste de todos los triángulos con ángulos $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$, esto es, triángulos rectángulos isósceles.

(8) La clase de equivalencia de una recta dada en el plano consiste de todas las rectas paralelas a ella (incluyéndola a ella misma). Se identifican por su pendiente.

Teorema 1.2.7 *Si $\sim$ es una relación de equivalencia en A, entonces*

$$A = \bigcup_{a\in A} [a].$$

Además se tiene $[a] \neq [b] \implies [a] \cap [b] = \emptyset$.

Demostración.

(1) Sea $a \in A$. Entonces $a \in [a]$. Luego $a \in \bigcup_{a\in A} [a]$. Por tanto $A \subseteq \bigcup_{a\in A} [a]$.

(2) Como $[a] \subseteq A \ \forall\ a \in A$, tenemos $\bigcup_{a\in A} [a] \subseteq A$.

De (1) y (2), obtenemos $A = \bigcup_{a\in A} [a]$.

(3) Probar $[a] \neq [b] \implies [a] \cap [b] = \emptyset$ es equivalente a probar $[a] \cap [b] \neq \emptyset \implies [a] = [b]$. Supongamos pues que $[a] \cap [b] \neq \emptyset$. Sea $c \in [a] \cap [b]$. Tenemos $c \sim a$ y $c \sim b$, por tanto $a \sim b$. Por consiguiente, si $x \in [a]$, entonces $x \sim a$ y, como $a \sim b$, tenemos $x \sim b$. Luego $x \in [b]$. Así que $[a] \subseteq [b]$. Análogamente $[b] \subseteq [a]$, de donde $[a] = [b]$. ■

Definición 1.2.8 Sea A un conjunto no vacío. Una ***partición*** de A es una colección $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ de subconjuntos de A tal que

$$A = \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$$

y

$$\alpha \neq \beta \implies A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset.$$

Llamamos a los conjuntos A_α ***elementos de la partición***.

Observación 1.2.9 Sea A un conjunto no vacío. Una relación de equivalencia en A nos da lugar a una partición de A, los elementos de la partición son precisamente las clases de equivalencia. Recíprocamente, una partición de A nos da lugar a una relación de equivalencia, los elementos a y b de A están relacionados si y sólo si pertenecen a un mismo elemento de la partición.

Interpretación 1.2.10 *Supongamos que en los cajones de una cómoda tenemos objetos. Burdamente, podríamos pensar que los objetos "son" los elementos de la cómoda, y que los cajones "forman" una partición de la cómoda.*

Definición 1.2.11 Sean A un conjunto y R una relación de equivalencia en A. El ***cociente*** de A por R es el conjunto

$$A/R = \{[a] \mid a \in A\}.$$

Ejemplo 1.2.12 Sea $n \in \mathbb{N}$. Consideramos la congruencia módulo n en $\mathbb{Z}$. El cociente de $\mathbb{Z}$ por esta relación se denota también por $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, por $\mathbb{Z}/n$ o por $\mathbb{Z}_n$. Tenemos:

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{[0], \ldots, [n-1]\}.$$

En particular:

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{[0], [1]\},$$

$$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{[0], [1], [2], [3], [4]\}.$$

Interpretación 1.2.13 *Si definimos en una liga de futbol la relación de equivalencia dada por: los jugadores a y b están relacionados si pertenecen al mismo equipo (estamos suponiendo aquí que cada jugador pertenece precisamente a un equipo de la liga). Tendremos entonces que los equipos son las clases de equivalencia, cualquier jugador del equipo es un representante y el conjunto de equipos es el conjunto cociente.*

1.3. Funciones

Sean A, B conjuntos no vacíos. Una ***función*** de A a B es una regla que asigna a cada elemento $a \in A$ un único elemento $b \in B$. Escribimos:

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow B \\ a &\longmapsto b \end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow B \\ f(a) &= b. \end{aligned}$$

Ejemplos 1.3.1

(1)

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ a &\longmapsto a^2 \end{aligned}$$

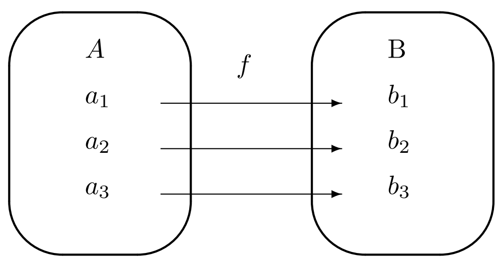
$$f(2) = 2^2 = 4, \quad f(-2) = (-2)^2 = 4, \quad f(0) = 0^2 = 0.$$

(2)

$$\begin{aligned} g : \qquad \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ n &\longmapsto 2n+1 \end{aligned}$$

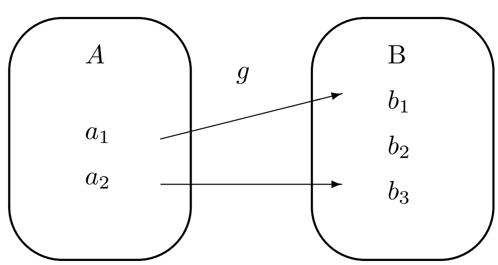
$$g(0) = 1, \qquad g(1) = 3, \qquad g(-3) = -5.$$

(3)



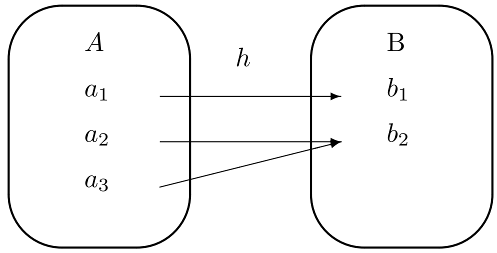
es función.

(4)



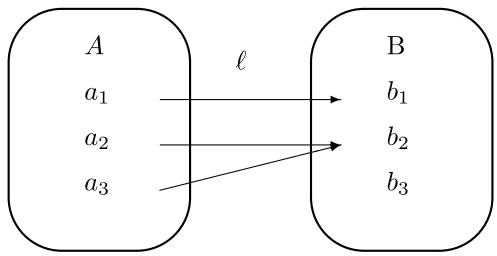
es función.

(5)



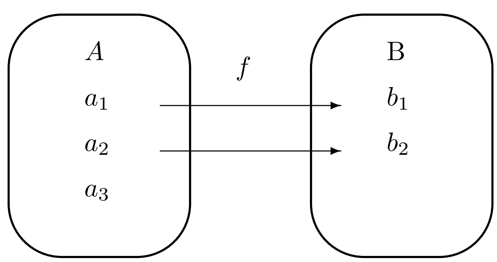
es función.

(6)



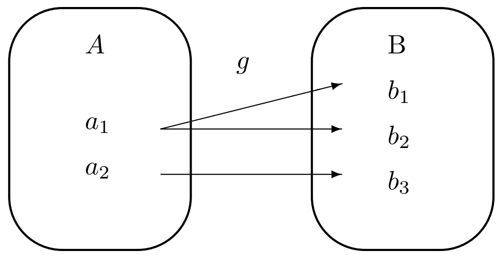
es función.

(7)



no es función.

(8)



no es función.

Definición 1.3.2 Sea $f : A \longrightarrow B$ una función. Llamamos a A el ***dominio*** de la función y a B el ***contradominio*** de f. La ***imagen de un elemento*** $a \in A$ es $f(a)$. La ***imagen de la función*** f es

$$\mathrm{Im} f = \{f(a) \mid a \in A\}.$$

Ejemplos 1.3.3

(1)

$$\begin{aligned} f : \textit{Registro Federal de Electores} &\longrightarrow \textit{Conjunto de claves de los electores} \\ \textit{elector} &\longmapsto \textit{clave del elector} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} g : \ \textit{Humanidad} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ \textit{ser humano} &\longmapsto \textit{su edad en años} \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} h : \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) &\longrightarrow \mathbb{Q} \\ (a,b) &\longmapsto \frac{a}{b} \end{aligned}$$

$$h((5,7)) = \frac{5}{7}, \quad h((0,-1)) = \frac{0}{-1} = 0, \quad h((-2,3)) = \frac{-2}{3} = -\frac{2}{3}$$

$$h((1,2)) = \frac{1}{2}, h((2,4)) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, h((-3,-6)) = \frac{-3}{-6} = \frac{1}{2}$$

(4) Sean A y B conjuntos no vacíos. Las funciones

$$\begin{aligned} \pi_1 : A \times B &\longrightarrow A \\ (a,b) &\longmapsto a \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \pi_2 : A \times B &\longrightarrow B \\ (a,b) &\longmapsto b \end{aligned}$$

se llaman ***proyecciones***.

(5) Tomar raíz cuadrada, ¿es función? ¿qué raíz cuadrada?, ¿a qué?, ¿en dónde?

(i)

$$\begin{aligned} f_1 : \quad \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ a &\longmapsto \sqrt{a}, \end{aligned}$$

donde $\mathbb{R}^+$ denota el conjunto de números reales positivos y $\sqrt{a}$ denota la raíz cuadrada positiva de a es una función.

(ii)

$$f_2 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

no es función pues $\sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$ (aun si $\sqrt{2}$ denota la raíz cuadrada positiva de 2).

(iii)

$$f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

no es función pues $\sqrt{-2} \notin \mathbb{R}$.

(iv)

$$\begin{aligned} f_4 : \quad \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ a &\longmapsto \sqrt{a}, \end{aligned}$$

donde se elige precisamente una raíz cuadrada $\sqrt{a}$ para cada $a \in \mathbb{C}$, es función.

(v)

$$\begin{aligned} f_5 : \quad \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ a &\longmapsto \sqrt{a}, \end{aligned}$$

donde $\sqrt{a}$ denota la raíz cuadrada positiva de a, es función.

(6) Sacar raíz cúbica:

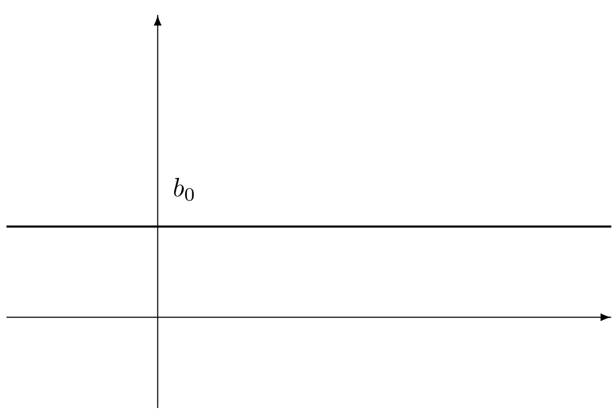
$$\begin{aligned} g: \quad \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ a &\longmapsto \sqrt[3]{a}, \end{aligned}$$

donde $\sqrt[3]{a}$ es la raíz cúbica real de a, es función.

(7) Sean A y B conjuntos no vacíos. Escojamos un elemento $b_0 \in B$. Tenemos la ***función constante***

$$\begin{aligned} f: A &\longrightarrow B \\ a &\longmapsto b_0, \end{aligned}$$

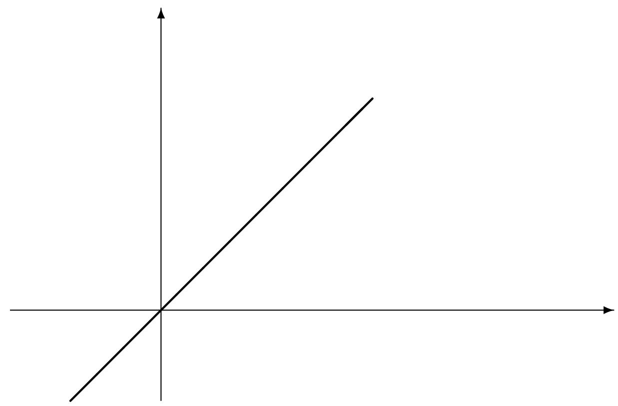
esto es $f(a) = b_0$ $\forall a \in A$ (para todo $a \in A$).



(8) Sea A un conjunto no vacío. Tenemos la ***función identidad***

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_A: A &\longrightarrow A \\ a &\longmapsto a, \end{aligned}$$

esto es $\mathrm{id}_A(a) = a$ $\forall a \in A$.



(9)

$$\begin{aligned} f: \ \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ n &\longmapsto 2n \end{aligned}$$

es función.

(10)

$$g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, \text{donde}$$
$$g(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{n-1}{2} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

es función.

Definición 1.3.4 Las funciones f y g son ***iguales*** si tienen el mismo dominio y el mismo contradominio (esto es $f : A \longrightarrow B$ y $g : A \longrightarrow B$) y además

$$f(a) = g(a) \ \forall a \in A.$$

Ejemplos 1.3.5

(1) Las funciones:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z}, \\ a &\longmapsto a^2 - 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} g : \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ a &\longmapsto (a+1)(a-1) \end{aligned}$$

son iguales.

(2) Las funciones dadas por

$$f(a) = a + 1 \quad \text{y} \quad g(a) = \frac{a^2 - 1}{a - 1},$$

no necesariamente son iguales. Si precisamos dominios y contradominios:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}, & g : \mathbb{R} \setminus \{1\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ a &\longmapsto a + 1 & a &\longmapsto \frac{a^2 - 1}{a - 1}. \end{aligned}$$

De esta manera f y g no son iguales pues tienen distintos dominios.

Definición 1.3.6 La función $f : A \longrightarrow B$ es ***inyectiva*** o ***uno a uno*** o ***1 - 1*** si

$$a_1 \neq a_2 \implies f(a_1) \neq f(a_2) \ \forall a_1, a_2 \in A.$$

Equivalentemente, f es ***1 - 1*** si

$$f(a_1) = f(a_2) \implies a_1 = a_2 \ \forall a_1, a_2 \in A.$$

Con respecto a los Ejemplos 1.3.3 tenemos:

(1) La función es inyectiva. (2) La función no es inyectiva. (3) La función no es uno a uno. (4) Las proyecciones en general no son inyectivas. (5) Las funciones f_1, f_4 y f_5 son inyectivas. (6) La función es inyectiva. (7) En general una función constante no es inyectiva (lo es sólo cuando $A = \{a\}$). (8) La función identidad es inyectiva. (9) La función f es inyectiva. (10) La función g no es inyectiva.

Definición 1.3.7 La función $f : A \longrightarrow B$ es ***suprayectiva*** o ***sobre*** si para cada $b \in B$ existe al menos un elemento $a \in A$ tal que $f(a) = b$.

Equivalentemente, $f : A \longrightarrow B$ es ***sobre*** si

$$\mathrm{Im} f = B.$$

Con respecto a los Ejemplos 1.3.3 tenemos:

(1) La función es suprayectiva. (2) La función no es suprayectiva. (3) La función es sobre. (4) Las proyecciones son suprayectivas. (5) La función f_1 es suprayectiva pero f_4 y f_5 no lo son. (6) La función es sobre. (7) En general una función constante no es suprayectiva (lo es sólo cuando $|B| = 1$). (8) La función identidad es suprayectiva. (9) La función f no es suprayectiva. (10) La función g es suprayectiva.

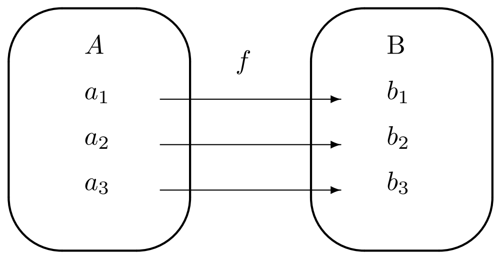
Definición 1.3.8 La función $f : A \longrightarrow B$ es una ***función biyectiva*** o una ***correspondencia biyectiva*** o una ***biyección*** si f es 1 - 1 y sobre.

Con respecto a los Ejemplos 1.3.3 tenemos:

(1) La función es biyectiva. (2) La función no es biyectiva. (3) La función no es biyectiva. (4) Las proyecciones en general no son biyectivas. (5) La función f_1 es biyectiva, las demás funciones no lo son. (6) La función es biyectiva. (7) En general una función constante no es biyectiva (lo es sólo cuando $A = \{a\}$). (8) La función identidad es biyectiva. 9) La función f no es biyectiva. (10) La función g no es biyectiva.

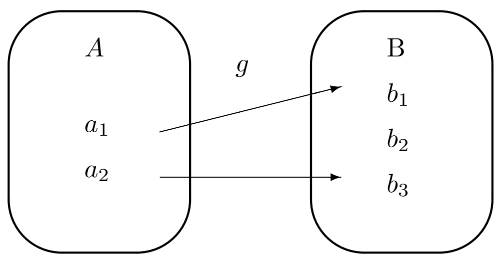
Ejemplos 1.3.9

(1) La función



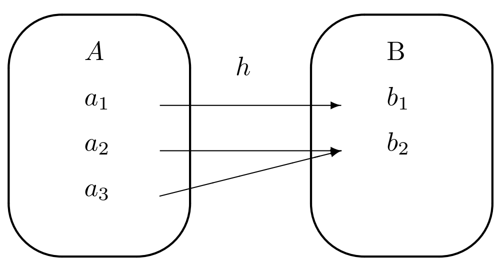
es inyectiva y suprayectiva, luego es biyectiva.

(2) La función



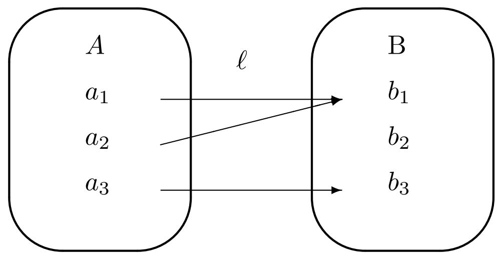
es inyectiva pero no suprayectiva.

(3) La función



es suprayectiva pero no inyectiva.

(4)



es una función que no es ni inyectiva ni suprayectiva.

Observación 1.3.10 No siempre es posible definir la función inversa de f, pues podría suceder que no estuviera definida para todo $b \in B$ (como sucede con b_2 en el último ejemplo), o bien podría suceder que para algún $b \in B$ hubiera dos elementos distintos a_1 y a_2 de A tales que $f(a_1) = f(a_2) = b$ (como sucede con b_1 en el mismo ejemplo).

Sin embargo, sea $f : A \longrightarrow B$ una función biyectiva. Precisamente en este caso podemos definir la ***función inversa de*** f:

$$f^{-1} : B \longrightarrow A$$

la cual está dada por

$$f^{-1}(b) = a \text{ si y sólo si } f(a) = b.$$

Ejemplos 1.3.11

(1)

$$\begin{aligned} f : & \textit{Registro Federal de Electores} \longrightarrow \textit{Conjunto de claves de los electores} \\ & \textit{elector} \longmapsto \textit{clave del elector} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{-1} : & \textit{Conjunto de claves de los electores} \longrightarrow \textit{Registro Federal de Electores} \\ & \textit{clave de elector} \longmapsto \textit{elector} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ a &\longmapsto \sqrt{a} \end{aligned}$$

donde $\sqrt{a}$ es la raíz cuadrada positiva de a.

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ a &\longmapsto a^2 \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} g:\ \ \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ a &\longmapsto \sqrt[3]{a} \end{aligned}$$

donde $\sqrt[3]{a}$ es la raíz cúbica real de a.

$$\begin{aligned} g^{-1}: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ a &\longmapsto a^3 \end{aligned}$$

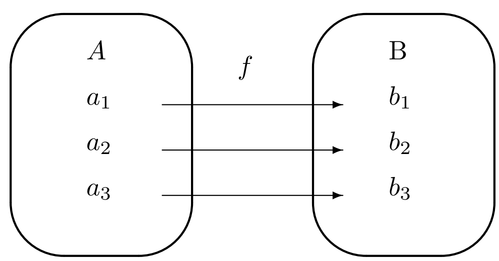
(4) Sea A un conjunto no vacío.

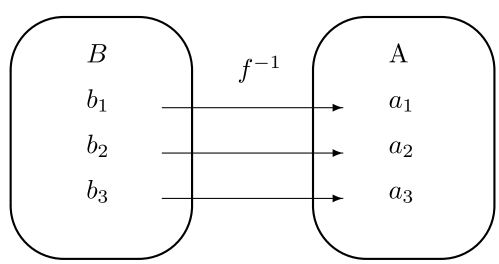
$$\begin{aligned} \mathrm{id}_{\mathrm{A}} : A &\longrightarrow A \\ a &\longmapsto a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_{\mathrm{A}}^{-1} : A &\longrightarrow A \\ a &\longmapsto a, \end{aligned}$$

es decir, $\mathrm{id}_{\mathrm{A}}^{-1} = \mathrm{id}_{\mathrm{A}}$.

(5)





Proposición 1.3.12 *Si la función $f : A \longrightarrow B$ es biyectiva, entonces su función inversa $f^{-1} : B \longrightarrow A$ también es biyectiva y $(f^{-1})^{-1} = f$.*

Demostración. Queda como ejercicio para el lector. □

Definición 1.3.13 Sean $g : A \longrightarrow B$ y $f : B \longrightarrow C$ funciones. La ***composición de f y g***, denotada por $f \circ g$ es la función:

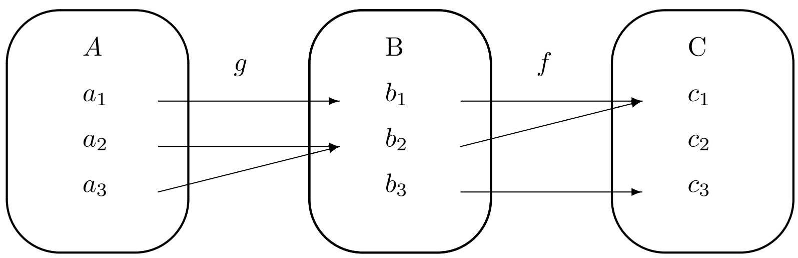
$$f \circ g : A \longrightarrow C$$

definida por

$$(f \circ g)(a) = f(g(a))$$

para todo $a \in A$.

Ejemplo 1.3.14



Observaciones 1.3.15

(1) Para que podamos definir la composición $f \circ g$ hemos pedido que el dominio de f sea igual al contradominio de g. De hecho, basta con que la imagen de g, $\mathrm{Im}g$, esté contenida en el dominio de f.
(2) Un caso especial es $A = B = C$. En este caso podemos definir tanto $f \circ g$ como $g \circ f$.

Ejemplos 1.3.16

(1) Sean

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}, & g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ a &\longmapsto a^2 & a &\longmapsto a+1. \end{aligned}$$

Tenemos

$$\begin{aligned} f \circ g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}, & g \circ f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ a &\longmapsto (a+1)^2 & a &\longmapsto a^2+1. \end{aligned}$$

Notamos que en este ejemplo (y en general)

$$f \circ g \neq g \circ f.$$

(2) Sean

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}, & g:\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ a &\longmapsto a+2 & a &\longmapsto a-1. \end{aligned}$$

Tenemos

$$\begin{aligned} f\circ g:\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}, & g\circ f:\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ a &\longmapsto a+1 & a &\longmapsto a+1. \end{aligned}$$

Notamos que en este ejemplo sí tenemos

$$f\circ g = g\circ f.$$

Proposición 1.3.17 ***(Asociatividad de la composición de funciones)*** *Sean*
$h : A \longrightarrow B, g : B \longrightarrow C$ *y* $f : C \longrightarrow D$ *funciones. Entonces*

$$(f\circ g)\circ h = f\circ(g\circ h).$$

Demostración. Tenemos $(f\circ g)\circ h : A \longrightarrow D$ y $f\circ(g\circ h) : A \longrightarrow D$. Luego $(f\circ g)\circ h$ y $f\circ(g\circ h)$ tienen mismo dominio y mismo contradominio. Sea $a \in A$. Tenemos: $((f\circ g)\circ h)(a) = (f\circ g)(h(a)) = f(g(h(a)))$ y $(f\circ(g\circ h))(a) = f((g\circ h)(a)) = f(g(h(a)))$. Por lo que $((f\circ g)\circ h)(a) = (f\circ(g\circ h))(a) \ \ \forall a \in A$. Luego $(f\circ g)\circ h = f\circ(g\circ h)$. ■

Proposición 1.3.18 *Sean* $g : A \longrightarrow B$ *y* $f : B \longrightarrow C$ *funciones. Tenemos*

(i) *Si* f, g *son inyectivas, entonces* $f\circ g$ *es inyectiva.*

(ii) *Si* f, g *son suprayectivas, entonces* $f\circ g$ *es suprayectiva.*

(iii) *Si* f, g *son biyectivas, entonces* $f\circ g$ *es biyectiva.*

Demostración. Se omite. Queda como ejercicio. □

Proposición 1.3.19 *Sean* $g : A \longrightarrow B$ *y* $f : B \longrightarrow C$ *funciones. Tenemos*

(i) $f\circ g$ *inyectiva* $\implies g$ *inyectiva.*

(ii) *Si* $f\circ g$ *es inyectiva, no necesariamente* f *es inyectiva.*

(iii) $f\circ g$ *suprayectiva* $\implies f$ *suprayectiva.*

(iv) *Si* $f\circ g$ *es suprayectiva, no necesariamente* g *es suprayectiva.*

(v) $f\circ g$ *biyectiva* $\implies g$ *inyectiva y* f *suprayectiva.*

(vi) *Si* $f\circ g$ *es biyectiva, no necesariamente* f *es inyectiva, ni* g *es suprayectiva.*

Demostración. Probaremos solamente (i) y (ii). El resto queda como ejercicio para el lector.
(i) Sean $a_1, a_2 \in A$. Tenemos $g(a_1) = g(a_2) \implies f(g(a_1)) = f(g(a_2)) \implies f \circ g(a_1) = f \circ g(a_2) \implies a_1 = a_2$. Luego g es inyectiva.
(ii) Sean

$$g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \qquad\qquad f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

$$g(n) = n+1 \qquad\qquad f(n) = \begin{cases} n-1 & \text{si } n \neq 1 \\ 1 & \text{si } n = 1. \end{cases}$$

Observamos que $f \circ g$ es inyectiva, mientras que f no lo es. ■

Tenemos por un lado

Proposición 1.3.20 *Sean $f : A \to B$ una función biyectiva y $f^{-1} : B \to A$ su inversa. Entonces:*

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{id_B} \ \ y \ \ f^{-1} \circ f = \mathrm{id_A}.$$

Demostración.
(i) Notamos primero que $f \circ f^{-1} : B \longrightarrow B$ e $\mathrm{id_B} : \mathrm{B} \longrightarrow \mathrm{B}$. Sea $b \in B$. Por ser f biyectiva, $\exists!\ a \in A$ (existe un único $a \in A$) tal que $f(a) = b$. Por la definición de función inversa tenemos $f^{-1}(b) = a$. Así pues, $(f \circ f^{-1})(b) = f(f^{-1}(b)) = f(a) = b = \mathrm{id_B(b)}$. Por lo que concluimos $f \circ f^{-1} = \mathrm{id_B}$.
(ii) Observamos $f^{-1} \circ f : A \longrightarrow A$ e $\mathrm{id_A} : \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{A}$. Sea $a \in A$ y sea $b = f(a)$. Por ser f biyectiva y la definición de función inversa tenemos $f^{-1}(b) = a$. Por tanto $(f^{-1} \circ f)(a) = f^{-1}(f(a)) = f^{-1}(b) = a = \mathrm{id_A(a)}$. Concluimos $f^{-1} \circ f = \mathrm{id_A}$. ■

Por otro lado tenemos

Proposición 1.3.21 *Si $f : A \longrightarrow B$ es función y existe $g : B \longrightarrow A$ función de manera que*

$$g \circ f = id_A \text{ y } f \circ g = id_B.$$

Entonces f es biyectiva y $f^{-1} = g$.

Demostración. Se sigue de la Proposición 1.3.19. Queda como ejercicio proveer los detalles. ■

Debido a este último resultado, nos referimos a una función biyectiva también como ***función invertible***.

Proposición 1.3.22 *Sea $g : A \longrightarrow B$ función. Entonces:*

$$f \circ id_A = f \quad \text{y} \quad id_B \circ f = f.$$

Demostración. Se omite. Queda como ejercicio para el lector. □

Proposición 1.3.23 *Sean $g : A \longrightarrow B$ y $f : B \longrightarrow C$ funciones biyectivas. Entonces:*

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}.$$

Demostración. Observamos primero que por la Proposición **??**, la función $f \circ g : A \longrightarrow C$ es biyectiva y $(f \circ g)^{-1} : C \longrightarrow A$. También observamos que $g^{-1} : B \longrightarrow A$ y $f^{-1} : C \longrightarrow B$. Luego $g^{-1} \circ f^{-1} : C \longrightarrow A$. Así pues, $(f \circ g)^{-1}$ y $g^{-1} \circ f^{-1}$ tienen mismo dominio y mismo contradominio.

Ahora bien, sea $c \in C$. Existe $b \in B$ tal que $f(b) = c$ y existe $a \in A$ tal que $g(a) = b$. Tenemos entonces que $(f \circ g)(a) = f(g(a)) = f(b) = c$, luego $(f \circ g)^{-1}(c) = a$. Por otro lado, $f^{-1}(c) = b$ y $g^{-1}(b) = a$, por lo que $(g^{-1} \circ f^{-1})(c) = g^{-1}(f^{-1}(c)) = g^{-1}(b) = a$. Así $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$. ■

Notación 1.3.24 Sean $f : A \longrightarrow B$ una función y $A_1 \subseteq A$. La ***imagen de*** A_1 ***bajo*** f es

$$f(A_1) = \{f(a) \mid a \in A_1\}.$$

Observaciones 1.3.25
(1) En la situación anterior $f(A_1) \subseteq B$.
(2) $f(A) = \text{Im} f$.
(3) La notación $f(A_1)$ para $A_1 \subseteq A$ puede ser ambigua, pues se puede confundir con $f(a_1)$ para $a_1 \in A$.

Definición 1.3.26 Sea $f : A \longrightarrow B$ una función.

(1) Sea $B_1 \subseteq B$. La ***imagen inversa de*** B_1 ***bajo*** f es

$$f^{-1}(B_1) = \{a \in A \mid f(a) \in B_1\}.$$

(2) Sea $b \in B$. La ***imagen inversa de*** b ***bajo*** f es

$$f^{-1}(b) = \{a \in A \mid f(a) = b\}.$$

Observación 1.3.27 La notación $f^{-1}(B_1)$ para $B_1 \subseteq B$ y sobre todo la notación $f^{-1}(b_1)$ para $b_1 \in B$ pueden ser ambiguas, pues es posible confundirlas con la función inversa de f, la cual recordamos que se puede definir únicamente cuando f es biyectiva.

1.4. Buen orden e inducción matemática

Axioma 1.4.1 ***(Principio del Buen Orden)*** *Si A es un subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$ (el conjunto de los números naturales $\{1, 2, 3, \dots\}$), entonces existe $m \in A$ tal que $m \leq a \; \forall \, a \in A$ (m es el* ***elemento mínimo*** *o* ***primer elemento*** *de A).*

Recordemos que un ***número primo*** es un entero mayor que 1 tal que sus únicos divisores positivos son 1 y él mismo.

Ejemplos 1.4.2

(a) $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \ldots$ son primos,

(b) $1, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, \ldots$ no son primos.

Lema 1.4.3 ***(Lema de Euclides)*** *Sean a y b números enteros y p un número primo tales que $p \mid a \cdot b$. Entonces $p \mid a$ o $p \mid b$.*

Demostración. Omitimos la demostración (referimos a una basada en la Identidad de Bézout: http://planetmath.org/alternativeproofofeuclidslemma).

□

Teorema 1.4.4 ***(Teorema Fundamental de la Aritmética)*** *Todo número entero m mayor que 1 se puede escribir de manera única (salvo el orden) como producto de primos.*

Demostración.
(i) Probemos primero la existencia, esto es que todo número entero m mayor que 1 se puede escribir como producto de primos. Supongamos que no es cierto el enunciado. Entonces existe un entero $m > 1$ tal que m no es primo ni tampoco es producto de primos. Así, el conjunto

$$A = \{m \mid m \text{ es entero}, m > 1 \text{ y } m \text{ no es primo ni producto de primos}\}$$

es no vacío. Por el Principio del Buen Orden, A tiene un primer elemento, digamos m_0. Como $m_0 \in A$, tenemos que m_0 no es primo. Luego $m_0 = a \cdot b$ con a, b enteros positivos, $1 < a < m_0$ y $1 < b < m_0$. Puesto que $a, b \notin A$, tenemos que a y b o son primos o productos de primos. Por lo que m_0 es producto de primos, lo que contradice que $m_0 \in A$. Esta contradicción nos lleva a concluir que la existencia de la factorización es cierta.
(ii) Probemos ahora la unicidad. Supongamos que el entero m mayor que 1 se escribe como producto de primos

$$m = p_1 \cdots p_r = q_1 \cdots q_s.$$

Como p_1 divide al segundo producto, por el Lema de Euclides, p_1 debe dividir a alguno de $q_1, \cdots, q_s$, digamos a q_1. Siendo p_1 y q_1 ambos primos, necesariamente $p_1 = q_1$. Podemos cancelar a p_1 de ambos productos. Continuando de esta manera, los factores primos de los dos productos deben coincidir precisamente. De aquí se sigue la unicidad de la factorización de m. ■

Observación 1.4.5 La parte (i) de la demostración anterior es un ejemplo de una demostración por contradicción o por reducción a lo absurdo.

Teorema 1.4.6 ***(Principio de Inducción Matemática)*** *Sea $P(n)$ una afirmación acerca de los números naturales $\mathbb{N}$ (o enteros positivos) tal que*

(i) $P(1)$ *es válida.*

(ii) *Si* $P(k)$ *es válida, entonces* $P(k+1)$ *es válida* $\forall\ k \in \mathbb{N}$.

Entonces $P(n)$ *es válida* $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Supongamos que no es cierto el teorema. Entonces existe una afirmación $P(n)$ para la que se cumplen (i) y (ii) pero $P(n)$ no es válida para todo $n \in \mathbb{N}$. Por el Principio del Buen Orden, existe un mínimo natural m tal que $P(m)$ no es válida. Puesto que se cumple (i), necesariamente $m > 1$. Por la minimalidad de m tenemos que $P(m-1)$ es válida. Por (ii) se sigue que $P(m)$ es válida, lo cual está en contradicción con que $P(m)$ no es válida. Esta contradicción nos lleva a concluir que $P(n)$ es válida $\forall\ n \in \mathbb{N}$. ■

Variaciones 1.4.7 *En el Principio de Inducción Matemática podemos hacer ligeras variaciones:*

(1) *Cambiar* 1 *por cualquier* $n_0 \in \mathbb{Z}$ *(mayor o menor que* 1*).*

Concluir que $P(n)$ *es válida* $\forall\ n \geq n_0$.

(2) *Supongamos*

(i) $P(1)$ *es válida y*

(ii) $(P(j)$ *válida,* $\forall\ j < k) \implies P(k)$ *es válida,* $\forall\ k \in \mathbb{N}$.

Entonces $P(n)$ *es válida* $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

(3) *Supongamos*

(i) $P(n_0)$ *es válida y*

(ii) $(P(j)$ *válida,* $\forall\ j < k) \implies P(k)$ *es válida,* $\forall\ k \geq n_0$.

Entonces $P(n)$ *es válida* $\forall\ n \geq n_0$.

Ejemplos 1.4.8

(1) Demostrar que para $n \in \mathbb{N}$ se cumple:

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Demostración. Por inducción sobre n.

(i) Para $n = 1$:

$$1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

(ii) Supongamos se cumple para k, esto es:

$$1 + 2 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Por demostrar para $k+1$, esto es:

$$1+2+\ldots+k+(k+1)=\frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}.$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned}1+2+\ldots+k+(k+1) &= \frac{k(k+1)}{2}+(k+1)\\ &= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}\\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2}.\end{aligned}$$

Concluimos que

$$1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2} \text{ es válida } \forall\ n\in\mathbb{N}. \qquad \blacksquare$$

(2) Sea $a\in\mathbb{R}, a\neq 1$. Se tiene:

$$1+a+a^2+\ldots+a^n=\frac{a^{n+1}-1}{a-1}\ \forall\ n\in\mathbb{N}.$$

Demostración. Por inducción sobre n.

(i) Para $n=1$:

$$1+a=\frac{a^2-1}{a-1}.$$

(ii) Supongamos se cumple para k:

$$1+a+a^2+\ldots+a^k=\frac{a^{k+1}-1}{a-1}.$$

Por demostrar para $k+1$:

$$1+a+a^2+\ldots+a^k+a^{k+1}=\frac{a^{k+1}-1}{a-1}.$$

Veamos,

$$\begin{aligned}1+a+a^2+\ldots+a^k+a^{k+1} &\overset{h.i.}{=} \frac{a^{k+1}-1}{a-1}+a^{k+1}\\ &= \frac{a^{k+1}-1+a^{k+1}(a-1)}{a-1}\\ &= \frac{a^{k+1}-1+a^{k+2}-a^{k+1}}{a-1}\\ &= \frac{a^{k+2}-1}{a-1}.\end{aligned}$$

Concluimos que

$$1 + a + a^2 + \ldots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} \text{ se cumple } \forall\ n \in \mathbb{N}. \qquad \blacksquare$$

(3) Tenemos

$$2^{n-1} > n\ \forall\ n \in \mathbb{Z}, n \geq 3.$$

Demostración. Por inducción sobre n.

(i) Para $n = 3$:

$$2^{3-1} = 2^2 > 3.$$

(ii) Supongamos se cumple para $k \geq 3$:

$$2^{k-1} > k.$$

Por demostrar:

$$2^k > k + 1.$$

Veamos,

$$2^k = 2 \cdot 2^{k-1} \overset{h.i.}{>} 2 \cdot k = k + k > k + 1.$$

Concluimos que

$$2^{n-1} > n\ \forall\ n \in \mathbb{Z}, n \geq 3. \qquad \blacksquare$$

Observamos que para $n = 1$ y para $n = 2$ no se cumple el enunciado anterior.

(4) Demuestre por inducción que todo número natural n mayor que 1 se escribe como producto de primos.

Demostración. Por inducción sobre n.

(i) Para $n = 2$:
Como 2 es primo, 2 se escribe como producto de primos (un solo factor).

(ii) Sea $k \in \mathbb{N}, k > 2$. Supongamos que el enunciado se cumple para $j \in \mathbb{N}, 2 \leq j < k$, es decir, j se escribe como producto de primos para $j \in \mathbb{N}, 2 \leq j < k$. Por demostrar el enunciado para k, esto es, que k es producto de primos.
Si k es primo, k se escribe como producto de primos (un solo factor) y si k no es primo, $k = j_1 \cdot j_2$ con $2 \leq j_1, j_2 < k$. Por hipótesis de inducción j_1 y j_2 se escriben como productos de primos, luego k también se escribe como producto de primos.
Por lo que concluimos: Todo número natural n mayor que 1 se escribe como producto de primos. ■
Notamos que esta aplicación de la variación (3) del Principio de Inducción Matemática corresponde precisamente a la parte de existencia del Teorema Fundamental de la Aritmética.

(5) Demuestre la Proposición 1.1.16, la cual dice que si el conjunto A tiene n elementos, entonces A tiene 2^n subconjuntos.

Demostración. Por inducción sobre n.

(i) Para $n = 0$:
Tenemos que en este caso $A = \emptyset$. El único subconjunto de $\emptyset$ es $\emptyset$, por lo que A tiene $1 = 2^0$ subconjunto, a saber A mismo.

(i') Para $n = 1$:
Analizar este caso no es necesario, pero lo haremos de cualquier manera. En este caso $A = \{a\}$. Luego A tiene como subconjuntos a $\emptyset$ y a $\{a\}$, por lo que A tiene $2 = 2^1$ subconjuntos.

(ii) Supongamos el resultado es cierto para $n = k$, esto es, que un conjunto con n elementos tiene 2^n subconjuntos y probémoslo para $n = k + 1$.
Sea $A = \{a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}\}$. Deseamos probar que A tiene 2^{k+1} subconjuntos. En efecto, hay dos tipos de subconjuntos de A, los que no contienen a a_{k+1} y los que sí contienen a a_{k+1}. Los que no contienen a a_{k+1} son precisamente los subconjuntos de $A' = \{a_1, \ldots, a_k\}$, que es un conjunto con k elementos. Por hiptesis de inducción, A' tiene 2^k subconjuntos. Por otro lado, cada subconjunto de A que sí contiene a a_{k+1} es precisamente la unión de un subconjunto de A' con $\{a_{k+1}\}$, por lo que también hay 2^k subconjuntos de A de este tipo. En total A tiene $2^k + 2^k = 2 \times 2^k = 2^{k+1}$ subconjuntos.
Así pues, hemos probado que si el conjunto A tiene n elementos, entonces A tiene 2^n subconjuntos. ■

Capítulo 2

Espacios vectoriales

2.1. Espacios y subespacios

Iniciamos con la definición de campo.

Definición 2.1.1 Un ***campo (o cuerpo)*** es un conjunto K con dos operaciones, adición $+ : K \times K \longrightarrow K$ y multiplicación $\cdot : K \times K \longrightarrow K$ tales que:

(i) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma) \ \ \forall\ \alpha, \beta, \gamma \in K$,

(ii) $\alpha + \beta = \beta + \alpha \ \ \forall \alpha, \beta \in K$,

(iii) $\exists\ 0 \in K$ tal que $\ \alpha + 0 = \alpha \ \ \forall\ \alpha \in K$,

(iv) $\forall\ \alpha \in K, \exists\ \beta \in K$ tal que $\ \alpha + \beta = 0$, tal β se denota por $-\alpha$,

(v) $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) \ \ \forall \alpha, \beta, \gamma \in K$,

(vi) $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha \ \ \forall \alpha, \beta \in K$,

(vii) $\exists\ 1 \in K, 1 \neq 0$ tal que $\ \alpha \cdot 1 = \alpha \ \ \forall\ \alpha \in K$,

(viii) $\forall\ \alpha \in K, \alpha \neq 0, \exists\ \gamma \in K$ tal que $\ \alpha \cdot \gamma = 1$, tal γ se denota por α^{-1},

(ix) $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma \ \ \forall \alpha, \beta, \gamma \in K$.

Ejemplos 2.1.2

(1) Los racionales $\mathbb{Q}$, los reales $\mathbb{R}$ y los complejos $\mathbb{C}$ son campos.

(2) Campos finitos.

El campo más pequeño es el campo con 2 elementos $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$. Sus tablas de adición y multiplicación son:

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\times$	0	1
0	0	0
1	0	1

(3) Campos de funciones. El campo de funciones racionales con campo de constantes $\mathbb{F}_2$ es

$$\mathbb{F}_2(x) = \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \;\middle|\; f(x) \text{ y } g(x) \text{ son polinomios con coeficientes en } \mathbb{F}_2 \right\}.$$

Serán de nuestro interés principalmente los campos $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$.

Definición 2.1.3 Un ***espacio vectorial sobre el campo*** K es un conjunto V con una adición

$$+ : V \times V \longrightarrow V$$

y una multiplicación por escalares

$$\cdot : K \times V \longrightarrow V$$

tales que:

(i) $(u + v) + w = u + (v + w) \;\; \forall\, u, v, w \in V$ (asociatividad),

(ii) $u + v = v + u \;\; \forall\, u, v \in V$ (conmutatividad),

(iii) $\exists\, 0 \in V$ tal que $v + 0 = v \;\; \forall\, v \in V$ (neutro aditivo),

(iv) $\forall\, v \in V, \exists\, w \in V$ tal que $v + w = 0$, tal w se denota por $-v$ (inversos aditivos),

(v) $(\alpha \cdot \beta) \cdot v = \alpha \cdot (\beta \cdot v) \;\; \forall\, v \in V,\; \forall \alpha, \beta \in K$,

(vi) $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v \;\; \forall\, v \in V,\; \forall \alpha, \beta \in K$ (distributividad),

(vii) $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v \quad \forall\, u, v \in V,\; \forall \alpha \in K$ (distributividad),

(viii) $1 \cdot v = v \;\; \forall\, v \in V$.

A los elementos de V los llamamos ***vectores*** y a los elementos de K ***escalares***.

Ejemplos 2.1.4

(1) Sea $\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$. Definimos

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

y si $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2).$$

$\mathbb{R}^2$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. En efecto:

(i) $((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) + (z_1, z_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) + (z_1, z_2) =$
$(x_1 + y_1 + z_1, x_2 + y_2 + z_2) = (x_1, x_2) + (y_1 + z_1, y_2 + z_2) =$
$(x_1, x_2) + ((y_1, y_2) + (z_1, z_2))$,

(ii) $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) = (y_1 + x_1, y_2 + x_2) =$
$(y_1, y_2) + (x_1, x_2)$,

(iii) $\exists\ (0, 0) \in \mathbb{R}^2$ tal que $(x_1, x_2) + (0, 0) = (x_1, x_2)\ \ \forall\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$,

(iv) $\forall\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \exists\ -(x_1, x_2) = (-x_1, -x_2) \in \mathbb{R}^2$ tal que
$(x_1, x_2) + (-x_1, -x_2) = (0, 0)$,

(v) $(\alpha\cdot\beta)\cdot(x_1, x_2) = (\alpha\cdot\beta\cdot x_1, \alpha\cdot\beta\cdot x_2) = \alpha\cdot(\beta\cdot x_1, \beta\cdot x_2) = \alpha\cdot(\beta\cdot(x_1, x_2))$,

(vi) $(\alpha + \beta) \cdot (x_1, x_2) = ((\alpha + \beta) \cdot x_1, (\alpha + \beta) \cdot x_2)) =$
$(\alpha \cdot x_1 + \beta \cdot x_1, \alpha \cdot x_2 + \beta \cdot x_2) = (\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot x_2) + (\beta \cdot x_1, \beta \cdot x_2) =$
$\alpha \cdot (x_1, x_2) + \beta \cdot (x_1, x_2)$,

(vii) $\alpha \cdot ((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) = \alpha \cdot (x_1 + y_1, x_2 + y_2) =$
$(\alpha \cdot (x_1 + y_1), \alpha \cdot (x_2 + y_2)) = (\alpha \cdot x_1 + \alpha \cdot y_1, \alpha \cdot x_2 + \alpha \cdot y_2) =$
$(\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot x_2) + (\alpha \cdot y_1, \alpha \cdot y_2) = \alpha \cdot (x_1, x_2) + \alpha \cdot (y_1, y_2)$,

(viii) $1 \cdot (x_1, x_2) = (1 \cdot x_1, 1 \cdot x_2) = (x_1, x_2)\ \ \forall\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

(2) Sea $\mathbb{C}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}\}$. Definimos

$$(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$$

y si $\alpha \in \mathbb{C}$,

$$\alpha(x_1, x_2, x_3) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3).$$

$\mathbb{C}^3$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$,

$$(0, 0, 0)$$

es el neutro aditivo y

$$-(x_1, x_2, x_3) = (-x_1, -x_2, -x_3).$$

(3) Sean K un campo y $n \in \mathbb{N}$, sea

$$K^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1, \cdots, x_n \in K\}.$$

Definimos

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

y si $\alpha \in K$,

$$\alpha(x_1, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n).$$

K^n es un espacio vectorial sobre K,

$$(0, \ldots, 0)$$

es el neutro aditivo y

$$-(x_1, \ldots, x_n) = (-x_1, \ldots, -x_n).$$

(4) $\mathbb{R}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$.

(5) $\mathbb{C}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

(6) $\mathbb{C}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$.

(7) Si K es un campo cualquiera, K es un espacio vectorial sobre K.

Proposición 2.1.5 *Sea V espacio vectorial sobre el campo K. Tenemos*

(i) *si $u + v = u + w$ para algunos $u, v, w \in V$, entonces $v = w$,*

(ii) $\alpha \cdot 0 = 0, \quad \forall\ \alpha \in K$,

(iii) $0 \cdot v = 0, \quad \forall\ v \in V$,

(iv) *si $\alpha \cdot v = 0$ para algunos $\alpha \in K$ y $v \in V$, entonces $\alpha = 0$ o $v = 0$,*

(v) $-1 \cdot v = -v, \quad \forall\ v \in V$.

Demostración.

(i) $u+v = u+w \implies (-u)+(u+v) = (-u)+(u+w) \implies (-u+u)+v = (-u+u)+w \implies 0+v = 0+w \implies v = w$.

(ii) $0 + \alpha \cdot 0 = \alpha \cdot 0 = \alpha \cdot (0 + 0) = \alpha \cdot 0 + \alpha \cdot 0$. Por (i), $0 = \alpha \cdot 0$.

(iii) $0 + 0 \cdot v = 0 \cdot v = (0 + 0) \cdot v = 0 \cdot v + 0 \cdot v$. Por (i), $0 = 0 \cdot v$.

(iv) Supongamos $\alpha \cdot v = 0$. Si $\alpha = 0$, terminamos. Si $\alpha \neq 0$, hemos de demostrar que $v = 0$. Supongamos pues que $\alpha \neq 0$. Entonces existe α^{-1} y tenemos $v = 1 \cdot v = (\alpha^{-1} \cdot \alpha) \cdot v = \alpha^{-1} \cdot (\alpha \cdot v) = \alpha^{-1} \cdot 0 = 0$, por (ii).

(v) $v + (-1) \cdot v = 1 \cdot v + (-1) \cdot v = (1 + (-1)) \cdot v = 0 \cdot v = 0 = v + (-v)$, por (iii). Luego, por (i), $-1 \cdot v = -v$. ■

Definición 2.1.6 Sea V un espacio vectorial sobre un campo K. Un ***subespacio*** de V es un subconjunto no vacío W de V el cual es un espacio vectorial con la adición y multiplicación por escalares de K, heredadas de V, es decir, si W es cerrado bajo la adición y la multiplicación por escalares definidas originalmente en V.

Observación 2.1.7 Para demostrar que un subconjunto W de V es un subespacio de V basta probar que $W \neq \emptyset$ y que ($w_1, w_2 \in W$ y $\alpha_1, \alpha_2 \in K \implies \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 \in W$).

Ejemplos 2.1.8

(1) Sea V espacio vectorial. Tenemos que V y $\{0\}$ son subespacios de V.

(2) Sea $V = \mathbb{R}^3$. Tenemos

(a) $W_1 = \{(x_1, 0, x_3) \mid x_1, x_3 \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio de V. En efecto, $(0,0,0) \in W_1$, luego $W_1 \neq \emptyset$, $(x_1, 0, x_3), (y_1, 0, y_3) \in W_1 \implies (x_1, 0, x_3) + (y_1, 0, y_3) = (x_1 + y_1, 0, x_3 + y_3) \in W_1$ y $(x_1, 0, x_3) \in W_1, \alpha \in R \implies \alpha \cdot (x_1, 0, x_3) = (\alpha \cdot x_1, 0, \alpha \cdot x_3) \in W_1$.

(b) $W_2 = \{(0, x_2, 0) \mid x_2 \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio de V.

(c) $W_3 = \{(x_1, 0, 0) \mid x_1 \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio de V y también es un subespacio de W_1.

(3) Sea $V = \mathbb{R}^2$. Tenemos

(a) $W_1 = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio de V.

(b) $W_2 = \{(x, 1) \mid x \in \mathbb{R}\}$ no es un subespacio de V. En efecto, tenemos $(0,1), (1,1) \in W_2$, pero $(0,1) + (1,1) = (1,2) \notin W_2$.

Definición 2.1.9 Sean W_1, W_2 subespacios de V. Definimos la ***suma de subespacios***

$$W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 \mid w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}.$$

Proposición 2.1.10 *Si W_1, W_2 son subespacios de V. Entonces*

(1) *$W_1 \cap W_2$ es un subespacio de V.*

(2) *$W_1 + W_2$ es un subespacio de V.*

Demostración.

(1) Como $0 \in W_1$ y $0 \in W_2$, por ser W_1 y W_2 subespacios de V, $0 \in W_1 \cap W_2$, luego $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$. Sean $\alpha, \beta \in K, w, w' \in W_1 \cap W_2$. Tenemos $\alpha w + \beta w' \in W_1$ y $\alpha w + \beta w' \in W_2$, por ser W_1 y W_2 subespacios de V. Concluimos $W_1 \cap W_2$ es un subespacio de V.

(2) Como $0 \in W_1$ y $0 \in W_2$, por ser W_1 y W_2 subespacios de V, tenemos $0 = 0 + 0 \in W_1 + W_2$, luego $W_1 + W_2 \neq \emptyset$. Sean $\alpha, \beta \in K, w_1 + w_2, w_1' + w_2' \in W_1 + W_2$ con $w_1, w_1' \in W_1$ y $w_2, w_2' \in W_2$. Entonces $\alpha \cdot (w_1 + w_2) + \beta \cdot (w_1' + w_2') = (\alpha \cdot w_1 + \beta \cdot w_1') + (\alpha \cdot w_2 + \beta \cdot w_2') \in W_1 + W_2$, por ser W_1 y W_2 subespacios de V. Luego $W_1 + W_2$ es un subespacio de V. ■

Observaciones 2.1.11

(1) Si $\{W_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es una colección de subespacios de V, tenemos que la intersección $\bigcap_{\alpha\in I} W_\alpha$ también es un subespacio de V.

(2) La unión de subespacios en general no es subespacio. Por ejemplo $W_1 = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}, W_2 = \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ son subespacios de $\mathbb{R}^2$, pero $W_1 \cup W_2$ no es subespacio de $\mathbb{R}^2$.

Definición 2.1.12 Sean V un espacio vectorial y W_1, W_2 subespacios de V. Diremos que la suma de los subespacios es ***suma directa*** y escribiremos

$$W_1 \oplus W_2$$

para denotar la suma $W_1 + W_2$ de W_1 y W_2 si $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

Ejemplos 2.1.13

(1) Sean $V = \mathbb{R}^3$, $W_1 = \{(x_1,0,0) \mid x_1 \in \mathbb{R}\}$ y $W_2 = \{(0,x_2,0) \mid x_2 \in \mathbb{R}\}$. Puesto que $W_1 \cap W_2 = \{(0,0,0)\}$, $W_1 \oplus W_2 = W_1 + W_2$.

(2) Sean $V = \mathbb{R}^3$, $W_1 = \{(x_1,0,x_3) \mid x_1, x_3 \in \mathbb{R}\}$ y $W_2 = \{(0,x_2,0) \mid x_2 \in \mathbb{R}\}$. Puesto que $W_1 \cap W_2 = \{(0,0,0)\}$, la suma es directa. Tenemos $V = W_1 \oplus W_2 = W_1 + W_2$.

(3) Sean $V = \mathbb{R}^3$, $W_1 = \{(x_1,0,x_3) \mid x_1, x_3 \in \mathbb{R}\}$ y $W_2 = \{(y_1,0,0) \mid y_1 \in \mathbb{R}\}$.Tenemos

  (a) $W_2 \subseteq W_1$.

  (b) $W_1 \cap W_2 = W_2$.

  (c) $W_1 + W_2 = W_1$ y la suma no es directa.

  (d) En este caso $W_1 \cup W_2 = W_1$ es subespacio de V.

  (e) Sea $v = (1,0,0)$. Tenemos $v \in W_1 + W_2$. De hecho v se escribe de dos maneras distintas como suma de elementos de W_1 y W_2:

$$v = (1,0,0) + (0,0,0) = (\frac{1}{2},0,0) + (\frac{1}{2},0,0).$$

Proposición 2.1.14 *Sean W_1, W_2 subespacios de V. La suma de W_1 y W_2 es directa si y sólo si todo vector v de W_1+W_2 se puede escribir de una y solamente una manera $v = w_1 + w_2$ con $w_1 \in W_1$ y $w_2 \in W_2$.*

Demostración.

(a) Supongamos que la suma es directa, esto es $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. Sea $v \in W_1 + W_2, v = w_1 + w_2 = w_1' + w_2'$ con $w_1, w_1' \in W_1, w_2, w_2' \in W_2$. Hemos de probar $w_1 = w_1'$ y $w_2 = w_2'$. De $w_1 + w_2 = w_1' + w_2'$, tenemos $w_1 - w_1' = w_2 - w_2' \in W_1 \cap W_2 = \{0\}$. Luego $w_1 - w_1' = w_2 - w_2' = 0$. Así $w_1 = w_1'$ y $w_2 = w_2'$ como se deseaba.

(2) Supongamos que cualquier elemento v de $W_1 + W_2$ se escribe de manera única como $v = w_1 + w_2$ con $w_1 \in W_1$ y $w_2 \in W_2$. Debemos probar que la suma es directa, esto es que $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. Sabemos que $\{0\} \subseteq W_1 \cap W_2$. Sea $w \in W_1 \cap W_2$. Entonces $w = w + 0 = 0 + w$ como elemento de $W_1 + W_2$. Luego, por unicidad debemos tener $w = 0$. Así $W_1 \cap W_2 \subseteq \{0\}$. Concluimos que $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. ■

2.2. Subespacio generado

Definición 2.2.1 Sean V espacio vectorial sobre el campo K y $S \subseteq V$. El ***subespacio de V generado por S***, denotado por $L(S)$, es el mínimo subespacio de V que contiene a S. Esto es

$$L(S) = \bigcap_{\substack{W \text{ subesp. de } V \\ S \subseteq W}} W.$$

Ejemplos 2.2.2

(1) Si W es un subespacio de V, entonces $L(W) = W$. En particular, para $\{0\}$ se tiene $L(\{0\}) = \{0\}$.

(2) $L(\emptyset) = \{0\}$.

(3) Si $V = \mathbb{R}^2$ y $S = \{(1,1)\}$, entonces $L(S) = \{(x,x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

Proposición 2.2.3 *Si $S \subseteq V$ y $S \neq \emptyset$, entonces*

$$L(S) = \{\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n \mid n \in \mathbb{N}, \alpha_i \in K, v_i \in S \textit{ para } i \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

Demostración. Sea $U := \{\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n \mid n \in \mathbb{N}, \alpha_i \in K, v_i \in S$ para $i \in \{1, \ldots, n\}\}$. Hemos de probar $L(S) = U$.

(i) Sea $v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n \in U$. Sea W subespacio de V tal que $S \subseteq W$. Como $v_1, \ldots v_n \in S$, tenemos $v_1, \ldots v_n \in W$. Luego $v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n \in W$. Por tanto $v \in \bigcap_{\substack{W \text{ subesp. de } V \\ S \subseteq W}} W = L(S)$. Concluimos que $U \subseteq L(S)$.

(ii) Veamos que $S \subseteq U$ y que U es un subespacio de V.

(a) Sea $s \in S$. Entonces $s = 1 \cdot s \in U$. Luego $S \subseteq U$.

(b) Siendo $S \neq \emptyset$, tenemos $U \neq \emptyset$. Sean $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n, \alpha'_1 v'_1 + \ldots + \alpha'_n v'_n \in U$ y $\alpha, \beta \in K$. Entonces $\alpha(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n) + \beta(\alpha'_1 v'_1 + \ldots + \alpha'_n v'_n) = \alpha\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha\alpha_n v_n + \beta\alpha'_1 v'_1 + \ldots + \beta\alpha'_n v'_n \in U$.

Por tanto U es subespacio de V. Como además $S \subseteq U$, tenemos $L(S) = \bigcap_{\substack{W \text{ subesp. de } V \\ S \subseteq W}} W \subseteq U$.

De (i) y (ii) tenemos $U = L(S)$. ■

Definición 2.2.4 Sean V un espacio vectorial sobre el campo K y $v_1, \ldots, v_n \in V$. A una expresión de la forma $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$, donde $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ la llamamos una ***combinación lineal de*** $v_1, \ldots, v_n$.

Definición 2.2.5 Sea V espacio vectorial sobre el campo K. Decimos que los vectores $v_1, \ldots, v_n$ ***generan a*** V o que $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ***genera a*** V si para cualquier $v \in V$ existen escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ tales que

$$v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n.$$

Observación 2.2.6 Los vectores $v_1, \ldots, v_n$ generan a V si y sólo si

$$V = L(\{v_1, \ldots, v_n\}).$$

2.3. Dependencia e independencia lineal

Definición 2.3.1 Sea V espacio vectorial sobre el campo K.

(i) Decimos que los vectores $v_1, \ldots, v_n$ ***son linealmente independientes sobre el campo*** K ***(l. i.)*** o que $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ***es linealmente independiente sobre*** K ***(l. i.)*** si para $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = 0 \implies \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0.$$

(ii) Decimos que los vectores $v_1, \ldots, v_n$ ***son linealmente dependientes sobre el campo*** K ***(l. d.)*** o que $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ***es linealmente dependiente sobre*** K ***(l. d.)*** si existen escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *no todos cero* tales que

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = 0.$$

Observaciones 2.3.2

(1) Si $v \in V, v \neq 0$, entonces $\{v\}$ es l. i.

(2) $\{0\}$ es l. d.

(3) Convenimos en que $\emptyset$ es l. i.

(4) Si $0 \in \{v_1, \ldots, v_n\}$, entonces $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es l. d.

(5) Sea $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Los vectores $v_1, \ldots, v_n$ son l. d. si y sólo si al menos uno de ellos es combinación lineal de los demás.

Ejemplos 2.3.3

(1) $\{(1,0),(1,1)\}$ es l. i. y genera a $\mathbb{R}^2$.

(2) $\{(1,0),(2,0)\}$ es l. d. en $\mathbb{R}^2$.

(3) $\{(1,0)\}$ es l. i., pero no genera a $\mathbb{R}^2$.

(4) $\{(1,0),(1,1),(0,1)\}$ genera a $\mathbb{R}^2$, pero no es l. i.

(5) $\{(0,1),(0,2)\}$ no genera a $\mathbb{R}^2$ ni es l. i.

(6) $\{(2,3),(1,1)\}$ es l. i. y genera a $\mathbb{R}^2$. En efecto:

(i) $\{(2,3),(1,1)\}$ es l. i. pues

$$\alpha(2,3)+\beta(1,1)=(0,0) \implies (2\alpha+\beta, 3\alpha+\beta)=(0,0)$$

$$\implies 2\alpha+\beta=0 \text{ y } 3\alpha+\beta=0 \implies \alpha=\beta=0.$$

(ii) $\{(2,3),(1,1)\}$ genera a $\mathbb{R}^2$ pues dado $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, existen α y $\beta\in\mathbb{R}$ tales que $\alpha(2,3)+\beta(1,1)=(a,b)$. Tales α y β existen ya que el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{array}{rcl} 2\alpha+\beta & = & a \\ 3\alpha+\beta & = & b \end{array}$$

tiene como solución $\alpha=b-a$ y $\beta=3a-2b$.

2.4. Bases y dimensión

Definición 2.4.1 Sea V un espacio vectorial sobre el campo K. Decimos que un conjunto de vectores $\{v_1,\ldots,v_n\}$ de V es una ***base de*** V si es linealmente independiente y genera a V.

Nota 2.4.2 Para algunos fines es importante *el orden* en que aparecen los elementos de una base.

Lema 2.4.3 *Los vectores $\{v_1,\ldots,v_n\}$ distintos de cero son l. d. si sólo si uno de ellos es una combinación de los vectores anteriores a él.*

Demostración. Se omite. Ver [6, Lema 5.2]. □

Proposición 2.4.4 *Supongamos $\{v_1,\ldots,v_n\}$ genera a V y $\{w_1,\ldots,w_m\}$ es linealmente independiente. Entonces $m\leq n$.*

Demostración. Se omite. Ver [6, Lema 5.4]. □

Corolario 2.4.5 *Si $\{v_1,\ldots,v_n\}$ y $\{w_1,\ldots,w_m\}$ son bases de V, entonces $m=n$.*

Demostración. Se sigue de la Proposición 2.4.4. Queda al lector el llenado de los detalles. ■

Corolario 2.4.6 *Sea V un espacio vectorial que puede ser generado por un número finito de vectores. Entonces*

(i) *De todo conjunto de generadores* $\{v_1, \ldots, v_n\}$ *de* V *se puede extraer una base.*

(ii) *Todo conjunto linealmente independiente* $\{w_1, \ldots, w_m\}$ *de* V *puede completarse a una base.*

Demostración.

(i) Retiramos de $\{v_1, \ldots, v_n\}$ los vectores 0 y sucesivamente de derecha a izquierda los vectores que dependan linealmente de los anteriores, quedándonos al final una base.

(ii) Sea $\{v_1, \ldots, v_n\}$ un conjunto de generadores de V. Consideramos el conjunto $\{w_1, \ldots, w_m, v_1, \ldots, v_n\}$. Este conjunto genera a V. Retiramos los vectores 0 y sucesivamente, de derecha a izquierda, retiramos los vectores que dependan linealmente de los vectores a su izquierda. Al final de este proceso queda una base de V la cual contiene a $\{w_1, \ldots, w_m\}$. ■

Ejemplos 2.4.7

(1) Del conjunto de generadores de $\mathbb{R}^2$ $\{(1,0),(1,1),(0,1)\}$ retiramos $(0,1)$ quedando la base $\{(1,0),(1,1)$.

(2) Al conjunto l. i. $\{(1,0)\}$ le añadimos el conjunto de generadores $\{(2,0),(0,2),(-1,1)\}$ obteniéndose $\{(1,0),(2,0),(0,2),(-1,1)\}$, retiramos sucesivamente $(-1,1)$ y $(2,0)$ quedando la base $\{(1,0),(0,2)\}$, la cual contiene al conjunto original $\{(1,0)\}$.

Definición 2.4.8 Si el espacio vectorial V puede ser generado por un número finito de vectores, diremos que V es de ***dimensión finita***.

Si V es de dimensión finita, al número de elementos de una base se le llama la ***dimensión de*** V y se le denota $\dim V$ (o bien $\dim_K V$).

Ejemplos 2.4.9

(1) Puesto que convenimos en que el conjunto vacío es l. i. y que tenemos que $L(\emptyset) = \{0\}$, tenemos que el conjunto vacío es una base para $\{0\}$. Luego $\dim\{0\} = 0$.

(2) En $\mathbb{R}^2 = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$, sean $e_1 = (1,0)$ y $e_2 = (0,1)$. Si $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, tenemos $(a,b) = ae_1 + be_2$. Luego $\{e_1, e_2\}$ genera a $\mathbb{R}^2$. Veamos $\{e_1, e_2\}$ es l. i. Suponemos $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 = (0,0)$. Entonces $(\alpha_1, \alpha_2) = (\alpha_1, 0) + (0, \alpha_2) = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 = (0,0)$. Luego $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Por lo tanto, $\{e_1, e_2\}$ es l. i. Concluimos que $\{e_1, e_2\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$ y que $\dim \mathbb{R}^2 = 2$.

(3) Sean K un campo y $n \in \mathbb{N}$. En K^n, sea $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ para $i \in \{1, \ldots, n\}$ (1 está en el lugar i). Tenemos $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es una base para K^n, llamada ***la base canónica de*** V y además tenemos $\dim K^n = n$.

Obsérvese que la notación anterior puede causar confusión pues, por ejemplo, e_2 puede denotar tanto al vector $(0,1)$ en $\mathbb{R}^2$ como a $(0,1,0)$ en $\mathbb{R}^3$, a $(0,1,0,0)$ en $\mathbb{R}^4$, etc. Del contexto habrá de deducirse a qué vector e_2 se está uno refiriendo.

(4) Considerando $n = 1$ en el ejemplo anterior tenemos $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$ y, por otro lado, tenemos $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$ pues $\{1, i\}$ es una base para $\mathbb{C}$ sobre el campo $\mathbb{R}$.

Observaciones 2.4.10

(i) No todos los espacios vectoriales son de dimensión finita. Por ejemplo, $\mathbb{R}$ no es de dimensión finita como espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$.

(ii) También se pueden definir independencia lineal de un conjunto infinito, bases infinitas y espacios vectoriales de dimensión infinita.

Proposición 2.4.11 *Sea* $\{v_1, \ldots, v_n\}$ *una base de* V*. Si* $v \in V$ *entonces* existen únicos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ *tales que*

$$v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n.$$

Demostración. Que los α_i existen se tiene porque $\{v_1, \ldots, v_n\}$ genera a V. Veamos que son únicos. Supongamos que

$$v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_n v_n$$

para algunos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n \in K$. Nuestro objetivo es probar $\alpha_1 = \beta_1, \ldots, \alpha_n = \beta_n$. Tenemos

$$(\alpha_1 - \beta_1)v_1 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n)v_n = 0.$$

Como $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es l. i. $\alpha_1 - \beta_1 = \ldots = \alpha_n - \beta_n = 0$. Luego $\alpha_1 = \beta_1, \ldots, \alpha_n = \beta_n$ como se deseaba y tenemos la unicidad para la expresión de v en términos de $v_1, \ldots, v_n$. ■

Ejemplo 2.4.12 El conjunto $\{(2,0), (1,1), (1,3)\}$ no es base de $\mathbb{R}^2$ ya que

$$(1,0) = \frac{1}{2}(2,0) + 0(1,1) + 0(1,3) = 0(2,0) + \frac{3}{2}(1,1) + \frac{-1}{2}(1,3).$$

Definición 2.4.13 Sean V un espacio vectorial, $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V y $v \in V$. Por la Proposición 2.4.11 existen únicos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ tales que $v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$. El ***vector coordenado*** de v respecto a la base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es

$$[v]_{\{v_i\}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 2.4.14

(i) El vector coordenado de $v = (2,0)$ respecto a la base canónica $\{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ es

$$[v]_{\{e_1,e_2\}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(ii) Obtengamos ahora el vector coordenado de $v = (2,0)$ respecto a la base $\{(1,1),(1,3)\}$ de $\mathbb{R}^2$:

$$(2,0) = \alpha(1,1) + \beta(1,3) \implies (2,0) = (\alpha+\beta, \alpha+3\beta).$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{array}{rcl} \alpha+\beta & = & 2 \\ \alpha+3\beta & = & 0 \end{array}$$

y obtenemos $\alpha = 3$ y $\beta = -1$. Luego $(2,0) = 3(1,1) + (-1)(1,3)$, por lo que

$$[v]_{\{(1,1),(1,3)\}} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Proposición 2.4.15 *Sean V un espacio vectorial de dimensión finita y W un subespacio de V. Entonces W también es de dimensión finita y* $\dim W \leq \dim V$. *Además*

$$\dim V = \dim W \iff V = W.$$

Demostración.

(i) Supongamos que $\dim V = n$. Si $W = \{0\}$, entonces W es de dimensión finita y $\dim W = 0 \leq n = \dim V$.

(1) Supongamos pues que $W \neq \{0\}$. Sea $w_1 \in W, w_1 \neq 0$. Tenemos $\{w_1\}$ es l.i. en V, luego $1 \leq n$. Si $L(\{w_1\}) = W$, entonces $\dim W = 1 \leq n = \dim V$.

(2) Si $L(\{w_1\}) \subsetneq W$, sea $w_2 \in W, w_2 \notin L(\{w_1\})$. Tenemos $\{w_1, w_2\}$ es l.i. en V, luego $2 \leq n$. Si $L(\{w_1, w_2\}) = W$, entonces $\dim W = 2 \leq n = \dim V$.

(3) Si $L(\{w_1, w_2\}) \subsetneq W$, sea $w_3 \in W, w_3 \notin L(\{w_1, w_2\})$. Tenemos $\{w_1, w_2, w_3\}$ es l.i. en V, luego $3 \leq n$. Si $L(\{w_1, w_2, w_3\}) = W$, entonces $\dim W = 3 \leq n = \dim V$.

Este proceso no puede continuar indefinidamente, debe parar a lo más en n pasos. Digamos que para en el paso r.

(r) Puesto que $L(\{w_1, \ldots, w_{r-1}\}) \subsetneq W$, sea $w_r \in W$ de manera que $w_r \notin L(\{w_1, \ldots, w_{r-1}\})$. Tenemos $\{w_1, \ldots, w_r\}$ es l.i. en V, luego $r \leq n$. Además $L(\{w_1, \ldots, w_r\}) = W$, por lo que $\dim W = r \leq n = \dim V$.

(ii) Claramente $V = W \implies \dim V = \dim W$. Supongamos $W \subseteq V$ y $\dim W = \dim V = n$. Sea $\{w_1, \ldots, w_n\}$ una base de W. Como $\{w_1, \ldots, w_n\}$ es un subconjunto linealmente independiente de V y $\dim V = n$, tenemos que $\{w_1, \ldots, w_n\}$ es una base de V. Luego $V = L(\{w_1, \ldots, w_n\}) = W$.

■

Teorema 2.4.16 *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Sean W_1, W_2 subespacios de V. Se tiene*

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2).$$

Demostración.

Sean $r = \dim W_1 \cap W_2$, $n = \dim W_1$ y $m = \dim W_2$. Sea $\{w_1, \ldots, w_r\}$ una base de $W_1 \cap W_2$. Entonces $\{w_1, \ldots, w_r\}$ es un subconjunto de W_1 linealmente independiente. Completamos $\{w_1, \ldots, w_r\}$ para obtener una base $\{w_1, \ldots, w_r, u_{r+1}, \ldots, u_n\}$ de W_1. También completamos $\{w_1, \ldots, w_r\}$ para obtener una base $\{w_1, \ldots, w_r, v_{r+1}, \ldots, v_m\}$ de W_2. Comprobemos que

$$\{w_1, \ldots, w_r, u_{r+1}, \ldots, u_n v_{r+1}, \ldots, v_m\}$$

es una base de $W_1 + W_2$.

(i) Supongamos

$$\alpha_1 w_1 + \ldots + \alpha_r w_r + \beta_{r+1} u_{r+1} + \ldots + \beta_n u_n + \gamma_{r+1} v_{r+1} + \ldots + \gamma_m v_m = 0$$

para algunos $\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_{r+1}, \ldots, \beta_n, \gamma_{r+1}, \ldots, \gamma_m \in K$. Nuestro objetivo es probar $\alpha_1 = \ldots = \alpha_r = \beta_{r+1} = \ldots = \beta_n = \gamma_{r+1} = \ldots = \gamma_m = 0$. Tenemos

$$\begin{aligned} \alpha_1 w_1 + \ldots + \alpha_r w_r + \beta_{r+1} u_{r+1} + \ldots + \beta_n u_n &= \\ -\gamma_{r+1} v_{r+1} - \ldots - \gamma_m v_m &\in W_1 \cap W_2. \end{aligned}$$

Luego

$$-\gamma_{r+1} v_{r+1} - \ldots - \gamma_m v_m = \delta_1 w_1 + \ldots + \delta_r w_r,$$

para algunos $\delta_1, \ldots, \delta_r \in K$.

Por ser $\{w_1, \ldots, w_r, v_{r+1}, \ldots, v_m\}$ base de W_2, $\{w_1, \ldots, w_r, v_{r+1}, \ldots, v_m\}$ es l. i. Por tanto $\gamma_{r+1} = \ldots = \gamma_m = \delta_1 = \ldots = \delta_r = 0$.

Entonces

$$\alpha_1 w_1 + \ldots + \alpha_r w_r + \beta_{r+1} u_{r+1} + \ldots + \beta_n u_n = 0.$$

Como $\{w_1, \ldots, w_r, u_{r+1}, \ldots, u_n\}$ es base de W_1, $\{w_1, \ldots, w_r, u_{r+1}, \ldots, u_n\}$ es l. i. Por tanto $\alpha_1 = \ldots = \alpha_r = \beta_{r+1} = \ldots = \beta_n = 0$. Concluimos que $\{w_1, \ldots, w_r, u_{r+1}, \ldots, u_n v_{r+1}, \ldots, v_m\}$ es linealmente independiente.

(ii) Sea $u+v \in W_1+W_2$, con $u \in W_1$ y $v \in W_2$. Entonces existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$, $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_r, \beta_{r+1}, \ldots, \beta_n, \gamma_{r+1}, \ldots, \gamma_m \in K$ tales que

$$u = \alpha_1 w_1 + \ldots + \alpha_r w_r + \beta_{r+1} u_{r+1} + \ldots + \beta_n u_n$$

y

$$v = \alpha'_1 w_1 + \ldots + \alpha'_r w_r + \gamma_{r+1} v_{r+1} + \ldots + \gamma_m v_m.$$

Así tenemos que

$$\begin{aligned} u+v = {} & (\alpha_1+\alpha'_1)w_1 + \ldots + (\alpha_r+\alpha'_r)w_r + \beta_{r+1}u_{r+1} + \ldots + \beta_n u_n \\ & + \gamma_{r+1}v_{r+1} + \ldots + \gamma_m v_m. \end{aligned}$$

Luego $\{w_1, \ldots, w_r, u_{r+1}, \ldots, u_n v_{r+1}, \ldots, v_m\}$ genera a W_1+W_2.

De (i) y (ii) concluimos que $\{w_1, \ldots, w_r, u_{r+1}, \ldots, u_n v_{r+1}, \ldots, v_m\}$ es una base para W_1+W_2.

Por lo tanto,

$$\dim(W_1+W_2) = n+m-r = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2). \qquad \blacksquare$$

Corolario 2.4.17 *Si V es de dimensión finita y $W_1 \cap W_2 = \{0\}$, entonces*

$$\dim(W_1 \oplus W_2) = \dim W_1 + \dim W_2.$$

Demostración. Puesto que $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ se tiene que la suma es directa y que $\dim(W_1 \cap W_2) = 0$. Se sigue del teorema que $\dim(W_1 \oplus W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$. $\blacksquare$

Ejemplos 2.4.18

(1) En $\mathbb{R}^2$, sean $W_1 = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ y $W_2 = \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$. Tenemos $\dim(W_1 \oplus W_2) = \dim(\mathbb{R}^2) = 2 = 1+1 = \dim W_1 + \dim W_2$.

(2) En $\mathbb{R}^3$, sean $W_1 = \{(x_1,x_2,0) \mid x_1,x_2 \in \mathbb{R}\}$ y $W_2 = \{(0,y_2,y_3) \mid y_2,y_3 \in \mathbb{R}\}$. Entonces $W_1+W_2 = \mathbb{R}^3$, $W_1 \cap W_2 = \{(0,z_2,0) \mid z_2 \in \mathbb{R}\}$ y $\dim(W_1 + W_2) = 3 = 2+2-1 = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$.

2.5. Espacio cociente

Sean V un espacio vectorial sobre un campo K y W un subespacio de V. Definimos una relación en V:

Para $u, v \in V$, decimos que u y v están ***relacionados*** (o más precisamente, que están ***relacionados módulo*** W) y escribimos $u \sim v$ si $u - v \in W$.

Esta relación es una relación de equivalencia en V, en efecto:

(i) Sea $v \in V$. Como $v - v = 0 \in W$, tenemos $v \sim v$.

(ii) Supongamos $u \sim v$ Entonces $u - v \in W$. Luego $v - u = -(u - v) \in W$. Por tanto $v \sim u$.

(iii) Supongamos $v_1 \sim v_2$ y $v_2 \sim v_3$. Entonces $v_1 - v_2 \in W$ y $v_2 - v_3 \in W$. Luego $v_1 - v_3 = v_1 - v_2 + v_2 - v_3 \in W$. Así $v_1 \sim v_3$.

Puesto que la relación es reflexiva, simétrica y transitiva, es una relación de equivalencia. Denotamos al conjunto cociente por

$$V/W.$$

Los elementos de V/W son las clases de equivalencia de los elementos de V.

Sea $v \in V$. Tenemos

$$\begin{aligned}
[v] &= \{u \in V \mid u \sim v\} \\
&= \{u \in V \mid u - v \in W\} \\
&= \{u \in V \mid u - v = w \in W\} \\
&= \{v + w \mid w \in W\} \\
&= v + W.
\end{aligned}$$

Recordemos que estas clases forman una partición de V.

Definimos en V/W una suma y una multiplicación por escalares (elementos de K):

(i) $(u + W) + (v + W) = (u + v) + W, \quad \forall\, u, v \in V,$

(ii) $\alpha(v + W) = (\alpha v) + W, \quad \forall\, v \in V,\ \forall \alpha \in K.$

La suma y la multiplicación por escalares están bien definidas, esto es, no dependen de los representantes. En efecto:

(i)

$$\begin{gathered}
u + W = u_1 + W,\ v + W = v_1 + W \implies \\
u - u_1 \in W,\ v - v_1 \in W \implies \\
(u + v) - (u_1 + v_1) = (u - u_1) + (v - v_1) \in W \implies \\
(u + v) + W \ = (u_1 + v_1) + W.
\end{gathered}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
u + W = u_1 + W &\implies \\
u - u_1 \in W &\implies \\
\alpha u - \alpha u_1 = \alpha(u - u_1) \in W &\implies \\
\alpha u + W = \alpha u_1 + W.&
\end{aligned}$$

Con esta suma y multiplicación por escalares V/W es un espacio vectorial sobre el campo K llamado el ***espacio cociente***. Sus elementos son de la forma

$$v + W$$

con $v \in V$. El neutro aditivo es la clase de 0:

$$0 + W.$$

El inverso aditivo de $v + W$ es

$$(-v) + W.$$

Ejemplos 2.5.1

(1) Sean $V = \mathbb{R}^2$ y $W = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Tenemos

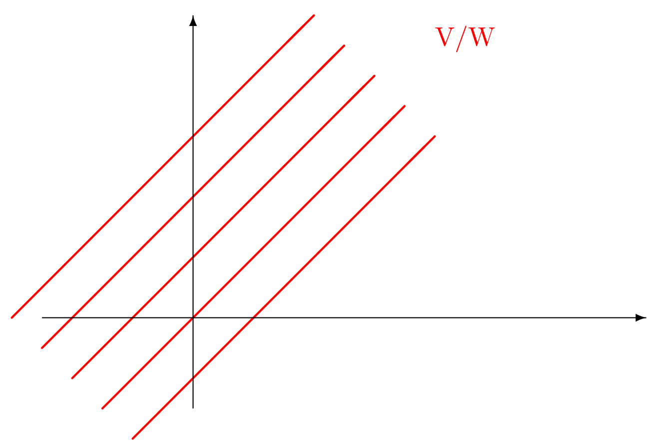
$$V/W = \{v + W \mid v \in \mathbb{R}^2\}.$$

El subespacio W es la recta diagonal a $45°$ que pasa por el origen.

La clase de 0 es $0 + W \in V/W$.

Los elementos de V/W son de la forma $v + W$, son las rectas paralelas a W (incluyendo a W).

El conjunto con un elemento $\{(1,0)+W\}$ es l. i. Además genera a V/W, en efecto: sea $(a, b) + W \in V/W$. Entonces $(a, b) - (a - b)(1, 0) = (b, b) \in W$. Concluimos que $\dim V/W = 1$.



(2) Sean V un espacio vectorial y $W = \{0\}$. Entonces

$$\begin{aligned} u + \{0\} = v + \{0\} &\iff \\ u \sim v &\iff \\ u - v = 0 &\iff \\ u = v. \end{aligned}$$

Observamos que en este caso V/W y V son espacios vectoriales "muy parecidos" (o isomorfos, concepto que se definirá más adelante).

(3) Sean V un espacio vectorial y $W = V$. Sean $u, v \in V$. Tenemos $u - v \in V$, luego $u \sim v$. Así, todos los elementos de V están relacionados y hay una sola clase de equivalencia y V/W es un espacio vectorial con un único elemento, cero.

(4) Sean $V = \mathbb{R}^3$ y $W = \{(y_1, y_2, 0) \mid y_1, y_2 \in \mathbb{R}\}$. Tenemos

$$\begin{aligned} V/W &= \{(x_1, x_2, x_3) + W \mid (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{(0, 0, x_3) + W \mid x_3 \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Luego una base para V/W es $\{(0, 0, 1) + W\}$ y así $\dim V/W = 1$.

Lema 2.5.2 *Si V es un espacio vectorial de dimensión finita y W es un subespacio de V, entonces V/W también es de dimensión finita y*

$$\dim V/W \leq \dim V.$$

Demostración. Tenemos que un conjunto finito $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de elementos de V genera a V. El conjunto $\{v_1 + W, \ldots, v_n + W\}$ genera a V/W y así V/W es de dimensión finita. Si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de V, entonces $\{v_1 + W, \ldots, v_n + W\}$ genera a V/W, luego $\dim V/W \leq \dim V$. ■

Proposición 2.5.3 *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el campo K y sea W un subespacio de V. Tenemos*

$$\dim V = \dim W + \dim V/W.$$

Demostración. Sea $n = \dim V$. Por la Proposición 2.4.15 tenemos que W también es de dimensión finita y $r = \dim W \leq n$. Por el lema V/W es de dimensión finita y $s = \dim V/W \leq n$. Sean $\{w_1, \ldots, w_r\}$ una base de W y $\{u_1 + W, \ldots, u_s + W\}$ una base de V/W. Veamos que $\{w_1, \ldots, w_r, u_1, \ldots, u_s\}$ es una base para V.

(i) Sea $v \in V$. Como $v + W \in V/W$ y $\{u_1 + W, \ldots, u_s + W\}$ es una base de V/W, existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_s \in K$ tales que

$$v + W = \alpha_1(u_1 + W) + \ldots + \alpha_s(u_s + W).$$

Luego

$$v + W = (\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_s u_s) + W.$$

Entonces

$$v - (\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_s u_s) = w \in W.$$

Puesto que $\{w_1, \ldots, w_r\}$ es una base de W, existen $\beta_1, \ldots, \beta_r \in K$ tales que

$$w = \beta_1 w_1 + \ldots + \beta_r w_r.$$

Por lo tanto

$$v = w + \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_s u_s = \beta_1 w_1 + \ldots + \beta_r w_r + \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_s u_s.$$

Así $\{w_1, \ldots, w_r, u_1, \ldots, u_s\}$ genera a V.

(ii) Supongamos

$$\delta_1 w_1 + \ldots + \delta_r w_r + \gamma_1 u_1 + \ldots + \gamma_s u_s = 0,$$

para algunos $\delta_1, \ldots, \delta_r, \gamma_1, \ldots, \gamma_s \in K$. Entonces

$$\delta_1(w_1 + W) \ldots + \delta_r(w_r + W) + \gamma_1(u_1 + W) + \ldots + \gamma_s(u_s + W) = 0 + W.$$

Por tanto,

$$\gamma_1(u_1 + W) + \ldots + \gamma_s(u_s + W) = 0 + W.$$

Como $\{u_1 + W, \ldots, u_s + W\}$ es una base de V/W, es l. i. sobre K. Por lo que

$$\gamma_1 = \ldots = \gamma_s = 0.$$

Luego

$$\delta_1 w_1 + \ldots + \delta_r w_r = 0.$$

Como $\{w_1, \ldots, w_r\}$ es una base de W, es l. i. sobre K. Por lo que

$$\delta_1 = \ldots = \delta_r = 0.$$

Así $\{w_1, \ldots, w_r, u_1, \ldots, u_s\}$ es l. i. sobre K.

De (i) y (ii) concluimos $\{w_1, \ldots, w_r, u_1, \ldots, u_s\}$ es una base de V. Así,

$$\dim V = r + s = \dim W + \dim V/W. \qquad \blacksquare$$

Ejemplos 2.5.4

(1) Sean $V = \mathbb{R}^2$ y $W = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Tenemos
$\dim W = 1$ y $\dim V/W = 1$. Observamos

$$\dim V = 2 = 1 + 1 = \dim W + \dim V/W.$$

(2) Sean V un espacio vectorial de dimensión finita n y $W = \{0\}$. Entonces

$$\dim V = 0 + n = \dim W + \dim V/W.$$

(3) Sean V un espacio vectorial de dimensión finita n y $W = V$. Tenemos

$$\dim V = n + 0 = \dim W + \dim V/W.$$

(4) Sean $V = \mathbb{R}^3$ y $W = \{(y_1, y_2, 0) \mid y_1, y_2 \in \mathbb{R}\}$. Tenemos
$\dim W = 2$ y $\dim V/W = 1$.
Observamos

$$\dim V = 3 = 2 + 1 = \dim W + \dim V/W.$$

Capítulo 3

Sistemas de ecuaciones lineales

Definición 3.0.1 Una ***ecuación lineal*** sobre el campo K es una expresión de la forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b,$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_n, b \in K$ y $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son variables independientes.

Una ***solución*** de la ecuación lineal es una n-ada $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ de manera que:

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_n\alpha_n = b.$$

Ejemplos 3.0.2

(1) Consideramos la ecuación:

$$2x_1 - 3x_2 + x_3 = 8.$$

Tenemos que $(4, 0, 0)$ y $(0, 0, 8)$ son soluciones de la ecuación. Si damos valores arbitrarios $x_2 = \alpha_2, x_3 = \alpha_3$ y despejamos $x_1 = \frac{8+3\alpha_2-\alpha_3}{2}$, obtenemos

$$\left\{\left(\frac{8 + 3\alpha_2 - \alpha_3}{2}, \alpha_2, \alpha_3\right) \mid \alpha_2, \alpha_3 \in K\right\}$$

son todas las soluciones de la ecuación.

(2) Para la ecuación:

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 0$$

cualquier $(\alpha_1, \alpha_2) \in K^2$ es solución. Luego

$$\{(\alpha_1, \alpha_2) \mid \alpha_1, \alpha_2 \in K\}$$

son todas las soluciones.

(3) La ecuación:

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 1$$

no tiene solución.

Consideramos un ***sistema de*** m ***ecuaciones lineales con*** n ***incógnitas***:

$$\begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \quad . & & \\ \quad . & & \\ \quad . & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m, \end{array}$$

donde $a_{ij}, b_i \in K$ para $i \in \{1, \ldots, m\}, j \in \{1, \ldots, n\}$ y $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son variables independientes.

El sistema se dice que es ***homogéneo*** si $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$.

Una ***solución*** del sistema de ecuaciones lineales es una n-ada $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ de manera que:

$$\begin{array}{lcl} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n & = & b_1 \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n & = & b_2 \\ \quad . & & \\ \quad . & & \\ \quad . & & \\ a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \ldots + a_{mn}\alpha_n & = & b_m. \end{array}$$

La ***solución*** o ***solución general*** del sistema consiste de todas las posibles soluciones.

Si el sistema de ecuaciones lineales es homogéneo tenemos dos posibilidades, que haya solamente la solución trivial o bien, que haya más soluciones.

Si el sistema de ecuaciones lineales es no homogéneo tenemos dos posibilidades, que el sistema sea inconsistente (es decir, que no tenga soluciones), o bien que sea consistente (que tenga soluciones), en este último caso, hay dos posibilidades, que haya solamente una solución o bien, que haya más soluciones.

Ejemplos 3.0.3 Sea $K = \mathbb{R}$.

(1) Consideramos el sistema homogéneo:

$$\begin{array}{lcl} x + 2y - 3z & = & 0 \\ x + 3y + z & = & 0 \\ 2x + 5y - 4z & = & 0 \\ 2x + 6y + 2z & = & 0 \end{array}$$

Vaciamos los coeficientes en una matriz (objeto que se definirá más adelante) y realizamos operaciones elementales (que también se prsentarán más adelante):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & -4 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{-2R_1+R_3 \,\to\, R_3 \\ -2R_1+R_4 \,\to\, R_4}]{-R_1+R_2 \,\to\, R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{-R_2+R_3 \,\to\, R_3 \\ -2R_2+R_4 \,\to\, R_4}]{-2R_2+R_1 \,\to\, R_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[-4R_3+R_2 \,\to\, R_2]{11R_3+R_1 \,\to\, R_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

El sistema

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned}$$

es equivalente al sistema original. En este caso la única solución es la trivial.

(2) Consideramos ahora el sistema no homogéneo:

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 4 \\ x + 3y + z &= 11 \\ 2x + 5y - 4z &= 13 \\ 2x + 6y + 2z &= 22. \end{aligned}$$

Vaciamos los coeficientes en una matriz aumentada y realizamos operaciones elementales:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 11 \\ 2 & 5 & -4 & 13 \\ 2 & 6 & 2 & 22 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{-2R_1+R_3 \,\to\, R_3 \\ -2R_1+R_4 \,\to\, R_4}]{-R_1+R_2 \,\to\, R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 8 & 14 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{-R_2+R_3 \,\to\, R_3 \\ -2R_2+R_4 \,\to\, R_4}]{-2R_2+R_1 \,\to\, R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -11 & -10 \\ 0 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{1}{2}R_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -11 & -10 \\ 0 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[-4R_3+R_2 \,\to\, R_2]{11R_3+R_1 \,\to\, R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

El sistema

$$\begin{array}{rcl} x & = & 1 \\ y & = & 3 \\ z & = & 1 \end{array}$$

es equivalente al sistema original. La única solución es $(1, 3, 1)$.

(3) El sistema:

$$\begin{array}{rcl} x + y & = & 0 \\ 2x + 2y & = & 1 \end{array}$$

es inconsistente, no tiene solución.

Vaciamos los coeficientes en una matriz aumentada, realizamos operaciones elementales y obtenemos:

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & | & 0 \\ 2 & 2 & | & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-2R_1+R_2 \ \to \ R_2} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 1 \end{array}\right).$$

De donde obtenemos

$$\begin{array}{rcl} x + y & = & 0 \\ 0 & = & 1, \end{array}$$

lo cual es una contradicción.

(4) Consideramos el sistema homogéneo:

$$\begin{array}{rcl} x + y & = & 0 \\ 2x + 2y & = & 0 \end{array}$$

Como

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2R_1+R_2 \ \to \ R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

El sistema original es equivalente a:

$$x + y \ = \ 0$$

Si damos cualquier valor a a x tenemos $x = a$ y $y = -x = -a$. Luego

$$\{(a, -a) \mid a \in \mathbb{R}\}$$

nos proporciona todas las soluciones del sistema original.

(5) El sistema no homogéneo:

$$\begin{aligned} x+y &= 1 \\ 2x+2y &= 2 \end{aligned}$$

es consistente, $(1,0)$ es una solución al sistema.

Vaciando los coeficientes en una matriz tenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 1 \\ 2 & 2 & | & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2R_1+R_2 \ \to \ R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

El sistema original es equivalente a: $x+y \ = \ 1$

Si damos cualquier valor b a y tenemos $x = 1-b$ y $y = b$. Así

$$\{(1-b,b) \mid b \in \mathbb{R}\}$$

nos proporciona todas las soluciones del sistema original.

Teorema 3.0.4 *En un sistema de ecuaciones lineales homogéneo de m ecuaciones con n incógnitas, si $n > m$, entonces el sistema tiene una solución no trivial en K.*

Demostración. Se omite. Ver [6, Teorema 2.3]. □

Ejemplo 3.0.5 Sea $K = \mathbb{R}$. En el sistema homogéneo:

$$\begin{aligned} x-3y+4z-2w &= 0 \\ 2y+5z+w &= 0 \\ y-3z &= 0, \end{aligned}$$

damos un valor arbitrario a z, digamos $z = a$ y obtenemos $y = 3z = 3a$, $2(3a)+5a+w = 0$, luego $w = -11a$ y, finalmente, $x = 3(3a) - 4a + 2(-11a) = -17a$. La solución general del sistema es:

$$\{(-17a, 3a, a, -11a) \mid a \in \mathbb{R}\}.$$

Una solución no trivial es: $(-17,3,1,-11)$. La solución trivial es: $(0,0,0,0)$.

Capítulo 4

Matrices

4.1. Preliminares

Definición 4.1.1 Sea $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Sean $n, m \in \mathbb{N}$. Una ***matriz*** $m \times n$ ***con entradas en*** K es un arreglo rectangular con m renglones (o filas) y n columnas de elementos de K,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Escribiremos también

$$A = (a_{ij})_{i,j}.$$

Observación 4.1.2 En general pueden definirse matrices con entradas en otros conjuntos más generales, como campos, anillos, matrices, etc.

Denotaremos por

$$\mathcal{M}_{m\times n}(K)$$

al conjunto de matrices $m \times n$ con entradas en K.

Podemos definir la ***suma*** o ***adición de matrices*** y la ***multiplicación de un escalar por una matriz***.

Sean $A = (a_{ij})_{i,j}, B = (b_{ij})_{i,j} \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ y $c \in K$.

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{i,j}$$

$$cA = (ca_{ij})_{i,j}.$$

Ejemplos 4.1.3

(1) $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}.$$

(2) $$c\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} \\ ca_{21} & ca_{22} \end{pmatrix}.$$

(3) Sean $K = \mathbb{C}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \\ -5 & -6 \end{pmatrix}$.

Tenemos $A + B = \begin{pmatrix} 1+i & 2 \\ 3 & 4+i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $\sqrt{2}A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 3\sqrt{2} & 4\sqrt{2} \\ 5\sqrt{2} & 6\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Con esta suma y esta multiplicación por escalares, $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$ es un espacio vectorial de dimensión $m\cdot n$ sobre K. Se deja como ejercicio verificar que la suma es asociativa y conmutativa. El neutro aditivo es la matriz $0 = 0_{m\times n} = (0)_{i,j}$. El inverso aditivo de la matriz $A = (a_{ij})_{i,j}$ es $-A = (-a_{ij})_{i,j}$. Queda como ejercicio demostrar que $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$ cumple las restantes condiciones de espacio vectorial. Una base para $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$ es

$$\{E_{i,j} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\},$$

donde $E_{i,j}$ es la matriz cuyas entradas son todas 0, excepto la i, j que es 1.

Ejemplo 4.1.4 Una base para $\mathcal{M}_{3\times 2}(K)$ es

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Si $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ y $B = (b_{jk})_{j,k} \in \mathcal{M}_{n\times p}(K)$, podemos definir el ***producto*** de las matrices A y B como la matriz $m \times p$ $C = AB$, donde

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}.$$

Observaciones 4.1.5

(1) El orden del producto AB es importante. Cuando AB está definido, no necesariamente BA está definido. Para que AB y BA estén definidas es necesario y suficiente que $m = p$. Aun en este caso podría suceder que AB y BA no sean del mismo tamaño. Para que AB y BA estén definidas y sean del mismo tamaño, es necesario y suficiente que $m = n = p$. Aun así, no necesariamente se tiene $AB = BA$.

(2) Siempre que las operaciones se puedan realizar $A0 = 0$ y $0B = 0$.

Ejemplos 4.1.6

(1) Sean $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -7 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Tenemos

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y BA no puede definirse.

(2) Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Tenemos

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

y

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(3) Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Tenemos

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nótese que en este ejemplo, aunque $A \neq 0$ y $B \neq 0$ se tiene $AB = 0$.

(4) Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Tenemos

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

y

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Proposición 4.1.7 *Sean A, B, C matrices con entradas en K y $c \in K$. Siempre que las operaciones se puedan realizar, se tiene:*

(i) $A(BC) = (AB)C$

(ii) $A(B + C) = AB + AC$

(iii) $(A + B)C = AC + BC$

(iv) $c(AB) = (cA)B = A(cB)$.

Demostración. Se omite. Ver [6, Teorema 3.2]. □

Introducimos el símbolo δ_{ij} llamado ***delta de Kronecker*** definido por:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} .$$

La ***matriz identidad*** $\mathrm{I}_n \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$ es

$$\mathrm{I}_n = (\delta_{ij})_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Proposición 4.1.8 *Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ y $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(K)$, entonces:*

$$A\mathrm{I}_n = A \quad e \quad \mathrm{I}_n B = B.$$

Demostración. Se omite. Ver [2, Seccion 1.8]. □

Definición 4.1.9 Una matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$ es ***invertible*** si existe una matriz $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$ tal que

$$AB = BA = \mathrm{I_n}.$$

Observaciones 4.1.10

(1) Si tal matriz B existe, es única, se llama la ***inversa*** de A y se denota A^{-1}.

(2) Si A es una matriz cuadrada $n \times n$ basta con que $AB = \mathrm{I_n}$ (o con que $BA = \mathrm{I_n}$) para alguna matriz B para que A sea invertible y su inversa sea B (ver [4, Sección 1.6]).

Proposición 4.1.11 *Si $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$ es matriz invertible, entonces A^{-1} también es invertible y $(A^{-1})^{-1} = A$.*

Demostración. Puesto que A es invertible tenemos $AA^{-1} = \mathrm{I_n}$ y $A^{-1}A = \mathrm{I_n}$, de donde se sigue que A^{-1} es invertible y que su inversa es A. ■

Proposición 4.1.12 *Si $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$ son matrices invertibles, entonces AB es invertible. Más precisamente:*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Demostración. Tenemos $AB(B^{-1}A^{-1}) = ((AB)B^{-1})A^{-1}) = (A(BB^{-1}))A^{-1} = (A\mathrm{I}_n)A^{-1} = AA^{-1} = \mathrm{I}_n$. ■

Proposición 4.1.13 *Si $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$ es matriz invertible y $c \in K, c \neq 0$, entonces cA es invertible y*

$$(cA)^{-1} = c^{-1}A^{-1}.$$

Demostración. Se deja como ejercicio al lector. □

Observación 4.1.14 Puede suceder que $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$ sean matrices invertibles pero $A+B$ no lo sea, por ejemplo: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ son invertibles y $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ no lo es.

Ejemplos 4.1.15

(1) $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ no es invertible.

(2) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Tenemos $A \neq 0$ y A no es invertible.

(3) Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Tenemos $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$. En efecto:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observamos

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$B^{-1}A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Comprobamos $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \mathrm{I}_2.$$

Finalmente, observamos que:

$$A^{-1}B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

no es la inversa de AB.

Definición 4.1.16 Sea $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$. La ***traspuesta*** de A, A^t es la matriz $n \times m$ obtenida al cambiar los renglones de A por columnas.

Si

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

entonces

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

En la entrada ij de A^t está a_{ji}. Se tiene

$$A^t = (a_{ji})_{i,j}.$$

Ejemplo 4.1.17 Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Entonces $A^t = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

Proposición 4.1.18 *Sean A, B matrices y $c \in K$. Siempre que las operaciones se puedan realizar se tiene:*

(i) $(A + B)^t = A^t + B^t$

(ii) $(cA)^t = cA^t$

(iii) $(AB)^t = B^tA^t$

(iv) *Si A es invertible, entonces A^t es invertible y $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.*

Demostración. Probaremos (iii) y (iv). El resto es ejercicio para el lector.

(iii) Sean $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,m \\ j=1,n}}$, $B = (b_{jk})_{\substack{j=1,n \\ k=1,p}}$. Entonces

$$AB = (\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk})_{\substack{i=1,m \\ k=1,p}}.$$

Observemos que AB es matriz $m \times p$, por lo que $(AB)^t$ es $p \times m$. Por otro lado, B^t es $p \times n$ y A^t es $n \times m$, luego B^tA^t es $p \times m$.

En la entrada ik de $(AB)^t$ está el elemento $\sum_{j=1}^{n} a_{kj}b_{ji}$. El i-ésimo renglón i de B^t es $(b_{1i}b_{2i}\dots b_{mi})$ y la k-ésima columna de A^t es $\begin{pmatrix} a_{k1} \\ a_{k2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{kn} \end{pmatrix}$. Luego la entrada ik de B^tA^t es $\sum_{j=1}^{n} b_{ji}a_{kj} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}b_{ji}$. Así pues $(AB)^t = B^tA^t$.

(iv) Supongamos A es matriz invertible $n \times n$. Tenemos $A^t(A^{-1})^t = (A^{-1}A)^t = \mathrm{I}_n^t = \mathrm{I}_n$. Luego A^t es invertible y su inversa es $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$. ■

4.2. Matriz de cambio de base

Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre K. Sean $\{v_1, \dots, v_n\}$ y $\{v_1', \dots, v_n'\}$ bases de V.

A $\{v_1, \dots, v_n\}$ lo consideramos como base antigua y a $\{v_1', \dots, v_n'\}$ como base nueva. Tenemos

$$v_i' = \sum_{h=1}^{n} c_{hi}v_h, 1 \le i \le n,$$

para algunos $c_{hi} \in K$. La matriz $P = (c_{hi})_{h,i}$ es ***la matriz de cambio de base*** de la base antigua $\{v_1, \dots, v_n\}$ a la base nueva $\{v_1', \dots, v_n'\}$.

Ejemplo 4.2.1 Sean $V = \mathbb{R}^2$, $\{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$ base antigua y $\{v_1 = (1,1), v_2 = (2,-1)\}$ base nueva. Como $v_1 = (1,1) = 1(1,0) + 1(0,1) = 1e_1 + 1e_2$ y $v_2 = (2,-1) = 2(1,0) + (-1)(0,1) = 2e_1 + (-1)e_2$, la matriz de cambio de base es

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Consideremos ahora a $\{v_1', \dots, v_n'\}$ como base antigua y a $\{v_1, \dots, v_n\}$ como base nueva. Tenemos entonces

$$v_h = \sum_{i=1}^{n} d_{ih}v_i', 1 \le h \le n,$$

para algunos $d_{ih} \in K$.

Observamos que la matriz $Q = (d_{ih})_{i,h}$ es la matriz de cambio de base de la ahora de la base antigua $\{v_1', \dots, v_n'\}$ a la base nueva $\{v_1, \dots, v_n\}$.

Ejemplo 4.2.2 Con referencia al ejemplo anterior. Sean $V = \mathbb{R}^2$ y, ahora, $\{v_1 = (1,1), v_2 = (2,-1)\}$ la base antigua y $\{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$ la base nueva. Como $e_1 = (1,0) = \frac{1}{3}(1,1) + \frac{1}{3}(2,-1) = \frac{1}{3}e_1 + \frac{1}{3}e_2$ y $e_2 = (0,1) = (\frac{2}{3})(1,0) + (-\frac{1}{3})(0,1) = (\frac{2}{3})v_1 + (-\frac{1}{3})v_2$, la matriz de cambio de base es

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

En general, ¿qué relación hay entre P y Q?

Observamos que para $1 \leq h \leq n, v_h = \sum_{i=1}^n d_{ih} v'_i = \sum_{i=1}^n d_{ih} \sum_{l=1}^n c_{li} v_l = \sum_{l=1}^n (\sum_{i=1}^n c_{li} d_{ih}) v_l$, luego

$$\sum_{i=1}^n c_{li} d_{ih} = \delta_{lh}.$$

Por tanto $PQ = \mathrm{I_n}$ y así

$$Q = P^{-1}.$$

En particular, P es invertible.

Por otro lado, observemos que si $v \in V$, entonces $v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = \sum_{h=1}^n \alpha_h v_h$, para algunos $\alpha_h \in K$ y $v = \alpha'_1 v'_1 + \ldots + \alpha'_n v'_n = \sum_{i=1}^n \alpha'_i v'_i$, para algunos $\alpha'_i \in K$. Luego

$$v = \sum_{i=1}^n \alpha'_i v'_i = \sum_{i=1}^n \alpha'_i \sum_{h=1}^n c_{hi} v_h = \sum_{h=1}^n (\sum_{i=1}^n c_{hi} \alpha'_i) v_h = \sum_{h=1}^n \alpha_h v_h.$$

Por tanto

$$\alpha_1 = \sum_{i=1}^n c_{1i} \alpha'_i$$
$$\vdots$$
$$\alpha_h = \sum_{i=1}^n c_{hi} \alpha'_i$$
$$\vdots$$
$$\alpha_n = \sum_{i=1}^n c_{ni} \alpha'_i.$$

En términos de producto de matrices tenemos

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha'_n \end{pmatrix}.$$

Esto es,

$$[v]_{\{v_i\}} = P[v]_{\{v_i'\}}.$$

También tenemos

$$[v]_{\{v_i'\}} = P^{-1}[v]_{\{v_i\}} = Q[v]_{\{v_i\}}.$$

Ejemplo 4.2.3 Sean $V = \mathbb{R}^2$, $\{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$ la base antigua, $\{v_1 = (1,1), v_2 = (2,-1)\}$ la base nueva y $v = (3,4) \in V$. Tenemos

$$v = (3,4) = \frac{11}{3}(1,1) + (-\frac{1}{3})(2,-1) = \frac{11}{3}v_1 + (-\frac{1}{3})v_2.$$

Entonces $[v]_{\{v_i\}} = \begin{pmatrix} \frac{11}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$. Por otro lado,

$$v = (3,4) = 3e_1 + 4e_2.$$

Comprobamos

$$P[v]_{\{v_i\}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{11}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = [v]_{\{e_i\}}$$

y

$$Q[v]_{\{e_i\}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = [v]_{\{v_i\}}.$$

Observación 4.2.4 Según la definición dada en esta sección, la **matriz de cambio de base** se obtiene al vaciar en columnas las coordenadas de los vectores de la base nueva en términos de los vectores de la antigua. Es **importante** hacer notar que esta definición **no es estándar**, en algunos textos (por ejemplo en [1] y en [2]) se define la matriz de cambio de base como la que se obtiene al vaciar en columnas las coordenadas de los vectores de la base antigua en términos de los vectores de la nueva. Esta falta de uniformidad en la definición de la matriz de cambio de base tiene como consecuencia falta de uniformidad en los enunciados de los resultados que involucran matrices de cambio de base.

4.3. Método de eliminación de Gauss–Jordan

Se definen primero las operaciones elementales de renglón, después las matrices elementales y más adelante se presenta la vinculación entre ellas. También se definen operaciones elementales de columna. Se presenta el método de eliminación de Gauss–Jordan y, como aplicación, un método para, dada una matriz cuadrada, determinar si es invertible o no y en su caso encontrar su inversa.

Definición 4.3.1 Sea $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$.

(I) Sean $i, j \in \{1, \ldots, m\}$. Una ***operación elemental de renglón del primer tipo*** R_{ij} es la que a la matriz A le intercambia los renglones i y j.

(II) Sea $c \in K, c \neq 0$ y sea $i \in \{1, \dots, m\}$. Una ***operación elemental de renglón del segundo tipo*** $R_i(c)$ es la que a la matriz A le multiplica cada entrada del i–ésimo renglón por c.

(III) Sea $\alpha \in K$ y sean $i, j \in \{1, \dots, m\}, i \neq j$. Una ***operación elemental de renglón del tercer tipo*** $R_{ij}(\alpha)$ es la que cambia el renglón i de la matriz A por [el renglón j multiplicado por α más el renglón i].

Ejemplos 4.3.2 Sea
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

(1) $A \xrightarrow{R_{23}} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$

(2) $A \xrightarrow{R_2(c)} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ca_{21} & ca_{22} & ca_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

(3) $A \xrightarrow{R_{23}(\alpha)} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \alpha a_{31} + a_{21} & \alpha a_{32} + a_{22} & \alpha a_{33} + a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

Observación 4.3.3 Se está usando una notación diferente (más simplificada) para denotar a las operaciones elementales, a la que se usó en el tema sistemas de ecuaciones lineales.

Definición 4.3.4 Una ***matriz elemental*** es obtenida al realizar una operación elemental de renglón a la matriz identidad $\mathrm{I} = \mathrm{I}_n$.

(I) $\mathrm{I}_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$, que tiene intercambiados los renglones iy j de I_n es una ***matriz elemental del primer tipo*** .

(II) $\mathrm{I}_i(c) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ 0 & \dots & c & \cdots & 0 \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$, donde $c \in K, c \neq 0$ se encuentra en el lugar i, i es una ***matriz elemental del segundo tipo***.

(III) $\mathrm{I}_{ij}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ 0 & \dots & 1 & \dots & \alpha & \dots & 0 \\ \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$, que deja en el renglón i, α veces el renglón j (con $i \neq j$) sumado al renglón i de I_n es una ***matriz elemental del tercer tipo*** .

Observación 4.3.5 Las matrices elementales son invertibles. Más precisamente:

(I) $(\mathrm{I}_{ij})^{-1} = \mathrm{I}_{ij}$.

(II) $(\mathrm{I}_i(c))^{-1} = \mathrm{I}_i(c^{-1})$.

(III) $(\mathrm{I}_{ij}(\alpha))^{-1} = \mathrm{I}_{ij}(-\alpha)$.

Ejemplos 4.3.6

(I) Tenemos

$$\mathrm{I}_{23}\mathrm{I}_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(II) Sea $c \in K, c \neq 0$. Entonces

$$\mathrm{I}_2(c)\mathrm{I}_2(c^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(III) Tenemos

$$\mathrm{I}_{23}(\alpha)\mathrm{I}_{23}(-\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proposición 4.3.7 *Sea $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$. El efecto de realizar una operación elemental de renglón a la matriz A es equivalente a premultiplicar A por la correspondiente matriz elemental.*

Demostración. Se omite. Ver [4, Seccion 1.5]. □

Ejemplos 4.3.8 Sean $m = n = 3$ y

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

(1) $A \xrightarrow{R_{23}} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ &

$$\mathrm{I}_{23}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}.$$

(2) $A \xrightarrow{R_2(c)} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ca_{21} & ca_{22} & ca_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ &

$$\mathrm{I}_2(c)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ca_{21} & ca_{22} & ca_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

(3) $A \xrightarrow{R_{23}(\alpha)} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \alpha a_{31} + a_{21} & \alpha a_{32} + a_{22} & \alpha a_{33} + a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ &

$$\mathrm{I}_{23}(\alpha)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + \alpha a_{31} & a_{22} + \alpha a_{32} & a_{23} + \alpha a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Así como se presentaron operaciones elementales sobre los renglones de una matriz A, se pueden definir análogamente ***operaciones elementales sobre las columnas***. Las denotamos por:

(I) Si $i, j \in \{1, \dots, n\}$, entonces C_{ij} es la operación que a la matriz A le intercambia las columnas i y j.

(II) Para $c \in K, c \neq 0$ e $i \in \{1, \dots, n\}$, $C_i(c)$ es la operación que a la matriz A le multiplica cada entrada de la i–ésima columna por c.

(III) Sea $\alpha \in K$ y sean $i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j$. Se denota por $C_{ij}(\alpha)$ a la operación que cambia la columna i de la matriz A por [la columna j multiplicada por α más la columna i].

Tenemos el siguiente análogo a la Proposición 4.3.7. Obsérvese la traspuesta en el punto (III).

Proposición 4.3.9 *Sea $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$. El efecto de realizar una operación elemental de columna a la matriz A es equivalente a posmultiplicar por una matriz elemental de la siguiente manera:*

(I) *Aplicar C_{ij} a A corresponde al producto AI_{ij}.*

(II) *Aplicar $C_i(c)$ a A corresponde al producto $AI_i(c)$*

(III) *Aplicar $C_{ij}(\alpha)$ a A corresponde al producto $A(I_{ij}(\alpha))^t$.*

Demostración. Se omite. □

Ejemplos 4.3.10 Sean $m = n = 3$ y

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

(1) $A \xrightarrow{C_{23}} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{pmatrix}$ &

$$\mathrm{AI}_{23} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{pmatrix}.$$

(2) $A \xrightarrow{C_2(c)} \begin{pmatrix} a_{11} & ca_{12} & a_{13} \\ a_{21} & ca_{22} & a_{23} \\ a_{31} & ca_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ &

$$\mathrm{AI}_2(c) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & ca_{12} & a_{13} \\ a_{21} & ca_{22} & a_{23} \\ a_{31} & ca_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

(3) $A \xrightarrow{C_{23}(\alpha)} \begin{pmatrix} a_{11} & \alpha a_{13} + a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \alpha a_{23} + a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & \alpha a_{33} + a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ &

$$A(\mathrm{I}_{23}(\alpha))^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} + \alpha a_{13} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} + \alpha a_{23} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} + \alpha a_{33} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Definición 4.3.11 La matriz $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ es ***reducida por renglones*** si:

(i) Los renglones de ceros están debajo de los demás renglones.

(ii) $j_1 < j_2 < \ldots < j_k$, donde, para el renglón i, que no es de ceros, j_i denota el lugar del primer elemento no cero.

(iii) $a_{ij_i} = 1$ y $a_{lj_i} = 0$ si $l \neq i$.

Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$. El ***método de eliminación de Gauss–Jordan*** consiste en aplicaciones sucesivas de operaciones elementales de renglón con el fin de llevar a la matriz original A a una matriz reducida por renglones.

Ejemplos 4.3.12

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ son reducidas por renglones.

(2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ no son reducidas por renglones.

Observación 4.3.13 Toda matriz es equivalente por renglones a una única matriz reducida por renglones (ver [6, Teorema 4.7]).

Sea A una matriz cuadrada $n \times n$ con entradas en el campo K. A continuación se presenta un ***método para determinar si** A **es invertible y, en su caso, encontrar su inversa***. Colocamos la matriz identidad I_n a la derecha de la matriz A y obtenemos una matriz $n \times 2n$ que denotamos $A : \mathrm{I}_n$. Realizamos sucesivamente operaciones elementales de renglón a la matriz $A : \mathrm{I}_n$ hasta obtener una matriz reducida por renglones. Si A es invertible, esta matriz reducida por renglones será $\mathrm{I}_n : A^{-1}$. Esto es, leemos A^{-1} en el segundo bloque, el lugar donde estaba I_n al inicio del proceso. Si A no es invertible, entonces el primer bloque de la matriz reducida por renglones no es I_n. Así pues, al final del proceso, al llegar a la matriz $n \times 2n$ reducida por renglones, observamos al primer bloque. Si este primer bloque es I_n, entonces A es invertible y A^{-1} es el segundo bloque. Si el primer bloque no es I_n, entonces A no es invertible.

Ejemplos 4.3.14

(1) Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1(\frac{1}{3})} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_{21}(-4)}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2(\frac{3}{2})} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \frac{3}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{R_{12}(-\frac{1}{3})}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -2 & \frac{3}{2} \end{array}\right).$$

Luego A es invertible y $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -2 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

(2) Sea $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$. Tenemos:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_{21}(-2)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2(-\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{R_{12}(-1)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right).$$

El primer bloque de la matriz reducida por renglones no es I_2, luego B no es invertible, de lo cual nos pudimos dar cuenta desde el primer paso de la reducción.

(3) Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ como en el primer ejemplo.

Sea

$$\begin{aligned} D &= \mathrm{I}_{12}(-\frac{1}{3})\mathrm{I}_2(\frac{3}{2})\mathrm{I}_{21}(-4)\mathrm{I}_1(\frac{1}{3}) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{4}{3} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -2 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Observamos que $DA = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -2 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{I}_2$ que corresponde al primer bloque de la matriz reducida por renglones del primer ejemplo y $D\mathrm{I}_2 = D = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -2 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ corresponde al segundo bloque.

Capítulo 5

Transformaciones lineales

5.1. Preliminares

Definición 5.1.1 Sean V y W espacios vectoriales sobre el campo K. Una ***transformación lineal*** de V en W es una función

$$T : V \longrightarrow W$$

que satisface:

(i) $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) \ \forall \ v_1, v_2 \in V$.

(ii) $T(\alpha v) = \alpha T(v) \ \forall \ v \in V, \forall \ \alpha \in K$.

Podemos sustituir las dos condiciones anteriores por:

$$T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) \ \forall \ v_1, v_2 \in V, \forall \ \alpha_1, \alpha_2 \in K.$$

Ejemplos 5.1.2

(1) Sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por:
$T((x, y)) = (2x + 3y, -x, 5y)$.
T es una transformación lineal pues:

$$\begin{aligned} T(\alpha_1(x_1, y_1) + \alpha_2(x_2, y_2)) &= T((\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)) \\ &= (2(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) + 3(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2), -(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2), 5(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)) \\ &= (\alpha_1(2x_1 + 3y_1) + \alpha_2(2x_2 + 3y_2), -\alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2, \alpha_1 5y_1 + \alpha_2 5y_2) \\ &= \alpha_1(2x_1 + 3y_1, -x_1, 5y_1) + \alpha_2(2x_2 + 3y_2, -x_2, 5y_2) \\ &= \alpha_1 T((x_1, y_1)) + \alpha_2 T((x_2, y_2)). \end{aligned}$$

(2) Sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$T((x, y)) = x^2$.

T no es una transformación lineal ya que:

$$T((1,0) + (1,0)) = T((2,0)) = 2^2 \neq 2 = 1 + 1 = T((1,0)) + T((1,0)).$$

(3) Sean V, W espacios vectoriales sobre el campo K. Sea $\mathcal{O} : V \longrightarrow W$, la función constante cero:

$\mathcal{O}(v) = 0 \ \forall \ v \in V$.

Tenemos que $\mathcal{O}$ es una transformación lineal.

(4) Sea V espacio vectorial sobre el campo K. La función identidad

$\mathrm{id}_V : V \longrightarrow V$,

$\mathrm{id}_V(v) = v \ \forall \ v \in V$.

También id_V es una transformación lineal.

(5) Consideramos $\mathbb{R}[x]$, el espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{R}$ cuyos elementos son los polinomios con coeficientes en $\mathbb{R}$ en la variable x, con la suma y la multiplicación por escalares de $\mathbb{R}$ usuales. Las funciones:

(a) $D : \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}[x]$, la derivada:
$f(x) \longmapsto f'(x)$

(b) $\mathcal{I} : \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}$, la integral definida:
$f(x) \longmapsto \int_0^1 f(x)dx$

son transformaciones lineales.

Proposición 5.1.3 *Sean V, W, U espacios vectoriales sobre el campo K. Sean $T_1 : V \longrightarrow W$, $T_2 : W \longrightarrow U$ transformaciones lineales. Entonces la composición $T_2 \circ T_1 : V \longrightarrow U$ es una transformación lineal.*

Demostración. Sean $v_1, v_2 \in V$ y $\alpha_1, \alpha_2 \in K$. Tenemos:

$$(T_2 \circ T_1)(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = T_2(T_1(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)) = T_2(\alpha_1 T_1(v_1) + \alpha_2 T_1(v_2))$$

$$= \alpha_1 T_2(T_1(v_1)) + \alpha_2 T_2(T_1(v_2)) = \alpha_1 (T_2 \circ T_1)(v_1) + \alpha_2 (T_2 \circ T_1)(v_2).$$

Luego $T_2 \circ T_1 : V \longrightarrow U$ es una transformación lineal. ■

Observación 5.1.4 Sean V, W espacios vectoriales sobre el campo K. Supongamos que V es de dimensión finita. Para definir (o conocer) una transformación lineal $T : V \longrightarrow W$ basta con definirla (o conocerla) en los elementos de una base de V. En efecto, sea $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V. Si $v \in V$, existen únicos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ tales que $v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$. Para definir (o conocer) $T(v)$ basta definir (o conocer) $T(v_1), \ldots, T(v_n)$ pues por linealidad

$$T(v) = T(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 T(v_1) + \ldots + \alpha_n T(v_n).$$

5.2. Núcleo e imagen

Proposición 5.2.1 *Sea $T : V \longrightarrow W$ transformación lineal. Entonces*

$$T(0) = 0.$$

Demostración. Tenemos

$$0 + T(0) = T(0) = T(0 + 0) = T(0) + T(0).$$

Luego, cancelando $T(0)$, tenemos $T(0) = 0$. ■

Definición 5.2.2 Sea $T : V \longrightarrow W$ transformación lineal. Definimos el ***núcleo*** o ***kernel*** de T por:

$$\ker T = \{v \in V \mid T(v) = 0\}.$$

Proposición 5.2.3 *Sea $T : V \longrightarrow W$ transformación lineal. Entonces el núcleo de T es un subespacio de V.*

Demostración.

(i) Por la Proposición 5.2.1, $T(0) = 0$, luego $0 \in \ker T$ y así $\ker T \neq \emptyset$.

(ii) Sean $v_1, v_2 \in V$ y $\alpha_1, \alpha_2 \in K$. Veamos que $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \in \ker T$:

$$T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) = \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 = 0 + 0 = 0.$$

Luego $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \in \ker T$.

Concluimos que el núcleo de T es un subespacio de V. ■

Ejemplos 5.2.4

(1) Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por:

$$(x, y, z) \longmapsto (x, y, 0).$$

Queda a cuidado del lector probar que T es una transformación lineal.

$$\begin{aligned} \ker T &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid T((x,y,z)) = (0,0,0)\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y,0) = (0,0,0)\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0, y = 0\} \\ &= \{(0,0,z) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{(0,0,z) \mid z \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

(2) Sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por:

$$(x, y) \longmapsto (x + y, x).$$

T es una transformación lineal pues:

$$\begin{aligned} T(\alpha_1(x_1,y_1)+\alpha_2(x_2,y_2)) &= T((\alpha_1x_1+\alpha_2x_2, \alpha_1y_1+\alpha_2y_2)) \\ &= (\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_1y_1+\alpha_2y_2, \alpha_1x_1+\alpha_2x_2) \\ &= (\alpha_1(x_1+y_1)+\alpha_2(x_2+y_2), \alpha_1x_1+\alpha_2x_2) \\ &= \alpha_1(x_1+y_1,x_1)+\alpha_2(x_2+y_2,x_2) \\ &= \alpha_1T((x_1,y_1))+\alpha_2T((x_2,y_2)). \end{aligned}$$

Obtenemos el núcleo de T:

$$\begin{aligned} \ker T &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid T((x,y,z))=(0,0)\} \\ &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x+y,x)=(0,0)\} \\ &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x+y=0, x=0\} \\ &= \{(0,0)\in\mathbb{R}^2 \mid x=0, y=0\ \} \\ &= \{(0,0)\}. \end{aligned}$$

Proposición 5.2.5 *Sea $T: V \longrightarrow W$ transformación lineal. Para que T sea inyectiva es necesario y suficiente que* $\ker T=\{0\}$.

Demostración.

(i) ***(necesidad)*** Supongamos que T es inyectiva y probemos $\ker T=\{0\}$. Por la Proposición 5.2.1, $\{0\}\subseteq \ker T$. Sea $v\in\ker T$. Entonces $T(v)=0=T(0)$. Puesto que T es inyectiva, $v=0$, de donde $\ker T\subseteq\{0\}$. Por lo tanto $\ker T=\{0\}$.

(ii) ***(suficiencia)*** Supongamos $\ker T=\{0\}$ y probemos que T es inyectiva. Sean $v_1,v_2\in V$ tales que $T(v_1)=T(v_2)$. Por probar $v_1=v_2$. Tenemos

$$T(v_1)=T(v_2) \implies T(v_1)-T(v_2)=0 \implies T(v_1-v_2)=0$$

$$\implies v_1-v_2\in\ker T \implies v_1-v_2=0 \implies v_1=v_2.$$

Luego T es inyectiva. ∎

Ejemplo 5.2.6

Sea $T:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^3$ dada por:

$(x,y)\longmapsto(2y,x+y,0)$.

T es una transformación lineal pues, por un lado:

$$\begin{aligned} T(\alpha_1(x_1,y_1)+\alpha_2(x_2,y_2)) &= T((\alpha_1x_1+\alpha_2x_2, \alpha_1y_1+\alpha_2y_2)) \\ &= (2(\alpha_1y_1+\alpha_2y_2), (\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)+(\alpha_1y_1+\alpha_2y_2), 0) \\ &= \alpha_1(2y_1, x_1+y_1, 0)+\alpha_2(2y_2, x_2+y_2, 0) \end{aligned}$$

y por otro lado:

$$\alpha_1 T((x_1,y_1)) + \alpha_2 T((x_2,y_2)) = \alpha_1(2y_1, x_1+y_1, 0) + \alpha_2(2y_2, x_2+y_2, 0)$$

$$= (\alpha_1 2y_1 + \alpha_2 2y_2, \alpha_1 x_1 + \alpha_1 y_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_2 y_2, 0)$$

$$= \alpha_1(2y_1, x_1+y_1, 0) + \alpha_2(2y_2, x_2+y_2, 0).$$

Así pues $T(\alpha_1(x_1,y_1) + \alpha_2(x_2,y_2)) = \alpha_1 T((x_1,y_1)) + \alpha_2 T((x_2,y_2))$.

Tenemos:

$$\begin{array}{rcl} \ker T & = & \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid T((x,y)) = (0,0,0)\} \\ & = & \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (2y, x+y, 0) = (0,0,0)\} \\ & = & \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2y = 0, x+y = 0\} \\ & = & \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0, y = 0\} \\ & = & \{(0,0)\}. \end{array}$$

Por la Proposición 5.2.5, T es inyectiva.

Proposición 5.2.7 *Sea $T : V \longrightarrow W$ transformación lineal. Entonces la imagen de T,* $\mathrm{Im}\ T = \{T(v) \mid v \in V\}$*, es un subespacio de W.*

Demostración.

(i) Por la Proposición 5.2.1, $0 = T(0) \in \mathrm{Im}\ T$, luego $0 \in \mathrm{Im}\ T$, por lo que $\mathrm{Im}\ T \neq \emptyset$.

(ii) Sean $T(v_1), T(v_2) \in \mathrm{Im}\ T$ y $\alpha_1, \alpha_2 \in K$. Tenemos $\alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) = T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) \in \mathrm{Im}\ T$.

Concluimos que la imagen de T es un subespacio de W. ■

Ejemplo 5.2.8

Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por:

$(x,y,z) \longmapsto (x+y, 0)$.

Se deja al cuidado del lector verificar que T es una transformación lineal. Tenemos:

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Im}\ T & = & \{T(x,y,z) \mid (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} \\ & = & \{(x+y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \\ & = & \{(w, 0) \mid w \in \mathbb{R}\} \end{array}$$

es un subespacio de $\mathbb{R}^2$.

Observación 5.2.9

Sea $f : A \longrightarrow B$ una función. Tenemos, por definición, que f es suprayectiva si y sólo si $\mathrm{Im} f = B$. En particular, si $T : V \longrightarrow W$ es una transformación lineal, tenemos T es suprayectiva si y sólo si $\mathrm{Im}\ T = W$.

Proposición 5.2.10 *Sean V un espacio vectorial sobre el campo K y W un subespacio de V. La función*

$$\pi : V \longrightarrow V/W$$

$$v \longmapsto v + W$$

es una transformación lineal. Además, π es suprayectiva.

Demostración.

(i) Sean $v_1, v_2 \in V$ y $\alpha_1, \alpha_2 \in K$. Tenemos $\pi(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = (\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) + W = (\alpha_1 v_1 + W) + (\alpha_2 v_2 + W) = \alpha_1(v_1 + W) + \alpha_2(v_2 + W) = \alpha_1 \pi(v_1) + \alpha_2 \pi(v_2)$. Luego π es transformación lineal.

(ii) Dado $v + W \in V/W$, tenemos $v \in V$ es tal que $\pi(v) = v + W$. Así π es suprayectiva. ■

Teorema 5.2.11 *Sean V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el campo K y $T : V \longrightarrow U$ una transformación lineal. Entonces*

$$\dim V = \dim \ker T + \dim \text{Im } T.$$

Demostración. Sea $n = \dim V$. Como $\ker T$ es un subespacio de V, por la Proposición 2.4.15, $\ker T$ es de dimensión finita y $r := \dim \ker T \leq n$. Sea $\{w_1, \dots, w_r\}$ una base para $\ker T$. Tenemos que $\{w_1, \dots, w_r\}$ es un subconjunto de V l. i. sobre K. Completamos $\{w_1, \dots, w_r\}$ a una base de V: $\{w_1, \dots, w_r, v_1, \dots v_{n-r}\}$. Probemos que $\{T\{(v_1), \dots T(v_{n-r})\}$ es una base de Im T.

(i) Sea $T(v) \in \text{Im } T$, con $v \in V$. Tenemos existen $\alpha_1 \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_{n-r} \in K$ tales que $v = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_r w_r + \beta_1 v_1 + \dots + \beta_{n-r} v_{n-r}$. Luego

$$T(v) = \beta_1 T(v_1) + \dots + \beta_{n-r} T(v_{n-r}).$$

Así $\{T(v_1), \dots T(v_{n-r})\}$ genera a Im T.

(ii) Veamos que $\{T(v_1), \dots T(v_{n-r})\}$ es l. i. Supongamos

$$\gamma_1 T(v_1) + \dots + \gamma_{n-r} T(v_{n-r}) = 0$$

para algunos $\gamma_1, \dots, \gamma_{n-r} \in K$. Tenemos, puesto que T es lineal, $T(\gamma_1 v_1 + \dots + \gamma_{n-r} v_{n-r}) = 0$, luego $\gamma_1 v_1 + \dots + \gamma_{n-r} v_{n-r} \in \ker T$. Así, existen $\delta_1, \dots, \delta_r \in K$ tales que $\gamma_1 v_1 + \dots + \gamma_{n-r} v_{n-r} = \delta_1 w_1 + \dots + \delta_r w_r$. Por lo tanto $-\delta_1 w_1 - \dots - \delta_r w_r + \gamma_1 v_1 + \dots + \gamma_{n-r} v_{n-r} = 0$. Como $\{w_1, \dots, w_r, v_1, \dots v_{n-r}\}$ es una base de V, es l. i. Por lo que $-\delta_1 = \dots = -\delta_r = \gamma_1 = \dots = \gamma_{n-r} = 0$. Así, $\{T(v_1), \dots T(v_{n-r})\}$ es l. i.

Por lo tanto tenemos $\{T(v_1), \dots T(v_{n-r})\}$ es una base para Im T y concluimos que $\dim V = n = r + n - r = \dim \ker T + \dim \text{Im } T$. ■

Ejemplos 5.2.12

(1) Sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por:

$$(x, y) \longmapsto (2y, x + y, 0).$$

Tenemos que T es una transformación lineal, $\ker T = \{(0, 0)\}$ e Im $T = \{(w, z, 0) \mid w, z \in \mathbb{R}\}$. Comprobamos

$$\dim \mathbb{R}^2 = 2 = 0 + 2 = \dim \ker T + \dim \mathrm{Im}\ T.$$

(2) Sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$T((x, y)) = x + y.$$

Tenemos que T es una transformación lineal, $\ker T = L(\{(1, -1)\})$ e Im $T = \mathbb{R}$. Comprobamos

$$\dim \mathbb{R}^2 = 2 = 1 + 1 = \dim \ker T + \dim \mathrm{Im} T.$$

(3) Sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por:

$$T((x, y)) = (0, 0, 0).$$

Tenemos T es una transformación lineal, $\ker T = \mathbb{R}^2$ e Im $T = \{(0, 0, 0)\}$. Comprobamos

$$\dim \mathbb{R}^2 = 2 = 2 + 0 = \dim \ker T + \dim \mathrm{Im}\ T.$$

Definición 5.2.13 Sean V y W espacios vectoriales sobre el campo K. Un ***isomorfismo*** $T : V \longrightarrow W$ es una transformación lineal biyectiva.

Proposición 5.2.14 *Sea $T : V \to W$ un isomorfismo. Entonces $T^{-1} : W \to V$ también es un isomorfismo.*

Demostración.

Sabemos que $T^{-1} : W \longrightarrow V$ es una función biyectiva y tenemos que $T^{-1}(w) = v$ si y sólo si $T(v) = w$. Resta verificar que T^{-1} es transformación lineal. Sean $w_1, w_2 \in W$ y $\alpha_1, \alpha_2 \in K$ y sean $v_1, v_2 \in V$ tales que $v_1 = T^{-1}(w_1)$ y $v_2 = T^{-1}(w_2)$. Como T es lineal, tenemos $T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2)$. Luego $T^{-1}(\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2) = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = \alpha_1 T^{-1}(w_1) + \alpha_2 T^{-1}(w_2)$. Concluimos que T^{-1} es transformación lineal y por tanto T^{-1} es también un isomorfismo.

$\blacksquare$

Definición 5.2.15 Decimos que los espacios vectoriales V y W son ***isomorfos*** si existe un isomorfismo de V en W. En este caso escribimos $V \cong W$.

Teorema 5.2.16 *Sean V y W espacios vectoriales, ambos de dimensión finita sobre el campo K. Entonces V y W son isomorfos si y sólo si* $\dim V = \dim W$.

Demostración.

(i) Supongamos que V y W son isomorfos. Luego existe $T : V \longrightarrow W$ isomorfismo. Sea $\{v_1, \ldots, v_n\}$ base de V. Entonces $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es l. i. y genera a V. Siendo T inyectiva y $\{v_1, \ldots, v_n\}$ l. i., tenemos que $\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ es l. i. Como T es suprayectiva y $\{v_1, \ldots, v_n\}$ genera a V, tenemos que $\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ genera a W. Luego $\dim W = n = \dim V$.

(ii) Supongamos ahora que $\dim V = \dim W = n$. Sean $\{v_1, \ldots, v_n\}$ y $\{w_1, \ldots, w_n\}$ bases de V y W, respectivamente. Definimos $T : V \longrightarrow W$ por $T(v_i) = w_i$, para $1 \leq i \leq n$. Extendemos a T por linealidad, es decir: si $v \in V$, existen únicos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ tales que $v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$, luego $T(v) = \alpha_1 T(v_1) + \ldots + \alpha_n T(v_n)$. Tenemos que la función T es una transformación lineal, veamos que es biyectiva.

   (a) Probemos que T es inyectiva. Sea $v \in \ker T$. Tenemos que existen únicos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ tales que $v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$ y también que $T(v) = 0$. Por tanto $0 = T(v) = T(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 T(v_1) + \ldots + \alpha_n T(v_n) = \alpha_1 w_1 + \ldots + \alpha_n w_n$. Como $\{w_1, \ldots, w_n\}$ es base de W, es l. i. Luego $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$ y así $v = 0 \cdot v_1 + \ldots 0 \cdot v_n = 0$. Por lo tanto tenemos $\ker T \subseteq \{0\}$. Como siempre se tiene $\{0\} \subseteq \ker T$, concluimos $\ker T = \{0\}$. Por lo tanto T es inyectiva.

   (b) Veamos ahora que T es suprayectiva. Sea $w \in W$. Como $\{w_1, \ldots, w_n\}$ es base de W, existen únicos $\beta_1, \ldots, \beta_n \in K$ tales que $w = \beta_1 w_1 + \ldots + \beta_n w_n$. Entonces $w = \beta_1 T(v_1) + \ldots + \beta_n T(v_n) = T(\beta_1 v_1 + \ldots + \beta_n v_n) = T(v)$, donde $v := \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_n v_n \in V$. Luego T es suprayectiva.

   Concluimos que T es un isomorfismo y así V y W son isomorfos. ■

Ejemplos 5.2.17

(1) Sea V un espacio vectorial. La función identidad $\mathrm{id}_V : V \longrightarrow V$ dada por: $\mathrm{id}_V(v) = v$ para todo $v \in V$ es un isomorfismo.

(2) Sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por:

   $T((x, y)) = (x + y, x - y)$.

   Tenemos T es una transformación lineal y $\ker T = \{(0, 0)\}$, luego T es biyectiva y por tanto un isomorfismo.

(3) Sean $W = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$ y $T : \mathbb{R} \longrightarrow W$ dada por:

   $T(x) = (x, x)$. Observamos que T es un isomorfismo de $\mathbb{R}$ en W.

5.3. Operadores lineales

Definición 5.3.1 Un ***operador lineal*** en el espacio vectorial V es una transformación lineal

$$T : V \longrightarrow V.$$

Proposición 5.3.2 *Sean V espacio vectorial de dimensión finita y $T : V \longrightarrow V$ un operador lineal. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(i) *T es inyectivo.*

(ii) *T es suprayectivo.*

(iii) *T es biyectivo.*

Demostración.
(i) $\Longrightarrow$ (ii). Supongamos que T es inyectivo. Entonces $\ker T = \{0\}$, luego $\dim \ker T = 0$. Así, como V es de dimensión finita, por el Teorema 5.2.11, $\dim \mathrm{Im}\ T = \dim \ker T + \dim \mathrm{Im}\ T = \dim V$. Luego $\mathrm{Im}\ T = V$. Así T es suprayectivo.
(ii) $\Longrightarrow$ (iii). Supongamos ahora que T es suprayectivo. Tenemos $\mathrm{Im}\ T = V$. Luego $\dim \mathrm{Im}\ T = \dim V$. Nuevamente, como V es de dimensión finita, por el Teorema 5.2.11, $\dim \ker T = \dim V - \dim \mathrm{Im}\ T = 0$. Por tanto, $\ker T = \{0\}$. Así T es inyectivo. Como por hipótesis T es suprayectivo, T es biyectivo.
(iii) $\Longrightarrow$ (i). Claramente, si T es biyectivo, T es inyectivo. ■

Corolario 5.3.3 *Sean V y W espacios vectoriales, ambos de la misma dimensión finita, y $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(i) *T es inyectiva.*

(ii) *T es suprayectiva.*

(iii) *T es biyectiva.*

Demostración. Es parecida a la anterior y se deja como ejercicio al lector. □

Ejemplos 5.3.4

(1) Sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dado por:

$$(x, y) \longmapsto (x + y, x - y).$$

Tenemos T es operador lineal y

$$\begin{aligned} \ker T &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid T((x, y)) = (0, 0)\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x + y, x - y) = (0, 0)\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0, x - y = 0\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0, y = 0\} \\ &= \{(0, 0)\}. \end{aligned}$$

Luego T es inyectivo y como $\mathbb{R}^2$ es de dimensión finita, T es biyectivo.

(2) Consideremos ahora la función derivada $D : \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}[x]$ dada por: $D(f(x)) = f'(x)$.

Sabemos que T es un operador lineal, pero también que $\mathbb{R}[x]$ no es de dimensión finita. Observamos que D es suprayectivo pero no es inyectivo, en efecto:

(i) Dado $p(x) = a_o + a_1 x + \ldots + a_n x^n \in \mathbb{R}[x]$, existe $q(x) = a_o x + \frac{a_1}{2} x^2 + \ldots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \in \mathbb{R}[x]$ tal que $D(q(x)) = p(x)$.

(ii) Aunque $5x + 2 \neq 5x - 1$, tenemos $D(5x + 2) = D(5x - 1) = 5$.

(3) Sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por:

$T((x, y)) = (x, 0, y)$.

Tenemos T es una transformación lineal y $\ker T = \{(0, 0, 0)\}$, luego T es inyectiva, pero T no es suprayectiva. Observemos que las dimensiones de dominio y contradominio son distintas.

(4) Sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$T((x, y)) = x$.

Tenemos T es una transformación lineal y es suprayectiva, pero no es inyectiva. Observemos que, también en este ejemplo, las dimensiones de dominio y contradominio son distintas.

(5) Sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por:

$T((x, y)) = (x, 0)$.

Observemos que $\mathbb{R}^2$ es de dimensión finita y T es un operador lineal que no es suprayectivo, por lo que tampoco es inyectivo, ni biyectivo.

(6) Consideremos las funciones:

- $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
  $x \longmapsto x^2$
- $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
  $x \longmapsto e^x$
- $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
  $x \longmapsto x^3 - x$
- $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
  $x \longmapsto x + 1$

Aunque $\mathbb{R}$ es de dimensión finita, las funciones no son lineales. Tenemos f no es ni $1-1$ ni sobre, g es $1-1$ pero no es sobre, h es sobre pero no es $1-1$ y u es $1-1$ y sobre.

Definición 5.3.5 Sean V y W espacios vectoriales sobre el campo K. Definimos el ***espacio de transformaciones lineales*** de V en W

$$\mathcal{L}(V, W) := \{T : V \longrightarrow W \mid T \text{ } es \text{ } transformación \text{ } lineal\}.$$

Para $T_1, T_2, T \in \mathcal{L}(V, W)$ y $\alpha \in K$ definimos:

$$\begin{array}{rcl} T_1 + T_2 : V \longrightarrow W & & \alpha T : V \longrightarrow W \\ & \& & \\ (T_1 + T_2)(v) := T_1(v) + T_2(v) & & (\alpha T)(v) := \alpha T(v). \end{array}$$

Ejemplos 5.3.6

Sean
$$\begin{array}{ccc} S:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 & & T:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ & \& & \\ S((x,y,z)) = (y, x+z) & & T((x,y,z)) = (2z, x-y). \end{array}$$

Tenemos S y T son transformaciones lineales. Calculemos:

(1)
$$S+T:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\begin{array}{rcl} (S+T)((x,y,z)) & = & (y,x+z)+(2z,x-y) \\ & = & (y+2z, x+z+x-y) \\ & = & (y+2z, 2x-y+z). \end{array}$$

(2)
$$3S-2T:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\begin{array}{rcl} (3S-2T)((x,y,z)) & = & 3(y,x+z)-2(2z,x-y) \\ & = & (3y,3x+3z)-(4z,-2x+2y) \\ & = & (3y-4z, 3x+3z-2x+2y) \\ & = & (3y-4z, x+2y+3z). \end{array}$$

Definición 5.3.7 Sea V espacio vectorial sobre el campo K. Definimos el ***espacio de operadores lineales*** de V por
$$\mathcal{L}(V) := \mathcal{L}(V,V) = \{T : V \longrightarrow V \mid T \textit{ es operador lineal}\}.$$

Proposición 5.3.8 *Sean V, W espacios vectoriales sobre el campo K. Si $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(V,W)$ y $\alpha_1, \alpha_2 \in K$, entonces*
$$\alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2 \in \mathcal{L}(V,W).$$

Demostración. Observamos primero que $\alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2 : V \longrightarrow W$. Sean $v_1, v_2 \in V$ y $a_1, a_2 \in K$. Tenemos

$$(\alpha_1T_1+\alpha_2T_2)(a_1v_1+a_2v_2) = \alpha_1T_1(a_1v_1+a_2v_2)+\alpha_2T_2(a_1v_1+a_2v_2)$$
$$= \alpha_1(a_1T_1(v_1)+a_2T_1(v_2))+\alpha_2(a_1T_2(v_1)+a_2T_2(v_2))$$
$$= \alpha_1a_1T_1(v_1)+\alpha_1a_2T_1(v_2))+\alpha_2a_1T_2(v_1)+\alpha_2a_2T_2(v_2)$$
$$= a_1(\alpha_1T_1(v_1)+\alpha_2T_2(v_1))+a_2(\alpha_1T_1(v_2)+\alpha_2T_2(v_2))$$
$$= a_1(\alpha_1T_1+\alpha_2T_2)(v_1)+a_2(\alpha T_1+\alpha_2T_2)(v_2).$$

Concluimos que $\alpha_1T_1+\alpha_2T_2 \in \mathcal{L}(V,W)$. ■

Proposición 5.3.9 *Sean V, W espacios vectoriales sobre el campo K. Entonces $\mathcal{L}(V,W)$ es un espacio vectorial sobre K.*

Demostración. Se deja como ejercicio para el lector. Ver [4, Seccion 3.2]. □

Corolario 5.3.10 *Sea V espacio vectorial sobre el campo K. Entonces $\mathcal{L}(V)$ es un espacio vectorial sobre K.*

Demostración. Se sigue de la Proposición 5.3.9 tomando $W = V$. ■

Proposición 5.3.11 *Sean V, W espacios vectoriales sobre el campo K. Si V es de dimensión n y W es de dimensión m, entonces $\mathcal{L}(V, W)$ es de dimensión mn. Sean $\{v_1, \ldots, v_n\}$, $\{w_1, \ldots, w_m\}$ bases de V y W, respectivamente. Una base para $\mathcal{L}(V, W)$ es*

$$\{T_{ij} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\},$$

donde $T_{ij} : V \longrightarrow W$ está dada por

$$T_{ij}(v_k) = \delta_{jk} w_i.$$

Demostración. Se omite. Ver [4, Seccion 3.2]. □

Corolario 5.3.12 *Sea V espacio vectorial sobre el campo K. Si V es de dimensión n, entonces $\mathcal{L}(V)$ es de dimensión n^2. Sea $\{v_1, \ldots, v_n\}$ base de V. Una base para $\mathcal{L}(V)$ es*

$$\{T_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\},$$

donde $T_{ij} : V \longrightarrow V$ está dado por

$$T_{ij}(v_k) = \delta_{jk} v_i.$$

Demostración. Se sigue de la Proposición 5.3.11 tomando $W = V$. ■

Teorema 5.3.13 *Sea V espacio vectorial de dimensión n sobre el campo K. Entonces para todo $T \in \mathcal{L}(V)$ existe un polinomio no cero $q(x) \in K[x]$ de grado a lo más n^2 tal que $q(T) = 0$.*

Demostración. Puesto que por el Corolario 5.3.12 $\dim \mathcal{L}(V) = n^2$, el conjunto $\{\mathrm{id}_V, T, \ldots, T^{n^2}\}$ es l. d. Luego existen $a_0, a_1, \ldots, a_{n^2} \in K$, no todos cero, tales que $a_0 \mathrm{id}_V + a_1 T + \ldots + a_{n^2} T^{n^2} = 0$. El polinomio $q(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n^2} x^{n^2}$ cumple lo requerido. ■

5.4. Matriz asociada

Sean V, W espacios vectoriales sobre K. Sea $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal. Sean $\{v_1, \ldots, v_n\}$ y $\{w_1, \ldots, w_m\}$ bases de V y W, respectivamente. Asociamos a T y a estas bases una matriz de la siguiente manera:

Existen $a_{i,j} \in K$, para $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ tales que

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i, \text{ para } 1 \leq j \leq n.$$

La matriz

$$A = (a_{ij})_{i,j} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

es la ***matriz asociada*** a (o ***representación matricial*** de) la transformación lineal T respecto a las bases $\{v_1, \dots, v_n\}$, $\{w_1, \dots, w_m\}$. Denotamos a esta matriz por:

$$[T]_{\{v_i\}}^{\{w_i\}}.$$

Cuando T es un operador lineal en V y $\{v_1, \dots, v_n\}$ es una base de V denotaremos a la matriz $[T]_{\{v_i\}}^{\{v_j\}}$ por

$$[T]_{\{v_i\}}.$$

Recordemos que si $v \in V$ y $v = b_1v_1 + \dots b_nv_n$, el vector coordenado de v respecto a la base $\{v_1, \dots, v_n\}$ es

$$[v]_{\{v_i\}} = \begin{pmatrix} b_1 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Observaciones 5.4.1 Con la notación anterior, si $T \in \mathcal{L}(V, W)$ y $v \in V$, entonces:

$$[T]_{\{v_i\}}^{\{w_i\}}[v]_{\{v_i\}} = [T(v)]_{\{w_i\}}.$$

En particular, si $T \in \mathcal{L}(V)$, tenemos

$$[T]_{\{v_i\}}[v]_{\{v_i\}} = [T(v)]_{\{v_i\}}.$$

Ejemplos 5.4.2

(1) Sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por:

$T((x, y)) = (x + 3y, 2x + 5y, 7x + 9y)$.

Tenemos

$$T(e_1) = T(1, 0) = (1, 2, 7) = 1(1, 0, 0)+2(0, 1, 0)+7(0, 0, 1) = 1\cdot e_1+2\cdot e_2+7\cdot e_3,$$

$$T(e_2) = T(0, 1) = (3, 5, 9) = 3(1, 0, 0)+5(0, 1, 0)+9(0, 0, 1) = 3\cdot e_1+5\cdot e_2+9\cdot e_3.$$

Luego

$$[T]_{\{e_1,e_2\}}^{\{e_1,e_2,e_3\}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}.$$

Observemos

$$
\begin{aligned}
[T]_{\{e_1,e_2\}}^{\{e_1,e_2,e_3\}}[(x,y)]_{\{e_1,e_2\}} &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x+3y \\ 2x+5y \\ 7x+9y \end{pmatrix} \\
&= [T((x,y))]_{\{e_1,e_2,e_3\}}.
\end{aligned}
$$

(2) Sea $T:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por:

$T((x,y)) = (4x+2y, 2x+y)$.

Consideramos las bases $\{e_1, e_2\}$ y $\{(1,-2),(2,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$. Tenemos:

$$
\begin{array}{ccc}
T(e_1) = (4,2) = 4\cdot e_1 + 2\cdot e_2 & & T(1,-2) = (0,0) = 0\cdot(1,-2) + 0\cdot(2,1) \\
& y & \\
T(e_2) = (2,1) = 2\cdot e_1 + 1\cdot e_2 & & T(2,1) = (10,5) = 0\cdot(1,-2) + 5\cdot(2,1).
\end{array}
$$

Luego

$$
[T]_{\{e_1,e_2\}} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad [T]_{\{(1,-2),(2,1)\}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.
$$

(3) Consideremos la función identidad $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}:\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ y sea $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una base cualquiera de $\mathbb{R}^4$. Tenemos:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}(v_1) &= 1\cdot v_1 + 0\cdot v_2 + 0\cdot v_3 + 0\cdot v_4, \\
\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}(v_2) &= 0\cdot v_1 + 1\cdot v_2 + 0\cdot v_3 + 0\cdot v_4, \\
\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}(v_3) &= 0\cdot v_1 + 0\cdot v_2 + 1\cdot v_3 + 0\cdot v_4, \\
\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}(v_4) &= 0\cdot v_1 + 0\cdot v_2 + 0\cdot v_3 + 1\cdot v_4.
\end{aligned}
$$

Luego

$$
[\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}]_{\{v_i\}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{I}_4.
$$

(3) Consideremos la función idénticamente cero $\mathcal{O}_{23}:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ y sean $\{v_1, v_2, v_3\}$ una base cualquiera de $\mathbb{R}^3$ y $\{w_1, w_2\}$ una base cualquiera de $\mathbb{R}^2$. Tenemos:

$$
\mathcal{O}_{23}(v_1) = (0,0) = 0\cdot w_1 + 0\cdot w_2,
$$

$$\mathcal{O}_{23}(v_2) = (0,0) = 0 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2,$$
$$\mathcal{O}_{23}(v_3) = (0,0) = 0 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2.$$

Luego

$$[\mathcal{O}_{23}]_{\{v_i\}}^{\{w_i\}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{2\times 3}.$$

Proposición 5.4.3 *Sean V, W, U espacios vectoriales, todos de dimensión finita sobre el campo K. Supongamos que $T, T_1, T_2 : V \longrightarrow W$ y $S : W \longrightarrow U$ son transformaciones lineales y sean $\{v_1, \ldots, v_n\}$, $\{w_1, \ldots, w_m\}$ y $\{u_1, \ldots, u_p\}$ bases de V, W y U, respectivamente y $\alpha \in K$. Entonces:*

(1) $[T_1 + T_2]_{\{v_i\}}^{\{w_i\}} = [T_1]_{\{v_i\}}^{\{w_i\}} + [T_2]_{\{v_i\}}^{\{w_i\}}$,

(2) $[\alpha T]_{\{v_i\}}^{\{w_i\}} = \alpha [T]_{\{v_i\}}^{\{w_i\}}$,

(3) $[S \circ T]_{\{v_i\}}^{\{u_i\}} = [S]_{\{w_i\}}^{\{u_i\}} [T]_{\{v_i\}}^{\{w_i\}}$,

(4) *supongamos $n = m$. Tenemos T es isomorfismo si y sólo si $[T]_{\{v_i\}}^{\{w_i\}}$ es invertible y en este caso $[T^{-1}]_{\{w_i\}}^{\{v_i\}} = [T]_{\{v_i\}}^{\{w_i\}^{-1}}$,*

(5) *supongamos $V = W$. Tenemos T es isomorfismo si y sólo si $[T]_{\{v_i\}}$ es invertible y en este caso $[T^{-1}]_{\{v_i\}} = [T]_{\{v_i\}}^{-1}$.*

Demostración. Probaremos sólo (3) y (4), el resto queda como ejercicio para el lector.

(3) $S \circ T : V \longrightarrow U$, luego $[S \circ T]_{\{v_i\}}^{\{u_i\}}$ es una matriz $p \times n$, mientras que, como $[S]_{\{w_i\}}^{\{u_i\}}$ es una matriz $p \times m$ y $[T]_{\{v_i\}}^{\{w_i\}}$ es $m \times n$, tenemos que $[S]_{\{w_i\}}^{\{u_i\}} [T]_{\{v_i\}}^{\{w_i\}}$ también es una matriz $p \times n$.

Si $T(v_k) = \sum_{j=1}^{m} b_{jk} w_j$ y $S(w_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{ij} u_i$, entonces

$$(S \circ T)(v_k) = S(T(v_k)) = S(\sum_{j=1}^{m} b_{jk} w_j) = \sum_{j=1}^{m} b_{jk} S(w_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{m} b_{jk} \sum_{i=1}^{p} a_{ij} u_i = \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{jk} \right) u_i.$$

Tenemos, por un lado, que como la entrada ij de $[S]_{\{w_i\}}^{\{u_i\}}$ es a_{ij} y la entrada jk de $[T]_{\{v_i\}}^{\{w_i\}}$ es b_{jk}, la entrada ik de $[S]_{\{w_i\}}^{\{u_i\}} [T]_{\{v_i\}}^{\{w_i\}}$ es:

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{jk}.$$

Por otro lado, también la entrada ik de $[S \circ T]_{\{v_i\}}^{\{u_i\}}$ es:

$$\sum_{j=1^m} a_{ij} b_{jk}.$$

Luego $[S \circ T]_{\{v_i\}}^{\{u_k\}} = [S]_{\{w_j\}}^{\{u_k\}} [T]_{\{v_i\}}^{\{w_j\}}$.

(4)

- Supongamos que T es un isomorfismo. Entonces existe $T^{-1} : W \to V$ y se tiene $T \circ T^{-1} = \mathrm{id}_W$. Por (3) tenemos

$$I_n = [\mathrm{id}_W] = [T]_{\{v_i\}}^{\{w_i\}} \cdot [T^{-1}]_{\{w_i\}}^{\{v_i\}}.$$

Así $[T]_{\{v_i\}}^{\{w_i\}}$ es invertible y

$$[T^{-1}]_{\{w_i\}}^{\{v_i\}} = [T]_{\{v_i\}}^{\{w_i\}^{-1}}.$$

- Supongamos ahora que $[T]_{\{v_i\}}^{\{w_i\}}$ es invertible. Entonces existe una matriz $B = (b_{jk})_{jk}$ tal que

$$[T]_{\{v_i\}}^{\{w_i\}} \cdot B = I_n.$$

Definimos $S : W \to V$ por $S(w_j) = \sum_{i=1}^n b_{ij} v_i$ en la base $\{w_1, \ldots, w_m\}$ y extendemos por linealidad. Entonces S es una transformación lineal y $[S]_{\{w_i\}}^{\{u_i\}} = B$. Sea $w \in W$. Verifiquemos que $T(S(w)) = w$. Nuevamente usando (3), obtenemos:

$$\begin{aligned} [T(S(w))]_{\{w_i\}} &= [(T \circ S)(w)]_{\{w_i\}} = [T \circ S]_{\{w_i\}} [w]_{\{w_i\}} \\ &= [T]_{\{v_i\}}^{\{w_i\}} [S]_{\{w_i\}}^{\{v_i\}} [w]_{\{w_i\}} = I_n [w]_{\{w_i\}} = [w]_{\{w_i\}}. \end{aligned}$$

Luego $T(S(w)) = w$, como se deseaba probar. Concluimos que T es sobre. Siendo V y W de la misma dimensión finita y T una transformación lineal, por el Corolario 5.3.3, T es biyectiva, luego un isomorfismo. ■

Ejemplo 5.4.4

Sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por:
$T((x, y)) = (x + y, 2y)$.
Tenemos

$$T(e_1) = T((1, 0)) = (1, 0) = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2,$$

$$T(e_2) = T((0, 1)) = (1, 2) = 1 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2.$$

Luego

$$[T]_{\{e_1, e_2\}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Observemos que

$$[T]_{\{e_1,e_2\}}[(x,y)]_{\{e_1,e_2\}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ 2y \end{pmatrix} = [T((x,y))]_{\{e_1,e_2\}},$$

con lo cual “recuperamos” a T.

Con el objeto de obtener T^{-1}, obtenemos la inversa de $[T]_{\{e_1,e_2\}}$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2(\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{R_{12}(-1)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right).$$

Luego tenemos $[T^{-1}]_{\{e_1,e_2\}} = ([T]_{\{e_1,e_2\}})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Por lo tanto

$$[T^{-1}((x,y))]_{\{e_1,e_2\}} = [T^{-1}]_{\{e_1,e_2\}}[(x,y)]_{\{e_1,e_2\}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} [(x,y)]_{\{e_1,e_2\}}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - \frac{1}{2}y \\ \frac{1}{2}y \end{pmatrix}.$$

De donde tenemos

$$T^{-1} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \longmapsto (x - \frac{1}{2}y, \frac{1}{2}y).$$

Verifiquemos:

$$(x,y) \overset{T^{-1}}{\longmapsto} (x - \frac{1}{2}y, \frac{1}{2}y) \overset{T}{\longmapsto} (x - \frac{1}{2y} + \frac{1}{2}y, 2\frac{1}{2}y) = (x,y)$$

y

$$(x,y) \overset{T}{\longmapsto} (x+y, 2y) \overset{T^{-1}}{\longmapsto} (x + y - \frac{1}{2}2y, \frac{1}{2}2y) = (x,y).$$

Equivalentemente:

$$(T \circ T^{-1})((x,y)) = T(T^{-1}((x,y))) = T((x - \frac{1}{2y}, \frac{1}{2}y))$$
$$= (x - \frac{1}{2y} + \frac{1}{2}y, 2\frac{1}{2}y) = (x,y)$$

y

$$(T^{-1} \circ T)((x,y)) = T^{-1}(T((x,y))) = T^{-1}((x+y, 2y))$$
$$= (x + y - \frac{1}{2}2y, \frac{1}{2}2y) = (x,y).$$

Observamos que también se puede obtener T^{-1} usando la definición de función inversa y resolviendo un sistema de ecuaciones. En efecto:

Tenemos

$$T^{-1}((x,y)) = (a,b) \iff T((a,b)) = (a+b, 2b) = (x,y).$$

Entonces hemos de resolver el sistema siguiente para a y b.

$$\begin{array}{rcl} a+b & = & x \\ 2b & = & y. \end{array}$$

La única solución es:

$$\begin{array}{rcl} a & = & x - \frac{y}{2} \\ b & = & \frac{y}{2}. \end{array}$$

Así pues nuevamente obtenemos:

$$T^{-1} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x,y) \longmapsto (x - \frac{y}{2}, \frac{y}{2}).$$

Teorema 5.4.5 *Sean V, W espacios vectoriales ambos de dimensión finita sobre el campo K y $\{v_1, \ldots, v_n\}$, $\{w_1, \ldots, w_m\}$ bases de V, W, respectivamente. La función:*

$$\Phi : \mathcal{L}(V,W) \longrightarrow \mathcal{M}_{m\times n}(K)$$

$$T \longmapsto [T]_{\{v_i\}}^{\{w_i\}}.$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Demostración. Se deja al cuidado del lector. Ver [4, Seccion 3.4]. □

Corolario 5.4.6 *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el campo K y sea $\{v_1, \ldots, v_n\}$ base de V. La función:*

$$\Phi : \mathcal{L}(V) \longrightarrow \mathcal{M}_{n\times n}(K)$$

$$T \longmapsto [T]_{\{v_i\}}.$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Demostración. Se sigue del teorema poniendo $W = V$. ■

Observación 5.4.7 De hecho, el isomorfismo del Corolario 5.4.6 es un **isomorfismo de álgebras** pues $\mathcal{L}(V)$ y $\mathcal{M}_{n\times n}(K)$, además de ser espacios vectoriales, tienen el primero la composición de operadores lineales y el segundo el producto de matrices cuadradas, mismos que son "respetados" por la función Φ, esto es:

$$\Phi(S \circ T) = [S \circ T]_{\{v_i\}} = [S]_{\{v_i\}} \cdot [T]_{\{v_i\}} = \Phi(S) \cdot \Phi(T).$$

Teorema 5.4.8 *Sean V, W espacios vectoriales ambos de dimensión finita sobre el campo K, $\{v_1, \ldots, v_n\}, \{v_1^{'}, \ldots, v_n^{'}\}$, bases de V, $\{w_1, \ldots, w_m\}, \{w_1^{'}, \ldots, w_m^{'}\}$ bases de W y $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Sean P la matriz de cambio de base de la base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ a la base $\{v_1^{'}, \ldots, v_n^{'}\}$ de V y Q la matriz de cambio de base de la base $\{w_1, \ldots, w_m\}$ a la base $\{w_1^{'}, \ldots, w_m^{'}\}$ de W. Tenemos*

$$[T]_{\{v_i^{'}\}}^{\{w_i^{'}\}} = Q^{-1}[T]_{\{v_i\}}^{\{w_i\}}P.$$

Demostración. Se omite. Ver [6, Teorema 7.11]. $\square$

Corolario 5.4.9 *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el campo K y sea $\{v_1, \ldots, v_n\}$, $\{v_1^{'}, \ldots, v_n^{'}\}$, bases de V y $T \in \mathcal{L}(V)$. Sea P la matriz de cambio de base de la base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ a la base $\{v_1^{'}, \ldots, v_n^{'}\}$ de V. Tenemos*

$$[T]_{\{v_i'\}} = P^{-1}[T]_{\{v_i\}}P.$$

Demostración. Se sigue del teorema poniendo $W = V$. $\blacksquare$

Ejemplos 5.4.10

(1) Como en el Ejemplo 5.4.2 (2), sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por:

$$T((x, y)) = (4x + 2y, 2x + y)$$

y consideremos las bases $\{e_1, e_2\}$ y $\{(1, -2), (2, 1)\}$ de $\mathbb{R}^2$.

(a) Sea $A = [T]_{\{e_1, e_2\}}$. Como hicimos antes:

$$T(e_1) = T((1, 0)) = (4, 2) = 4 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2,$$
$$T(e_2) = T((0, 1)) = (2, 1) = 2 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2 + 9 \cdot e_3.$$

Luego

$$A = [T]_{\{e_1, e_2\}} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Ahora obtengamos P, la matriz de cambio de base de la base $\{e_1, e_2\}$ a la base $\{(1, -2), (2, 1)\}$.

$$(1, -2) = 1 \cdot e_1 + (-2) \cdot e_2,$$

$$(2, 1) = 2 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2.$$

Por lo que

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Calculemos la inversa de P:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_{21}(2)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2(\frac{1}{5})} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right) \xrightarrow{R_{12}(-2)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right).$$

Así

$$P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se deja al cuidado del lector verificar que en efecto la matriz anterior es la inversa de P.

(d) Sea $B = [T]_{\{(1,-2),(2,1)\}}$. Como hicimos antes:

$$T((1,-2)) = (4-4, 2-2) = (0,0) = 0(1,-2) + 0 \cdot (2,1),$$
$$T((2,1)) = (8+2, 4+1) = (10,5) = 0(1,-2) + 5 \cdot (2,1).$$

Luego

$$B = [T]_{\{(1,-2),(2,1)\}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

(e) Verifiquemos $P^{-1}AP = B$.

$$P^{-1}AP = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = B.$$

Es decir, se ha verificado:

$$P^{-1}[T]_{\{e_1,e_2\}}P = [T]_{\{(1,-2),(2,1)\}}.$$

Se observa en este ejemplo que, aunque la base $\{(1,-2),(2,1)\}$ es "más complicada" que la base canónica $\{e_1,e_2\}$, la matriz B asociada a T respecto a la base $\{(1,-2),(2,1)\}$ es "más sencilla" que la matriz A asociada a T respecto a la base $\{e_1,e_2\}$.

(2) Sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por:

$$T((x,y)) = (x+3y, 2x+5y, 7x+9y).$$

Consideramos las bases $\{e_1,e_2\}$ y $\{(1,1),(1,-1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ y las bases $\{e_1,e_2, e_3\}$ y $\{(1,0,1),(0,2,0),(0,0,-1)\}$ de $\mathbb{R}^3$.

(a) Obtengamos $A = [T]^{\{e_1,e_2,e_3\}}_{\{e_1,e_2\}}$.

$$T(e_1) = T((1,0)) = (1,2,7) = 1\cdot e_1 + 2\cdot e_2 + 7 \cdot_3$$
$$T(e_2) = T((0,1)) = (3,5,9) = 3\cdot e_1 + 5\cdot e_2 + 9 \cdot_3 .$$

Luego
$$A = [T]^{\{e_1,e_2,e_3\}}_{\{e_1,e_2\}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}.$$

(b) Ahora obtengamos P, la matriz de cambio de base de la base $\{e_1, e_2\}$ a la base $\{(1,1),(1,-1)\}$ de $\mathbb{R}^2$.

$$(1,1) = 1\cdot e_1 + 1\cdot e_2,$$
$$(1,-1) = 1\cdot e_1 + (-1)\cdot e_2.$$

Por lo que
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(c) Ahora Q, la matriz de cambio de base de la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ a la base $\{(1,0,1),(0,2,0),(0,0,-1)\}$ de $\mathbb{R}^3$.

$$(1,0,1) = 1\cdot e_1 + 0\cdot e_2 + 1e_3,$$
$$(0,2,0) = 0\cdot e_1 + 2\cdot e_2 + 0\cdot e_3,$$
$$(0,0,-1) = 0\cdot e_1 + 0\cdot e_2 + (-1)\cdot e_3.$$

Por lo que
$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(d) Calculemos la inversa de Q:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_{31}(-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow[R_3(-1)]{R_2(\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Así
$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se deja al cuidado del lector verificar que en efecto la matriz anterior es la inversa de Q.

(e) Obtengamos $B = [T]_{\{(1,1),(1,-1)\}}^{\{(1,0,1),(0,2,0),(0,0,-1)\}}$.

$$
\begin{aligned}
A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 16 \end{pmatrix} \\
&= 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{7}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + (-12) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \\
&= -2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (-\frac{3}{2}) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Por lo que $B = [T]_{\{(1,1),(1,-1)\}}^{\{(1,0,1),(0,2,0),(0,0,-1)\}} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} \\ -12 & 0 \end{pmatrix}$.

Los coeficientes $4, \frac{7}{2}, -12$ y $-2, -\frac{3}{2}, 0$ fueron obtenidos planteando y resolviendo sistemas de ecuaciones.

(f) Finalmente verifiquemos $Q^{-1}AP = B$.

$$
\begin{aligned}
Q^{-1}AP &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\
= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}&\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 7 & -3 \\ 16 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} \\ -12 & 0 \end{pmatrix} = B.
\end{aligned}
$$

Es decir, se ha verificado:

$$Q^{-1}[T]_{\{e_1,e_2\}}^{\{e_1,e_2,e_3\}}P = [T]_{\{(1,1),(1,-1)\}}^{\{(1,0,1),(0,2,0),(0,0,-1)\}}.$$

Definimos una relación en el conjunto

$$\mathcal{M}_{n\times n}(K) = \{A \mid A \text{ es matriz } n \times n \text{ con entradas en } K\}$$

como sigue:

Si $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$ diremos que $A \sim B$ si existe $P \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$, P invertible tal que $B = P^{-1}AP$. Veamos que esta relación es de equivalencia:

(i) Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$. Existe $I_n \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$, I_n matriz invertible tal que $A = I_n^{-1}AI_n$. Luego $A \sim A$ y la relación es reflexiva.

(ii) Si $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$ son tales que $A \sim B$, entones existe $P \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$, P invertible tal que $B = P^{-1}AP$. Tenemos entonces que existe $P^{-1} \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$, P^{-1} invertible de manera que $A = (P^{-1})^{-1}BP^{-1}$. Por lo que $B \sim A$ y así tenemos que la relación es simétrica.

(iii) Si $A, B, C \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$ son tales que $A \sim B$ y $B \sim C$, entones existen $P_1, P_2 \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$, P_1, P_2 invertibles tales que $B = P_1^{-1}AP_1$ y $C = P_2^{-1}BP_2$. Tenemos entonces que existe $P_1P_2 \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$, P_1P_2 invertible de manera que

$$C = P_2^{-1}BP_2 = P_2^{-1}P_1^{-1}AP_1P_2 = (P_1P_2)^{-1}A(P_1P_2).$$

Luego $A \sim C$ y la relación es transitiva.

Concluimos que la relación $\sim$ es una relación de equivalencia en $\mathcal{M}_{n\times n}(K)$. Esta relación de equivalencia se llama ***semejanza*** o ***similaridad***. Las matrices equivalentes bajo esta relación se dicen ***semejantes*** o ***similares***.

Lema 5.4.11 *Sean $P = (c_{hi})_{h,i} \in \mathcal{M}_{n\times n}$, matriz invertible y $\{v_1, \ldots, v_n\}$ un conjunto l. i. Para $1 \leq i \leq n$, sea*

$$v_i^{'} = \sum_{h=1}^{n} c_{hi}v_h.$$

Entonces $\{v_1^{'}, \ldots, v_n^{'}\}$ también es l. i.

Demostración.
Supongamos $x_1v_1^{'} + \ldots + x_nv_n^{'} = 0$ para algunos $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Tenemos

$$0 = \sum_{i=1}^{n} x_iv_i^{'} = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{h=1}^{n} c_{hi}v_h = \sum_{h=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n} x_ic_{hi})v_h.$$

Como $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es l. i., tenemos $\sum_{i=1}^{n} x_ic_{hi} = 0$ para $1 \leq h \leq n$. Lo cual nos da un sistema de n ecuaciones con n incógnitas:

$$\begin{array}{rcl}
c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n & = & 0 \\
c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \ldots + c_{2n}x_n & = & 0 \\
\cdot & & \\
\cdot & & \\
\cdot & & \\
c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + \ldots + c_{nn}x_n & = & 0.
\end{array}$$

La matriz asociada al sistema es P. Realizando operaciones elementales de renglón se puede llevar a P a la matriz identidad y el sistema de ecuaciones es equivalente al sistema

$$\begin{array}{llll} x_1 & & = & 0 \\ & x_2 & = & 0 \\ & \vdots & & \\ & & x_n = & 0. \end{array}$$

Para el cual la única solución es la trivial. Así $\{v_1', \ldots, v_n'\}$ es linealmente independiente. ∎

Definición 5.4.12 Sean V espacio vectorial de dimensión n sobre el campo K, $T : V \longrightarrow V$ operador lineal y $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$. Diremos que la matriz A ***representa a*** T si existe una base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de V tal que

$$[T]_{\{v_i\}} = A.$$

Teorema 5.4.13 *Sean $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$ y V un espacio vectorial de dimensión n sobre el campo K. Las matrices A y B representan al mismo operador lineal T en V si y sólo si A y B son semejantes.*

Demostración.

(a) Supongamos existen $T \in \mathcal{L}(V)$ y $\{v_1, \ldots, v_n\}, \{v_1', \ldots, v_n'\}$, bases de V, de manera que $A = [T]_{\{v_i\}}$ y $B = [T]_{\{v_i'\}}$. Sea P la matriz de cambio de base de la base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ a la base $\{v_1', \ldots, v_n'\}$.Tenemos

$$B = P^{-1}AP.$$

Luego A y B son semejantes.

(b) Recíprocamente, supongamos que $A = (a_{ij})_{i,j}$ y B son semejantes. Entonces existe $P \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$, P invertible tal que $B = P^{-1}AP$. Sea $\{v_1, \ldots, v_n\}$ base de V. Definimos $T : V \longrightarrow V$ en la base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ por $T(v_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij}v_i$ para $1 \leq j \leq n$ y extendemos por linealidad. Tenemos $T \in \mathcal{L}(V)$ y A representa al operador T respecto a la base $\{v_1, \ldots, v_n\}$. Por otro lado, si $P = (c_{hi})_{h,i}$, sean, para $1 \leq i \leq n$, $v_i' = \sum_{h=1}^n c_{hi}v_h$. Por el Lema 5.4.11 $\{v_1', \ldots, v_n'\}$ es l. i. Luego también es base de V. Tenemos

$$B = P^{-1}AP = P^{-1}[T]_{\{v_i\}}P = [T]_{\{v_i'\}}.$$

Así también B representa a T. ∎

Observación 5.4.14 Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre el campo K. Por el Teorema 5.4.13, tenemos una correspondencia entre el conjunto de operadores $\mathcal{L}(V)$ y el conjunto de clases de semejanza de matrices $n \times n$ con entradas en K. Para un operador T nos interesan particularmente algunas representantes de la clase de matrices que le representan, como la forma canónica de Jordan (en caso de existir) y la forma canónica racional.

Ejemplo 5.4.15

Como en el Ejemplo 5.4.2 (2), sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por:

$$T((x, y)) = (4x + 2y, 2x + y)$$

y consideremos las bases $\{e_1, e_2\}$ y $\{(1, -2), (2, 1)\}$. Recordemos

$$A = [T]_{\{e_1,e_2\}} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$B = [T]_{\{(1,-2),(2,1)\}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

La matriz A es la representación del operador T respecto a la base canónica mientras que, en este ejemplo, B es a la vez la forma canónica racional y la forma canónica de Jordan de T y de A.

Capítulo 6

Permutaciones y determinantes

6.1. Grupos de permutaciones

Sea X un conjunto no vacío. El ***grupo de permutaciones en*** X, denotado por S_X, es el conjunto de las funciones biyectivas de Xen sí mismo. Los elementos de S_X se llaman ***permutaciones*** (de los elementos de X) .

Ejemplos 6.1.1

(1) Sea $X = \{x\}$ un conjunto con un solo elemento. La única función biyectiva de X en sí mismo es la función identidad id_X, por lo que en este caso $S_X = \{\mathrm{id}_X\}$.

(2) Sea $X = \{x, y\}$ un conjunto con dos elementos. Hay precisamente dos funciones biyectivas de X en sí mismo, la función identidad id_X y la función $\sigma : X \longrightarrow X$ dada por $\sigma(x) = y$ y $\sigma(y) = x$, por lo que en este caso $S_X = \{\mathrm{id}_X, \sigma\}$.

La siguiente proposición justifica el uso de la palabra ***grupo*** en la definición anterior (pues las propiedades mencionadas son precisamente las que satisface un grupo).

Proposición 6.1.2 *Sea X conjunto no vacío. Tenemos:*

(i) $\sigma, \tau \in S_X \implies \sigma \circ \tau \in S_X$.

(ii) $\forall\ \sigma, \tau, \rho \in S_X$ *tenemos* $(\sigma \circ \tau) \circ \rho = \sigma \circ (\tau \circ \rho)$.

(iii) *Existe* $\mathrm{id}_X \in S_X$ *tal que* $\sigma \circ \mathrm{id}_X = \mathrm{id}_X \circ \sigma = \sigma\ \forall\ \sigma \in S_X$.

(iv) *Dado* $\sigma \in S_X\ \exists\ \tau \in S_X$ *(más precisamente* $\tau = \sigma^{-1}$*) tal que* $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma = \mathrm{id}_X$.

Demostración.

(i) Se sigue de la Proposición 1.3.18 (iii).

(ii) Se sigue de la Proposición 1.3.17.

(iii) Sean $\sigma \in S_X$ y $x \in X$. Tenemos $(\sigma \circ \mathrm{id}_X)(x) = \sigma(\mathrm{id}_X(x)) = \sigma(x)$ e $(\mathrm{id}_X \circ \sigma)(x) = \mathrm{id}_X(\sigma(x)) = \sigma(x)$. Luego $\sigma \circ \mathrm{id}_X = \mathrm{id}_X \circ \sigma = \sigma$, como se deseaba probar.

(iv) Se sigue de la Proposición 1.3.20. ■

Corolario 6.1.3 *Sean $\sigma, \tau, \rho \in S_X$. Tenemos:*

(i) $\sigma \circ \tau = \sigma \circ \rho \implies \tau = \rho$.

(ii) $\sigma \circ \rho = \tau \circ \rho \implies \sigma = \tau$.

Demostración.

(i) $\sigma \circ \tau = \sigma \circ \rho \implies \sigma^{-1} \circ (\sigma \circ \tau) = \sigma^{-1} \circ (\sigma \circ \rho) \implies (\sigma^{-1} \circ \sigma) \circ \tau = (\sigma^{-1} \circ \sigma) \circ \rho \implies \mathrm{id}_X \circ \tau = \mathrm{id}_X \circ \rho \implies \tau = \rho$.

(ii) Análoga a (i), se deja como ejercicio. ■

Proposición 6.1.4 *Si X es un conjunto finito con n elementos, entonces S_X tiene $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$ (n **factorial**) elementos.*

Demostración. Se omite la demostración (se puede dar un argumento usando inducción sobre n). □

Notación 6.1.5 Si X es un conjunto finito con n elementos (por ejemplo, si $X = \{1, 2, \ldots, n\}$), denotaremos a S_X también por S_n.

En este contexto, a veces nos referiremos a la composición (de permutaciones) como ***producto*** y denotaremos la composición de permutaciones simplemente por yuxtaposición (poniendo una a continuación de la otra).

Notación 6.1.6 Supongamos $n > 1$. Si $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ y $\varphi \in S_n$. Entonces φ es una biyección de X en sí mismo. Digamos

$$\begin{aligned}
\varphi : \quad X &\longrightarrow X \\
1 &\longmapsto i_1 \\
2 &\longmapsto i_2 \\
&\vdots \\
n &\longmapsto i_n
\end{aligned}$$

Escribimos

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 6.1.7 Consideramos $n = 3$. Sean

$$\mathrm{id} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

En notación de ciclos, que se explicará un poco más adelante,

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tenemos:

$$\mathrm{id}^{-1} = \mathrm{id},$$

$$\rho^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} = \sigma.$$

También:

$$\rho\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

De otra forma: $\rho\sigma = (\ 1\ \ 2\ \ 3\ )(1\ \ 2\ ) = (\ 1\ \ 3\ )(\ 2\ ) = (\ 1\ \ 3\ )$.
Finalmente,

$$\rho^{-1}\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

De otra manera: $\rho^{-1}\sigma = (\ 1\ \ 3\ \ 2\ )(1\ \ 2\ ) = (\ 1\ )(\ 2\ \ 3\ ) = (\ 2\ \ 3\ )$.
Observamos que S_3 tiene $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ elementos. De hecho,

$$S_3 = \{\mathrm{id}, \rho, \rho^{-1}, \sigma, \rho\sigma, \rho^{-1}\sigma\}.$$

También notamos que:

$$\sigma\rho = (1\ \ 2\ )(\ 1\ \ 2\ \ 3\ ) = (\ 1\ )(\ 2\ \ 3\ ) = (\ 2\ \ 3\ ) \neq \rho\sigma.$$

En el ejemplo anterior usamos la siguiente:

Notación 6.1.8 Sean $n, k \in \mathbb{N}, k \leq n$. Sean $i_1, \imath_2, \dots, i_k$ enteros distintos en $X = \{1, 2, \dots, n\}$. El símbolo $\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \end{pmatrix}$ representa a la permutación $\sigma \in S_n$ dada por $\sigma(i_1) = i_2, \sigma(i_2) = i_3, \dots, \sigma(i_{k-1}) = i_k, \sigma(i_k) = i_1$ y $\sigma(x) = x\ \forall\ x \in X, x \notin \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$.

Ejemplo 6.1.9 En S_7 tenemos la permutación

$$\sigma = (\ 1\ \ 3\ \ 5\ \ 4\ ) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Definición 6.1.10 Una permutación de la forma $(\ i_1\ \ i_2\ \ \ldots\ \ i_k\ )$ se llama ***ciclo de orden*** k o k***-ciclo***. En el caso $k = 2$ tenemos un 2-ciclo al que llamamos ***trasposición***.

Observación 6.1.11 $(\ 1\ \ 3\ \ 5\ \ 4\ ) = (\ 3\ \ 5\ \ 4\ \ 1\ ) = (\ 5\ \ 4\ \ 1\ \ 3\ ) = (\ 4\ \ 1\ \ 3\ \ 5\ )$.

Proposición 6.1.12 *Si σ es un k-ciclo, entonces*

$$\sigma^k = \sigma \circ \ldots \circ \sigma = \mathrm{id}_X.$$

Demostración. Se omite. □

Ejemplos 6.1.13

$$(\ 1\ \ 2\ )^2 = (\ 1\ \ 2\ )(\ 1\ \ 2\ ) = (1)(2) = \mathrm{id},$$

$$(\ 1\ \ 2\ \ 3\ )^3 = (\ 1\ \ 2\ \ 3\ )(\ 1\ \ 2\ \ 3\ )(\ 1\ \ 2\ \ 3\ ) = (\ 1\ \ 3\ \ 2\ )(\ 1\ \ 2\ \ 3\ ) = (1)(2)(3) = \mathrm{id}.$$

Observación 6.1.14 $(\ i_1\ \ i_2\ \ \ldots\ \ i_k\ )^{-1} = (\ i_1\ \ i_k\ \ \ldots\ \ i_3\ i_2\ )$.

Ejemplo 6.1.15 $(\ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ )^{-1} = (\ 1\ \ 5\ \ 4\ \ 3\ \ 2\ )$.

Definición 6.1.16 Dados dos ciclos, diremos que son ***ciclos disjuntos*** o ***ciclos ajenos*** si no tienen ningún elemento en común.

Ejemplos 6.1.17

$$(\ 1\ \ 2\ )\ \text{ y }\ (\ 3\ \ 5\ \ 4\ )\ \text{ son ajenos,}$$

$$(\ 1\ \ 2\ \ 3\ )\ \text{ y }\ (\ 3\ \ 5\ \ 4\ )\ \text{ no son ajenos,}$$

$$(\ 1\ \ 2\ ),\ (\ 3\ \ 5\ \ 4\ )\ \text{ y }\ (7\ \ 8\ )\ \text{ son ajenos a pares,}$$

$$(\ 1\ \ 2\ \ 3\ ),\ (\ 3\ \ 5\ \ 4\ )\ \text{ y }\ (7\ \ 8\ )\ \text{ no son ajenos a pares.}$$

Lema 6.1.18 *Si σ y $\tau \in S_n$ son ciclos ajenos, entonces $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma$, es decir, σ y τ conmutan.*

Demostración. Se omite. □

Teorema 6.1.19 *Toda permutación en S_n es producto de ciclos ajenos a pares. Esto es de manera única salvo orden y 1-ciclos.*

Demostración. Se omite. Se ilustra el procedimiento en el siguiente ejemplo. □

Ejemplo 6.1.20

$$\begin{aligned}
\tau &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 9 & 4 & 1 & 5 & 6 & 2 & 7 & 8 \end{pmatrix} \\
&= (\ 1\ \ 3\ \ 4\ )(\ 2\ \ 9\ \ 8\ \ 7\ )(\ 5\ )(\ 6\ ) \\
&= (\ 1\ \ 3\ \ 4\ )(\ 2\ \ 9\ \ 8\ \ 7\ ).
\end{aligned}$$

Teorema 6.1.21 *Toda permutación en S_n es producto de trasposiciones.*

Demostración. Se sigue del Teorema 6.1.19 y de la observación siguiente. ■

Observaciones 6.1.22

(i) $(\ i_1\ \ i_2\ \ \ldots\ \ i_k\ ) = (\ i_1\ \ i_k\ )(\ i_1\ \ i_{k-1}\ )\ldots(\ i_1\ \ i_2\ )$.

(ii) En el teorema anterior la manera de escribir a la permutación como producto de trasposiciones no es única y las trasposiciones no son necesariamente disjuntas.

Ejemplos 6.1.23

$$\begin{aligned}
(\ 1\ \ 2\ \ 3\ ) &= (\ 1\ \ 3\ )(\ 1\ \ 2\ ) \\
&= (\ 2\ \ 3\ )(\ 1\ \ 3\ ) \\
&= (\ 1\ \ 3\ )(\ 2\ \ 3\ )(\ 2\ \ 3\ )(\ 1\ \ 2\ ) \\
&= (\ 1\ \ 3\ )(\ 1\ \ 2\ )(\ 2\ \ 3\ )(\ 2\ \ 3\ )(\ 2\ \ 3\ )(\ 2\ \ 3\ ),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\ 1\ \ 2\ )(\ 3\ \ 4\ ) &= (\ 3\ \ 4\ )(\ 1\ \ 2\ ) \\
&= (\ 1\ \ 2\ )(\ 3\ \ 4\ )(\ 2\ \ 3\ )(\ 2\ \ 3\ )(\ 2\ \ 3\ )(\ 2\ \ 3\ ).
\end{aligned}$$

Teorema 6.1.24 *Cualquier permutación en S_n es producto de un número par de trasposiciones o bien es producto de un número impar de trasposiciones, pero no ambas.*

Demostración. Se omite. Ver p. 50 de [5]. □

Definición 6.1.25 Una permutación $\sigma \in S_n$ es una permutación ***par*** si es producto de un número par de trasposiciones y σ es una permutación ***impar*** si es producto de un número impar de trasposiciones. A ser par o impar se le llama ***paridad*** de la trasposición.

Ejemplos 6.1.26

$$n = 2$$

$$S_2 = \{\ \mathrm{id}, (\ 1\ \ 2\ )\},$$

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{id} & = & (\ 1\ \ 2\ )(\ 1\ \ 2\ ) \text{ es par,} \\ (\ 1\ \ 2\ ) & = & (\ 1\ \ 2\ ) \text{ es impar.} \end{array}$$

Hay precisamente una permutación par y una impar.

$$n = 3$$

$$S_3 = \{\ \mathrm{id}, (\ 1\ \ 2\ ), (\ 1\ \ 3\ ), (\ 2\ \ 3\ ), (\ 1\ \ 2\ \ 3\ ), (\ 1\ \ 3\ \ 2\ )\},$$

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{id} & = & (\ 1\ \ 2\ )(\ 1\ \ 2\ ) \text{ es par,} \\ (\ 1\ \ 2\ ) & = & (\ 1\ \ 2\ ) \text{ es impar,} \\ (\ 1\ \ 3\ ) & = & (\ 1\ \ 3\ ) \text{ es impar,} \\ (\ 2\ \ 3\ ) & = & (\ 2\ \ 3\ ) \text{ es impar,} \\ (\ 1\ \ 2\ \ 3\ ) & = & (\ 1\ \ 3\ )(\ 1\ \ 2\ ) \text{ es par,} \\ (\ 1\ \ 3\ \ 2\ ) & = & (\ 1\ \ 2\ )(\ 1\ \ 3\ ) \text{ es par.} \end{array}$$

Hay precisamente tres permutaciones pares y tres impares.

$$n = 4$$

$$\begin{gathered} S_4 = \{\ \mathrm{id}, (\ 1\ \ 2\ ), (\ 1\ \ 3\ ), (\ 1\ \ 4\ ), (\ 2\ \ 3\ ), (\ 2\ \ 4\ ), (\ 3\ \ 4\ ), \\ (\ 1\ \ 2\ )(\ 3\ \ 4\ ), (\ 1\ \ 3\ )(\ 2\ \ 4\ ), (\ 1\ \ 4\ )(\ 2\ \ 3\ ), \\ (\ 1\ \ 2\ \ 3\ ), (\ 1\ \ 3\ \ 2\ ), (\ 1\ \ 2\ \ 4\ ), (\ 1\ \ 4\ \ 2\ ), (\ 1\ \ 3\ \ 4\ ), (\ 1\ \ 4\ \ 3\ ), (\ 2\ \ 3\ \ 4\ ), (\ 2\ \ 4\ \ 3\ ), \\ (\ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ ), (\ 1\ \ 2\ \ 4\ \ 3\ ), (\ 1\ \ 3\ \ 2\ \ 4\ ), (\ 1\ \ 3\ \ 4\ \ 2\ ), (\ 1\ \ 4\ \ 2\ \ 3\ ), (\ 1\ \ 4\ \ 3\ \ 2\ )\}, \end{gathered}$$

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{id} & = & (\,1\;\;2\,)(\,1\;\;2\,) \text{ es par,}\\
(\,1\;\;2\,) & = & (\,1\;\;2\,) \text{ es impar,}\\
(\,1\;\;3\,) & = & (\,1\;\;3\,) \text{ es impar,}\\
(\,1\;\;4\,) & = & (\,1\;\;4\,) \text{ es impar,}\\
(\,2\;\;3\,) & = & (\,2\;\;3\,) \text{ es impar,}\\
(\,2\;\;4\,) & = & (\,2\;\;4\,) \text{ es impar,}\\
(\,3\;\;4\,) & = & (\,3\;\;4\,) \text{ es impar,}\\
(\,1\;\;2\,)(\,3\;\;4\,) & = & (\,1\;\;2\,)(\,3\;\;4\,) \text{ es par,}\\
(\,1\;\;3\,)(\,2\;\;4\,) & = & (\,1\;\;3\,)(\,2\;\;4\,) \text{ es par,}\\
(\,1\;\;4\,)(\,2\;\;3\,) & = & (\,1\;\;4\,)(\,2\;\;3\,) \text{ es par,}\\
(\,1\;\;2\;\;3\,) & = & (\,1\;\;3\,)(\,1\;\;2\,) \text{ es par,}\\
(\,1\;\;3\;\;2\,) & = & (\,1\;\;2\,)(\,1\;\;3\,) \text{ es par,}\\
(\,1\;\;2\;\;4\,) & = & (\,1\;\;4\,)(\,1\;\;2\,) \text{ es par,}\\
(\,1\;\;4\;\;2\,) & = & (\,1\;\;2\,)(\,1\;\;4\,) \text{ es par,}\\
(\,1\;\;3\;\;4\,) & = & (\,1\;\;4\,)(\,1\;\;3\,) \text{ es par,}\\
(\,1\;\;4\;\;3\,) & = & (\,1\;\;3\,)(\,1\;\;4\,) \text{ es par,}\\
(\,2\;\;3\;\;4\,) & = & (\,2\;\;4\,)(\,2\;\;3\,) \text{ es par,}\\
(\,2\;\;4\;\;3\,) & = & (\,2\;\;3\,)(\,2\;\;4\,) \text{ es par,}\\
(\,1\;\;2\;\;3\;\;4\,) & = & (\,1\;\;4\,)(\,1\;\;3\,)(\,1\;\;2\,) \text{ es impar,}\\
(\,1\;\;2\;\;4\;\;3\,) & = & (\,1\;\;3\,)(\,1\;\;4\,)(\,1\;\;2\,) \text{ es impar,}\\
(\,1\;\;3\;\;2\;\;4\,) & = & (\,1\;\;4\,)(\,1\;\;2\,)(\,1\;\;3\,) \text{ es impar,}\\
(\,1\;\;3\;\;4\;\;2\,) & = & (\,1\;\;2\,)(\,1\;\;4\,)(\,1\;\;3\,) \text{ es impar,}\\
(\,1\;\;4\;\;2\;\;3\,) & = & (\,1\;\;3\,)(\,1\;\;2\,)(\,1\;\;4\,) \text{ es impar,}\\
(\,1\;\;4\;\;3\;\;2\,) & = & (\,1\;\;2\,)(\,1\;\;3\,)(\,1\;\;4\,) \text{ es impar.}
\end{array}$$

Hay precisamente doce permutaciones pares y doce impares.

6.2. Determinantes

Sea $\sigma \in S_n$, el grupo de permutaciones de $\{1, \ldots, n\}$. Definimos el ***signo*** de σ por

$$(-1)^\sigma = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma \text{ es par,} \\ -1 & \text{si } \sigma \text{ es impar.} \end{cases}$$

Definición 6.2.1 Sea $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$. El ***determinante*** de A es

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma 2)} \cdots a_{n\sigma(n)}.$$

Frecuentemente se denota el determinante de A también por $|A|$ o por

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Ejemplos 6.2.2

(1) Sean $n = 1$ y $A = (a_{11})$. Tenemos $S_1 = \{\mathrm{id}\}$ y

$$|A| = a_{11}.$$

(2) Si $n = 2$ y $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, entonces $S_2 = \{\mathrm{id}, (12)\}$ y

$$|A| = (-1)^{\mathrm{id}} a_{11}a_{22} + (-1)^{(12)} a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

(3) Para $n = 3$ y $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, tenemos

$S_3 = \{\mathrm{id}, (123), (132), (12), (13), (23)\}$ y

$$|A| = (-1)^{\mathrm{id}} a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)^{(123)} a_{12}a_{23}a_{31} + (-1)^{(132)} a_{13}a_{21}a_{32} +$$
$$(-1)^{(12)} a_{12}a_{21}a_{33} + (-1)^{(13)} a_{13}a_{22}a_{31} + (-1)^{(23)} a_{11}a_{23}a_{32} =$$
$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32}).$$

(4) $\det((-7)) = -7$.

(5) $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (1)(-1) - (1)(1) = -2.$

(6)

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} =$$
$$(1)(5)(9) + (4)(8)(3) + (7)(2)(6) - [(4)(2)(9) + (7)(5)(3) + (1)(8)(6)] =$$
$$45 + 96 + 84 - 72 - 105 - 48 = -3 - 9 + 12 = 0.$$

Sea $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$. Denotamos por

$$M_{ij}$$

a la matriz $(n-1)\times(n-1)$ que se obtiene quitando a A el i–ésimo renglón y la j–ésima columna. El determinante $|M_{ij}|$ se llama ***menor*** del elemento a_{ij} de A. Definimos el ***cofactor*** de a_{ij} por

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|.$$

Teorema 6.2.3 *El determinante de la matriz $A = (a_{ij})_{i,j}$ es igual a la suma de los productos obtenidos multiplicando los elementos de cualquier renglón o columna por sus respectivos cofactores.*

Demostración. Se omite.Ver [6, Teorema 8.7] $\square$

Ejemplos 6.2.4

(1) Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Desarrollamos respecto al segundo renglón:

$$M_{21} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, A_{21} = (-1)^{2+1}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}),$$

$$M_{22} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}, A_{22} = (-1)^{2+2}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}),$$

$$M_{23} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}, A_{23} = (-1)^{2+3}(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}).$$

$$\text{Luego } |A| = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$$

$$= a_{21}(-1)(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) + a_{23}(-1)(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31})$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32}).$$

(2) Desarrollamos respecto a la primera columna:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= (45 - 48) - 2(36 - 42) + 3(32 - 35) = -3 + 12 - 9 = 0.$$

Proposición 6.2.5 *Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$. Tenemos* $\det(A^t) = \det(A)$.

Demostración. Se omite.Ver [6, Teorema 8.1] $\square$

Definición 6.2.6 Sea $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$.

(a) A es ***triangular superior*** si $a_{ij} = 0$ siempre que $i > j$.

(b) A es ***triangular inferior*** si $a_{ij} = 0$ siempre que $i < j$.

(c) A es ***triangular*** si es triangular superior o triangular inferior.

(d) A es ***diagonal*** si $a_{ij} = 0$ siempre que $i \neq j$.

Proposición 6.2.7 *El determinante de una matriz triangular es el producto de sus entradas en la diagonal.*

Demostración. Es consecuencia del Teorema 6.2.3. Se dejan los detalles al lector. ■

Corolario 6.2.8 *El determinante de una matriz diagonal es el producto de sus entradas en la diagonal.*

Demostración. Se sigue de la Proposición 6.2.7 pues toda matriz diagonal es triangular. ■

Ejemplos 6.2.9

(1) Sea $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_r \end{pmatrix}$. Obtenemos $\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_r$.

(2) $\det(\mathrm{I}_n) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = 1.$

(3) $\det(0_{n\times n}) = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = 0\ .$

(4) $\det \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \lambda_1^3 \cdot \lambda_2^3 \cdot \lambda_3.$

Proposición 6.2.10 *Sea* $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$.

(a) *Si A tiene un renglón (o columna) de ceros, entonces* $\det(A) = 0$.

(b) *Si A tiene dos renglones (o dos columnas) iguales, entonces* $\det(A) = 0$.

Demostración. Se omite.Ver [6, Teorema 8.2] □

Proposición 6.2.11 *Sea* $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$.

(a) *Si B se obtiene de A intercambiando dos renglones (o columnas), entonces* $\det(B) = -\det(A)$.

(b) *Si B se obtiene de A multiplicando un renglón (o columna) por un escalar c, entonces* $\det(B) = c\det(A)$.

(c) *Si B se obtiene de A sumando un múltiplo de un renglón (o una columna) de A a otro (a), entonces* $\det(B) = \det(A)$.

Demostración. Se omite.Ver [6, Teorema 8.3] □

Ejemplos 6.2.12

(1) Sea $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ -5 & -7 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Con el propósito de obtener el determinante de A, realizamos operaciones elementales de renglón:

- $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ -5 & -7 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \underset{\substack{R_{32}(3) \\ R_{42}(1)}}{\overset{R_{12}(-2)}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{R_{31}(-3)}{\overset{R_{21}(-1)}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 7 & -13 \end{pmatrix}$.

Tenemos

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ -5 & -7 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$- \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 7 & -13 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 7 & -13 \end{vmatrix} =$$

$$-\left((4)(-13) - (-2)(7)\right) = -(-52 + 14) = 38.$$

(2) Sea $B = \begin{pmatrix} -6 & 5 & 0 & 8 \\ -7 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

Realizando una operación elemental del segundo tipo al tercer renglón, tenemos

$$\det(B) = \begin{vmatrix} -6 & 5 & 0 & 8 \\ -7 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} -6 & 5 & 0 & 8 \\ -7 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$-4\begin{vmatrix} -6 & 5 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix} -6 & 5 \\ -7 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$(-4)((-6)(1) - (5)(-7)) = (-4)(29) = -116.$$

(3) Sea $C = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

Realizando operaciones del primer y del tercer tipo sobre renglones tenemos

$$\det(C) = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 5 & 0 & 8 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$-\begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -22 \\ 0 & 1 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & -22 \end{vmatrix} = -22.$$

(4) Consideremos $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

El determinante de la matriz D es

$$\det(D) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1.$$

Observación 6.2.13 El ***método de diagonales de Sarrus***, que sirve para evaluar el determinante de matrices 3×3, no se puede aplicar para matrices más grandes. Esto se ilustra al tratar de usar el método para obtener el determinante de la matriz D del ejemplo 6.2.12 (4) (se obtiene el valor 2, el cual no coincide con el valor del determinante, que es igual a 1).

Teorema 6.2.14 *El determinante es una función multiplicativa, es decir:*

$$\begin{aligned} \det : \mathcal{M}_{n\times n}(K) &\longrightarrow K \\ A &\longmapsto \det(A), \end{aligned}$$

satisface

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Demostración. Se omite.Ver [6, Teorema 8.5] □

Corolario 6.2.15 *Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$. Si A es invertible, entonces* $\det(A) \neq 0$ *y*

$$\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}.$$

Demostración. Puesto que se está suponiendo que A es invertible, tenemos $AA^{-1} = \mathrm{I}_n$, luego $\det(A)\det(A^{-1}) = \det \mathrm{I}_n = 1$. Por lo tanto $\det(A) \neq 0$ y $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$. ■

Corolario 6.2.16 *Sean $A, P \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$ y supongamos P es invertible. Entonces*

$$\det(P^{-1}AP) = \det(A).$$

Demostración. Usando el teorema y el corolario anteriores, tenemos

$$\det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1})\det(A)\det(P) = (\det(P))^{-1}\det(A)\det(P) =$$
$$(\det(P))^{-1}\det(P)\det(A) = \det(P^{-1})\det(P)\det(A) = \det \mathrm{I}_n \det(A) =$$
$$1 \cdot \det(A) = \det(A).$$

■

Observación 6.2.17 El último corolario pemite definir el ***determinante*** de un operador lineal $T : V \longrightarrow V$, donde V es un espacio vectorial de dimensión finita sobre el campo K por $\det(T) = \det(A)$, donde A es la matriz asociada a T respecto a cualquier base de V.

Ejemplo 6.2.18

Como en el Ejemplo 5.4.2 (2), sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por:

$$T((x, y)) = (4x + 2y, 2x + y)$$

y consideremos las bases $\{e_1, e_2\}$ y $\{(1, -2), (2, 1)\}$. Recordemos

$$A = [T]_{\{e_1,e_2\}} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$B = [T]_{\{(1,-2),(2,1)\}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Tenemos $\det(T) = \det(A) = \det(B) = 0$.

Definición 6.2.19 Sea $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$. La ***matriz adjunta*** de A es la traspuesta de la matriz de cofactores, es decir:

$$\mathrm{Adj}(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

donde A_{ij} es el coactor de a_{ij}.

Teorema 6.2.20 *Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$. Entonces*

$$A \cdot \mathrm{Adj}(A) = \det(A) \cdot \mathrm{I}_n.$$

Demostración. Se omite.Ver [6, Teorema 8.8] □

Corolario 6.2.21 *Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$. Entonces A es invertible si y sólo si* $\det(A) \neq 0$. *En este caso*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\mathrm{Adj}(A).$$

Demostración. Se sigue del Teorema 6.2.20 y el Corolario 6.2.15. Quedan los detalles al cuidado del lector. ■

Ejemplos 6.2.22

(1) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Tenemos $\det(A) = 0$,

$$A_{11} = 2, A_{12} = -1,$$

$$A_{21} = -2, A_{22} = 1$$

y

$$\mathrm{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Confirmamos

$$A \cdot \mathrm{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \mathrm{I}_2.$$

(2) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$. Tenemos

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 1, A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = -10, A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 7,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 1, A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 4, A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -3,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1, A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2, A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1.$$

Por tanto $\mathrm{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -10 & 4 & 2 \\ 7 & -3 & -1 \end{pmatrix}$.

Luego

$$A \cdot \mathrm{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -10 & 4 & 2 \\ 7 & -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \mathrm{I}_3.$$

Concluimos $\det(A) = 2$ y

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\mathrm{Adj}(A) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -10 & 4 & 2 \\ 7 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, consideramos un sistema de ecuaciones lineales con el mismo número, n, de ecuaciones que de incógnitas:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & & \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & & \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n & = & b_n. \end{array} \tag{6.1}$$

Sea $A = (a_{ij})_{i,j} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$. Llamamos a A la ***matriz de coeficientes*** del sistema de ecuaciones lineales (6.1). Sean $\Delta = \det(A)$ y para $i \in \{i, \ldots, n\}$

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2i-1} & b_2 & a_{2i+1} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Teorema 6.2.23 ***(Regla de Cramer)*** *Si $\Delta \neq 0$, entonces el sistema de ecuaciones lineales* (6.1) *tiene una única solución y ésta viene dada por*

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta},$$

para $1 \leq i \leq n$.

Demostración. Se omite.Ver [6, Teorema 8.9] □

Ejemplos 6.2.24

(1) Consideramos el sistema:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ 2x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & z & = & 0 \end{array}$$

Tenemos:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1+2+6-(3+4+1) = 9-8 = 1 \neq 0.$$

Luego la única solución del sistema es:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta} = 1+3-2-1 = 1,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta} = 1+1-3-2 = -3,$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = 2+2-1-1 = 2.$$

(2) El sistema

$$\begin{array}{rcrcl} x & + & 2y & = & 0 \\ 2x & + & 4y & = & 0 \end{array}$$

tiene una infinidad de soluciones y

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4-4 = 0.$$

(3) El sistema

$$\begin{array}{rcrcl} x & + & 2y & = & 0 \\ 2x & + & 4y & = & 1 \end{array}$$

no tiene solución y

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4-4 = 0.$$

Capítulo 7

Espacios euclidianos

7.1. Preliminares

Definición 7.1.1 Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Un ***producto interno*** en V es una función $<\ ,\ >: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisface:

(i) $< \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v > = \alpha_1 < u_1, v > + \alpha_2 < u_2, v >$, $\forall\ u_1, u_2, v \in V, \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

(ii) $< u, v > = < v, u >$, $\forall\ u, v \in V$.

(iii) $< u, u > \geq 0\ \forall\ u \in V\ \&\ < u, u > = 0 \iff u = 0$.

Un espacio vectorial V sobre $\mathbb{R}$ con producto interno se llama ***espacio real con producto interno*** o ***espacio euclidiano***.

Definición 7.1.2 Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Un ***producto interno*** en V es una función $<\ ,\ >: V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ que satisface:

(i) $< \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v > = \alpha_1 < u_1, v > + \alpha_2 < u_2, v >$, $\forall\ u_1, u_2, v \in V, \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$.

(ii) $< u, v > = \overline{< v, u >}$, donde la barra indica complejo conjugado, $\forall\ u, v \in V$.

(iii) $< u, u > \geq 0\ \forall\ u \in V\ \&\ < u, u > = 0 \iff u = 0$.

Un espacio vectorial V sobre $\mathbb{C}$ con producto interno se llama ***espacio complejo con producto interno*** o ***espacio unitario***.

Observaciones 7.1.3

(a) En el caso real: $< u, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 > = \alpha_1 < u, v_1 > + \alpha_2 < u, v_2 >$, $\forall\ u, v_1, v_2 \in V, \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

En efecto: $< u, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 > = < \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, u > = \alpha_1 < v_1, u > + \alpha_2 < v_2, u > = \alpha_1 < u, v_1 > + \alpha_2 < u, v_2 >$.

(b) En el caso complejo: $< u, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 > = \overline{\alpha_1} < u, v_1 > + \overline{\alpha_2} < u, v_2 >$, $\forall\ u, v_1, v_2 \in V, \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$.

Ejemplos 7.1.4

(1) En $\mathbb{R}^n$ definimos para $u = (a_1, \ldots, a_n), v = (b_1, \ldots, b_n)$ el ***producto interno usual*** o ***producto punto*** de u y v por

$$u \mathbin{\boldsymbol{.}} v = a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n.$$

Este producto hace de $\mathbb{R}^n$ un espacio euclidiano. En $\mathbb{R}^2$: $(3,0)\cdot(1,4) = 3 \cdot 1 + 0 \cdot 4 = 3$ & $(1,0)\cdot(0,1) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$, en $\mathbb{R}^3$: $(1,1,1)\cdot(1,1,0) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 2$.

(2) En $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ definimos para A, B matrices

$$< A\ , B > = \operatorname{tr}(B^t A), \tag{7.1}$$

donde, en general, la ***traza*** de una matriz $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$ es la suma de los elementos de la diagonal de A, esto es:

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Observemos primero que la función traza

$$\operatorname{tr}\ : \mathcal{M}_{n\times n}(K) \longrightarrow K$$

es una transformación lineal, es decir, $\operatorname{tr}(aA + bB) = a\operatorname{tr}(A) + b\operatorname{tr}(B)$ $\forall\ A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(K), \forall a, b \in \mathbb{R}$ y que $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(A^t)\ \forall\ A \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$.

Probemos ahora que la función definida en (7.1) hace de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ un espacio euclidiano.

(i) $< \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2, B >= \operatorname{tr}(B^t(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2)) = \operatorname{tr}(\alpha_1 B^t A_1 + \alpha_2 B^t A_2) = \alpha_1 \operatorname{tr}(B^t A_1) + \alpha_2 \operatorname{tr}(B^t A_2) = \alpha_1 < A_1, B > + \alpha_2 < A_2, B >$, $\forall\ A_1, A_2, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}), \forall\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

(ii) $< A\ , B > = \operatorname{tr}(B^t A) = \operatorname{tr}((B^t A))^t = \operatorname{tr}(A^t B) = < B, A >$, $\forall\ A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

(iii) Sea $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Tenemos: $< A\ , A > = \operatorname{tr}(A^t A) =$

$$\operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}\right) =$$

$$\operatorname{tr}\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{i1}^2 & \dots & \sum_{i=1}^{n} a_{i1}a_{in} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \sum_{i=1}^{n} a_{in}a_{i1} & \dots & \sum_{i=1}^{n} a_{in}^2 \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2 \geq 0,$$

$\forall\ A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Además,

$$< A\ , A > =\ 0 \iff \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2 = 0\ \forall\ i,j, 1 \leq i,j \leq n \iff$$

$$a_{ij} = 0\ \forall\ i,j, 1 \leq i,j \leq n \iff A = 0_{n\times n}.$$

Finalmente, ilustramos con un ejemplo:

Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Tenemos:

$$< A\ , B > = \operatorname{tr}(B^t A) = \operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}\right) =$$

$$\operatorname{tr}\begin{pmatrix} 12 & 17 \\ 26 & 37 \end{pmatrix} = 12 + 37 = 49.$$

(3) Sea V el espacio vectorial real de las funciones continuas, definidas en el intervalo $[a,b]$ y con valores reales (recordemos que la suma de continuas es continua y que el producto de un escalar por una función continua es una función continua). Definimos para $f, g \in V$:

$$< f\ , g > = \int_a^b f(t)g(t)dt.$$

Queda como ejercicio al lector verificar que el anterior es un producto interno en V.

(4) Sea $V = \ell_2 = \{\{a_n\}_n \mid a_n \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}\ \&\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < \infty\}$. Definimos $\{a_n\}_n + \{b_n\}_n = \{a_n + b_n\}_n$ y $\alpha\{a_n\}_n = \alpha\{a_n\}_n$ para $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in V$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Tenemos que V con estas operaciones es un espacio vectorial. Se define en V:

$$< \{a_n\}_n, \{b_n\}_n > =\ a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \dots$$

La suma infinita anterior converge para $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in V$, $<\ ,\ >$ es un producto interno y hace de V un espacio euclidiano. Se deja al lector verificar los detalles. Ver páginas 65 y 66 de [8].

Definición 7.1.5 Sean V un espacio euclidiano (o unitario) y $u \in V$. Definimos la ***norma*** de u por

$$||u|| = \sqrt{< u, u >}.$$

Definición 7.1.6 Un vector $v \in V$ es ***unitario*** si $||v|| = 1$.

Observación 7.1.7 Sea $v \in V, v \neq 0$. ***Normalizamos*** a v considerando el vector unitario $v_N = \frac{v}{||v||} = \frac{1}{||v||} \cdot v$. En efecto,

$$||v_N||^2 = < v_N, v_N > = < \frac{1}{||v||} \cdot v, \frac{1}{||v||} \cdot v > = \frac{1}{||v||} < v, \frac{1}{||v||} \cdot v >$$

$$= \frac{1}{||v||^2} < v, v > = \frac{1}{||v||^2} ||v||^2 = 1.$$

Teorema 7.1.8 ***(Desigualdad de Cauchy-Schwarz)*** *Sea V un espacio euclidiano o unitario. Tenemos para todos $u, v \in V$:*

$$| < u, v > | \leq ||u|| \cdot ||v||.$$

Demostración. Se omite.Ver [6, Teorema 1.3] □

Definición 7.1.9 Sea V un espacio euclidiano.

(i) El teorema anterior nos permite, generalizando los conceptos para $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ con el producto interno usual, definir para $u, v \in V, u, v$ diferentes de 0, el ***coseno del ángulo*** que "forman" u y v:

$$\cos\theta = \frac{< u, v >}{||u|| \cdot ||v||}.$$

(ii) Decimos que los vectores $u, v \in V$ son ***ortogonales*** si

$$< u, v >= 0.$$

Observaciones 7.1.10 Sea V un espacio euclidiano.

(1) $< 0, v > = < 0 \cdot 0, v > = 0 \ < 0, v > = 0 \ \forall \ v \in V$.

(2) Supongamos que $< u, v > = 0 \ \forall \ v \in V$. Veamos que entonces $u = 0$. Como $< u, v > = 0 \ \forall \ v \in V$, en particular $< u, u > = 0$, de donde $u = 0$.

Definición 7.1.11 Sean V un espacio euclidiano y W un subespacio de V. El ***complemento ortogonal*** de W es:

$$W^{\perp} = \{v \in V \mid < v, w > = 0 \ \forall \ w \in W\}.$$

Proposición 7.1.12 *Sean V un espacio euclidiano y W un subespacio de V. Tenemos que $W^{\perp}$ es un subespacio de V.*

Demostración.

(i) $W^{\perp} \neq \emptyset$ pues $0 \in W^{\perp}$.

(ii) $v_1, v_2 \in W^{\perp} \implies < v_1 + v_2, w > = < v_1 + v_2, w > + < v_1 + v_2, w > = 0 + 0 = 0 \; \forall \; w \in W \implies v_1 + v_2 \in W^{\perp}$.

(iii) $v \in W^{\perp}, \alpha \in \mathbb{R} \implies < \alpha v, w > = \alpha < v, w > = \alpha \cdot 0 = 0 \; \forall \; w \in W \implies \alpha v \in W^{\perp}$.

Concluimos que $W^{\perp}$ es un subespacio de V. ■

Definición 7.1.13 Sea V un espacio euclidiano.

(1) Un conjunto de vectores $\{u_1, \ldots, u_r\}$ de V es ***ortogonal*** si sus elementos son ortogonales a pares, esto es:

$$< u_i, u_j > = 0 \text{ si } i \neq j.$$

(2) Un conjunto de vectores $\{u_1, \ldots, u_r\}$ de V es ***ortonormal*** si sus elementos son ***ortonormales*** a pares, es decir:

$$< u_i, u_j > = \delta_{ij}.$$

Ejemplos 7.1.14

(1) En $\mathbb{R}^3$ tenemos:

$$\begin{array}{rcccc} (1,0,0)\cdot(1,0,0) & = & 1 \cdot 1 & = & 1 \\ (1,0,0)\cdot(0,1,0) & = & 0 & & \\ (1,0,0)\cdot(0,0,1) & = & 0 & & \\ (0,1,0)\cdot(1,0,0) & = & 0 & & \\ (0,1,0)\cdot(0,1,0) & = & 1 \cdot 1 & = & 1 \;. \\ (0,1,0)\cdot(0,0,1) & = & 0 & & \\ (0,0,1)\cdot(1,0,0) & = & 0 & & \\ (0,0,1)\cdot(0,1,0) & = & 0 & & \\ (0,0,1)\cdot(0,0,1) & = & 1 \cdot 1 & = & 1 \end{array}$$

Luego la base canónica en $\mathbb{R}^3$ es ortonormal respecto al producto interno usual.

(2) En $\mathbb{R}^n$ consideramos el producto interno usual y la base canónica $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Tenemos $e_i . e_j = \delta_{ij}$. Luego la base canónica es ortonormal.

(3) En $\mathbb{R}^3$ el conjunto $\{(2,0,0), (0,-1,0\})$ es ortogonal pero no es ortonormal pues tenemos:

$$\begin{array}{rcrcr} (2,0,0)\cdot(0,-1,0) & = & 2 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 & = & 0 \\ ||(2,0,0)|| = \sqrt{(2,0,0)\cdot(2,0,0)} & = & \sqrt{2^2 + 0^2 + 0^2} & = & 2 \\ ||(0,-1,0)|| = \sqrt{(0,-1,0)\cdot(0,-1,0)} & = & \sqrt{0^2 + (-1)^2 + 0^2} & = & 1. \end{array}$$

7.2. Proceso de Gram-Schmidt

Lema 7.2.1 *Sea $\{u_1, \ldots, u_n\}$ un conjunto ortogonal de vectores, todos diferentes de 0, del espacio euclidiano V. Entonces:*

(i) $\{u_1, \ldots, u_n\}$ *es linealmente independiente.*

(ii) *Si $v \in V$, el vector*

$$w = v - \frac{< v, u_1 >}{||u_1||^2} u_1 \ - \ \frac{< v, u_2 >}{||u_2||^2} u_2 \ - \ldots - \ \frac{< v, u_n >}{||u_n||^2} u_n$$

es ortogonal a u_i $\forall$ i.

Demostración.

(i) Supongamos $a_1 u_1 + \ldots + a_n u_n = 0$ para algunos $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Sea $i \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces

$$0 = < u_i, 0 > = < u_i, a_1 u_1 + \ldots + a_n u_n >=$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j < u_i, u_j > = a_i \cdot ||u_i||^2,$$

luego $a_i = 0$. Así $\{u_1, \ldots, u_n\}$ es linealmente independiente.

(ii) Sea $i \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces $< u_i, u_j > = \ 0$ para $j \neq i$. Luego

$$< u_i, w > = < u_i, v - \sum_{j=1}^{n} \frac{< v, u_j >}{||u_j||^2} u_j >$$

$$= < u_i, v > \ - \ \sum_{j=1}^{n} \frac{< v, u_j >}{||u_j||^2} < u_i, u_j > = < u_i, v > \ - \frac{< v, u_i >}{||u_i||^2} \cdot ||u_i||^2$$

$$= < u_i, v > \ - \ < v, u_i > = \ 0.$$

Así w es ortogonal a u_i $\forall$ i. ■

El ***Proceso de Ortogonalización de Gram-Schmidt*** que se describe a continuación es un algoritmo que, dada una base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de un espacio euclidiano V, con ayuda del Lema 7.2.1 nos proporciona una base ortogonal $\{u_1, \ldots, u_n\}$ del mismo espacio V, de modo que la matriz de cambio de base, de la base antigua $\{v_1, \ldots, v_n\}$ a la base nueva $\{u_1, \ldots, u_n\}$, es triangular superior.

(1) Sea $u_1 = v_1$. Entonces $\{u_1\}$ es ortogonal y $L(\{u_1\}) = L(\{v_1\})$.

(2) Sea $u_2 = v_2 - \frac{<v_2, u_1>}{||u_1||^2} u_1$. Por el Lema (7.2.1), u_2 es ortogonal a u_1. Además $u_2 \neq 0$ pues $\{u_1, v_2\}$ es l. i. Tenemos $\{u_1, u_2\}$ es ortogonal y $L(\{u_1, u_2\} = L(\{v_1, v_2\})$.

(3) Sea $u_3 = v_3 - \frac{<v_3,u_1>}{||u_1||^2}u_1 - \frac{<v_3,u_2>}{||u_2||^2}u_2$. Por el Lema (7.2.1), u_3 es ortogonal a u_1 y a u_2. Además $u_3 \neq 0$ pues $L(\{u_1, u_2\} = L(\{v_1, v_2\})$. Tenemos $\{u_1, u_2, u_3\}$ es ortogonal y $L(\{u_1, u_2, u_3\} = L(\{v_1, v_2, v_3\})$.

En general, después de haber obtenido:

(r) $\{u_1, u_2, \dots, u_r\}$ es ortogonal y $L(\{u_1, u_2 \dots, u_r\} = L(\{v_1, v_2 \dots, v_r\})$.

(r+1) Sea $u_{r+1} = v_{r+1} - \frac{<v_{r+1},u_1>}{||u_1||^2}u_1 - \frac{<v_{r+1},u_2>}{||u_2||^2}u_2 - \dots - \frac{<v_{r+1},u_r>}{||u_r||^2}u_r$. Por el Lema (7.2.1), u_{r+1} es ortogonal a u_1, a u_2, ...y a u_r. Además $u_{r+1} \neq 0$ pues $L(\{u_1, u_2 \dots, u_r\} = L(\{v_1, v_2 \dots, v_r\})$. Tenemos $\{u_1, u_2, \dots, u_{r+1}\}$ es ortogonal y $L(\{u_1, u_2, \dots, u_{r+1}\} = L(\{v_1, v_2 \dots, v_{r+1}\})$.

De esta manera, por inducción, obtenemos un conjunto ortogonal $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ que, por el Lema (7.2.1), es l. i. y por tanto es una base de V. Observamos que la matriz de cambio de base es triangular superior.

Finalmente, si se desea obtener una base ortonormal, normalizamos cada uno de los vectores obtenidos con el proceso anterior.

Ejemplos 7.2.2

(1) Consideremos la base $\{v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (0, 1, 1), v_3 = (0, 0, 1)\}$ de $\mathbb{R}^3$. Usaremos el Proceso de Ortogonalización de Gram-Schmidt para transformar esta base en una base ortogonal:

(i) Sea $u_1 = v_1 = (1, 1, 1)$. Calculamos $||u_1||^2 = 3$.

(ii) Sea $u_2 = v_2 - \frac{<v_2,u_1>}{||u_1||^2}u_1 = (0, 1, 1) - \frac{<(0,1,1),(1,1,1)>}{3}(1, 1, 1) = (0, 1, 1) - \frac{2}{3}(1, 1, 1) = (-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Calculamos $||u_2||^2 = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

(iii) Sea $u_3 = v_3 - \frac{<v_3,u_1>}{||u_1||^2}u_1 - \frac{<v_3,u_2>}{||u_2||^2}u_2 =$
$(0, 0, 1) - \frac{(<0,0,1),(1,1,1)>}{3}(1, 1, 1) - \frac{<(0,0,1),(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})>}{\frac{2}{3}}(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) =$
$(0, 0, 1) - \frac{1}{3}(1, 1, 1) - \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = (0, 0, 1) - \frac{1}{3}(1, 1, 1) - \frac{1}{2}(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) =$
$(0, -\frac{3}{6}, \frac{3}{6}) = (0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Puesto que

$$u_1 = v_1 = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3,$$

$$u_2 = v_2 - \frac{2}{3}\ v_1 = -\frac{2}{3} \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 \text{ y}$$

$$u_3 = v_3 - \frac{1}{3}v_1 - \frac{1}{2}u_2 = v_3 - \frac{1}{3}v_1 - \frac{1}{2}(v_2 - \frac{2}{3}v_1) = -\frac{1}{3}v_1 + \frac{1}{3}v_1 - \frac{1}{2}v_2 + v_3 =$$

$$0 \cdot v_1 - \frac{1}{2} \cdot v_2 + 1 \cdot v_3,$$

la matriz de cambio de base de la base antigua $\{v_1, v_2, v_3\}$ a la base nueva $\{u_1, u_2, u_3\}$ es:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para obtener la base ortonormal $\{w_1, w_2, w_3\}$ correspondiente calculamos:

$$w_1 = \frac{1}{||u_1||} \cdot u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (1,1,1)$$
$$w_2 = \frac{1}{||u_2||} \cdot u_2 = \frac{3}{\sqrt{6}} \cdot (\frac{-2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2,1,1) \text{ y}$$
$$w_3 = \frac{1}{||u_3||} \cdot u_3 = \frac{\sqrt{2}}{1} \cdot (0, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1).$$

En este caso la matriz de cambio de base de la base antigua $\{v_1, v_2, v_3\}$ a la base nueva $\{w_1, w_2, w_3\}$ es:

$$P_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{3}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & -\sqrt{\frac{1}{2}} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Finalmente, si se prefiere una base ortogonal con entradas enteras, tomamos $z_1 = (1,1,1), z_2 = (-2,1,1)$ y $z_3 = (0,-1,1)$. La matriz de cambio de base de la base antigua $\{v_1, v_2, v_3\}$ a la base nueva $\{z_1, z_2, z_3\}$ es:

$$P_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Observemos que las tres matrices de cambio de base son triangulares superiores.

(2) Encontremos una base ortonormal para el subespacio $W = L(\{v_1 = (1,-1,0), v_2 = (1,2,-1)\})$ de $\mathbb{R}^3$. Usaremos el Proceso de Ortogonalización de Gram-Schmidt para transformar esta base en una base ortogonal:

(i) Sea $u_1 = v_1 = (1,-1,0)$. Calculamos $||u_1||^2 = 2$.

(ii) Sea $u_2 = v_2 - \frac{<v_2,u_1>}{||u_1||^2} u_1 = (1,2,-1) - \frac{<(1,2,-1),(1,-1,0)>}{2}(1,-1,0) = (1,2,-1) - \frac{-1}{2}(1,-1,0) = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{-2}{2})$.

La base $\{u_1, u_2\}$ de W es una base ortogonal. Calculamos ahora $||u_2||^2 = \frac{22}{4} = \frac{11}{2}$.

Una base ortonormal para W es:

$$\{w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1,-1,0), w_2 = \frac{1}{\sqrt{22}} \cdot (3,3,-2)\}.$$

La matriz de cambio de base de la base antigua $\{v_1, v_2\}$ a la base nueva $\{w_1, w_2\}$ es la matriz triangular superior:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{22}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{22}} \end{pmatrix}.$$

Teorema 7.2.3 *Sea W subespacio del espacio euclidiano de dimensión finita V. Entonces*

$$V = W \oplus W^{\perp}.$$

Demostración.

(i) (a) Claramente $W + W^{\perp} \subseteq V$.

(b) Por el Proceso de Ortogonalización de Gram-Schmidt podemos garantizar que W tiene una base ortogonal $\{w_1, \ldots, w_r\}$. Sea $v \in V$. Por el Lema 7.2.1,

$$u = v - \frac{< v, w_1 >}{||w_1||^2} w_1 \; - \; \frac{< v, w_2 >}{||w_2||^2} w_2 \; - \ldots - \; \frac{< v, w_r >}{||w_r||^2} w_r$$

es ortogonal a w_i $\forall$ i. Luego si $w \in W, w = \alpha_1 w_1 + \ldots + \alpha_r w_r$ para algunos $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{R}$, tenemos

$$< u, w > = < u, \sum_{i=1}^{r} \alpha_i w_i > = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i < u, w_i > = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \cdot 0 = 0.$$

Luego $u \in W^{\perp}$, de donde $v = w + u \in W + W^{\perp}$. Así $V \subseteq W + W^{\perp}$.

Concluimos que $V = W + W^{\perp}$.

(ii) (a) Claramente $\{0\} \subseteq W \cap W^{\perp}$.

(b) Sea $v \in W \cap W^{\perp}$. Entonces $< v, v > = 0$, luego $v = 0$. Por lo que $W \cap W^{\perp} \subseteq \{0\}$.

Concluimos que $W \cap W^{\perp} = \{0\}$. Por lo tanto, $V = W \oplus W^{\perp}$. ■

Ejemplo 7.2.4 Con referencia al Ejemplo 7.2.2 (2), tenemos $V = \mathbb{R}^3$ y $W = L(\{v_1 = (1, -1, 0), v_2 = (1, 2, -1)\})$. Puesto que $\dim V = 3$ y $\dim W = 2$, hemos de tener $\dim W^{\perp} = 1$. El vector $u = (1, 1, 3)$ es ortogonal a v_1 y a v_2, por lo que $W^{\perp} = L(\{u\})$.

Bibliografía

[1] Sheldon Axler, *Linear Algebra Done Right,* Springer-Verlag, 1997.

[2] Stanley I. Grossman, *Álgebra Lineal,* Quinta Edición, McGraw-Hill, 1996.

[3] Paul R. Halmos *Finite Dimensional Vector Spaces,* Springer-Verlag, 1974.

[4] Kenneth Hoffman & Ray Kunze, *Álgebra Lineal,* Prentice-Hall, 1973.

[5] Nathan Jacobson, *Basic Algebra 1*, 2nd ed., Dover, 2009.

[6] Seymour Lipschutz, *Álgebra Lineal,* Schaum-McGraw-Hill, 1972.

[7] Evar D. Nering, *Linear Algebra and Matrix Theory,* 2nd ed., Wiley, 1970.

[8] Walter Rudin, *Real and Complex Analysis*, 3rd ed., McGraw-Hill, 1986.